



УДК: 531.36:521.1

MSC 2010: 70K20, 70K42

Компланарные точки либрации обобщенной ограниченной круговой задачи трех тел в случае комплексно-сопряженных масс притягивающих центров

А. В. Родников

Изучается существование и прослеживается эволюция относительных равновесий материальной точки в плоскости, образованной осями прецессии и динамической симметрии твердого тела, гравитационное поле которого может быть представлено как поле тяготения двух материальных точек с комплексно-сопряженными массами, находящихся на мнимом расстоянии. В соответствии с терминологией обобщенной ограниченной круговой задачи трех тел эти равновесия названы компланарными точками либрации (КТЛ). Устанавливается, что, в зависимости от характера эволюции при изменении угловой скорости прецессии от нуля до бесконечности, КТЛ можно разделить на три группы, а именно: 2 «внешние» КТЛ, которые могут оказаться как угодно далеко от центра масс твердого тела, от 2 до 6 «внутренних» КТЛ, эволюционирующих внутри острых углов, образуемых осями прецессии и динамической симметрии, и от 0 до 3 «центральных» КТЛ, чья эволюция начинается и заканчивается в особых точках гравитационного потенциала. Описывается численно-аналитический алгоритм определения координат КТЛ, основанный на специальной тригонометрической замене параметров и переменных.

Ключевые слова: задача трех тел, точки либрации, относительное равновесие, твердое тело, регулярная прецессия

1. Введение

В изучавшихся ранее вариантах обобщенной ограниченной круговой задачи трех тел (ООКЗЗТ) рассматривались движения материальной точки пренебрежимо малой массы в окрестности динамически симметричного твердого тела, чей гравитационный потенциал

Получено 23 ноября 2013 года

После доработки 12 декабря 2013 года

Родников Александр Владимирович
springer@inbox.ru

Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана
105005, Россия, г. Москва, 2-ая Бауманская, д. 5



есть гравитационный потенциал двух материальных точек с действительными массами, лежащих на оси динамической симметрии (см. [9–11, 13, 14]), причем в [14] предполагалось, что расстояние между этими материальными точками является мнимым. Такие модели гравитационных потенциалов достаточно точно описывают гравитационные поля тел, вытянутых вдоль оси динамической симметрии, или же гравитационные поля однородных тел, симметричных относительно центра масс. Однако гравитационное поле твердого тела, в котором оси динамической симметрии соответствует наименьшая полуось эллипсоида инерции, в общем случае удобнее аппроксимировать потенциалом двух материальных точек (центров) с комплексно-сопряженными массами, находящихся на мнимом расстоянии. Ранее такая аппроксимация была применена для высокоточного описания гравитационного потенциала Земли (см., например, [1, 3]).

В работе [12] устанавливается, что если гравитационный потенциал твердого тела инвариантен относительно поворотов вокруг оси динамической симметрии, материальная точка может быть неподвижной в системе отсчета, вращающейся вместе с осью динамической симметрии вокруг оси прецессии, только в плоскости, проходящей через центр масс твердого тела перпендикулярно оси прецессии, или в плоскости, образуемой осями прецессии и динамической симметрии. В настоящей статье изучается существование и проводится классификация равновесий второго типа, названных ранее компланарными точками либрации (КТЛ) [13] и являющихся аналогами эйлеровых точек либрации классической ООКЗТ [2, 4] (о точках либрации гравитирующих тел см. также [5–7]), в случае комплексно-сопряженных масс притягивающих центров, «лежащих» на оси динамической симметрии и имеющих на этой оси чисто мнимые координаты. (Сумма потенциалов таких центров, очевидно, будет действительной, но обладающей целым отрезком особых точек.) Условия равновесия точки «нулевой» массы в плоскости, образуемой осями прецессии и динамической симметрии, преобразуются в систему кубического и квадратного уравнений, из которой, с использованием специальной тригонометрической замены координат и параметров, выводятся в шесть равенств, каждое из которых есть зависимость угловой скорости прецессии от остальных параметров задачи и одной из координат искомых КТЛ. (Если значения параметров заданы, эта координата может быть найдена численно; другую координату можно получить, подставив найденное значение в выражения координат друг через друга, также выводимые из упомянутой системы уравнений.) Анализ выведенных шести зависимостей показывает, что все КТЛ в рассматриваемом случае можно разделить на три группы. В первой группе, при любых допустимых значениях параметров задачи, содержатся две КТЛ, перемещающиеся из бесконечности к крайним особым точкам гравитационного потенциала при изменении угловой скорости прецессии от 0 до бесконечности. Такие КТЛ могут быть названы «внешними». Ко второй группе относятся от 2 до 6 КТЛ, всегда находящиеся внутри острых углов, образуемых осями прецессии и динамической симметрии. Такие КТЛ могут быть названы «внутренними». И, наконец, третьей группе принадлежат от 0 до 3 точек, перемещающиеся при изменении угловой скорости прецессии от одной особой точки гравитационного потенциала к другой его особой точке.

Настоящая работа является обобщением [14].

2. Обозначения, координаты, параметры

Рассмотрим движение материальной точки S массы m_0 , пренебрежимо малой по сравнению с массой m твердого тела, с центром масс O и осью динамической симметрии Oz_1 , совершающего регулярную прецессию вокруг оси Oz . Направим ось Ox перпендикулярно Oz



так, чтобы оси Oz_1 , Oz и Ox лежали в одной плоскости и угол между осями Ox и Oz_1 не был тупым. Обозначим через ϑ угол между положительными направлениями осей Oz и Oz_1 (см. рис. 1). Не ограничивая общности рассуждений, будем считать, что $0 \leq \vartheta \leq \pi/2$. Выберем ось Oy так, чтобы декартова система координат $Oxyz$ была правой. Обозначим через ω угловую скорость прецессии, с которой $Oxyz$ вращается вокруг Oz .

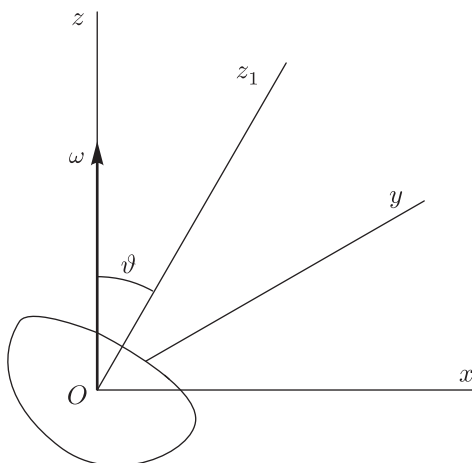


Рис. 1.

Как и в [9], будем считать, что гравитационное поле твердого тела есть композиция гравитационных полей двух материальных точек O_1 и O_2 . При этом, однако, будем считать, что массы этих точек представлены комплексно-сопряженными числами, сумма которых равна массе твердого тела. Будем считать, что расстояние между O_1 и O_2 мнимое. Считая также, что притягивающие центры O_1 и O_2 должны «принадлежать» оси динамической симметрии, положим в системе координат $Oxyz$: $O_1(i l(\sin \vartheta)/2, 0, i l(\cos \vartheta)/2)$ и $O_2(-i l(\sin \vartheta)/2, 0, -i l(\cos \vartheta)/2)$, где l — некоторое действительное расстояние, а i — мнимая единица.

При описании равновесий материальной точки S будем, в частности, использовать безразмерные координаты ξ, η, ζ , определяемые формулами $x = l\xi, y = l\eta, z = l\zeta$.

3. Условия равновесия, потенциал и особенности интеграла Якоби

Используя интеграл Якоби из [14], условия равновесия материальной точки S в плоскости Oxz (то есть если $\eta = 0$) можно записать как

$$-\xi + \frac{\partial \tilde{\Pi}}{\partial \xi} = 0, \quad \frac{\partial \tilde{\Pi}}{\partial \zeta} = 0, \tag{3.1}$$

где $\tilde{\Pi}$ — безразмерный гравитационный потенциал твердого тела, имеющий вид

$$\tilde{\Pi} = -\frac{\alpha}{2} \left(\frac{1 - i\nu}{a - ib} + \frac{1 + i\nu}{a + ib} \right) = -\alpha \frac{a + \nu b}{a^2 + b^2}, \tag{3.2}$$

где, в свою очередь, $a \pm ib$ — безразмерные «расстояния» между S и точками O_1 и O_2 , которые выбираются сопряженными, чтобы обеспечить действительность $\tilde{\Pi}$, а безразмерный

параметр α определяется равенством $\alpha = Gm/(\omega^2 l^3)$, в котором G — гауссова константа тяготения. (Заметим, что $\alpha > 0$.) Примем $a > 0$, так как потенциал (3.2) определяет силы притяжения, а не отталкивания. Очевидно, величины a и b связаны с ξ , η , ζ формулами

$$a^2 - b^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - 1/4, \quad 2ab = \xi \sin \vartheta + \zeta \cos \vartheta. \quad (3.3)$$

Отметим, что в рассматриваемом случае геометрия линий уровня интеграла Якоби, ограниченного на плоскость $\eta = 0$, значительно сложнее, чем в частном случае, рассмотренном в [14] (см. пример на рис. 2). Седловые точки на этом рисунке и есть искомые КТЛ. Можно также заметить, что интеграл Якоби при $\eta = 0$ имеет целый отрезок $A_1 A_2$ особых точек, где $A_1(-\cos \vartheta, \sin \vartheta)$ и $A_2(\cos \vartheta, -\sin \vartheta)$, поэтому, в отличие от случая действительных масс притягивающих центров, середина этого отрезка точка O , строго говоря, не является КТЛ. Нетрудно показать, что $\tilde{\Pi}$ и интеграл Якоби в окрестностях A_1 и A_2 могут принимать как угодно малые значения, поэтому эти точки можно назвать своеобразными «фиктивными притягивающими центрами» рассматриваемого гравитационного потенциала. Используя выражения для производных a и b по ξ и ζ из [14], условия равновесия (3.1) можно переписать в виде равенств

$$\alpha \left((a^3 - 3ab^2 + 3\nu ba^2 - \nu b^3)\xi + \frac{1}{2}(3a^2b - b^3 - \nu a^3 + 3\nu ab^2) \sin \vartheta \right) - \xi(a^2 + b^2)^3 = 0, \quad (3.4)$$

$$(a^3 - 3ab^2 + 3\nu ba^2 - \nu b^3)\zeta + \frac{1}{2}(3a^2b - b^3 - \nu a^3 + 3\nu ab^2) \cos \vartheta = 0. \quad (3.5)$$

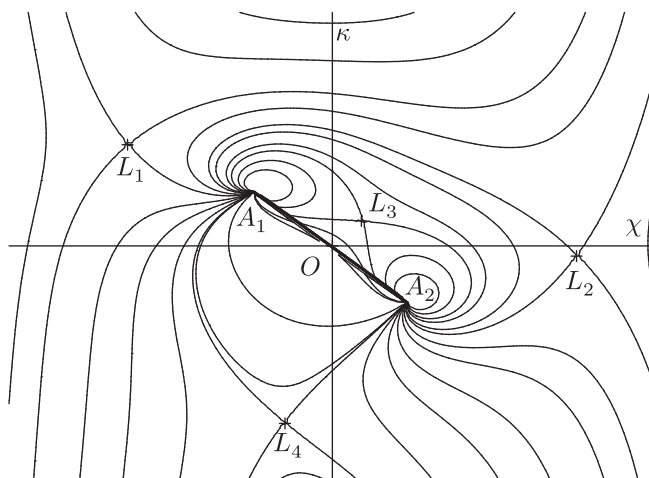


Рис. 2.

4. Специальные тригонометрические переменные и параметры

Для удобства дальнейших преобразований, ограничиваясь общим случаем $0 < \vartheta < \pi/2$, перейдем к специальным переменным κ и χ по формулам

$$\kappa = 2\zeta / \cos \vartheta, \quad \chi = 2\xi / \sin \vartheta. \quad (4.1)$$

Кроме того, наряду с координатой κ , промежуточными переменными a , b и параметром ν будем использовать переменные γ , ψ и параметр δ , такие, что

$$\kappa = \operatorname{tg}(3\gamma) \quad \nu = \operatorname{tg}(3\delta) \quad u = b/a = \operatorname{tg}(\psi). \quad (4.2)$$

Не нарушая общности рассуждений, можно считать, что $\nu \geq 0$, так как замена ν на $-\nu$ и b на $-b$ равносильна замене ξ и ζ на $-\xi$ и $-\zeta$ соответственно. Поэтому $0 \leq \delta < \pi/6$, в то время как $-\pi/6 < \gamma < \pi/6$, $-\pi/2 < \psi < \pi/2$.

5. Квадратное и кубическое уравнения, выражение для угловой скорости прецессии

Разделив уравнения (3.3) друг на друга, с учетом (4.1) получим квадратное относительно χ уравнение вида

$$\chi^2 - \Phi\chi + \operatorname{ctg}^2 \vartheta (\kappa^2 - \Phi\kappa - 1) - 1 = 0, \quad (5.1)$$

где $\Phi = 1/u - u = 2 \operatorname{ctg}(2\psi)$. Корни этого уравнения можно записать как

$$\chi = -\operatorname{ctg}(2\psi) \pm \sqrt{D}/\sin(2\psi), \quad (5.2)$$

где дискриминант D определяется равенством

$$D = 1 - (\kappa^2 \sin^2 2\psi + \kappa \sin 4\psi - \sin^2 2\psi) \operatorname{ctg}^2 \vartheta. \quad (5.3)$$

Далее, преобразовывая (3.5) и используя (4.1), получим кубическое относительно u уравнение

$$u^3 + \frac{3(\kappa - \nu)}{1 + \kappa\nu} u^2 - 3u - \frac{\kappa - \nu}{1 + \kappa\nu} = 0, \quad (5.4)$$

имеющее, как нетрудно убедиться, три действительных корня u_1 , u_2 , u_3 — по одному на каждом из интервалов $(-\infty, -1/\sqrt{3})$, $(-1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$ и $(1/\sqrt{3}, +\infty)$. Уравнение (5.4) легко преобразуется к виду $\operatorname{tg} 3(\gamma - \delta) = -\operatorname{tg} 3\psi$, откуда с учетом ограничений на величины γ и δ получим три допустимых значения ψ ,

$$\psi_1 = \delta - \gamma - \pi/3, \quad \psi_2 = \delta - \gamma, \quad \psi_3 = \delta - \gamma + \pi/3, \quad (5.5)$$

и равенства

$$u_1 = \operatorname{tg}(\psi_1) = \operatorname{tg}(\delta - \gamma - \pi/3), \quad u_2 = \operatorname{tg}(\psi_2) = \operatorname{tg}(\delta - \gamma), \quad (5.6)$$

$$u_3 = \operatorname{tg}(\psi_3) = \operatorname{tg}(\delta - \gamma + \pi/3).$$

Обозначим через D_n выражения, получающиеся в правой части (5.3), если вместо ψ подставить ψ_n , $n = 1, 2, 3$.

Наконец, выразим α из (3.4). (Напомним, что параметр α характеризует угловую скорость прецессии твердого тела.) Используя (4.1), после простых преобразований получим

$$\alpha = \frac{1}{8} \frac{\chi}{\kappa - \chi} \left(\frac{\chi \sin^2 \vartheta + \kappa \cos^2 \vartheta}{u} \right)^{3/2} \frac{(1 + u^2)^3 (1 + \nu\kappa)}{(3u^2 - 1)(1 + \nu^2)}. \quad (5.7)$$

6. Алгоритм определения координат компланарных точек либрации

Учитывая (4.2), подставим каждое из выражений (5.5) в каждое из выражений (5.2). В результате получим шесть выражений вида

$$\chi = \chi_{mn}(\gamma, \delta, \vartheta), \quad (6.1)$$

где $n = 1, 2, 3$ определяется номером подставленного корня u_n , а $m = 1, 2$ для знаков «+» или «-» в (5.2) соответственно. Далее, подставим в (5.7) каждое из χ_{nm} вместо χ , а также u_m вместо u . В результате, с учетом (4.2), получим шесть равенств вида

$$\alpha = \alpha_{mn}(\gamma, \delta, \vartheta). \quad (6.2)$$

Очевидно, что каждое решение $\tilde{\gamma}$ любого из уравнений (6.2) при заданных значениях $\alpha, \delta, \vartheta$ определяет КТЛ, для которой $\kappa = \operatorname{tg}(3\tilde{\gamma})$. Для определения второй координаты при этом достаточно подставить $\tilde{\gamma}$ в соответствующее из уравнений (6.1). Таким образом, поиск КТЛ сводится к полному решению всех уравнений (6.2) относительно γ .

7. Некоторые свойства правых частей уравнений для определения α

Очевидно, каждая из правых частей (6.2) в нашем случае должна быть действительной и положительной. Действительность при этом гарантируется неотрицательностью дискриминанта (5.3) и выражения $(\chi \sin^2 \vartheta + \kappa \cos^2 \vartheta)/u$. Используя (5.1), нетрудно показать, что числитель последней дроби может (хотя и не обязан) обращаться в нуль, только если $\gamma = \pm \vartheta/3$, в то время как равенство $u = 0$ возможно, только если $n = 2$ и $\gamma = \delta$. Отметим также, что правые части (6.2) обращаются в нуль, если $\chi = 0$, и в бесконечность при $\chi = \kappa$. Последнее равенство, как можно показать, используя (5.1), может (но не обязано) реализовываться для $n = 1$, если $\gamma = \pi/6 - \delta/2$ или $\gamma = -\pi/12 - \delta/2$, для $n = 2$, если $\gamma = -\delta/2$, для $n = 3$, если $\gamma = \pi/12 - \delta/2$. Далее, с учетом (4.1), (5.6), уравнения (6.2) можно переписать в виде

$$\alpha = \alpha_{m1} = \frac{1}{8} \frac{\chi_{m1}}{\chi_{m1} - \kappa} \left(\frac{\chi_{m1} \sin^2 \vartheta + \kappa \cos^2 \vartheta}{\operatorname{tg}(\delta - \gamma - \pi/3)} \right)^{3/2} \frac{\cos 3\delta}{\cos 3\gamma \sin^3(\gamma - \delta - \pi/6)}, \quad (7.1)$$

$$\alpha = \alpha_{m2} = \frac{1}{8} \frac{\chi_{m2}}{\chi_{m2} - \kappa} \left(\frac{\chi_{m2} \sin^2 \vartheta + \kappa \cos^2 \vartheta}{\operatorname{tg}(\delta - \gamma)} \right)^{3/2} \frac{\cos 3\delta}{\cos 3\gamma \cos^3(\gamma - \delta)}, \quad (7.2)$$

$$\alpha = \alpha_{m3} = \frac{1}{8} \frac{\chi_{m3}}{\kappa - \chi_{m3}} \left(\frac{\chi_{m3} \sin^2 \vartheta + \kappa \cos^2 \vartheta}{\operatorname{tg}(\delta - \gamma + \pi/3)} \right)^{3/2} \frac{\cos 3\delta}{\cos 3\gamma \sin^3(\gamma - \delta + \pi/6)}. \quad (7.3)$$

8. Классификация и эволюция компланарных точек либрации

8.1. Внутренние КТЛ

Можно показать, что при любых допустимых значениях параметров ϑ и δ уравнение $D_1(\gamma) = 0$ имеет ровно один корень γ_* на интервале $(-\pi/6, \gamma_m)$, где $\gamma_m = \min(-\vartheta/3, -\delta/2 -$



$-\pi/12$). Из этого следует, что α_{11} принимает действительные значения, только если $\gamma \in [\gamma_*, -\theta/3]$. Кроме того, уравнение $\chi_{11}(\gamma) = 0$ имеет ровно один корень γ_{**} на этом промежутке. Из вышесказанного можно сделать вывод, что α_{11} является положительной функцией переменной γ только на промежутке $[\gamma_*, \gamma_{**})$, причем (как можно установить, анализируя ее производную) убывающей.

Используя информацию из предыдущего раздела и (7.1), нетрудно установить, что α_{21} принимает действительные положительные значения, только если $\gamma \in [\gamma_*, -\delta/2 - \pi/12)$, причем если $\gamma \rightarrow -\delta/2 - \pi/12$, то $\alpha_{21} \rightarrow +\infty$. Анализируя первую и вторую производную α_{21} по γ , можно установить, что для любого допустимого значения δ существует такое ϑ_* , что для любого $\vartheta \leq \vartheta_*$ функция $\alpha_{21}(\gamma)$ является возрастающей на интервале $(\gamma_*, -\delta/2 - \pi/12)$, в то время как для любого $\vartheta > \vartheta_*$ эта функция на том же промежутке имеет два экстремума. (График зависимости $\vartheta = \vartheta_*(\delta)$ представлен кривой AC на рисунке 3, на этом рисунке $A(1.54136, 0)$, $C(1.549694, \pi/6)$.)

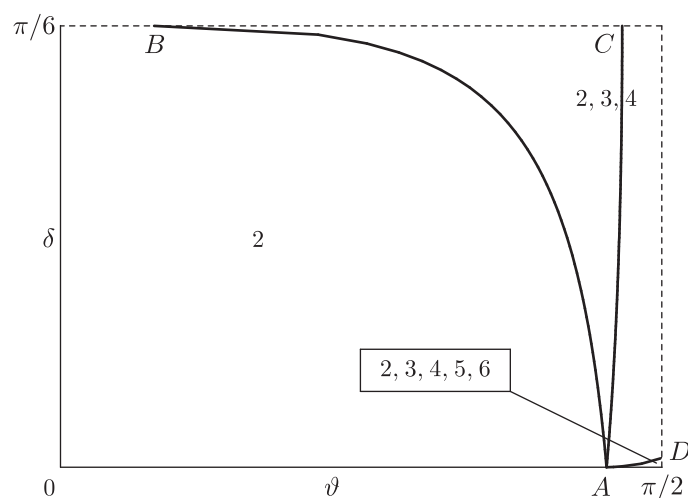


Рис. 3.

Так как $\alpha_{11}(\gamma_*) = \alpha_{21}(\gamma_*)$, при фиксированных значениях ϑ и δ функции α_{11} и α_{21} определяют в полуполосе $-\pi/6 < \gamma < \pi/6$, $\alpha > 0$ непрерывную кривую l_1 , соединяющую точки, для которых $\alpha = 0$ и $\alpha = +\infty$ соответственно. Из этого следует, что если $\vartheta \leq \vartheta_*(\delta)$, то каждая из прямых $\alpha = \text{const} > 0$ имеет с кривой l_1 ровно одно пересечение (см. рис. 4), то есть для каждого положительного α существует ровно одна КТЛ L_1^i , расположенная между отрицательными лучами осей прецессии и динамической симметрии. При изменении угловой скорости прецессии от 0 до $+\infty$ (то есть при изменении α от $+\infty$ до 0) эта КТЛ перемещается по кривой CD (см. рис. 4) от точки C на оси динамической симметрии, для которой $\kappa = \chi = -(\sqrt{1+\nu^2} + 1 + \nu)/(\sqrt{1+\nu^2} + 1 - \nu)$, в точку D на оси прецессии, для которой $\kappa < -\text{tg } \vartheta$. (На этом и последующих рисунках стрелкой показано направление перемещения соответствующей КТЛ с ростом угловой скорости прецессии.)

Если же $\vartheta > \vartheta_*(\delta)$, то существуют такие α_* и α_{**} , зависящие от ϑ и δ , что при $\alpha = \alpha_{**}$ или $\alpha = \alpha_*$ прямая $\alpha = \text{const} > 0$ имеет две общие точки с кривой l_1 ; для $\alpha_* < \alpha < \alpha_{**}$ эта прямая имеет с l_1 три пересечения (см. рис. 5); для остальных допустимых значений α существует только одна точка пересечения. Таким образом, при $\vartheta > \vartheta_*(\delta)$ функции α_{11} и α_{21} определяют от одной до трех КТЛ. С ростом угловой скорости прецессии от 0 до $+\infty$ сначала существует одна КТЛ L_1^i , постепенно отходящая от точки C на оси динамической



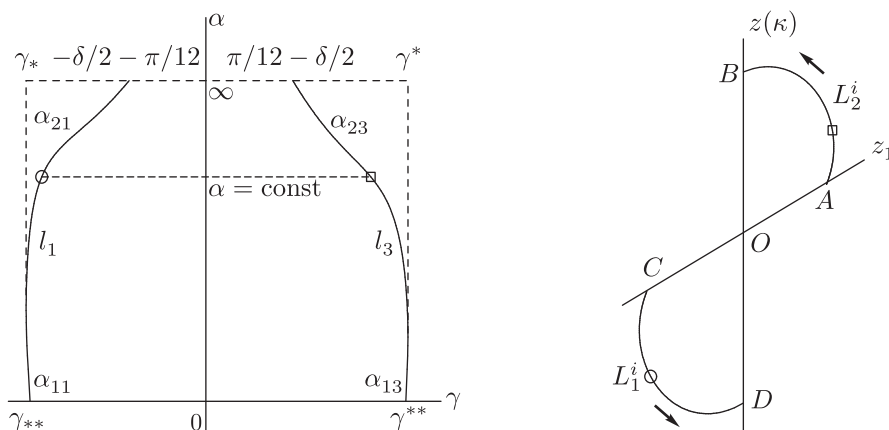


Рис. 4.

симметрии, потом в точке H возникает вторая КТЛ, в дальнейшем распадающаяся на две (L_2^i и L_3^i), из которых одна со временем сливается в точке G с L_1^i и они исчезают, в то время как вторая перемещается к точке D на оси прецессии (рис. 5).

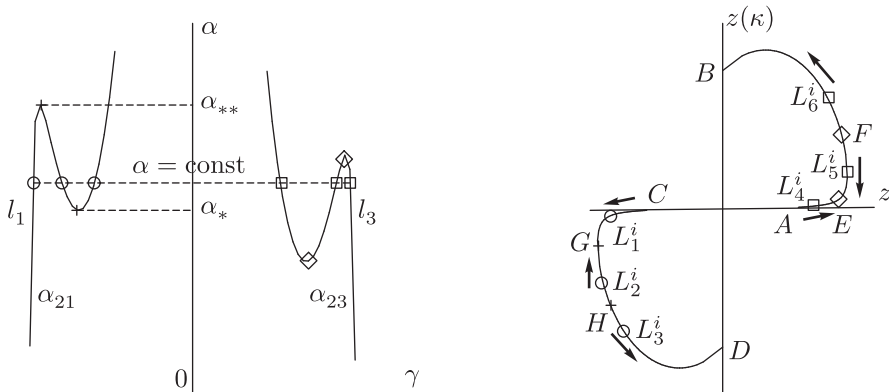


Рис. 5.

Можно показать, что при любых допустимых значениях параметров ϑ и δ уравнение $D_3(\gamma) = 0$ имеет ровно один корень γ^* на промежутке $[\gamma_r, \pi/6)$, где $\gamma_r = \max(\pi/12 - \delta/2, \vartheta/3)$. Анализируя выражение для D_3 и используя сформулированные выше свойства, можно сделать вывод, что если $\nu < \text{tg}^2(\vartheta/2)$, то α_{23} при $\gamma \in (0, \pi/6)$ принимает положительные действительные значения, только если $\gamma \in (\pi/12 - \delta/2, \gamma^*)$, в то время как уравнение $\chi_{13}(\gamma) = 0$ имеет ровно один корень γ^{**} на промежутке $(\vartheta/3, \gamma^*)$, из чего следует, что α_{13} принимает положительные действительные значения только при $\gamma \in (\gamma^{**}, \gamma^*)$ и является на этом промежутке возрастающей функцией γ . Если же $\nu \geq \text{tg}^2(\vartheta/2)$, то α_{13} не может принимать положительных действительных значений, в то время как уравнение $\chi_{23}(\gamma) = 0$ имеет единственный корень γ^{***} на промежутке $(\pi/12 - \delta/2, \gamma^*)$, из чего следует, что α_{23} принимает действительные положительные значения при положительных γ , только если $\gamma \in (\pi/12 - \delta/2, \gamma^{***})$. Анализируя первую и вторую производную α_{23} по γ , можно установить, что для любого допустимого значения δ существует такое ϑ^* , что для любого $\vartheta \leq \vartheta^*$ функция $\alpha_{23}(\gamma)$ является убывающей на интервале своей знакоположительности, в то время как для любого $\vartheta > \vartheta^*$ эта функция на том же промежутке имеет два экстремума. (График зависимости $\vartheta = \vartheta^*(\delta)$ представлен кривой AB на рис. 3. На этом рисунке $B(1.30000, \pi/6)$.)

Так как $\alpha_{13}(\gamma^*) = \alpha_{23}(\gamma^*)$, при фиксированных значениях ϑ и δ функции α_{13} и α_{23} определяют в полуполосе $0 < \gamma < \pi/6$, $\alpha > 0$ непрерывную кривую l_2 , соединяющую точки, для которых $\alpha = 0$ и $\alpha = +\infty$ соответственно. Из этого следует, что если $\vartheta \leq \vartheta^*(\delta)$, каждая из прямых $\alpha = \text{const} > 0$ имеет с l_3 ровно одно пересечение (см. рис. 4), то есть для каждого положительного α существует ровно одна КТЛ L_2^i , расположенная между положительными лучами осей прецессии и динамической симметрии. При изменении угловой скорости прецессии от 0 до ∞ (то есть при изменении α от ∞ до 0) эта КТЛ перемещается по кривой AB (см. рис. 4) от точки A на оси динамической симметрии, для которой $\kappa = \chi = (\sqrt{1+\nu^2} + 1 - \nu)/(\sqrt{1+\nu^2} + 1 + \nu)$, в точку B на оси прецессии.

Если же $\vartheta > \vartheta^*(\delta)$, то, как и кривая l_1 , кривая l_2 определяет от одной до трех КТЛ (L_4^i , L_5^i и L_6^i на рис. 5) с тем же характером эволюции.

Заметим, что КТЛ, рассмотренные в этом разделе, при каждом фиксированном значении δ и для любых допустимых значений двух других параметров остаются в некоторой окрестности твердого тела, поэтому эти КТЛ могут быть названы внутренними. Количество внутренних КТЛ, как следует из вышесказанного, в зависимости от значений параметров задачи может меняться от 2 до 6. Отметим, однако, что прямая $\alpha = \text{const}$ может пересекать каждую из кривых l_1 и l_3 в трех точках только при $\vartheta > 1.541365$ и достаточно малых ν . Можно показать, что такая ситуация возможна только для точек, лежащих ниже кривой AD на рисунке 3 (на этом рисунке $D(\pi/2, 0.00581)$). Таким образом, для точек, лежащих левее и на кривой AB , существуют ровно 2 внутренние КТЛ; для точек, лежащих правее AB и выше или на AD , могут существовать от 2 до 4 КТЛ; для точек, лежащих ниже AD , при различных α могут существовать от 2 до 6 внутренних КТЛ.

8.2. Внешние КТЛ

Нетрудно показать, что для любых допустимых значений параметров δ и ϑ уравнение $D_2(\gamma) = 0$ имеет ровно два корня γ_l и γ_h на интервале $(-\pi/6, \pi/6)$, причем $\gamma_l \in (-\pi/6, -\vartheta/3)$, $\gamma_h \in (\gamma_q, \pi/6)$ (где $\gamma_q = \max(\delta, \vartheta/3)$) и $D_2 > 0$, только если $\gamma \in (\gamma_l, \gamma_h)$. Из этого, учитывая сформулированные выше свойства и (7.3), нетрудно убедиться в том, что если $\delta < \vartheta/6$, то α_{12} принимает действительные положительные значения только на интервале $(\gamma_l, -\vartheta/3)$ (на котором α_{12} является убывающей функцией γ) и на интервале $(\vartheta/3, \gamma_h)$ (на котором эта функция возрастает), в то время как α_{22} принимает положительные действительные значения на интервале (γ_l, δ) (на котором α_{22} является возрастающей функцией γ) и на интервале (δ, γ_h) (на котором эта функция убывает). Если же $\delta \geq \vartheta/6$, то α_{12} принимает действительные положительные значения только на интервале $(\vartheta/3, \gamma_h)$ (на котором эта функция возрастает с ростом γ), в то время как α_{22} принимает положительные действительные значения на интервале $(-\vartheta/3, \delta)$ (на котором α_{22} возрастает вместе с γ) и на интервале (δ, γ_h) (на котором эта функция убывает). В обоих случаях $\alpha_{22} \rightarrow +\infty$, если $\gamma \rightarrow \delta$. Так как $\alpha_{12}(\gamma_l) = \alpha_{22}(\gamma_l)$ и $\alpha_{12}(\gamma_r) = \alpha_{22}(\gamma_r)$, то из вышесказанного следует, что для любых значений δ и ϑ функции α_{12} и α_{22} определяют в полуполосе $-\pi/6 < \gamma < \pi/6$, $\alpha > 0$ две кривые: l_{21} , соединяющую точку, для которой $\gamma = -\vartheta/3$, $\alpha = 0$, с точкой, для которой $\gamma = \delta$, $\alpha = +\infty$, и l_{22} , соединяющую точку, для которой $\gamma = \vartheta/3$, $\alpha = 0$, с точкой, для которой $\gamma = \delta$, $\alpha = +\infty$. В силу монотонности α_{12} и α_{22} на каждом из промежутков их знакоположительности, каждая из прямых $\alpha = \text{const} > 0$ имеет с каждой из кривых l_{12} и l_{22} по одному пересечению (см. рис. 6). Следовательно, уравнение (7.2) для каждого положительного значения α определяет две КТЛ. Очевидно, что при изменении угловой скорости прецессии от 0 до $+\infty$ (то есть при изменении α от $+\infty$ до 0) одна из этих то-

чек (L_1^e) перемещается из «бесконечноудаленной точки» I_1 с координатами $\chi = -\infty$, $\kappa = \nu$ в «фиктивный притягивающий центр» A_1 с координатами $\chi = -\text{ctg } \vartheta$, $\kappa = \text{tg } \vartheta$, а вторая (L_2^e) — из «бесконечноудаленной точки» I_2 с координатами $\chi = +\infty$, $\kappa = \nu$ в «фиктивный притягивающий центр» A_2 с координатами $\chi = \text{ctg } \vartheta$, $\kappa = -\text{tg } \vartheta$ (см. рис. 6). Так как эти две КТЛ могут находиться как угодно далеко от твердого тела, они могут быть названы «внешними» КТЛ.

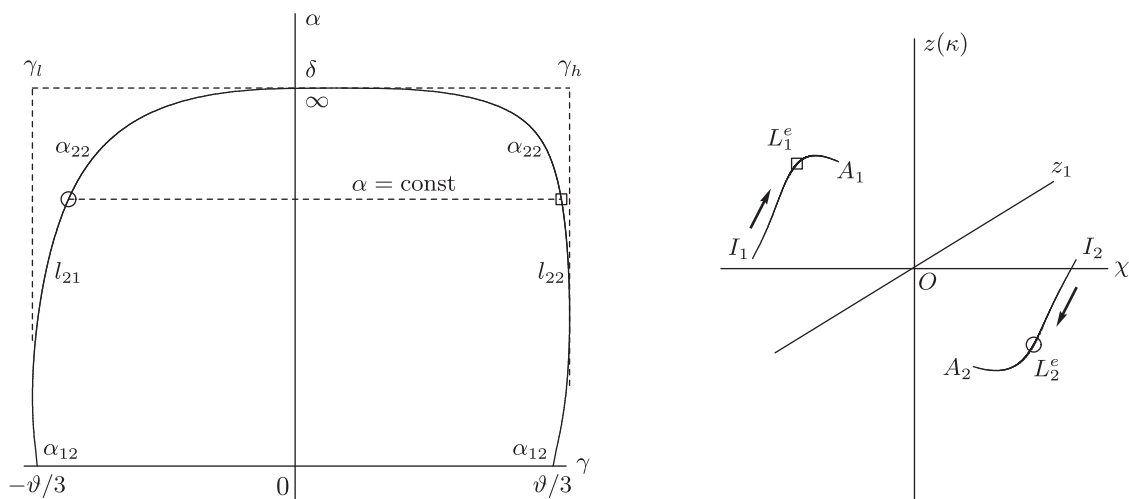


Рис. 6.

8.3. Центральные КТЛ

Из сформулированных выше свойств следует, что если $\gamma \in (-\pi/6, 0)$, то функция α_{13} не может принимать действительных значений, в то время как при $\vartheta > \pi/2 - 3\delta$ функция α_{23} может принимать положительные действительные значения только на интервале $(-\vartheta/3, \delta - \pi/6)$, причем $\alpha_{23} \rightarrow 0$, если $\gamma \rightarrow \vartheta/3 + 0$, и $\alpha_{23} \rightarrow \alpha_{\max}$, если $\gamma \rightarrow \delta - \pi/6 - 0$, где

$$\alpha_{\max} = \left(1 - \frac{\text{ctg}^2 \vartheta}{\nu^2}\right)^{3/2} \frac{\cos^2 \vartheta}{\nu}. \quad (8.1)$$

Нетрудно также проверить, что если $\gamma \rightarrow \delta - \pi/6 - 0$, то $\chi_{23} \rightarrow \text{ctg}^2 \vartheta/\nu$. Анализ производных α_{23} по γ показывает, что для любого допустимого значения δ существует такое ϑ_{c1} , что если $0 < \vartheta \leq \vartheta_{c1}$, то α_{23} является возрастающей функцией γ на промежутке $(-\vartheta/3, \delta - \pi/6)$, в то время как при $\vartheta_{1c} < \vartheta < \pi/2$ эта функция имеет на этом промежутке два экстремума. Численный анализ показывает, что для каждого δ существует такое ϑ_{c2} , большее, чем ϑ_{c1} , что если $0 < \vartheta < \vartheta_{c2}$, то уравнение $\chi_{23}(\gamma) = 0$ не имеет корней на $(-\vartheta/3, \delta - \pi/6)$, в то время как если $\vartheta_{c2} < \vartheta < \pi/2$, то это уравнение имеет на этом промежутке два корня. (На рис. 10 зависимость $\vartheta = \vartheta^{c1}(\delta)$ представлена кривой AD , а зависимость $\vartheta = \vartheta^{c2}(\delta)$ — кривой AC ; на этом рисунке $C(0.954903, \pi/6)$, $D(0.626631, \pi/6)$.)

Очевидно, что если $\vartheta \leq \vartheta_{c1}$, то уравнение $\alpha = \alpha_{23}$ определяет в полуполосе $-\pi/6 < \gamma < 0$, $\alpha > 0$ связную кривую l_3^* , соединяющую точку, для которой $\gamma = -\vartheta/3$, $\alpha = 0$, с точкой, для которой $\gamma = \delta - \pi/6$, $\alpha = \alpha_{\max}$, и имеющую одну точку пересечения с каждой из прямых $\alpha = \text{const}$ ($0 < \alpha < \alpha_{\max}$). Таким образом, при выполнении условий $\pi/2 - 3\delta < \vartheta \leq \vartheta_{c1}$,

$0 < \alpha < \alpha_{\max}$ существует ровно одна КТЛ, не являющаяся внешней или внутренней. Будем называть такую КТЛ «центральной». При изменении α от α_{\max} до нуля эта КТЛ (L_1^c на рис. 7) перемещается из особой точки B интеграла Якоби, для которой $\chi = \operatorname{ctg}^2 \vartheta/\nu$, $\kappa = -1/\nu$, в «фиктивный притягивающий центр» A_2 .

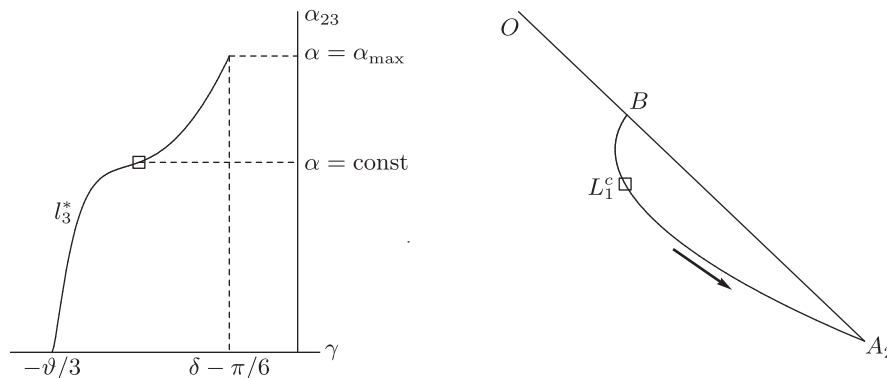


Рис. 7.

Если же $\vartheta_{c1} < \vartheta \leq \vartheta_{c2}$, то прямая $\alpha = \operatorname{const}$ ($0 < \alpha < \alpha_{\max}$) может иметь с l_3^* одно, два или три пересечения. Соответственно, может быть 1, 2 или 3 центральных КТЛ. Эволюция таких КТЛ при уменьшении значения параметра α от α_{\max} до нуля качественно аналогична эволюции внутренних КТЛ (см. рис. 8).

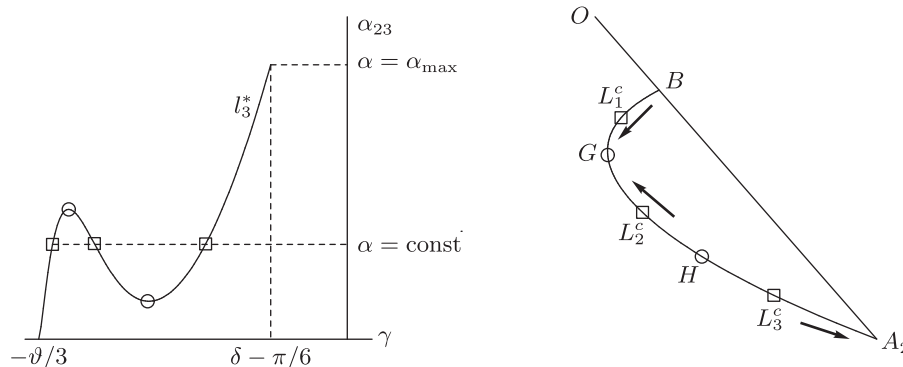


Рис. 8.

Наконец, если $\vartheta_{c2} < \vartheta < \pi/2$, кривая l_3^* становится двусвязной. Эволюция центральных КТЛ в этом случае происходит следующим образом. При уменьшении α от α_{\max} до нуля сначала появляется одна центральная КТЛ (L_1^c на рис. 9), в дальнейшем перемещающаяся к точке G_1 на оси прецессии. При некотором значении $\alpha_{***} < \alpha_{\max}$ в точке H возникает вторая центральная КТЛ, при дальнейшем уменьшении α распадающаяся на две, одна из которых (L_2^c) перемещается к точке G_2 на оси прецессии, а другая (L_3^c) — в точку A_2 .

Таким образом, для точек области OAE на рисунке 10, включая ее границы, центральных КТЛ не существует; для точек области ADE , включая кривую AD , при $\alpha < \alpha_{\max}$ существует одна центральная КТЛ; во внутренних точках области ABC в зависимости от значений α может быть от 0 до 3 центральных КТЛ.

Отметим также, что если $\alpha < \alpha_{\max}$, то существуют только две внутренние КТЛ, то есть общее количество КТЛ не может быть меньше 4 и больше 8.



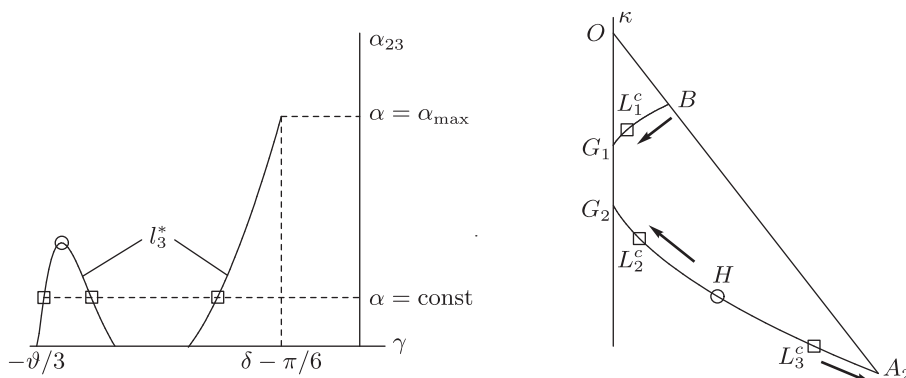


Рис. 9.

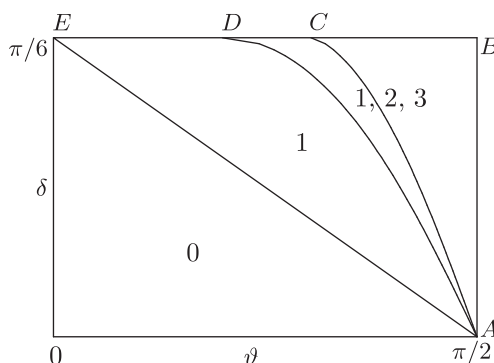


Рис. 10.

Выводы

В настоящей работе изучаются положения равновесия материальной точки пренебрежимо малой массы в плоскости, образуемой осями прецессии и динамической симметрии твердого тела, чей гравитационный потенциал представляется композицией гравитационных потенциалов двух комплексно-сопряженных точечных масс, находящихся на мнимом расстоянии. (Такую задачу можно рассматривать как вариант обобщенной ограниченной круговой задачи трех тел, предложенной в [9], и обобщение ее варианта, рассмотренного в [14].) Устанавливается, что такие положения равновесия, которые по аналогии с рассматривавшимися ранее в других задачах, названы компланарными точками либрации (КТЛ), можно разделить на три группы. К первой группе относятся «внутренние» КТЛ, перемещающиеся при изменении угловой скорости прецессии от оси динамической симметрии к оси прецессии. Как правило, существуют 2 внутренние КТЛ, однако при достаточно больших углах нутации возможно существование от 2 до 6 внутренних КТЛ. Ко второй группе принадлежат 2 КТЛ, названные «внешними», так как с ростом угловой скорости прецессии эти КТЛ перемещаются из бесконечности к «фиктивным притягивающим центрам» гравитационного потенциала. Показано, что в отличие от рассмотренных ранее ситуаций в изучаемой задаче могут существовать КТЛ, отличные от внешних и внутренних и образующие третью группу. Эти КТЛ названы «центральными», так как их эволюция при изменении угловой скорости прецессии, как правило, начинается и заканчивается в особых точках гравитационного потенциала, то есть в некоторой окрестности центра масс твердого тела. Количество центральных КТЛ с изменением угла нутации может меняться от 0 до 3.

Благодарности

Автор благодарен В. В. Белецкому, А. Р. Голикову, Ю. Ф. Голубеву, И. И. Косенко и С. Я. Степанову за полезные советы и комментарии по ходу работы.

Список литературы

- [1] Аксёнов Е. П., Гребенников Е. А., Дёмин В. Г. Обобщенная задача двух неподвижных центров и ее применение в теории движения искусственных спутников Земли // *Астрон. журн.*, 1963, т. 40, № 2, с. 363–375.
- [2] Szebehely V. *Theory of orbits: The restricted problem of three bodies*. New York: Academic Press, 1967. 668 pp.
- [3] Дёмин В. Г. Движение искусственного спутника в нецентральной поле тяготения. Москва–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Ижевский институт компьютерных исследований, 2010. 420 с.
- [4] Маркеев А. П. *Точки либрации в небесной механике и космодинамике*. Москва: Наука, 1978. 312 с.
- [5] Косенко И. И. О точках либрации вблизи гравитирующего вращающегося трехосного эллипсоида // *ПММ*, 1981, т. 45, № 1, с. 26–33.
- [6] Косенко И. И. Точки либрации в задаче о трехосном гравитирующем эллипсоиде: Геометрия области устойчивости // *Космические исследования*, 1981, т. 19, № 2, с. 200–209.
- [7] Vasilkova O. O. Three-dimensional periodic motion in the vicinity of the equilibrium points of an asteroid // *Astron. Astrophys.*, 2005, vol. 430, no. 2, pp. 713–723.
- [8] Родников А. В. О положениях равновесия груза на тросе, закрепленном на гантелевидной космической станции, движущейся по круговой геоцентрической орбите // *Космические исследования*, 2006, т. 44, № 1, с. 62–72.
- [9] Белецкий В. В. Обобщенная ограниченная круговая задача трех тел как модель динамики двойных астероидов // *Космические исследования*, 2007, т. 45, № 6, с. 435–442.
- [10] Белецкий В. В., Родников А. В. Об устойчивости треугольных точек либрации в обобщенной ограниченной круговой задаче трех тел // *Космические исследования*, 2008, т. 46, № 1, с. 42–50.
- [11] Beletsky V. V., Rodnikov A. V. On evolution of libration points similar to Eulerian in the model problem of the binary-asteroids dynamics // *J. Vibroeng.*, 2008, vol. 10, no. 4, pp. 550–556.
- [12] Родников А. В. О движении материальной точки вдоль леера, закрепленного на прецессирующем твердом теле // *Нелинейная динамика*, 2011, т. 7, № 2, с. 295–311.
- [13] Белецкий В. В., Родников А. В. Компланарные точки либрации в обобщенной ограниченной круговой задаче трех тел // *Нелинейная динамика*, 2011, т. 7, № 3, с. 569–576.
- [14] Белецкий В. В., Родников А. В. Точки либрации обобщенной ограниченной круговой задачи трех тел в случае мнимого расстояния между притягивающими центрами // *Нелинейная динамика*, 2012, т. 8, № 5, с. 931–940.

Coplanar libration points of the generalized restricted circular problem of three bodies for conjugate complex masses of attracting centers

Alexander V. Rodnikov

Bauman Moscow State Technical University
2nd Baumanskaya st. 5, Moscow, 105005, Russia
springer@inbox.ru



A particle relative equilibria near a rigid body in the plane passing through the body axes of precession and of dynamical symmetry are studied in assumption that the body gravitational field can be composed as gravitational field of two conjugate complex masses being on imaginary distance. Using terminology of the Generalized Restricted Circular Problem of Three Bodies, these equilibria are called Coplanar Libration Points (CLP). One can show that CLP set is divided into three subsets dependently on CLPs type of evolution. There are 2 “external” CLPs going from infinity to the rigid body if precession angular velocity goes from zero to infinity, from 2 to 6 “internal” CLPs between axis of precession and axis of dynamical symmetry, and from 0 to 3 “central” CLPs near singular points of gravitational potential. Numerical-analitical algorithm of CLPs coordinates computation is suggested. This algorithm is based on some special trigonometrical transformations of coordinates and parameters.

MSC 2010: 70K20, 70K42

Keywords: problem of three bodies, libration points, relative equilibrium, rigid body, regular precession

Received November 23, 2013, accepted December 12, 2013

Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2013, vol. 9, no. 4, pp. 697–710 (Russian)

