Нелинейная динамика. 2013. Т. 9. № 4. С. 755–759.
Полнотекстовая версия в свободном доступе
http://nd.ics.org.ru

КЛАССИЧЕСКИЕ РАБОТЫ. ОБЗОРЫ

По поводу некоторых задач с трением

А. Беген

Недавно в журнале *Nouvelles annales* была опубликована статья Тири [1]. В этой статье рассказывается о сложностях, с которыми связано применение классической механики к задачам с трением.

На случаи неопределенности и несовместности, встречающиеся в задачах о трении, указывал Пенлеве [2]; точно так же их обсуждал Лекорню [4], де Спарр [3]; см. также многочисленные статьи Ф. Клейна, Р. фон Мизеса, Ф. Пфайффера, Л. Прандтля, Г. Гамеля, Й. Велльштайна (*Zeitschr. Math. u. Phys.*, t. 58, 1910; t. 61, 1913).

Но хотя эти вопросы обсуждаются уже довольно долго, поразмыслить, судя по всему, все еще есть о чем.

Все авторы согласны в том, что закон Кулона — не более чем грубое приближение, тем не менее, приближение очень ценное, потому что оно позволяет изучать довольно сложные явления простыми средствами, и мы не можем отрицать, что полученные результаты — даже приблизительные — представляют определенный практический интерес.

О *несовместности*, которая была основной темой вышеупомянутых статей, я скажу совсем немного.

То, что в этих особых случаях скорости становятся разрывными, то есть что настоящие столкновения происходят с нулевой нормальной относительной скоростью соприкасающихся твердых тел, еще можно допустить, хотя и с трудом. Судя по всему, закон Кулона здесь не подходит, однако на это можно возразить, вспомнив об упругости реальных твердых тел.

Я ограничусь указанием на конкретный пример, обладающий, с моей точки зрения, тем преимуществом, что он с наибольшей вероятностью показывает, что закон Кулона здесь ни при чем.

Представим себе человека, идущего со скоростью v по идеально ровной и твердой земле. В руке он держит за конец B свою трость, другой конец A которой касается земли несколько впереди человека.

Если угол наклона трости не превосходит какого-то определенного значения, то наш пешеход будет идти своим путем без проблем. Но если природа почвы станет немного другой, например, если часть ее сделается влажной, а другая часть останется сухой, то пешеход, добравшись со скоростью v до менее скользкой области, тут же остановится из-за своей трости.

Beghin H. Sur certains problèmes de frottement. *Nouvelles annales de mathématiques*, 5^{e} *série*, 1923, T. 2, pp. 305–312. Перевод с французского В. В. Шуликовской.

В таком грубом приближении данный эксперимент нетрудно провести, а также — повторить в более точной форме, используя стержень AB, сочлененный в точке B с телом, которое передвигается по земле со скоростью v.

Когда трость, скользя, приближается к границе двух областей, тангенциальная T и нормальная N компоненты реакции принимают значения T_0 и N_0; я обозначу

$$f_0 = \frac{T_0}{N_0}.$$

Если угол наклона трости, скорость скольжения которой равна v, достаточно велик, то несовместимость проявится при единственном условии, что для каждого значения $N \geqslant N_0$ во второй области почвы отношение T/N будет превосходить f_0. Выполнение данного условия обеспечивается без труда, поскольку, как показывают эксперименты, это отношение возрастает вместе с N.

Не так уж трудно представить себе механизм происходящего здесь «спотыкания»; материальные элементы трости и почвы вовлекают друг друга в движение; трость совершает бесконечно малый поворот вокруг своей крайней точки B, сжимаясь все сильнее и сильнее до тех пор, пока реакция, с которой она действует в точке B на сочлененное с ней тело, не окажется достаточной для того, чтобы остановить движение.

Изучая случаи *неопределенности*, авторы, как правило, стараются сделать выбор среди нескольких разных решений, предоставляемых классической механикой. Я не считаю, что мы должны выбирать среди этих решений какое-то одно, они все кажутся мне одинаково приемлемыми и реализуемыми, какие-то — легче, какие-то — сложнее; впрочем, часть из них, естественно, может быть неустойчивой.

Пусть, например, у нас есть две стены, почти вертикальные, но слегка наклоненные друг к другу. Я помещаю между этими двумя стенами горизонтальный стержень AB. Останется ли он в равновесии? Классическая механика дает нам следующие возможности: 1) вертикальное падение с ускорением силы тяжести; 2) равновесие, когда в качестве реакций в точках A и B выступают взятые с обратным знаком компоненты веса P вдоль прямых IA и IB, где I обозначает произвольную точку, лежащую между точкой O — серединой отрезка AB — и точкой C, общей для верхних образующих двух конусов трения.

Что показывают наблюдения? Если ограничиться тем, что слегка прижать стержень к стенам, прежде чем отпустить его, он упадет. Если же мы сильно сожмем его, то он останется в равновесии, причем реакции, тесно связанные с состоянием стержня, вызванным его сжатием, очевидно, будут зависеть от величины того усилия, с которым мы его сжимали. И даже если коэффициент трения довольно велик, а стержень легко поддается деформации (разумеется, речь идет о бесконечно малых деформациях), понятно, что этот стержень сможет, так сказать, «катиться без скольжения» по стенам, деформируясь, пока мы пытаемся его сжать, из-за этого возвращаясь назад в тот момент, когда мы его отпускаем, а затем падая, то есть мы никак не сможем этим методом сохранить его равновесие.

Кроме того, я вернусь к задаче с тростью, слегка ее изменив. Предположим, что она сочленяется с телом, которое перемещается по земле со скоростью v, не в своей крайней точке B, а в середине O.

Если трость образует с вертикалью угол меньший, чем угол трения, то классическая механика говорит нам, что здесь имеет место либо несовместимость, либо движение, которое продолжается при нулевой реакции в точке касания с землей. Эти два варианта подтверждаются наблюдениями: движение продолжается без труда, но если трость оказывает на почву хотя бы малейшее давление, движение внезапно останавливается. Именно так, например, и произойдет, если мы отпускаем стержень в состоянии некоторого сжатия: распрямляясь, он неизбежно начнет «спотыкаться».

Рассмотрим точно так же задачу Шома, на которую указывает Пенлеве (*C. R.*, t. 140, 1905, p. 401). В вертикальной плоскости взят круговой диск, касающийся идеально гладкой наклонной прямой Ox и негладкой горизонтальной прямой Oy, которая касается его в самой высокой точке. Отпуская его, мы не сообщаем ему скорости, но прикладываем к нему пару сил N.

Пусть r — радиус диска, P — его вес, f — коэффициент трения, α — угол $\widehat{xOy}$; я предполагаю, что

$$f > \operatorname{tg}\alpha.$$

Если пара N превосходит величину

$$\frac{fPr}{f\operatorname{ctg}\alpha - 1},$$

то нетрудно убедиться, что классическая механика дает нам два решения: диск либо опускается вдоль оси Ox, либо заклинивается. Если мы отпустим диск, слегка прижав его к горизонтали Oy, то он начнет опускаться; однако, прижав его посильнее, мы вызовем тем самым заклинивание.

Список таких примеров можно продолжать. Я ограничусь тем, что скажу несколько слов о задаче Тири. Для получения дополнительной информации о полученной неопределенности, мне кажется более удобным предполагать, что связи являются односторонними, интересующее нас тело покоится на вертикальной стенке и на земле, на манер лестницы. Действительно, разве в случае двусторонних связей нельзя было бы возразить, что каждое из имеющихся касаний удваивается, и в результате мы объединяем в одной общей формулировке четыре разные задачи? И у нас возникло бы искушение объяснить неопределенность именно этим фактом.

В такой модификации задача остается неопределенной, когда центр тяжести попадает в ту из двух заштрихованных областей (рис. 1), которая находится слева. Интересно также отметить, что в случае, когда центр тяжести попадает на ненарисованную ветвь гиперболы H_1, решений бесконечно много: в этих решениях тело скользит в точке B и приподнимается в точке A в переменном направлении.

Наконец, разве в случае равновесия расчет реакций не дает нам бесконечно много решений?

Но во всех этих случаях неопределенности удивляться нечему: *классическая механика не занимается анализом бесконечно малых деформаций, она пренебрегает их существованием.* Действительно, когда в классической механике говорят о том, что мы отпускаем такое-то твердое тело в таких-то условиях, описывающих его положение и скорость, вопрос о начальном состоянии его бесконечно малых деформаций не ставится, мы задаем только положение тела в целом и начальное состояние его скоростей при перемещении тела как единого целого. Однако если мы хотим, чтобы решаемые нами задачи допускали практическое применение, необходимо учитывать какое-то произвольное начальное состояние бесконечно малых деформаций, разумеется, при условии, что эти деформации достаточно малы, чтобы не приводить к появлению бесконечно больших сил, таких, какие возникают при толчках и соударениях. Иначе говоря, мы должны иметь возможность пренебречь собственной энергией этой деформации.

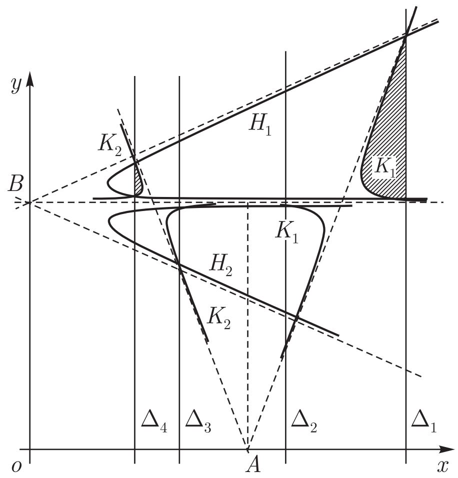

Рис. 1

Разве не удивительно, что при таких условиях классическая механика столь часто способна дать нам единственный ответ, не зависящий от начальных деформаций и от способа реакции тел? *И если в некоторых случаях мы находим несколько ответов, это означает, что данных было недостаточно*: *надо было учесть начальные деформации тел и их упругую природу.*

В действительности такое начальное состояние не может сохраняться без изменений, так как силы, искусственно поддерживавшие его, в начальный момент времени исчезают, их заменяют те или иные реакции. Поэтому состояние деформаций эволюционирует, хотя силы трения в большей или меньшей мере мешают этому, и становится понятно, что, в зависимости от исходной точки этой эволюции, мы сможем прийти к различным состояниям, содержащим в себе то или иное из множества движений, задаваемых классической механикой.

Особенные трудности возникают в задачах о *столкновении с трением*: если при столкновении твердых тел распределение скоростей в каждом из них до соударения подчинялось законам кинематики абсолютно твердых тел, то во время соударения это, конечно же, будет уже не так. Действительно, пусть, например, твердое тело сталкивается с неподвижной преградой, строго недеформируемой. Судя по всему, те элементы твердого тела, которые соприкасаются с преградой, тут же остановятся, а затем эта зона, испытавшая влияние удара, постепенно будет расширяться, ее граница будет сдвигаться внутрь твердого тела с определенной скоростью до тех пор, пока и самые удаленные точки не почувствуют удар.

Классическая механика, которая не занимается анализом этих деформаций, стремится заменить этот анализ следующими гипотезами: *ориентация общей касательной плоскости неизменна*; *в момент, когда соприкосновение тел при соударении заканчивается, эти тела являются неупругими.* В итоге, проинтегрировав уравнения движения на интервале времени, соответствующем соударению, мы сможем решить определенное число простых задач, абстрагируясь от того, что происходит во время соударения.

Если учитывать трение, задача усложняется. В классической механике, как можно видеть из многочисленных недавних статей[1], предполагается, что обычные законы трения применимы, а коэффициент трения постоянен. Тогда, чтобы задать ориентацию силы тре-

[1] H. V., июнь 1923; J. Perès, декабрь 1923 и март 1924.

ния в каждый момент времени, необходимо следить за изменением скорости скольжения. Система, состоящая из количеств движения и этой скорости скольжения, в каждый момент времени выражается так, как если бы каждое из тел сохраняло свою форму, хотя эта недеформируемость, очевидно, несовместима с самим фактом соударения.

В сущности, эта гипотеза сводится к допущению о том, что деформации подвергаются только области, лежащие в непосредственной близости от точки контакта, и что все деформации ориентированы почти нормально к касательной плоскости, несмотря на то, что вектор реакции наклонный. Кроме того, можно сказать, что классическая механика рассуждает о строго неизменных твердых телах, покрытых бесконечно тонкой коркой, и деформации, нормальной к касательной плоскости, подвержена только она. Деформации этой корки в точках соударения непрерывны в случае неупругих тел; они зависят только от реакции и обращаются в нуль вместе с ней в случае идеально упругих тел. До какой степени поведение настоящих тел похоже на поведение этих теоретических тел, следует выяснять, прежде всего, экспериментально.

Список литературы

[1] Thiry R. Étude d'un problème particulier où intervient le frottement de glissement // Nouv. Ann. de Math., 5 sér., 1922, vol. 1, pp. 208–216.

[2] Painlevé P. Leçons sur le frottement // C. R. Acad. Sci. Paris, 1895, vol. 121, pp. 112–115; 1905, vol. 140, pp. 702–707; 1905, vol. 141, pp. 401–405, 546–552.

[3] de Sparre. Sur le frottement de glissement // C. R. Acad. Sci. Paris, 1905, vol. 141, pp. 310–312; Note au sujet du valet de menuisier // Bull. de la Soc. Math. France, 1906, vol. 34, pp. 41–47; Note au sujet du frottement de glissement // Bull. de la Soc. Math. France, 1906, vol. 34, pp. 108–132; Note au sujet de certaines discontinuités apparentes dans les mouvements où intervient le frottement de glissement // Bull. de la Soc. Math. France, 1907, vol. 35, pp. 141–158.

[4] Lecornu L. Sur la loi de Coulomb // C. R. Acad. Sci. Paris, 1905, vol. 140, pp. 635, 847–848.

Sur certains problèmes de frottement

H. Beghin

Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2013, vol. 9, no. 4, pp. 755–759 (Russian)
Originally published in: *Nouvelles annales de mathématiques*, 5e *série*, 1923, T. 2, p. 305–312.