Нелинейная динамика. 2013. Т. 9. № 4. С. 627–640.
Полнотекстовая версия в свободном доступе
http://nd.ics.org.ru

УДК: 531.8, 517.925
MSC 2010: 37J60, 37J35, 70E18, 53D17

Геометризация теоремы Чаплыгина о приводящем множителе

А. В. Болсинов, А. В. Борисов, И. С. Мамаев

В работе развивается теория приводящего множителя для специального класса неголономных динамических систем, когда возникающая нелинейная пуассонова структура приводится к скобке Ли – Пуассона алгебры $e(3)$. В качестве примеров рассмотрены задача о качении шара Чаплыгина и система Веселовой, кроме того получено интегрируемое гиростатическое обобщение системы Веселовой.

Ключевые слова: неголономная динамическая система, скобка Пуассона, пуассонова структура, приводящий множитель, гамильтонизация, конформно-гамильтонова система, шар Чаплыгина

Получено 19 сентября 2012 года
После доработки 22 ноября 2012 года

Работа выполнена при поддержке гранта Президента РФ поддержки ведущих научных школ НШ-2519.2012.1 «Динамические системы классической механики и проблемы управления» и РФФИ 13-01-12462-офи_м «Теория гамильтоновых систем и ее приложения в классической механике и гидродинамике».

Болсинов Алексей Викторович
A.Bolsinov@lboro.ac.uk
School of Mathematics, Loughborough University
United Kingdom, LE11 3TU, Loughborough, Leicestershire
лаборатория нелинейного анализа и конструирования новых средств передвижения
Удмуртский государственный университет
426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, д. 1

Борисов Алексей Владимирович
borisov@rcd.ru
Мамаев Иван Сергеевич
mamaev@rcd.ru
Институт компьютерных исследований
лаборатория нелинейного анализа и конструирования новых средств передвижения
Удмуртский государственный университет
426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, д. 1
Институт машиноведения им. А. А. Благонравова РАН
117334, Россия, г. Москва, ул. Бардина, д. 4
Институт математики и механики УрО РАН
620990, Россия, г. Екатеринбург, ул. Софьи Ковалевской, д. 16

Содержание

Введение

В работе [17] С. А. Чаплыгин указал специальный класс систем с двумя степенями свободы, которые заменой времени $dt = \rho\, d\tau$ (где ρ — приводящий множитель, зависящий от координат) приводятся к лагранжевой и, следовательно, гамильтоновой форме. В качестве примера он разобрал задачу о движении так называемых саней Чаплыгина, которая посредством предложенного им *метода приводящего множителя* может быть проинтегрирована методом Гамильтона–Якоби. Впоследствии [4, 6, 12, 21, 23] было показано, что ряд систем неголономной механики также могут быть представлены в форме *систем Чаплыгина* (либо *обобщенных систем Чаплыгина* [4]), и, тем самым, являются конформно-гамильтоновыми. Таким образом, метод приводящего множителя является одним из наиболее эффективных методов явной *гамильтонизации* динамических систем.

С современной точки зрения, теория приводящего множителя является методом поиска одного из важнейших *тензорных инвариантов* [10] динамической системы — *пуассоновой структуры* [4]. В то же время для его применения, как правило, требуется переписать уравнения движения в локальных переменных, а это обычно приводит к крайне громоздким вычислениям. В данной работе мы развиваем метод Чаплыгина для одного класса систем, часто встречающегося в неголономной механике, что позволяет существенно упростить их гамильтонизацию.

1. Обобщенные системы Чаплыгина

Напомним, что согласно [4] *обобщенной системой Чаплыгина* называется механическая система с двумя степенями свободы, уравнения движения которой можно записать в форме

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q_1}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_1} = \dot q_2 S, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q_2}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_2} = -\dot q_1 S,$$
$$S = a_1(\boldsymbol{q})\dot q_1 + a_2(\boldsymbol{q})\dot q_2 + b(\boldsymbol{q}), \tag{1.1}$$

где L — функция обобщенных координат $\boldsymbol{q} = (q_1, q_2)$ и скоростей $\dot{\boldsymbol{q}} = (\dot q_1, \dot q_2)$, которую также будем называть лагранжианом системы. Как несложно проверить, эта система допускает интеграл энергии обычного вида

$$E = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\dot q_i - L. \tag{1.2}$$

Замечание. Обычная система Чаплыгина получается при специальном выборе функции S (при этом заведомо $b(\boldsymbol{q}) = 0$) [17]. В работах [22, 25] предложено несколько иное обобщение систем Чаплыгина.

Известно, что если имеется инвариантная мера с плотностью, зависящей только от координат, то система представляется в конформно-гамильтоновой форме [4] (при $b(\boldsymbol{q}) = 0$ это было показано С. А. Чаплыгиным [17]). Чтобы показать это, выполним преобразование Лежандра для исходной системы (1.1):

$$P_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \quad H = \sum_i P_i \dot{q}_i - L\Big|_{\dot{q}_i \to P_i};$$

при этом уравнения движения (1.1) перепишутся в виде

$$\begin{gathered} \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial P_i}, \quad \dot{P}_1 = -\frac{\partial H}{\partial q_1} + \frac{\partial H}{\partial P_2} S, \quad \dot{P}_2 = -\frac{\partial H}{\partial q_2} - \frac{\partial H}{\partial P_1} S, \\ S = a_1(\boldsymbol{q})\dot{q}_1 + a_2(\boldsymbol{q})\dot{q}_2 + b(\boldsymbol{q}) = A_1(\boldsymbol{q})P_1 + A_2(\boldsymbol{q})P_2 + B(\boldsymbol{q}). \end{gathered} \tag{1.3}$$

Здесь H совпадает с интегралом энергии (1.2), выраженным через новые переменные.

Предположим теперь, что система допускает инвариантную меру с плотностью, зависящей лишь от координат:

$$\mu = \mathcal{N}(\boldsymbol{q})\, dP_1\, dP_2\, dq_1\, dq_2. \tag{1.4}$$

В этом случае уравнение Лиувилля для $\mathcal{N}(\boldsymbol{q})$ приводится к виду

$$\dot{q}_1 \left(\frac{1}{\mathcal{N}} \frac{\partial \mathcal{N}}{\partial q_1} - A_2(q) \right) + \dot{q}_2 \left(\frac{1}{\mathcal{N}} \frac{\partial \mathcal{N}}{\partial q_2} + A_1(q) \right) = 0,$$

и, поскольку $\mathcal{N}$ зависит лишь от координат, каждая из скобок должна обращаться в нуль по отдельности:

$$\frac{1}{\mathcal{N}} \frac{\partial \mathcal{N}}{\partial q_1} - A_2(\boldsymbol{q}) = 0, \quad \frac{1}{\mathcal{N}} \frac{\partial \mathcal{N}}{\partial q_2} + A_1(\boldsymbol{q}) = 0. \tag{1.5}$$

Сделаем теперь замену переменных

$$P_i = \frac{p_i}{\mathcal{N}(\boldsymbol{q})}, \quad i = 1, 2.$$

Обозначим гамильтониан в новых переменных как $\overline{H}(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}) = H\big(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{P}(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p})\big)$, тогда справедливы следующие соотношения для производных:

$$\frac{\partial H}{\partial P_i} = \mathcal{N} \frac{\partial \overline{H}}{\partial p_i}, \quad \frac{\partial H}{\partial q_i} = \frac{\partial \overline{H}}{\partial q_i} + \frac{1}{\mathcal{N}} \frac{\partial N}{\partial q_i} \left(\frac{\partial \overline{H}}{\partial p_1} p_1 + \frac{\partial \overline{H}}{\partial p_2} p_2 \right).$$

Подставляя их в (1.3) и пользуясь соотношениями (1.5), получим

$$\dot{q}_i = \mathcal{N}(\boldsymbol{q}) \frac{\partial \overline{H}}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_1 = \mathcal{N}(\boldsymbol{q}) \left(-\frac{\partial \overline{H}}{\partial q_1} + \mathcal{N}(\boldsymbol{q}) B(\boldsymbol{q}) \frac{\partial \overline{H}}{\partial p_2} \right), \quad \dot{p}_2 = \mathcal{N}(\boldsymbol{q}) \left(-\frac{\partial \overline{H}}{\partial q_2} - \mathcal{N}(\boldsymbol{q}) B(\boldsymbol{q}) \frac{\partial \overline{H}}{\partial p_1} \right).$$

Таким образом, справедлив следующий результат.

Теорема 1. *Если система* (1.3) *допускает инвариантную меру вида* (1.4)*, то она представляется в конформно-гамильтоновой форме*

$$\dot{q}_i = \mathcal{N}(\boldsymbol{q}) \{q_i, \overline{H}\}, \quad \dot{p}_i = \mathcal{N}(\boldsymbol{q}) \{p_i, \overline{H}\}, \quad i = 1, 2,$$

где скобки Пуассона задаются соотношениями

$$\{q_i, p_j\} = \delta_{ij}, \quad \{q_i, q_j\} = 0, \quad \{p_1, p_2\} = \mathcal{N}(\boldsymbol{q}) B(\boldsymbol{q}).$$

Доказательство заключается в непосредственной проверке тождества Якоби. ■

2. Система Чаплыгина на T^*S^2

Рассмотрим теперь систему, которая описывается парой трехмерных векторов $\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{\gamma}$, а уравнения движения имеют вид

$$\dot{\boldsymbol{M}} = (\boldsymbol{M} - S\boldsymbol{\gamma}) \times \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{M}} + \boldsymbol{\gamma} \times \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\gamma}}, \quad \dot{\boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{\gamma} \times \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{M}}, \tag{2.1}$$

где «гамильтониан» $H(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{\gamma})$ — произвольная функция (квадратичная по $\boldsymbol{M}$), а $S(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{\gamma})$ — линейная по $\boldsymbol{M}$ функция

$$S = \big(\boldsymbol{K}(\boldsymbol{\gamma}), \boldsymbol{M}\big) = K_1(\boldsymbol{\gamma})M_1 + K_2(\boldsymbol{\gamma})M_2 + K_3(\boldsymbol{\gamma})M_3.$$

Непосредственной проверкой доказывается, что система (2.1) всегда допускает три интеграла движения:

$$F_1 = \boldsymbol{\gamma}^2 = \mathrm{const}, \quad F_2 = (\boldsymbol{M}, \boldsymbol{\gamma}) = \mathrm{const}, \quad F_3 = H(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{\gamma}) = \mathrm{const}.$$

Без ограничения общности можно полагать $\boldsymbol{\gamma}^2 = 1$, так что уравнения (1.5) описывают динамическую систему на семействе четырехмерных многообразий

$$\mathcal{M}_c^4 = \{\boldsymbol{M}, \boldsymbol{\gamma} \mid \boldsymbol{\gamma}^2 = 1, (\boldsymbol{M}, \boldsymbol{\gamma}) = c\},$$

каждое из которых диффеоморфно T^*S^2.

Если всю совокупность переменных обозначить как $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{M}, \boldsymbol{\gamma})$, то уравнения (2.1) можно представить в кососимметричной форме

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \mathbf{P}_0 \frac{dH}{d\boldsymbol{x}},$$

$$\mathbf{P}_0 = \begin{pmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{\Gamma} \\ \mathbf{\Gamma} & 0 \end{pmatrix} - S(\boldsymbol{x}) \begin{pmatrix} \mathbf{\Gamma} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & -M_3 & M_2 \\ M_3 & 0 & -M_1 \\ -M_2 & M_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{\Gamma} = \begin{pmatrix} 0 & -\gamma_3 & \gamma_2 \\ \gamma_3 & 0 & -\gamma_1 \\ -\gamma_2 & \gamma_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Здесь первое слагаемое — стандартная пуассонова структура, отвечающая алгебре Ли $e(3)$. Более того, $\mathbf{P}_0$ дополнительно удовлетворяет уравнениям

$$\mathbf{P}_0 \frac{\partial F_1}{\partial \boldsymbol{x}} = 0, \quad \mathbf{P}_0 \frac{\partial F_2}{\partial \boldsymbol{x}} = 0.$$

Как и выше, предположим, что система (2.1) допускает инвариантную меру с плотностью, зависящей лишь от $\boldsymbol{\gamma}$:

$$\mu = \rho(\boldsymbol{\gamma})\, d\boldsymbol{M}\, d\boldsymbol{\gamma}. \tag{2.2}$$

При этом уравнение Лиувилля для векторного поля $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{\gamma})$, задаваемого системой (2.1), представляется в виде

$$\operatorname{div} \rho \boldsymbol{V} = \left(\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{M}}, \rho\gamma \times \boldsymbol{K} - \boldsymbol{\gamma} \times \frac{\partial \rho}{\partial \gamma}\right) = 0.$$

Откуда, вследствие невырожденности гамильтониана по $\boldsymbol{M}$, получим векторное уравнение

$$\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial\boldsymbol{\gamma}} - \boldsymbol{K}\right) \times \boldsymbol{\gamma} = 0. \tag{2.3}$$

Пользуясь этим соотношением, непосредственным вычислением можно доказать

Предложение 1. *Если функция $\rho(\boldsymbol{\gamma})$ удовлетворяет уравнению* (2.3), *то тензор $\mathbf{P} = \dfrac{1}{\rho(\boldsymbol{\gamma})}\mathbf{P}_0$ удовлетворяет тождеству Якоби.*

Таким образом, окончательно получим

Теорема 2. *Если система* (2.1) *допускает инвариантную меру* (2.2) *с плотностью, зависящей лишь от $\boldsymbol{\gamma}$, то она представляется в конформно-гамильтоновой форме*

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \rho(\boldsymbol{\gamma})\mathbf{P}(\boldsymbol{x})\,\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{x}},$$

где $\mathbf{P}(\boldsymbol{x}) = \rho^{-1}\mathbf{P}_0(\boldsymbol{x})$ — пуассонова структура ранга 4 с функциями Казимира

$$F_1 = \boldsymbol{\gamma}^2, \quad F_2 = (\boldsymbol{M}, \boldsymbol{\gamma}).$$

Уравнение (2.3) может быть разрешено относительно вектора $\boldsymbol{K}$ следующим образом:

$$\boldsymbol{K} = \rho f(\boldsymbol{\gamma})\boldsymbol{\gamma} + \frac{1}{\rho}\,\frac{\partial\rho}{\partial\boldsymbol{\gamma}},$$

где $f(\boldsymbol{\gamma})$ — произвольная функция. Итак, естественным образом мы получили специальный класс пуассоновых структур на пространстве $\mathbb{R}^6(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{\gamma})$, которые могут быть записаны в следующем виде:

$$\mathbf{P} = \frac{1}{\rho}\begin{pmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{\Gamma} \\ \mathbf{\Gamma} & 0 \end{pmatrix} - \left(\frac{1}{\rho^2}\,\frac{\partial\rho}{\partial\gamma} + f(\gamma)\gamma, \boldsymbol{M}\right)\begin{pmatrix} \mathbf{\Gamma} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.4}$$

Замечание. Добавление к скобке (2.4) слагаемого вида

$$\Phi(\boldsymbol{\gamma})\begin{pmatrix} \mathbf{\Gamma} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где $\Phi(\boldsymbol{\gamma})$ — произвольная функция, также сохраняет тождество Якоби.

Укажем два примера.

Задача о шаре Чаплыгина на плоскости [18], описывающая качение без проскальзывания уравновешенного динамически несимметричного шара по горизонтальной плоскости.

В подходящих переменных уравнения движения представляются в форме (2.1) (см. [3, 7, 20]):

$$H_1 = \frac{1}{2}\left((\mathbf{A}\boldsymbol{M}, \boldsymbol{M}) + \frac{(\mathbf{A}\boldsymbol{M}, \boldsymbol{\gamma})^2}{\mathcal{D}^{-1} - (\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{A}\boldsymbol{\gamma})}\right) + U_1(\boldsymbol{\gamma}), \quad S = \frac{(\mathbf{A}\boldsymbol{M}, \boldsymbol{\gamma})}{\mathcal{D}^{-1} - (\mathbf{A}\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\gamma})}, \tag{2.5}$$

где $\mathcal{D} = \mathrm{const}$, $\mathbf{A}$ — постоянная диагональная матрица. Вектор $\boldsymbol{M}$ (момент шара относительно точки контакта) выражается через физическую переменную $\boldsymbol{\omega}$ (угловую скорость) по формуле

$$\boldsymbol{M} = \mathbf{A}^{-1}\boldsymbol{\omega} - \mathcal{D}(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\gamma})\boldsymbol{\gamma}, \quad \boldsymbol{\omega} = \mathbf{A}(\boldsymbol{M} + S\boldsymbol{\gamma}), \tag{2.6}$$

при этом величина интеграла $(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{\gamma})$ может принимать любое значение.

Плотность инвариантной меры (2.2) системы и функция $f(\boldsymbol{\gamma})$ для скобки (2.4) имеют вид

$$\rho = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{D}^{-1} - (\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{A}\boldsymbol{\gamma})}}, \quad f(\boldsymbol{\gamma}) = 0.$$

Система Веселовой [8, 9, 13], описывающая динамику тела с неподвижной точкой при наличии неголономной связи $(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\gamma}) = b = \mathrm{const}$, где $\boldsymbol{\omega}$ — угловая скорость шара, а $\boldsymbol{\gamma}$ — вектор неподвижный в пространстве.

В данном случае в системе координат, связанной с телом, уравнения движения также представляются в форме (2.1) (см. [5]):

$$H_2 = \frac{1}{2}\left((\boldsymbol{M}, \widehat{\mathbf{A}}\boldsymbol{M}) - \frac{\big((\widehat{\mathbf{A}} - \mathbf{E})\boldsymbol{M}, \boldsymbol{\gamma}\big)^2}{(\widehat{\mathbf{A}}\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\gamma})}\right) + U_2(\boldsymbol{\gamma}), \quad S = -\frac{\big((\widehat{\mathbf{A}} - \mathbf{E})\boldsymbol{M}, \boldsymbol{\gamma}\big)}{(\widehat{\mathbf{A}}\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\gamma})}; \tag{2.7}$$

здесь $\mathbf{A} = \mathbf{I}^{-1}$ — постоянная матрица, обратная тензору инерции, а момент $\boldsymbol{M}$ выражается через угловую скорость $\boldsymbol{\omega}$ тела следующим образом:

$$\boldsymbol{M} = \widehat{\mathbf{A}}^{-1}\boldsymbol{\omega} + \big((\widehat{\mathbf{A}}^{-1} - \mathbf{E})\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\gamma}\big)\boldsymbol{\gamma}, \quad \boldsymbol{\omega} = \widehat{\mathbf{A}}(\boldsymbol{M} - S\boldsymbol{\gamma}), \tag{2.8}$$

где значение интеграла площадей совпадает с величиной связи,

$$(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{\gamma}) = (\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\gamma}) = b.$$

Плотность инвариантной меры (2.2) и функция $f(\boldsymbol{\gamma})$ в данном случае совпадают:

$$\rho(\boldsymbol{\gamma}) = f(\boldsymbol{\gamma}) = \frac{1}{\sqrt{(\boldsymbol{\gamma}, \widehat{\mathbf{A}}\boldsymbol{\gamma})}}.$$

Замечание. Лагранжево представление при $b = 0$ после замены времени было указано в [23], соответствующее конформно-гамильтоново представление — в [5], другое конформно-гамильтоново представление было найдено в [4]. Отметим, что система Веселовой с $(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\gamma}) \neq 0$ представляет интерес лишь с математической точки зрения, поскольку практическая реализация такой связи неизвестна. Однако неголономные системы с неоднородными связями могут демонстрировать некоторые неожиданные свойства — см., например, работу [24], посвященную системе Суслова с неоднородной связью.

Если потенциал $U(\boldsymbol{\gamma})$ для этих систем не равен нулю, то, как правило, соответствующие уравнения движения оказываются неинтегрируемы. Это отличает предложенный метод гамильтонизации от используемого в работах [1, 19], где требуется существование набора первых интегралов.

Заметим также, что если в задаче о шаре Чаплыгина сделать замену параметров и потенциала

$$\mathbf{A} = \mathcal{D}^{-1}(\mathbf{E} - \widehat{\mathbf{A}}), \quad U_1(\boldsymbol{\gamma}) = \mathcal{D}^{-1}U_2(\boldsymbol{\gamma}),$$

то получим, что гамильтониан (2.5) принимает вид

$$H_1 = \frac{\mathcal{D}^{-1}}{2}(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{M}) - \mathcal{D}^{-1} H_2, \tag{2.9}$$

а пуассонова структура шара Чаплыгина преобразуется в пуассонову структуру системы Веселовой. Следовательно, эти две системы определены на одном и том же пуассоновом многообразии [14], а их гамильтонианы связаны соотношением (2.9). При нулевом потенциале функция $F = \boldsymbol{M}^2$ является интегралом обеих систем, поэтому их траектории оказываются трансверсальными друг другу обмотками одних и тех же торов [13].

3. Приведение к скобке $e(3)$

Если ввести обозначение $g = \rho^{-1}$, то пуассонову структуру (2.4) можно переписать в более удобной для исследования форме

$$\mathbf{P} = g \begin{pmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{\Gamma} \\ \mathbf{\Gamma} & 0 \end{pmatrix} + \left(\frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\gamma}} - f \cdot \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{M} \right) \begin{pmatrix} \mathbf{\Gamma} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.1}$$

Исследуем класс таких пуассоновых структур более детально. Прежде всего отметим, что параметрами этих пуассоновых структур служат две произвольные функции $g(\boldsymbol{\gamma}) > 0$ и $f(\boldsymbol{\gamma})$. Соответствующую пуассонову структуру мы обозначим поэтому через $\mathbf{P}_{g,f}$. Все $\mathbf{P}_{g,f}$ обладают одними и теми же функциями Казимира $(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{\gamma})$ и $(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\gamma})$.

Для простоты мы ограничимся рассмотрением физического случая $\boldsymbol{\gamma}^2 = (\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\gamma}) = 1$, то есть ограничим все объекты на пятимерное (пуассоново) многообразие $S^2(\boldsymbol{\gamma}) \times \mathbb{R}^3(\boldsymbol{M})$.

Одна из наших целей — выяснить, к какому каноническому виду приводятся эти пуассоновы структуры. Заметим, что симплектические листы $\mathbf{P}_{g,f}$ диффеоморфны кокасательному расслоению к сфере T^*S^2. Из явного вида (1.1) пуассоновой структуры можно сделать вывод, что симплектическая структура на листе T^*S^2 будет суммой канонической формы $dp \wedge dq$ и некоторой магнитной добавки, то есть замкнутой 2-формы ω_{magn} на сфере. Согласно теореме Мозера [27], с точностью до симплектоморфизма такие формы ω_{magn} параметризуются ровно одним числом, а именно — интегралом по сфере $\displaystyle\int_{S^2} \omega_{\mathrm{magn}}$. Таким образом, для каждой пуассоновой структуры мы имеем однопараметрическое семейство симплектических листов, тип которых также определяется ровно одним параметром. Это наблюдение приводит к гипотезе о том, что «перераспределив» при необходимости симплектические листы и применив затем некоторый симплектоморфизм к каждому отдельному симплектическому листу, мы сможем перевести любую структуру $\mathbf{P}_{g,f}$ в любую другую $\mathbf{P}_{\widetilde{g},\widetilde{f}}$.

Замечание. На нулевом уровне $(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{\gamma}) = 0$ пуассонова структура (3.1) приводится к каноническому виду алгебры Ли $e(3)$ простейшей заменой [4]:

$$(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{\gamma}) \mapsto \big(g^{-1}(\boldsymbol{\gamma})\boldsymbol{M}, \boldsymbol{\gamma}\big).$$

Так, для шара Чаплыгина имеем

$$(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{\gamma}) \mapsto \Big(\big(\mathcal{D}^{-1} - (\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{A}\boldsymbol{\gamma})\big)^{-1/2} \boldsymbol{M}, \boldsymbol{\gamma}\Big),$$

для системы Веселовой —

$$(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{\gamma}) \mapsto \big((\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{A}\boldsymbol{\gamma})^{-1/2}\boldsymbol{M}, \boldsymbol{\gamma}\big).$$

Мы начнем с того, что опишем класс естественных преобразований, которые сохраняют вид тензора Пуассона $\mathbf{P}_{g,f}$, но меняют параметры g и f. Рассмотрим преобразования следующего вида:

$$(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{\gamma}) \mapsto (\widetilde{\boldsymbol{M}}, \boldsymbol{\gamma}), \quad \widetilde{\boldsymbol{M}} = \mathbf{A}(\boldsymbol{\gamma})\boldsymbol{M}, \tag{3.2}$$

где $\mathbf{A}(\boldsymbol{\gamma})$ — некоторый линейный оператор в $\mathbb{R}^3$, компоненты которого зависят от $\boldsymbol{\gamma}$.

Предложение 2. *Для каждой точки $\boldsymbol{\gamma} \in S^2$ рассмотрим ортогональное разложение $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{M}' + \boldsymbol{M}''$, где $\boldsymbol{M}'' = (\boldsymbol{M}, \boldsymbol{\gamma})\boldsymbol{\gamma}$ — проекция $\boldsymbol{M}$ на вектор $\boldsymbol{\gamma}$, а $\boldsymbol{M}' = \boldsymbol{M} - \boldsymbol{M}''$ — проекция $\boldsymbol{M}$ на плоскость, перпендикулярную $\boldsymbol{\gamma}$. Пусть*

$$\widetilde{\boldsymbol{M}} = \alpha(\boldsymbol{\gamma})\boldsymbol{M}' + c\boldsymbol{M}'' + \boldsymbol{M}'' \times \boldsymbol{h}(\boldsymbol{\gamma}),$$

где c — константа, $\alpha(\boldsymbol{\gamma}) > 0$ — произвольная скалярная функция, а $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{\gamma})$ — произвольная вектор-функция от $\boldsymbol{\gamma}$. Тогда преобразование (3.2) *переводит пуассонову структуру $\mathbf{P}_{g,f}$ в пуассонову структуру $\mathbf{P}_{\widetilde{g},\widetilde{f}}$ аналогичного вида, параметры которой задаются следующим образом:*

$$\widetilde{g} = \alpha g, \quad \widetilde{f} = \frac{\alpha^2}{c} f + \left(\frac{\alpha}{c} - 1\right)\left(\widetilde{g} - \left(\boldsymbol{\gamma}, \frac{\partial \widetilde{g}}{\partial \boldsymbol{\gamma}}\right)\right) + \frac{1}{c}\left(\boldsymbol{\gamma}, \widetilde{g}\,\frac{\partial \alpha}{\partial \boldsymbol{\gamma}} + \widetilde{g}^2 \operatorname{rot}\left(\frac{\boldsymbol{h}}{\widetilde{g}}\right)\right). \tag{3.3}$$

Доказательство предложения состоит в непосредственной проверке. ■

Мы ограничимся комментарием о геометрическом смысле преобразования $\boldsymbol{M} \mapsto \widetilde{\boldsymbol{M}}$, использованном в этом утверждении. Рассмотрим ортонормированный базис $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ пространства $\mathbb{R}^3(\boldsymbol{M})$, связанный с вектором $\boldsymbol{\gamma}$. А именно, $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ — два ортонормированных вектора, лежащих в касательной плоскости к единичной сфере в точке $\boldsymbol{\gamma}$, а $\boldsymbol{e}_3$ — вектор нормали к этой сфере в той же точке, то есть $e_3 = \boldsymbol{\gamma}$. В этом базисе матрица оператора $\mathbf{A}$ имеет вид

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & a \\ 0 & \alpha & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix},$$

где α, a, b зависят от $\boldsymbol{\gamma}$, а c — константа.

Это в точности общий вид преобразования $\mathbf{A}$, удовлетворяющего нашим требованиям. Действительно, функция Казимира $(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{\gamma})$ должна перейти в себя с возможным домножением на константу, это и есть c. Поэтому плоскость, задаваемая уравнением $(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{\gamma}) = 0$, должна перейти в себя, а в ортогональном направлении преобразование должно быть растяжением в c раз, причем константа c не должна зависеть от $\boldsymbol{\gamma}$. Эти условия полностью определяют последнюю строчку матрицы $\mathbf{A}$.

Кроме того, соотношения $\{M_i, \gamma_j\} = -g \cdot \varepsilon_{ijk}\gamma_k$ можно формально переписать в векторной форме как $\{\boldsymbol{M}, \boldsymbol{\gamma}\} = -g\, \boldsymbol{M} \times \boldsymbol{\gamma}$. Поскольку их вид должен сохраниться, то мы получаем условие

$$g\,\big(\mathbf{A}(\boldsymbol{\gamma})\boldsymbol{M}\big) \times \boldsymbol{\gamma} = \widetilde{g}\boldsymbol{M} \times \boldsymbol{\gamma},$$

а это в точности означает, что на касательной плоскости к сфере оператор должен действовать как умножение на некоторое число α (зависящее от $\boldsymbol{\gamma}$). На элементы a, b никаких ограничений нет, они задаются вектор-функцией $\boldsymbol{h}$ (сама эта функция имеет 3 компоненты, но существенными являются только две из них, поскольку добавление к $\boldsymbol{h}$ вектора, пропорционального $\boldsymbol{\gamma}$, ничего не меняет).

Полезно обратить внимание на следующее обстоятельство. Множество преобразований, описанных в предложении 2, образует группу (разумеется, бесконечномерную, поскольку ее параметрамы содержат произвольные функции α и $\boldsymbol{h}$). Легко проверить, что последовательное выполнение преобразований с параметрами $(\alpha_1, c_1, \boldsymbol{h}_1)$ и $(\alpha_2, c_2, \boldsymbol{h}_2)$ эквивалентно выполнению преобразования с параметрами $(\alpha_1\alpha_2, c_1c_2, \boldsymbol{h}_1\alpha_2 + \boldsymbol{h}_2c_1)$. Указанное правило задает групповой закон, который просто копирует матричное умножение:

$$\begin{pmatrix} \alpha_2 & \boldsymbol{h}_2 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_1 & \boldsymbol{h}_1 \\ 0 & c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1\alpha_2 & \boldsymbol{h}_1\alpha_2 + \boldsymbol{h}_2c_1 \\ 0 & c_1c_2 \end{pmatrix}.$$

Эта группа естественным образом действует на рассматриваемом классе пуассоновых структур или, что то же самое, на пространстве параметров g, f. Выписанные выше правила (3.3) — это в точности формулы для такого действия. Если действие формально обозначить через $(\widetilde{g}, \widetilde{f}) = \Psi_{(\alpha,c,\boldsymbol{h})}(g, f)$, то оно, как нетрудно убедиться, выполнив последовательно два преобразования, будет удовлетворять стандартному правилу, а именно: если

$$(\widetilde{g}, \widetilde{f}) = \Psi_{(\alpha_1,c_1,\boldsymbol{h}_1)}(g, f) \quad \text{и} \quad (\widetilde{\widetilde{g}}, \widetilde{\widetilde{f}}) = \Psi_{(\alpha_2,c_2,\boldsymbol{h}_2)}(\widetilde{g}, \widetilde{f}),$$

то

$$(\widetilde{\widetilde{g}}, \widetilde{\widetilde{f}}) = \Psi_{(\alpha_1\alpha_2,c_1c_2,\boldsymbol{h}_1\alpha_2+\boldsymbol{h}_2c_1)}(g, f).$$

Для явной проверки этого факта формулы (3.3) удобно переписать в виде

$$\widetilde{g} = \alpha g, \quad \widetilde{f} = \frac{\alpha^2}{c}\left(f + g - \left(\boldsymbol{\gamma}, \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\gamma}}\right)\right) - \left(\widetilde{g} - \left(\boldsymbol{\gamma}, \frac{\partial \widetilde{g}}{\partial \boldsymbol{\gamma}}\right)\right) + \frac{\widetilde{g}^2}{c}\left(\boldsymbol{\gamma}, \operatorname{rot}\left(\frac{\boldsymbol{h}}{\widetilde{g}}\right)\right),$$

после чего проверка труда не представляет.

С точки зрения теории групп, теперь было бы естественно задать вопрос: *как устроены орбиты этого действия*? Другими словами, мы хотим понять, какие пуассоновы структуры можно перевести друг в друга указанными преобразованиями. Ответ оказывается очень простым: *описанное действие имеет единственную орбиту*, то есть транзитивно и все пуассоновы структуры рассматриваемого класса эквивалентны между собой. В частности, справедлива следующая теорема:

Теорема 3. *Всякая пуассонова структура* $\mathbf{P}_{g,f}$ *вида* (3.1) *на уровне* $\boldsymbol{\gamma}^2 = 1$ *изоморфна стандартной пуассоновой структуре* $\mathbf{P}_{1,0}$, *отвечающей алгебре Ли* $e(3)$.

Доказательство. Нам достаточно подобрать параметры преобразования $(\alpha, c, \boldsymbol{h})$ в формулах (3.3) так, чтобы $\widetilde{g} = 1$ и $\widetilde{f} = 0$. Первое условие сразу определяет функцию α, а именно, $\alpha = g^{-1}$. Второе условие после этого существенно упрощается и принимает вид

$$\frac{\alpha^2}{c} f + \left(\frac{\alpha}{c} - 1\right) + \frac{1}{c}\left(\boldsymbol{\gamma}, \frac{\partial \alpha}{\partial \boldsymbol{\gamma}}\right) + \frac{1}{c}(\boldsymbol{\gamma}, \operatorname{rot} \boldsymbol{h}) = 0,$$

или, эквивалентно,

$$\alpha^2 f + \alpha + \left(\boldsymbol{\gamma}, \frac{\partial \alpha}{\partial \boldsymbol{\gamma}}\right) - c + (\boldsymbol{\gamma}, \operatorname{rot} \boldsymbol{h}) = 0,$$

где неизвестными являются константа c и вектор-функция $\boldsymbol{h}$. Поэтому уравнение можно теперь переписать в виде

$$(\boldsymbol{\gamma}, \operatorname{rot} \boldsymbol{h}) = F(\boldsymbol{\gamma}) + c, \tag{3.4}$$

где $F(\boldsymbol{\gamma})$ — некоторая заданная нам функция, причем удовлетворить выписанному условию мы должны лишь на единичной сфере $\boldsymbol{\gamma}^2 = 1$. Условия разрешения уравнения такого вида хорошо известны. В дифференциально-геометрическом смысле это уравнение просто означает, что мы ищем первообразную для 2-формы вида $(F + c)\,d\sigma$ на единичной сфере, где $d\sigma$ — стандартная форма площади. Это можно сделать тогда и только тогда, когда $\int_{S^2}(F+c)\,d\sigma = 0$, а этого условия всегда можно добиться подбором константы c. ■

Замечание. Аналогично возможно приведение скобки $\mathbf{P}_{g,f}$ к стандартному виду уже на всей алгебре Ли $e(3)$, то есть без дополнительного ограничения $\boldsymbol{\gamma}^2 = 1$. Для этого класс преобразований придется расширить: необходимо будет предположить, что c зависит от $\boldsymbol{\gamma}^2$. Поскольку $\boldsymbol{\gamma}^2$ — функция Казимира, то во всех преобразованиях к $c(\boldsymbol{\gamma}^2)$ можно будет относиться по-прежнему как к константе, и поэтому формулы существенно не изменяются. Условия разрешимости уравнения $(\boldsymbol{\gamma}, \operatorname{rot} \boldsymbol{h}) = F(\boldsymbol{\gamma}) + c(\boldsymbol{\gamma}^2)$ остаются прежними, но теперь проверять их нужно на сферах всех радиусов. У нас по-прежнему есть возможность добиться их выполнения, поскольку нужные константы теперь можно выбирать в зависимости от радиуса $\boldsymbol{\gamma}^2$.

Так, в задаче о шаре Чаплыгина на плоскости, упоминавшейся выше, в уравнении (3.4) функция $F(\boldsymbol{\gamma})$ имеет вид

$$F(\boldsymbol{\gamma}) = -\frac{\mathcal{D}^{-1}}{\bigl(\mathcal{D}^{-1} - (\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{A}\boldsymbol{\gamma})\bigr)^{3/2}}.$$

Решения уравнения (3.4) для неизвестных c и $\boldsymbol{h}$ могут быть выражены в этом случае через полные и неполные эллиптические интегралы. Таким образом, несмотря на то, что с теоретической точки зрения доказательство возможности приведения скобки $\mathbf{P}_{g,f}$ к $e(3)$-скобке большого труда не составляет, получившееся преобразование может оказаться крайне громоздким и неалгебраическим.

Аналогичное преобразование скобки (3.1) к $e(3)$ указано в [15, 16]; там также отмечено, что если допустить сингулярность на S^2, решение уравнения (3.4) может быть выражено в явном виде через элементарные функции.

4. Обобщение на случай гиростата

Рассмотрим теперь ситуацию, когда к шару Чаплыгина или к твердому телу в задаче Веселовой добавляется ротор, обладающий гироскопическим моментом $\boldsymbol{k}$. Тогда непосредственным вычислением можно показать, что обе системы остаются конформно-гамильтоновыми. Чтобы показать это, рассмотрим пуассонову структуру $\mathbf{P}_k$ более общего вида

$$\dot{\boldsymbol{x}} = g^{-1}\mathbf{P}_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{x})\,\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{x}},$$

$$\mathbf{P}_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{x}) = g\begin{pmatrix} \mathbf{M}_{\boldsymbol{k}} & \boldsymbol{\Gamma} \\ \boldsymbol{\Gamma} & 0 \end{pmatrix} - gS\begin{pmatrix} \boldsymbol{\Gamma} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M}_{\boldsymbol{k}} = \begin{pmatrix} 0 & -M_3 - k_3 & M_2 + k_2 \\ M_3 + k_3 & 0 & -M_1 - k_1 \\ -M_2 - k_2 & M_1 + k_1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{4.1}$$

$$gS = \left(-\frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\gamma}} + f(\boldsymbol{\gamma})\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{M} \right) + \Phi(\boldsymbol{\gamma}),$$

где $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{M}, \boldsymbol{\gamma})$ — полный набор переменных, а g — функция только от $\boldsymbol{\gamma}$. Тождество Якоби при этом заведомо выполнено, а функции Казимира имеют вид

$$F_1 = \boldsymbol{\gamma}^2, \quad F_2 = (\boldsymbol{M} + \boldsymbol{k}, \boldsymbol{\gamma}).$$

Заметим, что функция $S(\boldsymbol{,\gamma})$ в пуассоновой структуре (4.1) также может зависеть от постоянных k_i, $i = 1, 2, 3$.

Для шара Чаплыгина вектор $\boldsymbol{M}$ выражается через угловую скорость $\boldsymbol{\omega}$ также при помощи соотношений (2.6), и гамильтониан остается прежним (2.5). В скобке (4.1) в этом случае необходимо положить

$$g = \sqrt{\mathcal{D}^{-1} - (\gamma, \mathbf{A}\gamma)}, \quad f(\gamma) = 0, \quad \Phi(\gamma) = 0.$$

Для системы Веселовой при добавлении гиростата соотношения (2.8) необходимо модифицировать. По-прежнему будем полагать, что $\boldsymbol{M} = \widehat{\mathbf{A}}^{-1}\boldsymbol{\omega} + \lambda\boldsymbol{\gamma}$, где коэффициент λ найдем из условия

$$(\boldsymbol{M} + \boldsymbol{k}, \boldsymbol{\gamma}) = (\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\gamma}).$$

Получим

$$\boldsymbol{M} = \widehat{\mathbf{A}}^{-1}\boldsymbol{\omega} - \big((\widehat{\mathbf{A}}^{-1} - \mathbf{E})\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{k}, \boldsymbol{\gamma}\big)\boldsymbol{\gamma}, \quad \boldsymbol{\omega} = \widehat{\mathbf{A}}(\boldsymbol{M} - S\boldsymbol{\gamma}),$$

$$S = \frac{(\widehat{\mathbf{A}}\boldsymbol{M} - \boldsymbol{M} - \boldsymbol{k}, \boldsymbol{\gamma})}{(\widehat{\mathbf{A}}\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\gamma})},$$

здесь S совпадает с соответствующей функцией в скобке (4.1) при условии, что g задается как

$$g = \sqrt{(\widehat{\mathbf{A}}\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\gamma})}.$$

При этом гамильтониан имеет вид

$$H = \frac{1}{2}\left((\widehat{\mathbf{A}}\boldsymbol{M}, \boldsymbol{M}) + \frac{(\widehat{\mathbf{A}}\boldsymbol{M} - \boldsymbol{M} - \boldsymbol{k}, \boldsymbol{\gamma})^2}{(\widehat{\mathbf{A}}\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\gamma})}\right).$$

Дополнительный интеграл в этом случае имеет вид

$$F_3 = (\boldsymbol{M} + \boldsymbol{k}, \boldsymbol{M} + \boldsymbol{k}).$$

Таким образом получившаяся система является конформно-гамильтоновой и интегрируемой и допускает качественный анализ методами, изложенными в [2].

Дискуссия

Таким образом, мы получили инвариантное (не зависящее от выбора локальных переменных) конформно-гамильтоново представление обобщенных систем Чаплыгина на T^*S^2 при помощи вырожденной пуассоновой структуры ранга 4 в шестимерном пространстве $\mathbb{R}^6(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{\gamma})$ и показали, что эта структура является деформацией стандартной скобки Ли–Пуассона в $\mathbb{R}^6(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{\gamma})$, соответствующей алгебре $e(3)$.

В качестве приложений были рассмотрены две неголономные системы: задача о шаре Чаплыгина и система Веселовой. В данном подходе (после замены параметров) они оказываются интегрируемыми конформно-гамильтоновыми системами на одном и том же пуассоновом многообразии с одним и тем же набором первых интегралов. Указанное конформно-гамильтоново представление было обобщено на случай добавления гиростата (хотя при этом пропадает аналогия между этими системами).

Замечание. В работе конформно-гамильтоново описание системы Веселовой при $(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\gamma}) \neq 0$ и интегрируемое добавление гиростата к ней приводятся впервые.

Данная работа ставит ряд вопросов, касающихся в основном неголономных систем.

1. Можно ли при помощи описанного подхода получить конформно-гамильтоново описание для интегрируемого обобщения задачи о качении шара Чаплыгина по сферическому основанию (БМФ-система), найденному в [6, 14, 21].

2. В примерах встречаются «скобки похожего типа», но с другой линейной по $\boldsymbol{M}$ функцией Казимира [1]. Было бы интересно выяснить, сводятся ли такие скобки к стандартной скобке Пуассона–Ли на $e(3)$ при помощи описанной выше технологии.

3. Поскольку задача Чаплыгина без потенциала (то есть $U(\boldsymbol{\gamma}) = 0$) интегрируется на всем пространстве $\mathbb{R}^6(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{\gamma})$, то после описанной выше замены мы получаем глобально интегрируемую гамильтонову систему на $e(3)$, то есть при всех значениях постоянной площадей. Это обстоятельство, как известно, может быть интерпретировано как интегрируемость натуральной системы с двумя степенями свободы в присутствии магнитного поля, гамильтониан и дополнительный интеграл которого квадратичны по импульсам. Вопрос об описании всех таких систем активно обсуждался в литературе. Было бы любопытно интерпретировать полученную указанным способом систему в контексте недавних классификационных результатов, представленных в работах [11, 26].

Авторы благодарят А. В. Цыганова за полезные обсуждения.

Список литературы

[1] Бизяев И. А., Цыганов А. В. О сфере Рауса // Нелинейная динамика, 2012, т. 8, № 3, с. 569–583. (*См. также*: Bizyaev I. A., Tsiganov A. V. On the Routh sphere problem // J. Phys. A, 2013, vol. 46, no. 8, pp. 1–11.)

[2] Болсинов А. В., Борисов А. В., Мамаев И. С. Топология и устойчивость интегрируемых систем // УМН, 2010, т. 65, вып. 2(392), с. 71–132.

[3] Борисов А. В., Мамаев И. С. Гамильтоновость задачи Чаплыгина о качении шара // Матем. заметки, 2001, т. 70, № 5, с. 793–795.

[4] Борисов А. В., Мамаев И. С. Законы сохранения, иерархия динамики и явное интегрирование неголономных систем // Нелинейная динамика, 2008, т. 4, № 3, с. 223–280. (*См. также*: Borisov A. V., Mamaev I. S. Conservation laws, hierarchy of dynamics and explicit integration of nonholonomic systems // Regul. Chaotic Dyn., 2008, vol. 13, no. 5, pp. 443–490.)

[5] Борисов А. В., Мамаев И. С., Бизяев И. А. Иерархия динамики при качении твердого тела без проскальзывания и верчения по плоскости и сфере // Нелинейная динамика, 2013, т. 9, № 2, с. 141–202. (*См. также:* Borisov A. V., Mamaev I. S., Bizyaev I. A. The hierarchy of dynamics of a rigid body rolling without slipping and spinning on a plane and a sphere // Regul. Chaotic Dyn., 2013, vol. 8, no. 3, pp. 277–328.)

[6] Борисов А. В., Мамаев И. С., Марихин В. Г. Явное интегрирование одной неголономной задачи // Докл. РАН, 2008, т. 422, № 4, с. 475–478.

[7] Борисов А. В., Цыгвинцев А. В. Показатели Ковалевской и интегрируемые системы классической динамики: 1, 2 // Regul. Chaotic Dyn., 1996, vol. 1, no. 1, pp. 15–37.

[8] Веселов А. П., Веселова Л. Е. Интегрируемые неголономные системы на группах Ли // Матем. заметки, 1988, т. 44, № 5, с. 604–619.

[9] Веселова Л. Е. Новые случаи интегрируемости уравнений движения твердого тела при наличии неголономной связи // Геометрия, дифференциальные уравнения и механика: Сб. ст. / В. В. Козлов, А. Т. Фоменко (ред.). Москва: МГУ, 1986. С. 64–68.

[10] Козлов В. В. К теории интегрирования уравнений неголономной механики // Успехи механики, 1985, т. 8, № 3, с. 85–107. (*См. также:* Kozlov V. V. On the integration theory of equations of nonholonomic mechanics // Regul. Chaotic Dyn., 2002, vol. 7, no. 2, pp. 191–176.)

[11] Марихин В. Г., Соколов В. В. Пары коммутирующих гамильтонианов, квадратичных по импульсам // ТМФ, 2006, т. 149, № 2, с. 147–160.

[12] Мощук Н. К. О приведении уравнений движения некоторых неголономных систем Чаплыгина к форме уравнений Лагранжа и Гамильтона // ПММ, 1987, т. 51, № 2, с. 223–229.

[13] Фёдоров Ю. Н. О двух интегрируемых неголономных системах в классической динамике // Вестн. МГУ. Сер. Матем. Механ., 1989, № 4, с. 38–41.

[14] Цыганов А. В. О неголономных системах Веселовой и Чаплыгина // Нелинейная динамика, 2012, т. 8, № 3, с. 541–547.

[15] Цыганов А. В. Об одном семействе конформно-гамильтоновых систем // ТМФ, 2012, т. 173, № 2, с. 179–196.

[16] Цыганов А. В. К задаче Чаплыгина о качении шара // Матем. заметки, 2013, т. 94, № 4, с. 637–640.

[17] Чаплыгин С. А. К теории движения неголономных систем. Теорема о приводящем множителе // Матем. сб., 1912, т. 28, № 2, с. 303–314. (*См. также:* Чаплыгин С. А. Собр. соч.: Т. 1 / С. А. Чаплыгин. Москва–Ленинград: ОГИЗ, 1948. С. 15–25; Chaplygin S. A. On the theory of motion of nonholonomic systems. The reducing-multiplier theorem // Regul. Chaotic Dyn., 2008, vol. 13, no. 4, pp. 369–376.)

[18] Чаплыгин С. А. О катании шара по горизонтальной плоскости // Собр. соч.: Т. 1 / С. А. Чаплыгин. Москва–Ленинград: ОГИЗ, 1948. С. 76–101. (*См. также:* Chaplygin S. A. On a ball's rolling on a horizontal plane // Regul. Chaotic Dyn., 2002, vol. 7, no. 2, pp. 131–148.)

[19] Bolsinov A. V., Borisov A. V., Mamaev I. S. Hamiltonization of nonholonomic systems in the neighborhood of invariant manifolds // Regul. Chaotic Dyn., 2011, vol. 16, no. 5, pp. 443–464.

[20] Borisov A. V., Mamaev I. S. The rolling motion of a rigid body on a plane and a sphere: Hierarchy of dynamics // Regul. Chaotic Dyn., 2002, vol. 7, no. 2, pp. 177–200.

[21] Borisov A. V., Fedorov Yu. N., Mamaev I. S. Chaplygin ball over a fixed sphere: An explicit integration // Regul. Chaotic Dyn., 2008, vol. 13, no. 6, pp. 557–571.

[22] Cantrijin F., de Léon M., de Diego D. On the geometry of generalized Chaplygin systems // Math. Proc. Cambridge Philos. Soc., 2002, vol. 132, pp. 323–351.

[23] Fedorov Yu. N., Jovanović B. Nongholonomic LR-Systems as generalized Chaplygin systems with an invariant measure and flows on homogeneous spaces // J. Nonlinear Sci., 2004, vol. 1, pp. 341–381.

[24] García-Naranjo L. C., Maciejewski A. J., Marrero J. C., Przybylska M. The inhomogeneous Suslov problem, arXiv:1310.3868v1 [nlin.SI] (2013).

[25] Koiller J. Reduction of some classical non-holonomic systems with symmetry // Arch. Ration. Mech. Anal., 1992, vol. 118, pp. 113–148.

[26] Marikhin V. G., Sokolov V. V. Separation of variables on a non-hyperelliptic curve // Regul. Chaotic Dyn., 2005, vol. 10, no. 1, pp. 59–70.

[27] Moser J. On the volume elements on a manifold // Trans. Amer. Math. Soc., 1965, vol. 120, no. 2 , pp. 286–294.

Geometrization of the Chaplygin reducing-multiplier theorem

Alexey V. Bolsinov[1], Alexey V. Borisov[2], Ivan S. Mamaev[3]

[1]School of Mathematics, Loughborough University
United Kingdom, LE11 3TU, Loughborough, Leicestershire

[1,2,3]Laboratory of nonlinear analysis and the design of new types of vehicles
Institute of Computer Science
Udmurt State University
Universitetskaya 1, Izhevsk, 426034 Russia
[2,3]A. A. Blagonravov Mechanical Engineering Research Institute of RAS
Bardina str. 4, Moscow, 117334, Russia
Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of RAS
S. Kovalevskaja str. 16, Ekaterinburg, 620990, Russia
[1]A.Bolsinov@lboro.ac.uk, [2]borisov@rcd.ru, [3]mamaev@rcd.ru

This paper develops the theory of the reducing multiplier for a special class of nonholonomic dynamical systems, when the resulting nonlinear Poisson structure is reduced to the Lie – Poisson bracket of the algebra $e(3)$. As an illustration, the Chaplygin ball rolling problem and the Veselova system are considered. In addition, an integrable gyrostatic generalization of the Veselova system is obtained.

MSC 2010: 37J60, 37J35, 70E18, 53D17
Keywords: nonholonomic dynamical system, Poisson bracket, Poisson structure, reducing multiplier, Hamiltonization, conformally Hamiltonian system, Chaplygin ball

Received September 19, 2012, accepted November 22, 2012
Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2013, vol. 9, no. 4, pp. 627–640 (Russian)