



УДК: 531.36:534.1
MSC 2010: 34M10, 70K65

Малые плоские колебания спутника на эллиптической орбите

П. С. Красильников

Исследуется уравнение плоских нелинейных колебаний спутника на слабоэллиптической орбите, содержащее два малых параметра. Исследованы различные виды редукций уравнения колебаний, приводящие его к случаю одного малого параметра. Описаны недостатки такого подхода. На основе обобщенного метода усреднения с независимыми параметрами получены новые эффекты вращения спутника при внешнем и параметрическом резонансах.

Ключевые слова: независимые параметры, усреднение, малые колебания, редукции

Основы теории малых нелинейных колебаний небесных тел на слабоэллиптической орбите заложены в работах Лапласа, Тиссерана, Рауса [1–3], занимавшихся теорией движения Луны относительно ее центра масс. Были исследованы различные типы либраций Луны, амплитуда которых имеет первый порядок малости по e . Первые исследования вращательных движений искусственных спутников Земли на эллиптической орбите при $e \ll 1$ проведены в статьях [4–7]. Они повторяют в основном результаты классических исследований, когда анализ эксцентриситетных колебаний основан на уравнениях линейного приближения. В работах [8, 9] содержится вывод строгих уравнений плоских колебаний спутника на эллиптической орбите и уравнение малых колебаний, исследованы эксцентриситетные колебания в первом приближении метода усреднения, построена область параметрических колебаний. Резонансные эксцентриситетные колебания исследовались в работах [10, 11]. Работа [12] посвящена исследованию квазилинейных нерезонансных колебаний спутника, статьи [13, 14] содержат результаты исследований, когда в качестве независимой переменной принята средняя аномалия, при этом уравнения движения разлагаются в ряды Тейлора и Фурье, колебания спутника описываются с точностью до e^2 . Подробный обзор цитируемых работ дан в монографии [15]. Большой цикл работ [16–20] посвящен изучению периодических вращений спутника.

Получено 23 апреля 2013 года
После доработки 5 сентября 2013 года

Красильников Павел Сергеевич
krasil06@rambler.ru

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)
125871, Россия, г. Москва, Волоколамское шоссе, д. 4



При исследовании малых колебаний обычно предполагают (по умолчанию) наличие связи между малыми параметрами e и ε , где e — эксцентриситет орбиты, ε — мера отклонения фазовой точки от начала координат, определяемая как отношение характерного размера по угловым переменным и скоростям к фиксированным единицам измерения (заданным в системе SI, CGS или MKS). К примеру, во всех рассмотренных выше работах полагается $\varepsilon \sim e$, то есть $\varepsilon = \alpha e$, где α — постоянная величина порядка единицы. Однако наиболее интересные резонансные эффекты вращений спутника были обнаружены в работе [21] вдоль кривой $\varepsilon = e^{1/3}$: исследована задача о существовании, бифуркациях и устойчивости периодических движений спутника с периодом, равным периоду обращения его центра масс по орбите.

Цель настоящей работы — провести сравнительный анализ асимптотических методов интегрирования уравнения плоских колебаний спутника (как использующих редукцию, так и свободных от редукции), описать новые эффекты вращений спутника на основе обобщенного метода усреднения с независимыми малыми параметрами [23].

1. Виды редукций уравнения Белецкого

Исследуем уравнение плоских колебаний спутника

$$(1 + e \cos \nu) \frac{d^2 \delta}{d\nu^2} - 2e \sin \nu \frac{d\delta}{d\nu} + 3n^2 \sin \delta = 4e \sin \nu. \quad (1.1)$$

Здесь приняты следующие обозначения: $n^2 = (A - C)/B$, A , B , C — главные центральные моменты инерции аппарата, e — эксцентриситет орбиты спутника, δ — удвоенный угол между радиус-вектором центра инерции аппарата и осью z , направленной по его главной центральной оси инерции, относительно которой момент инерции равен C , ν — истинная аномалия.

Полагаем значение δ малым: $\delta = \varepsilon \bar{\delta}$, $\delta' = \varepsilon \bar{\delta}'$. Здесь $\bar{\delta}$, $\bar{\delta}'$ — величины порядка единицы, ε — малый параметр. Тогда колебания спутника будут описываться сингулярно возмущенным уравнением

$$\varepsilon(1 + e \cos \nu) \frac{d^2 \bar{\delta}}{d\nu^2} - 2e\varepsilon \sin \nu \frac{d\bar{\delta}}{d\nu} + \omega^2 \sin(\varepsilon \bar{\delta}) = 4e \sin \nu, \quad \omega = \sqrt{3}n. \quad (1.2)$$

Линеаризуя это уравнение по $\varepsilon \bar{\delta}$, получим уравнение малых колебаний

$$(1 + e \cos \nu) \frac{d^2 \bar{\delta}}{d\nu^2} - 2e \sin \nu \frac{d\bar{\delta}}{d\nu} + \omega^2 \bar{\delta} = 4\frac{e}{\varepsilon} \sin \nu, \quad \omega = \sqrt{3}n,$$

частным случаем которого (при $\varepsilon = 1$) является уравнение линейных колебаний спутника, полученное в работе [8].

Рассмотрим редукции задачи, приводящие уравнение (1.2) к виду, содержащему один малый параметр. Будем считать, что однопараметрическое семейство кривых $f(\varepsilon, e, \alpha) = 0$, $f(0, 0, \alpha) = 0$ (α — параметр семейства), покрывает всю плоскость параметров $\{\varepsilon, e\}$, когда α пробегает область допустимых значений Λ . Вдоль каждой кривой семейства уравнение (1.2) зависит от одного малого параметра.

Поделив уравнение (1.2) на $(1 + e \cos \nu)$, разложим его в ряд по малым параметрам ε, e . С этой целью представим функции $(1 + e \cos \nu)^{-1}$ и $\sin(\varepsilon \bar{\delta})$ в виде рядов:

$$\frac{1}{1 + e \cos \nu} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n e^n \cos^n \nu, \quad \sin(\varepsilon \bar{\delta}) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(\varepsilon \bar{\delta})^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

Принимая во внимание формулу Коши произведения рядов

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i \cdot \sum_{j=0}^{\infty} b_j = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{s=0}^k a_s b_{k-s} \right),$$

получим, после преобразований, уравнение плоских колебаний спутника в виде ряда по независимым малым параметрам ε, e :

$$\begin{aligned} \bar{\delta}'' + \omega^2 \bar{\delta} = & 2 \sin \nu \left(e \bar{\delta}' + 2\mu \right) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n e^n \cos^n \nu - \\ & - \omega^2 \sum_{k=1}^{\infty} \left[(-1)^k \cos^k \nu \sum_{s=0}^k \frac{e^{k-s} \varepsilon^{2s} \bar{\delta}^{2s+1}}{\cos^s \nu (2s+1)!} \right]. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Параметр $\mu = e/\varepsilon$ будем называть *сингулярным*, так как его значение не определено при $e, \varepsilon \rightarrow 0$. Уравнение (1.3) содержит его как величину нулевого порядка, поскольку сумма показателей e и ε равна нулю. Такое определение порядка малости μ является формальным, не учитывающим его сингулярный характер. Ниже покажем, что порядок малости $\mu(e, \varepsilon)$ как функции двух независимых параметров определяется условием полосы и, как следствие, зависит от асимптотического поведения в нуле границы области изменения аргументов. Поэтому для разных областей в плоскости параметров e, ε будем иметь разные порядки μ . Аналогично, порядок малости параметра μ , ограниченного на любую кривую из семейства редукции, зависит от асимптотики этой кривой в нуле, при этом он будет отличаться, вообще говоря, от порядка малости μ как функции двух переменных (неинвариантность порядка малости функции двух переменных по отношению к редукции).

Удерживая члены до третьего порядка малости включительно по e и ε , будем иметь:

$$\begin{aligned} \bar{\delta}'' + \omega^2 \bar{\delta} = & 4\mu \sin \nu + e \left[2\bar{\delta}' \sin \nu + \omega^2 \bar{\delta} \cos \nu - 2\mu \sin 2\nu \right] + \frac{\varepsilon^2}{6} \omega^2 \bar{\delta}^3 - \\ & - e^2 \left[\bar{\delta}' \sin 2\nu + \omega^2 \bar{\delta} \cos^2 \nu - 4\mu \cos^2 \nu \sin \nu \right] + \\ & + e^3 \left[2\bar{\delta}' \cos^2 \nu \sin \nu + \omega^2 \bar{\delta} \cos^3 \nu - 4\mu \cos^3 \nu \sin \nu \right] - e\varepsilon^2 \frac{\omega^2}{6} \bar{\delta}^3 \cos \nu. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Для приведения уравнения (1.4) к регулярному случаю необходимо исключить (в плоскости малых параметров) особую прямую $\varepsilon = 0$ вместе с малой окрестностью. Для этого достаточно потребовать, чтобы при определенных значениях α кривые редукции «плотно» прилегли к этой прямой, формируя означенную окрестность при условии отсутствия касания их с прямой $\varepsilon = 0$ в нуле. В случае касания имеем $\varepsilon = o(e)$, поэтому $\mu \rightarrow \infty$ при $e \rightarrow 0$ вдоль кривой редукции; следовательно, μ сохраняет сингулярность и за пределами указанной окрестности.

Отметим, что параметр ε играет существенную роль при исследовании малых колебаний спутника, несмотря на то, что исходное уравнение (1.1) не содержит его явно. Дело



в том, что для большинства редукций задачи укороченные уравнения, содержащие первые главные члены регулярных разложений, имеют разный вид в зависимости от величины ε . Увеличивая ε непрерывным образом, получим переход от одного вида уравнений к другому. Уменьшая ε (при фиксированном $e \neq 0$), попадаем в сингулярную окрестность прямой $\varepsilon = 0$, где необходимо использовать теорию сингулярных возмущений.

Исследуем подробно различные виды редукции. Для начала рассмотрим простейший ее тип.

1.1. Линейная редукция

Положим

$$\varepsilon = \alpha e,$$

где α — постоянная положительная величина, меняющаяся в пределах от нуля до бесконечности (напомним, что e и ε — положительные величины). Пусть α^* — достаточная малая константа. Тогда параметр $\mu = 1/\alpha$ всюду в плоскости малых параметров, за исключением узкой конической окрестности $0 \leq \varepsilon < \alpha^* e$ сингулярной прямой $\varepsilon = 0$, имеет порядок малости, равный единице, так как удовлетворяет условию полосы $0 \leq \mu \leq 1/\alpha^*$.

Здесь следует отметить, что понятие малости μ как функции двух аргументов e, ε мы определяем через условие полосы, так, как это сделано в работах [22, 23].

Определение. Функцию $\mu(\varepsilon, e)$ будем называть функцией k -го порядка малости по ε, e , если для любых малых положительных δ_1, δ_2 существуют постоянные $A_1(\delta_1, \delta_2) \geq 0, A_2(\delta_1, \delta_2) > 0$ и две скалярные формы k -го порядка

$$F_1(\varepsilon, e) = \sum_{s_1+s_2=k} \alpha_{s_1, s_2} \varepsilon^{s_1} e^{s_2}, \quad F_2(\varepsilon, e) = \sum_{s_1+s_2=k} \beta_{s_1, s_2} \varepsilon^{s_1} e^{s_2},$$

положительно определенные в положительном конусе $\{\varepsilon, e: \varepsilon > 0, e > 0\}$, такие, что выполняется условие полосы

$$A_1(\delta_1, \delta_2) F_1(\varepsilon, e) \leq |\mu(\varepsilon, e)| \leq A_2(\delta_1, \delta_2) F_2(\varepsilon, e), \quad (1.5)$$

когда $0 < \varepsilon \leq \delta_1, 0 < e \leq \delta_2$.

Отметим, что в этом определении можно отказаться от требования полиномиальности F_1, F_2 по малым параметрам ε, e . Достаточно потребовать, чтобы эти функции удовлетворяли условию однородности:

$$F_j(l\varepsilon, le) = l^k F_j(\varepsilon, e), \quad F_j(0, 0) = 0, \quad j = 1, 2,$$

где k — любое вещественное число. Тогда определение порядка малости сохранится.

Итак, считаем, что $\varepsilon \geq \alpha^* e$. Подставим в уравнение (1.4) выражение αe вместо ε , получим:

$$\begin{aligned} \bar{\delta}'' + \omega^2 \bar{\delta} &= \frac{4}{\alpha} \sin \nu + e \left[2\bar{\delta}' \sin \nu + \omega^2 \bar{\delta} \cos \nu - \frac{2}{\alpha} \sin 2\nu \right] - \\ &- e^2 \left[\bar{\delta}' \sin 2\nu + \omega^2 \bar{\delta} \cos^2 \nu - \frac{4}{\alpha} \cos^2 \nu \sin \nu - \frac{\alpha^2}{6} \omega^2 \bar{\delta}^3 \right] + \\ &+ e^3 \left[2\bar{\delta}' \cos^2 \nu \sin \nu + \omega^2 \bar{\delta} \cos^3 \nu - \frac{4}{\alpha} \cos^3 \nu \sin \nu - \frac{\alpha^2}{6} \omega^2 \bar{\delta}^3 \cos \nu \right]. \end{aligned} \quad (1.6)$$



Здесь $\alpha \geq \alpha^*$. Редуцированное уравнение (1.6) зависит от параметра α , однако порядок малости отдельных его членов от α не зависит, следовательно, вид уравнения не меняется при изменении α . Варьируя α непрерывным образом, можно исследовать влияние малых параметров ε, e на характер плоских колебаний спутника, но с ограничениями. Дело в том, что линейная связь между ε, e делает невозможным исследование колебаний вдоль нелинейных кривых $f(\varepsilon, e, \alpha) = 0$, с которыми часто связаны наиболее интересные нелинейные эффекты.

Предельное уравнение имеет вид линейного неоднородного уравнения второго порядка:

$$\bar{\delta}'' + \omega^2 \bar{\delta} = \frac{4}{\alpha} \sin \nu.$$

1.2. Нелинейная редукция в явном виде

Рассмотрим зависимость между малыми параметрами в виде показательной функции

$$\varepsilon = e^\alpha.$$

При $\alpha > 1$ уравнение (1.2) является сингулярно возмущенным (так как μ стремится к бесконечности при $e \rightarrow 0$), неравенство $0 < \alpha \leq 1$ отвечает регулярному случаю.

Несложно видеть, что если в правой части удержат первый главный член разложения, то редуцированное уравнение имеет, в зависимости от области изменения α , следующие формы представления:

регулярный случай

$$0 < \alpha < \frac{1}{3} \quad \frac{d^2 \bar{\delta}}{d\nu^2} + \omega^2 \bar{\delta} = \omega^2 e^{2\alpha} \frac{\bar{\delta}^3}{3!}, \tag{1.7}$$

$$\alpha = \frac{1}{3} \quad \frac{d^2 \bar{\delta}}{d\nu^2} + \omega^2 \bar{\delta} = e^{2/3} \left(\omega^2 \frac{\bar{\delta}^3}{3!} + 4 \sin \nu \right), \tag{1.8}$$

$$\frac{1}{3} < \alpha < 1 \quad \frac{d^2 \bar{\delta}}{d\nu^2} + \omega^2 \bar{\delta} = 4e^{1-\alpha} \sin \nu, \tag{1.9}$$

$$\alpha = 1 \quad \frac{d^2 \bar{\delta}}{d\nu^2} - 2e \sin \nu \frac{d\bar{\delta}}{d\nu} + \omega^2 \bar{\delta} (1 - e \cos \nu) = 4(1 - e \cos \nu) \sin \nu, \tag{1.10}$$

сингулярный случай

$$\alpha > 1, \alpha \in [k, k + 1) \quad \frac{d^2 \bar{\delta}}{d\nu^2} + \omega^2 \bar{\delta} = (-1)^{k-1} 4 \sin \nu \frac{\cos^{k-1} \nu}{e^{\alpha-k}} \quad (k = 1, 2, 3, \dots). \tag{1.11}$$

В вырожденном случае, когда $e = 0$, а параметр α удовлетворяет строгим неравенствам $0 < \alpha < 1$ (первые три уравнения), имеем

$$\frac{d^2 \bar{\delta}}{d\nu^2} + \omega^2 \bar{\delta} = 0. \tag{1.12}$$

Это уравнение описывает малые порождающие колебания спутника на круговой орбите в окрестности положения равновесия $\bar{\delta} = 0$. Его легко получить из (1.1) с помощью предельного перехода $e \rightarrow 0$ и последующего разложения оставшихся функций в ряд по δ .



Случай $\alpha = 1$ стоит особняком. Его предельное уравнение ($e = 0$) имеет вид

$$\frac{d^2\bar{\delta}}{d\nu^2} + \omega^2\bar{\delta} = 4 \sin \nu, \quad (1.13)$$

отличный от (1.12). Уравнение (1.13) нельзя получить из (1.1) с помощью предельного перехода $e \rightarrow 0$ и последующего удержания членов порядка δ , поскольку указанная последовательность действий предполагает выполнения условия $\alpha < 1$, так как члены уравнения (1.1), содержащие эксцентриситет e сомножителем, должны стремиться к нулю быстрее, чем δ . Уравнение (1.13) можно получить из (1.1), выделяя главные члены порядка эксцентриситета — δ'' , $\omega^2\delta$ и $4e \sin \nu$ (напомним, что $\delta = e\bar{\delta}$).

Заметим, что уравнение (1.13), в отличие от (1.12), нельзя рассматривать как уравнение малых колебаний спутника на круговой орбите. Это уравнение описывает (в первом приближении по малому параметру e) некоторые малые колебания спутника на слабоэллиптической орбите, причем эти колебания никак не связаны с его относительным равновесием, так как ни уравнение (1.10), ни его предельный случай (1.13) не имеют решения $\bar{\delta} = \text{const}$.

Исследуем области фазового пространства, отвечающие уравнениям регулярного случая. С этой целью рассмотрим отображение фазового пространства на себя

$$\delta = e^\alpha \bar{\delta}, \quad \delta' = e^\alpha \bar{\delta}', \quad e \ll 1, \quad (1.14)$$

варьируя параметр α в пределах от нуля до бесконечности.

Пусть

$$K[a, b] = \left\{ \bar{\delta}, \bar{\delta}' : a^2 \leq \bar{\delta}^2 + \bar{\delta}'^2 \leq b^2 \right\}$$

есть кольцо, принадлежащее фазовому пространству. Здесь a — его внутренний радиус, b — внешний радиус. Полагаем, что $a, b \sim 1$. В этом случае кольцо $K[a, b]$ будет представлять собой множество точек фазового пространства переменных $\bar{\delta}, \bar{\delta}'$, отстоящих от начала координат на расстояниях порядка единицы.

Очевидно, что при каждом фиксированном α отображение (1.14) порождает преобразование кольца в кольцо:

$$K[a, b] \rightarrow K[e^\alpha a, e^\alpha b].$$

Кольцо $K[e^\alpha a, e^\alpha b]$ соответствует области в фазовом пространстве исходных переменных δ', δ , удаленной от начала координат на величину порядка e^α .

Открытому интервалу $1 < \alpha < +\infty$ соответствует отображение кольца во внутренность круга радиуса eb ($e^\alpha \rightarrow 0$ при $\alpha \rightarrow \infty$, если $e < 1$):

$$K[a, b] \rightarrow K[0, eb].$$

Интервалу $1/3 < \alpha < 1$ отвечает отображение $K[a, b] \rightarrow K[ea, e^{1/3}b]$, а интервалу $0 < \alpha < 1/3$ — отображение $K[a, b] \rightarrow K[e^{1/3}a, b]$.

Если нанести все эти образы кольца $K[a, b]$ на фазовую плоскость, то получим некоторое семейство \mathfrak{G} колец, которое схематически можно представить набором соответствующих отрезков оси δ (см. рис. 1). Кольцо $K[m, n]$ представлено здесь отрезком $[m, n]$. Из рисунка следует, что

$$K[ea, eb] = K[0, eb] \cap K[ea, e^{1/3}b], \quad K[e^{1/3}a, e^{1/3}b] = K[ea, e^{1/3}b] \cap K[e^{1/3}a, b].$$



Это значит, что «пограничное» множество $K[ea, eb]$, отвечающее случаю $\alpha = 1$, принадлежит также областям фазового пространства, для которых $1 < \alpha < \infty$ и $1/3 < \alpha < 1$. Аналогично, «пограничное» множество $K[e^{1/3}a, e^{1/3}b]$, отвечающее случаю $\alpha = 1/3$, принадлежит областям фазового пространства, для которых $1/3 < \alpha < 1$ и $0 < \alpha < 1/3$.

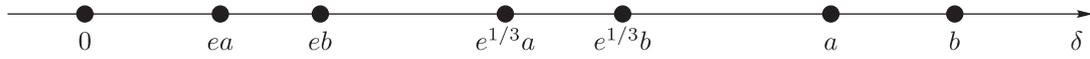


Рис. 1. Семейство \mathfrak{G} .

Из этих рассуждений следует, что окрестность начала координат фазовых переменных δ, δ' (точнее, b -окрестность) разбивается на пять кольцевых областей в зависимости от значений параметра α . Кольцу $K[0, ea]$ отвечает укороченное уравнение (1.11) сингулярного случая. Кольцам $K[ea, e^{1/3}b]$, $K[e^{1/3}a, b]$ отвечают укороченные уравнения (1.9), (1.7) соответственно. «Пограничным» кольцам отвечают несколько уравнений одновременно. Так, кольцо $K[ea, eb]$ связано с уравнениями (1.9), (1.10), (1.11), а кольцо $K[e^{1/3}a, e^{1/3}b]$ — с уравнениями (1.7), (1.8), (1.9). Последнее означает, что исследование решений из области $K[ea, eb]$ либо $K[e^{1/3}a, e^{1/3}b]$ можно проводить с помощью любого из трех уравнений, отвечающих выбранному кольцу, только надо следить за тем, чтобы параметр α был близок к $\alpha = 1$ в первом случае и к $\alpha = 1/3$ — во втором.

Заметим, что решая задачу Коши для уравнения (1.2), необходимо следить за моментом перехода из одной кольцевой области в другую, поскольку этот переход сопровождается сменой типа укороченного уравнения.

Продолжим анализ уравнений регулярного случая, удерживая в редуцированных уравнениях члены более высокого порядка малости по e . Для этого подставим e^α вместо ε в уравнение (1.4), получим

$$\begin{aligned} \bar{\delta}'' + \omega^2 \bar{\delta} &= 4e^{1-\alpha} \sin \nu + e \left[2\bar{\delta}' \sin \nu + \omega^2 \bar{\delta} \cos \nu \right] - 2e^{2-\alpha} \sin 2\nu + \\ &+ e^{2\alpha} \frac{\omega^2 \bar{\delta}^3}{6} - e^2 \left[\bar{\delta}' \sin 2\nu + \omega^2 \bar{\delta} \cos^2 \nu \right] + 4e^{3-\alpha} \cos^2 \nu \sin \nu + \\ &+ e^3 \left[2\bar{\delta}' \cos^2 \nu \sin \nu + \omega^2 \bar{\delta} \cos^3 \nu \right] - 4e^{4-\alpha} \cos^3 \nu \sin \nu - e^{1+2\alpha} \frac{\omega^2 \bar{\delta}^3}{6} \cos \nu. \end{aligned} \tag{1.15}$$

Рассмотрим случай $0 \leq \alpha < 1/3$. Соотношения между малыми параметрами правой части уравнения (1.15) задаются неравенствами

$$e^{2\alpha} > e^{1-\alpha} > e > e^{2\alpha+1} > e^{2-\alpha} > e^2 > e^{3-\alpha} > e^3 > e^{4-\alpha}.$$

Если ограничиться первыми тремя последовательными членами правой части, то, с учетом этих неравенств, получим

$$\bar{\delta}'' + \omega^2 \bar{\delta} = e^{2\alpha} \frac{\omega^2 \bar{\delta}^3}{6} + 4e^{1-\alpha} \sin \nu + e \left[2\bar{\delta}' \sin \nu + \omega^2 \bar{\delta} \cos \nu \right]. \tag{1.16}$$

Дальнейший анализ показывает, что удержание в уравнении (1.4) всех членов до 4-го порядка малости включительно вносит существенные коррективы в уравнение (1.16). К примеру, член 4-го порядка $\omega^2 \bar{\delta}^5 \varepsilon^4 / 120$ приводится, с помощью редукции, к виду, содержащему



малый параметр $e^{4\alpha}$ сомножителем. Этот сомножитель удовлетворяет неравенствам

$$e^{2\alpha} > e^{4\alpha} > e^{1-\alpha} \quad \text{при } 0 < \alpha < \frac{1}{5}, \quad e^{1-\alpha} > e^{4\alpha} > e \quad \text{при } \frac{1}{5} \leq \alpha \leq \frac{1}{4},$$

$$e > e^{4\alpha} > e^{2-\alpha} \quad \text{при } \frac{1}{4} < \alpha < \frac{1}{3},$$

поэтому соответствующий ему член необходимо удерживать в правой части уравнения (1.16). Остальные члены уравнения имеют более высокий порядок малости. Тогда укороченное уравнение запишется в виде совокупности уравнений

$$0 < \alpha \leq \frac{1}{5} \quad \bar{\delta}'' + \omega^2 \bar{\delta} = e^{2\alpha} \frac{\omega^2 \bar{\delta}^3}{6} + e^{4\alpha} \frac{\omega^2 \bar{\delta}^5}{120} + 4e^{1-\alpha} \sin \nu,$$

$$\frac{1}{5} < \alpha \leq \frac{1}{4} \quad \bar{\delta}'' + \omega^2 \bar{\delta} = e^{2\alpha} \frac{\omega^2 \bar{\delta}^3}{6} + 4e^{1-\alpha} \sin \nu + e^{4\alpha} \frac{\omega^2 \bar{\delta}^5}{120},$$

$$\frac{1}{4} < \alpha < \frac{1}{3} \quad \bar{\delta}'' + \omega^2 \bar{\delta} = e^{2\alpha} \frac{\omega^2 \bar{\delta}^3}{6} + 4e^{1-\alpha} \sin \nu + e \left(2\bar{\delta}' \sin \nu + \omega^2 \bar{\delta} \cos \nu \right).$$

Член шестого порядка $\omega^2 \bar{\delta}^7 \varepsilon^6 / 7!$ также оказывает влияние на уравнение (1.16), когда $0 < \alpha \leq 1/7$, увеличивая число укорочений. Окончательно, уточненное уравнение (1.16) представит в виде системы уравнений

$$0 < \alpha \leq \frac{1}{7} \quad \bar{\delta}'' + \omega^2 \bar{\delta} = e^{2\alpha} \frac{\omega^2 \bar{\delta}^3}{6} + e^{4\alpha} \frac{\omega^2 \bar{\delta}^5}{120} + e^{6\alpha} \frac{\omega^2 \bar{\delta}^7}{7!},$$

$$\frac{1}{7} < \alpha \leq \frac{1}{5} \quad \bar{\delta}'' + \omega^2 \bar{\delta} = e^{2\alpha} \frac{\omega^2 \bar{\delta}^3}{6} + e^{4\alpha} \frac{\omega^2 \bar{\delta}^5}{120} + 4e^{1-\alpha} \sin \nu,$$

$$\frac{1}{5} < \alpha \leq \frac{1}{4} \quad \bar{\delta}'' + \omega^2 \bar{\delta} = e^{2\alpha} \frac{\omega^2 \bar{\delta}^3}{6} + 4e^{1-\alpha} \sin \nu + e^{4\alpha} \frac{\omega^2 \bar{\delta}^5}{120},$$

$$\frac{1}{4} < \alpha < \frac{1}{3} \quad \bar{\delta}'' + \omega^2 \bar{\delta} = e^{2\alpha} \frac{\omega^2 \bar{\delta}^3}{6} + 4e^{1-\alpha} \sin \nu + e \left(2\bar{\delta}' \sin \nu + \omega^2 \bar{\delta} \cos \nu \right).$$

На этом закончим работу с уравнением (1.16). Если в укороченном уравнении удерживать большее число членов (четыре, пять членов, и так далее), то потребуется последующая его корректировка с учетом членов четвертого, пятого, шестого (и выше) порядков по e , ε . Основная причина такого эффекта состоит в том, что правая часть уравнения (1.3) содержит ряд

$$\omega^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \varepsilon^{2k} \bar{\delta}^{2k+1},$$

каждый член которого влияет на укороченное уравнение, разбивая фиксированный интервал $(0, 1/3)$ изменения α на все более мелкие части и увеличивая число укороченных уравнений. Вызвано это тем, что $\varepsilon^{2k} = e^{2k\alpha}$ стремится к единице при $\alpha \rightarrow 0$, поэтому каждый член этого ряда проявляет себя как один из главных членов разложения.

Итак, число укороченных уравнений резко возрастает с ростом числа удерживаемых членов, что весьма затрудняет анализ системы. Сложность исследований связана также с *нетейлоровским* разложением правой части уравнения в ряд по малому параметру e и с принципиальной невозможностью приведения такого ряда к стандартному виду теории возмущений. В самом деле, рассмотрим, к примеру, укороченное уравнение, отвечающее

интервалу $(1/4, 1/3)$ изменения α . Оно содержит малые параметры вида $e^{2\alpha}$, $e^{1-\alpha}$, e . Стандартное представление правой части предполагает наличие малого параметра Δ , удовлетворяющего условиям

$$e^{2\alpha} = \Delta^n, \quad e^{1-\alpha} = \Delta^m, \quad e = \Delta^p,$$

где n, m, p — целые числа, подчиненные неравенствам $n < m < p$. Отсюда явствует, что

$$\alpha = \frac{p - m}{3p - n - 2m},$$

поэтому α — рациональное число. Следовательно, при иррациональном значении α приведение последовательности $e^{2\alpha}$, $e^{1-\alpha}$, e к стандартному виду невозможно.

Предельное уравнение имеет вид линейного осциллятора

$$\bar{\delta}'' + \omega^2 \bar{\delta} = 0. \tag{1.17}$$

Пусть $\alpha = 1/3$. Положим $\Delta = e^{1/3}$, тогда укороченное уравнение, содержащее три главных члена разложения, имеет вид

$$\bar{\delta}'' + \omega^2 \bar{\delta} = \Delta^2 \left(4 \sin \nu + \frac{\omega^2}{6} \bar{\delta}^3 \right) + \Delta^3 \left(2 \bar{\delta}' \sin \nu + \omega^2 \bar{\delta} \cos \nu \right) - \Delta^4 \frac{\omega^2}{120} \bar{\delta}^5.$$

Правая часть этого уравнения приведена к стандартному виду теории возмущений, предельное уравнение имеет вид (1.17).

Оставшийся случай $1/3 < \alpha \leq 1$ исследуется аналогично.

1. Неявный вид нелинейной редукции (α). Исследуем редукции, представленные в неявном виде. Для того чтобы получить уравнение относительно кривых редукции, наложим дополнительное требование на параметр μ : порядок его малости должен быть постоянной величиной во всей области изменения величин e, ε за исключением малой окрестности прямой $\varepsilon = 0$. Положим, к примеру, этот порядок равным $2/3$. Тогда параметр μ должен удовлетворять условию полосы

$$0 \leq \frac{e}{\varepsilon} \leq Ae^{2/3} + D\varepsilon^{2/3} \tag{1.18}$$

при условии, что форма, стоящая в правой части неравенства, положительно знакоопределена в положительном конусе $\varepsilon > 0, e > 0$.

Кривые редукции определим равенством

$$f(e, \varepsilon) \equiv e - \varepsilon \left(Ae^{2/3} + D\varepsilon^{2/3} \right) = 0, \tag{1.19}$$

описывающим одну из границ области (1.18) (другая граница — ось $e = 0$).

На рисунке 2 изображено семейство кривых, описываемых уравнением (1.19), когда $A = 1$, а D меняется в пределах от 100 безразмерных единиц до малых отрицательных значений. Кривые покрывают всю плоскость малых параметров, при этом форма

$$\left(e^{2/3} + D\varepsilon^{2/3} \right)$$

будет положительно определенной при $D > 0$ и знакопеременной, если $D < 0$. При $D > 0$ кривые редукции закрывают область, ограниченную сверху кривой $\varepsilon = e^{1/3}$, отвечающей



нулевому значению параметра D . В этой области вдоль каждой кривой семейства порядок малости параметра μ равен $2/3$. Более того, всюду выше любой из этих кривых μ имеет тот же порядок малости, так как выполняется условие полосы (1.18).

Семейство кривых, отвечающее отрицательным значениям D , принадлежит области, расположенной выше кривой $\varepsilon = e^{1/3}$. Вдоль любой из этих кривых условие полосы (1.18) при $A = 1$, $D < 0$ теряет силу как определение порядка малости μ . Этот же вывод следует из поведения кривых: они не проходят через нуль и поэтому не могут задавать порядок малости μ в окрестности нуля.

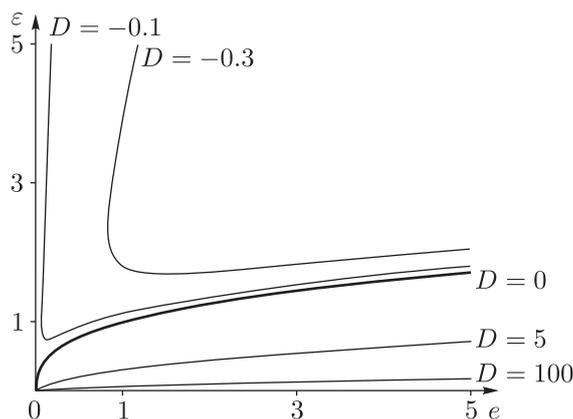


Рис. 2. Кривые редукции при $A = 1$.

Получим явную зависимость ε от e , ограничиваясь положительными значениями параметра D . Разрешим уравнение (1.19) относительно ε , рассматривая A , D как произвольные параметры. Легко видеть, что $f'_\varepsilon(e, \varepsilon) = 0$ в точке $e = \varepsilon = 0$, поэтому теорема о неявной функции не применима.

Воспользуемся методом многоугольника Ньютона. Положим $\varkappa = \varepsilon^{1/3}$, $\lambda = e^{1/3}$. Тогда уравнение (1.19) примет вид

$$g(\varkappa, \lambda) \equiv A\varkappa^3\lambda^2 + D\varkappa^5 - \lambda^3 = 0. \quad (1.20)$$

Будем искать решение $\varkappa = \varkappa(\lambda)$ в виде

$$\varkappa = c_1\lambda^{\alpha_1} + c_2\lambda^{\alpha_2} + \dots, \quad \alpha_2 > \alpha_1.$$

Определим α_1 , исходя из условия тождественного обращения уравнения (1.20) в нуль при подстановке в него искомого решения:

$$A\lambda^2(c_1\lambda^{\alpha_1} + c_2\lambda^{\alpha_2} + \dots)^3 + D(c_1\lambda^{\alpha_1} + c_2\lambda^{\alpha_2} + \dots)^5 - \lambda^3 \equiv 0.$$

Раскрывая скобки, видим, что наименьшую степень имеет один или несколько членов, входящих в сумму

$$Dc_1^5\lambda^{5\alpha_1} + A\lambda^2c_1^3\lambda^{3\alpha_1} - \lambda^3.$$

Чтобы уравнение (1.20) было тождественно равно нулю, необходимо, чтобы член с наименьшим показателем степени не был единственным, так как иначе этому члену не с чем сократиться. Поэтому α_1 следует выбирать так, чтобы среди показателей

$$5\alpha_1, 2 + 3\alpha_1, 3 \quad (1.21)$$

параметра λ по крайней мере два имели одно и то же значение, остальные показатели должны иметь большие значения. Приравнявая между собой пары показателей, получим следующее множество возможных значений α_1 :

$$\alpha_1 = 1, \frac{3}{5}, \frac{1}{3}.$$

Легко видеть, что только параметр $\alpha_1 = 3/5$ удовлетворяет дополнительному условию минимальности значений соответствующей пары $\{5\alpha_1, 3\}$ на множестве показателей (1.21). Очевидно, что уравнение относительно c_1 имеет вид

$$Dc_1^5\lambda^3 - \lambda^3 = 0.$$

Отсюда следует, что $c_1 = D^{-1/5}$, поэтому

$$\varepsilon = \left(\frac{e}{D}\right)^{3/5} + \dots,$$

если $D \neq 0$. Для случая $D = 0$ имеем $\varepsilon = e^{1/3}$.

Построим следующее приближение для кривой $\varepsilon = \varepsilon(e)$, когда $D \neq 0$. Для этого положим

$$\varkappa = D^{-1/5}\lambda^{3/5} + z$$

и введем дополнительное обозначение $\theta = \lambda^{1/5}$. В новых переменных уравнение (1.20) примет вид

$$Dz^5 + 5D^{4/5}\theta^3z^4 + (10D^{3/5}\theta^6 + A\theta^{10})z^3 + (10D^{2/5}\theta^9 + 3AD^{-1/5}\theta^{13})z^2 + (5D^{1/5}\theta^{12} + 3AD^{-2/5}\theta^{16})z + D^{-3/5}A\theta^{19} = 0.$$

Ищем решение z в виде

$$z = c\theta^\gamma.$$

Если теперь подставить это выражение в последнее уравнение и выделить в каждом из шести его мономов главные слагаемые, получим совокупность членов вида

$$Dc^5\theta^{5\gamma}, 5D^{4/5}c^4\theta^{3+4\gamma}, 10D^{3/5}c^3\theta^{6+3\gamma}, 10D^{2/5}c^2\theta^{9+2\gamma}, 5D^{1/5}c\theta^{12+\gamma}, D^{-3/5}A\theta^{19}.$$

Несложно видеть, что при $\gamma = 7$ последние два слагаемых имеют одинаковый показатель степени величины θ , минимальный на множестве всех показателей θ для выписанных членов. Следовательно, чтобы удовлетворить алгебраическому уравнению относительно z , необходимо сумму последних двух членов положить равной нулю. В результате имеем уравнение относительно c :

$$5D^{1/5}c\theta^{12+\gamma} + D^{-3/5}A\theta^{19} = 0, \quad \gamma = 7.$$

Отсюда следует, что

$$c = -\frac{A}{5}D^{-4/5}, \quad \varkappa = D^{-1/5}\lambda^{3/5} - \frac{A}{5}D^{-4/5}\lambda^{7/5},$$

поэтому

$$\varepsilon = D^{-3/5}e^{3/5} - \frac{3A}{5}D^{-6/5}e^{13/15} + \dots \tag{1.22}$$



Получим уравнения колебаний спутника вдоль кривых редукции. Для этого подставим найденное значение ε в правую часть уравнения (1.3) и разложим ее в ряд по e . Будем иметь

$$\begin{aligned} \bar{\delta}'' + \omega^2 \bar{\delta} = & 4D^{3/5} \sin \nu e^{2/5} + \frac{12}{5} A \sin \nu e^{2/3} + \frac{36}{25} \frac{A^2}{D^{3/5}} \sin \nu e^{14/15} + \\ & + \left(2\bar{\delta}' \sin \nu + \omega^2 \bar{\delta} \cos \nu \right) e + \left(\frac{108}{125} \frac{A^3}{D^{6/5}} \sin \nu + \frac{\omega^2 \bar{\delta}^3}{6D^{6/5}} \right) e^{6/5} + \dots \end{aligned} \quad (1.23)$$

Если рассматривать кривые, изображенные на рисунке 2, то следует положить $A = 1$, при этом D будет параметром редукции. Заметим, что он входит в знаменатель многих выражений правой части, при этом показатель его степени непрерывно растет. Следовательно, его влияние сингулярно в окрестности точки $D = 0$: с уменьшением этого параметра необходимо удерживать члены все более высокого порядка малости по e . Предельная кривая $\varepsilon = e^{1/3}$, отвечающая значению $D = 0$, является особой для уравнения Белецкого: вид уравнения вдоль этой кривой резко меняется и принимает форму

$$\bar{\delta}'' + \omega^2 \bar{\delta} = e^{2/3} \left(4 \sin \nu + \frac{\omega^2 \bar{\delta}^3}{6} \right) + e \left(2\bar{\delta}' \sin \nu + \omega^2 \bar{\delta} \cos \nu \right) - e^{4/3} \frac{\omega^2}{120} \bar{\delta}^5 + \dots \quad (1.24)$$

Кроме того, если ограничить уравнение на кривые, расположенные в области $D < 0$, то уравнение теряет силу асимптотического описания движений при $e \rightarrow 0$, $\varepsilon \rightarrow 0$, так как кривые редукции не проходят через тривиальную точку $e = \varepsilon = 0$.

Заметим, что первые члены правой части уравнений (1.23), (1.24) образованы из выражения $4\mu \sin(\nu)$, поэтому они должны иметь порядок малости, равный $2/3$. Справедливость этого замечания очевидна для уравнения (1.24), однако уравнение (1.23) указывает на то, что порядок малости по e равен $2/5$. В этом нет противоречия, так как вдоль кривой (1.22) с асимптотикой $\varepsilon = e^{3/5}$ параметр μ имеет два порядка малости: $\gamma_1 = 2/5$ (по e) и $\gamma_2 = 2/3$ (по ε). Таким образом, кривые $\varepsilon = e^{1/3}$ и $\varepsilon = e^{3/5}$ находятся в «двойственном» отношении: вдоль них $\mu(e, \varepsilon)$ имеет один и тот же порядок малости, равный $2/3$.

2. Неявный вид нелинейной редукции (β). Рассмотрим теперь однопараметрическое семейство кривых, обобщающее нелинейную редукцию $\varepsilon = e^\alpha$, исследованную выше. Для этого положим

$$F(e, \varepsilon) \equiv e - \frac{\varepsilon (e^{1-\alpha} + A\varepsilon^{1-\alpha})}{(1+A)} = 0, \quad A \geq 0. \quad (1.25)$$

Здесь A считаем заданной величиной, α — параметр редукции.

Из определения порядка малости функции двух переменных следует, что порядок величины $\mu = e/\varepsilon$ равен $(1 - \alpha)$ в замкнутой области

$$0 \leq e/\varepsilon \leq \frac{(e^{1-\alpha} + A\varepsilon^{1-\alpha})}{(1+A)}, \quad (1.26)$$

ограниченной кривой $e = 0$ и кривой (1.25).

Случай $\alpha > 1$ отвечает сингулярным значениям μ , поэтому полагаем $\alpha \in (-\infty, 1]$. При $A = 0$ из представления (1.25) следует классическая редукция $\varepsilon = e^\alpha$ с ограничениями в виде $0 < \alpha \leq 1$. Таким образом, обобщенная редукция снимает ограничения на область изменения α , считая нижний предел изменения α равным бесконечности.

На рисунке 3 изображено семейство кривых редукции (1.25) при фиксированном значении параметра A , когда величина α меняется в пределах от $-\infty$ до единицы. При фиксированном значении α область (1.26) расположена выше кривой (1.25).

Получим явное представление кривой $F(e, \varepsilon) = 0$ при $\alpha \in (-\infty, 1)$ (случай $\alpha = 1$ тривиален, так как имеем $e = \varepsilon$). Очевидно, что

$$\frac{\partial F}{\partial \varepsilon} = -\frac{e^{1-\alpha} + A\varepsilon^{1-\alpha}}{1+A} - (1-\alpha)\frac{A}{1+A}\varepsilon^{1-\alpha}, \quad \frac{\partial F}{\partial e} = 1 - \left(\frac{1-\alpha}{1+A}\right)\frac{\varepsilon}{e^\alpha}.$$

Отсюда следует, что производная от F по ε равна нулю при $e = \varepsilon = 0$, в то время как производная от F по e не определена при $e = \varepsilon = 0$, когда $0 < \alpha < 1$. Таким образом, функция $F(e, \varepsilon)$ неаналитична в нуле, поэтому классическая теорема о неявной функции не применима.

Заметим, что производная от F по e , вычисленная вдоль кривой (1.25), принимает конечное значение в нуле:

$$\frac{\partial F}{\partial e} = 1 - \frac{\varepsilon}{e} \frac{1-\alpha}{1+A} e^{1-\alpha} = 1 - \frac{1-\alpha}{1+A \left[\frac{1+A}{e^{1-\alpha} + A\varepsilon^{1-\alpha}} \right]^{1-\alpha}} \rightarrow 1 \quad \text{при } e, \varepsilon \rightarrow 0.$$

Это обстоятельство наводит на мысль, что возможно представление e от ε в виде ряда по ε . Итак, будем искать $e(\varepsilon)$ в виде формального решения уравнения (1.25), которое мы запишем в виде

$$e - \frac{\varepsilon}{(1+A)} e^{1-\alpha} = \frac{A}{1+A} \varepsilon^{2-\alpha}, \quad A > 0. \tag{1.27}$$

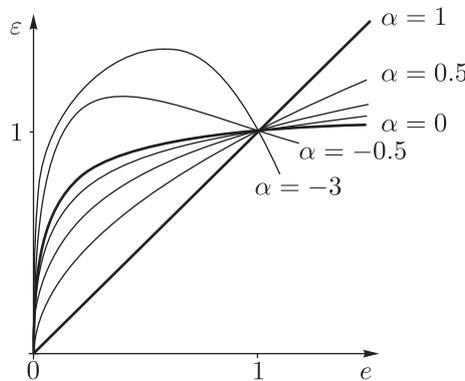


Рис. 3. Кривые редукции при $A = 0.1$ и $\alpha \leq 1$.

Заметим, что если из левой части уравнения отбросить второй член, то решение уравнения находится сразу:

$$e = \frac{A}{1+A} \varepsilon^{2-\alpha}.$$

При подстановке этой формулы в уравнение (1.27) члены порядка $\varepsilon^{\alpha^2-3\alpha+3}$ останутся некомпенсированными. Учитывая, что при $\alpha < 1$

$$\varepsilon^{\alpha^2-3\alpha+3} = o(\varepsilon^{2-\alpha}),$$



приходим к выводу, что полученная формула для e является первым членом формального ряда решения исследуемого уравнения. Если взять выражение

$$\frac{A^{1-\alpha}}{(1+A)^{2-\alpha}} \varepsilon^{\alpha^2-3\alpha+3}$$

в качестве второго члена ряда, получим, что некомпенсированные члены имеют порядок малости $\alpha^2 - 3\alpha + 3 + (\alpha - 1)^2$, более высокий, чем $(\alpha^2 - 3\alpha + 3)$. Следовательно, приближение искомого решения указанными двумя членами ряда имеет асимптотический характер.

Продолжая этот процесс далее, получим следующий вид формального решения (нетейлоровское разложение):

$$e = \frac{A}{1+A} \varepsilon^{2-\alpha} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n \varepsilon^{\alpha^2-3\alpha+3+n(\alpha-1)^2}. \quad (1.28)$$

Здесь

$$a_0 = \frac{A^{1-\alpha}}{(1+A)^{2-\alpha}}, \quad a_1 = (1-\alpha) \frac{A^{1-2\alpha}}{(1+A)^{3-2\alpha}}, \quad a_2 = \frac{(1-\alpha)(2-3\alpha)}{2} \frac{A^{1-3\alpha}}{(1+A)^{4-3\alpha}}, \dots$$

Ограничим уравнение Белецкого на кривые редукции (1.28), удерживая первые два члена ряда (1.28) и первые пять главных членов правой части уравнения:

$$\text{при } -\infty < \alpha < \frac{3-\sqrt{5}}{2}$$

$$\begin{aligned} \bar{\delta}'' + \omega^2 \bar{\delta} = 4 & \left[\frac{A}{1+A} \varepsilon^{1-\alpha} + \frac{A^{1-\alpha}}{(1+A)^{2-\alpha}} \varepsilon^{\alpha^2-3\alpha+2} \right] \sin \nu + \frac{A}{1+A} \varepsilon^{2-\alpha} \left(2\bar{\delta}' \sin \nu + \omega^2 \bar{\delta} \cos \nu \right) + \\ & + \frac{\varepsilon^2}{6} \omega^2 \bar{\delta}^3 + \frac{A^{1-\alpha}}{(1+A)^{2-\alpha}} \varepsilon^{\alpha^2-3\alpha+3} \left(2\bar{\delta}' \sin \nu + \omega^2 \bar{\delta} \cos \nu \right), \end{aligned}$$

$$\text{при } \frac{3-\sqrt{5}}{2} \leq \alpha < \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} \bar{\delta}'' + \omega^2 \bar{\delta} = 4 & \left[\frac{A}{1+A} \varepsilon^{1-\alpha} + \frac{A^{1-\alpha}}{(1+A)^{2-\alpha}} \varepsilon^{\alpha^2-3\alpha+2} \right] \sin \nu + \frac{A}{1+A} \varepsilon^{2-\alpha} \left(2\bar{\delta}' \sin \nu + \omega^2 \bar{\delta} \cos \nu \right) + \\ & + \frac{A^{1-\alpha}}{(1+A)^{2-\alpha}} \varepsilon^{\alpha^2-3\alpha+3} \left(2\bar{\delta}' \sin \nu + \omega^2 \bar{\delta} \cos \nu \right) + \frac{\varepsilon^2}{6} \omega^2 \bar{\delta}^3, \end{aligned}$$

$$\text{при } \frac{1}{2} \leq \alpha < 1$$

$$\begin{aligned} \bar{\delta}'' + \omega^2 \bar{\delta} = 4 & \left[\frac{A}{1+A} \varepsilon^{1-\alpha} + \frac{A^{1-\alpha}}{(1+A)^{2-\alpha}} \varepsilon^{\alpha^2-3\alpha+2} \right] \sin \nu + \frac{A}{1+A} \varepsilon^{2-\alpha} \left(2\bar{\delta}' \sin \nu + \omega^2 \bar{\delta} \cos \nu \right) + \\ & + \frac{A^{1-\alpha}}{(1+A)^{2-\alpha}} \varepsilon^{\alpha^2-3\alpha+3} \left(2\bar{\delta}' \sin \nu + \omega^2 \bar{\delta} \cos \nu \right) - 2 \left(\frac{A}{1+A} \right)^2 \varepsilon^{3-2\alpha} \sin 2\nu. \end{aligned}$$

Итак, исследуемое уравнение распадается на совокупность укороченных уравнений, в зависимости от области изменения α . Правые части уравнений представлены нетейлоровским рядом по ε .



Заключение. Анализ редукций уравнения плоских колебаний спутника на слабо-эллиптической орбите приводит к следующим выводам.

1°. Редуцированное уравнение не эквивалентно исходному. Как следствие, редукция ведет к потере информации о колебаниях системы, так как редуцированные уравнения не пригодны для исследования движений вдоль произвольных кривых, принадлежащих пространству малых параметров и не включенных в семейство редукции.

2°. Редуцированное уравнение колебаний распадается, как правило, на семейство укороченных уравнений в зависимости от области изменения параметра редукции; число таких уравнений резко возрастает с увеличением числа удерживаемых главных членов разложения.

3°. Представление укороченных уравнений в виде ряда по малому параметру часто имеет нетейлоровский вид, что весьма затрудняет применение методов теории возмущений в приближениях высокого порядка.

4°. Редуцированные укороченные уравнения малых колебаний отвечают разным кольцевым областям фазового пространства. Поэтому необходимо следить за моментом перехода из одной кольцевой области в другую, поскольку этот переход сопровождается сменой типа укороченного уравнения, и сшивать решения в момент перехода.

5°. При редукции невозможно исследовать бифуркации решений модельных уравнений теории возмущений, за исключением вырожденного случая, когда семейство кривых редукции покрывает бифуркационную поверхность (см. [23]).

2. Резонансные колебания спутника при независимых малых параметрах

2.1. Колебания при резонансе $\omega - 1 = 0$

Исследуем малые резонансные колебания спутника, описываемые уравнением (1.2), когда частота ω равна частоте вынуждающей силы $4\mu \sin \nu$, то есть $\omega = 1$.

Если $\mu = e/\varepsilon$ порядка единицы, то есть удовлетворяет условию полосы

$$0 \leq \mu \leq K,$$

где K — любое конечное число, сколь угодно большое, то, проводя усреднение по быстрой переменной ν с учетом медленного изменения резонансной фазы, получим уравнение с неопределенным временным средним. Дело в том, что интеграл, описывающий временное среднее, содержит члены вида $\cos(\theta \pm T)$, $\cos(\theta + 3T)$, предел которых не существует при $T \rightarrow \infty$ (T — верхний предел интегрирования в формуле временного среднего). Причина такого положения дел — наличие секулярных членов в решении порождающего уравнения

$$\frac{d^2 \bar{\delta}}{d\nu^2} + \omega^2 \bar{\delta} = 4\mu \sin \nu.$$

Для того чтобы обойти эти сложности, изменим условие полосы, рассматривая μ как малый параметр порядка $(1 - \gamma)$, где γ — любое число, меньшее единицы. Это значит, что μ удовлетворяет неравенству

$$0 \leq \mu \leq K \frac{(e^{1-\gamma} + A\varepsilon^{1-\gamma})}{(1 + A)}, \quad (2.1)$$

задающему некоторую замкнутую область в плоскости малых параметров e, ε . Эта область лежит выше кривой

$$\frac{e}{\varepsilon} = K \frac{(e^{1-\gamma} + A\varepsilon^{1-\gamma})}{(1+A)}, \quad (2.2)$$

которая похожа на кривую (1.25). Область сингулярного изменения μ расположена ниже этой кривой. Уменьшая γ при фиксированном K , имеем увеличение этой области вследствие возрастающего порядка касания кривой (2.2) с осью ε в нуле и увеличения максимума кривой. Однако при больших K кривая (2.2) сильно прижимается к оси e . Таким образом, при $K \gg 1$ всюду в любой области, расположенной выше кривой (2.2), параметр μ будет иметь порядок малости $(1-\gamma)$, за исключением очень узкой окрестности оси $\varepsilon = 0$, лежащей ниже кривой (2.2).

Будем считать μ и ε независимыми малыми величинами, принадлежащими замкнутой области в пространстве параметров μ, ε , описываемой неравенством (2.1). Тогда e , как зависимый параметр, вычисляется по формуле $e = \mu\varepsilon$. Очевидно, что e — величина второго порядка малости. Уравнение плоских колебаний спутника, с точностью до членов третьего порядка малости, примет вид

$$\bar{\delta}'' + \bar{\delta} = 4\mu \sin \nu + \mu\varepsilon [2\bar{\delta}' \sin \nu + \bar{\delta} \cos \nu] + \frac{\varepsilon^2}{6}\bar{\delta}^3. \quad (2.3)$$

Порождающее уравнение описывает гармонические колебания:

$$\bar{\delta}'' + \bar{\delta} = 0.$$

Введем новые координаты α, θ по формулам

$$\bar{\delta} = \alpha \cos(\theta + \nu), \quad \bar{\delta}' = -\alpha \sin(\theta + \nu).$$

Тогда уравнения движения примут вид

$$\alpha' = -f(\theta, \nu) \sin(\theta + \nu), \quad \theta' = -\frac{1}{\alpha} f(\theta, \nu) \cos(\theta + \nu).$$

Здесь

$$f(\theta, \nu) = 4\mu \sin \nu - \mu\varepsilon\alpha [2 \sin \nu \sin(\theta + \nu) - \cos \nu \cos(\theta + \nu)] + \frac{\varepsilon^2}{6}\alpha^3 \cos(\theta + \nu)^3.$$

Усредненные уравнения первого приближения приводить не будем, так как они описывают хорошо известные колебания при линейном резонансе

$$\bar{\delta}'' + \bar{\delta} = 4\mu \sin \nu, \quad (2.4)$$

для которого характерно неограниченное линейное нарастание амплитуды колебаний по углу $\bar{\delta}$.

Рассмотрим второе приближение метода усреднения. Используя символику усреднения стандартной по Боголюбову системы со многими малыми параметрами и считая $x = (\alpha, \theta)$, получим

$$\frac{dx}{d\nu} = \mu X_{01}(x, \nu) + \varepsilon^2 X_{20}(x, \nu) + \mu\varepsilon X_{11}(x, \nu).$$

Здесь

$$X_{01}(x) = \left\| \begin{array}{l} -4 \sin \nu \sin (\theta + \nu) \\ -\frac{4}{\alpha} \sin \nu \cos (\theta + \nu) \end{array} \right\|, \quad X_{20}(x) = \left\| \begin{array}{l} -\frac{\alpha^3}{6} \cos^3 (\theta + \nu) \sin (\theta + \nu) \\ -\frac{\alpha^2}{6} \cos^4 (\theta + \nu) \end{array} \right\|,$$

$$X_{11}(x) = \left\| \begin{array}{l} \alpha (2 \sin \nu \sin (\theta + \nu) - \cos \nu \cos (\theta + \nu)) \sin (\theta + \nu) \\ (2 \sin \nu \sin (\theta + \nu) - \cos \nu \cos (\theta + \nu)) \cos (\theta + \nu) \end{array} \right\|.$$

Проводя усреднение по схеме, описанной в работе [23], получим усредненные уравнения второго приближения в переменных α, θ в виде

$$\begin{cases} \alpha' = -2\mu \cos \theta, \\ \theta' = 2\mu \frac{\sin \theta}{\alpha} - \varepsilon^2 \frac{\alpha^2}{16}. \end{cases} \quad (2.5)$$

Система уравнений (2.5) имеет первый интеграл

$$\varepsilon^2 \alpha^4 - 128\alpha\mu \sin \theta = C. \quad (2.6)$$

Фазовый портрет системы в переменных α, θ для значений параметров $\mu = 0.004, \varepsilon = 0.01$ изображен на рисунке 4. Жирным выделена сепаратриса, отвечающая значению константы $C = 0$.

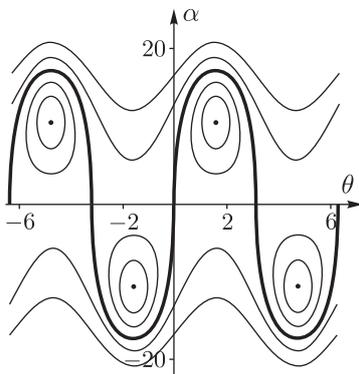


Рис. 4. Фазовый портрет при резонансе $\omega = 1$.

Стационарным решениям $\alpha = \alpha_*, \theta = \theta_*$ отвечают уравнения

$$-2\mu \cos \theta_* = 0, \quad 2\mu \frac{\sin \theta_*}{\alpha_*} - \varepsilon^2 \frac{\alpha_*^2}{16} = 0.$$

Отсюда следует, что

$$\theta_* = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad \alpha_* = \pm 2 \sqrt[3]{\frac{4\mu}{\varepsilon^2}}. \quad (2.7)$$

Константа C_* , отвечающая положению равновесия $\alpha = \alpha_*, \theta = \theta_*$, может быть выражена как

$$C_* = -192 \sqrt[3]{4\mu^4 \varepsilon^{-2/3}}.$$

Кривая сепаратрисы имеет две ветви:

$$\alpha = 0, \quad \alpha = \pm 4 \sqrt[3]{\frac{2\mu}{\varepsilon^2}} \sin \theta.$$

Отсюда следует, что максимальное значение α^* амплитуды колебаний в зоне либрации описывается равенством

$$|\alpha^*| = 4 \sqrt[3]{\frac{2\mu}{\varepsilon^2}} = 4 \frac{\sqrt[3]{2e}}{\varepsilon}. \quad (2.8)$$

Теперь можем сделать выводы. Малые резонансные колебания спутника в окрестности особой точки $\bar{\delta} = \bar{\delta}' = 0$ имеют неограниченный характер, если колебания исследовать в линейном приближении (первое приближение метода усреднения). Нелинейные члены, входящие во второе приближение метода усреднения, меняют характер колебаний. Во-первых, появляются зоны либрации, в которых амплитуда колебаний α и резонансная фаза θ меняются со временем периодически в окрестности стационарной точки (2.7), достигая максимальных значений по амплитуде (2.8) при $\theta = \theta_*$. Во-вторых, движения спутника могут быть чисто вращательными, отвечающими непрерывному росту резонансной фазы при ограниченных периодических колебаниях амплитуды α .

Как следует из формулы (2.8), амплитуда колебаний имеет по μ и ε порядок малости, равный $(-1/3)$. Это значит, что переменная $\delta = \varepsilon \bar{\delta}$ достигает величин порядка $1/3$ по e , или $2/3$ по μ и ε .

В то же время, вдоль кривой $\mu = \varepsilon^2$ ($e = \varepsilon^3$), принадлежащей области (2.1), максимальная амплитуда α^* либрационных колебаний и значение α_* стационарной точки (2.7) не зависят от ε и, следовательно, размах колебаний по углу δ будет гораздо меньше — порядка ε . Более того, вдоль кривой $\mu = \varepsilon^{2+\gamma}$ ($\gamma > 0$) из области (2.1) амплитуда колебаний α стремится к нулю, когда $\varepsilon \rightarrow 0$! Такое «аномальное» поведение системы в окрестности сингулярной точки $\delta = \delta' = 0$ объясняется преобладанием (вдоль указанной кривой) нелинейного члена $\varepsilon^2 \bar{\delta}^3 / 6$ над слагаемыми $4\mu \sin \nu$, $\mu \varepsilon [2\bar{\delta}' \sin \nu + \bar{\delta} \cos \nu]$, поэтому уравнение колебаний (2.3) принимает вид возмущенного уравнения Дуффинга.

Все это означает, что размах колебаний при резонансе $\omega = 1$ существенно зависит от соотношений между малыми параметрами μ , ε (e , ε соответственно), несмотря на то, что колебания по углу δ зависят только от параметра e ; как следствие, формулы, описывающие эти колебания, могут быть приведены к виду, не содержащему ε явным образом.

Результаты по исследованию резонанса $\omega = 1$ методами усреднения с одним малым параметром e описаны в работе [24]. Сравнительный анализ результатов исследования приводит к следующим выводам.

1. Исследования В. В. Белецкого относятся к случаю $\varepsilon = 1$ (уравнения (2.3), (2.5) совпадают с соответствующими уравнениями из [24] при $\varepsilon = 1$).

2. Как следствие, уравнения (2.5), описывающие колебания во втором приближении метода усреднения с двумя малыми параметрами μ , ε , совпадают с усредненными уравнениями первого приближения цитируемой работы.

3. Исследования колебаний с двумя независимыми малыми параметрами содержат описание новых эффектов, обусловленных влиянием ε : увеличение максимальной амплитуды колебаний α^* в зоне либрации с уменьшением ε (при фиксированном μ), что непосредственно связано с явлением внешнего резонанса в малой окрестности точки $\delta = \delta' = 0$;

наличие «аномальных» кривых в плоскости параметров μ, ε (в плоскости параметров e, ε соответственно).

Отметим также, что подробное исследование влияния параметра ε на резонансные колебания спутника описано в работе [21], когда малые параметры связаны равенством $\varepsilon = e^{1/3}$.

2.2. Колебания при резонансе $2\omega - 1 = 0$

Исследуем колебания спутника в первом и во втором приближениях метода усреднения, когда частота ω его собственных колебаний равна половине частоты вынуждающей силы $4\mu \sin \nu$, то есть $\omega = 1/2$. С этой целью представим уравнение (1.4) в упрощенном виде, предполагая параметр μ величиной нулевого порядка малости: $0 \leq \mu \leq K$, где K — постоянная, достаточно большая величина. Удерживая члены до второго порядка малости включительно, получим:

$$\begin{aligned} \bar{\delta}'' + \omega^2 \bar{\delta} = 4\mu \sin \nu + e \left[2\bar{\delta}' \sin \nu + \omega^2 \bar{\delta} \cos \nu - 2\mu \sin 2\nu \right] + \frac{\varepsilon^2}{6} \omega^2 \bar{\delta}^3 - \\ - e^2 \left[\bar{\delta}' \sin 2\nu + \omega^2 \bar{\delta} \cos^2 \nu - 4\mu \cos^2 \nu \sin \nu \right]. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Здесь, в отличие от резонанса $\omega = 1$, возмущающий член $4\mu \sin \nu$ не является резонансным, поэтому порождающее уравнение берем в виде

$$\bar{\delta}'' + \omega^2 \bar{\delta} = 4\mu \sin \nu.$$

Его решение описывает периодические колебания вида

$$\bar{\delta} = \alpha \cos \varphi + \frac{4\mu}{\omega^2 - 1} \sin \nu, \quad \bar{\delta}' = -\alpha \omega \sin \varphi + \frac{4\mu}{\omega^2 - 1} \cos \nu,$$

где $\varphi = \omega \nu + \varphi_0$.

Используя эти равенства как замену переменных $\bar{\delta}, \bar{\delta}' \rightarrow \alpha, \varphi$, приведем уравнения колебаний (2.9) к следующей форме:

$$\frac{d\alpha}{d\nu} = -\frac{1}{\omega} f(\alpha, \varphi, \nu) \sin \varphi, \quad \frac{d\varphi}{d\nu} = \omega - \frac{1}{\alpha \omega} f(\alpha, \varphi, \nu) \cos \varphi. \quad (2.10)$$

Здесь

$$\begin{aligned} f(\alpha, \varphi, \nu) = e \left[-2\alpha \omega \sin \nu \sin \varphi + \frac{6\mu}{\omega^2 - 1} \sin 2\nu + \omega^2 \alpha \cos \nu \cos \varphi \right] + e^2 \left[\alpha \omega \sin 2\nu \sin \varphi - \right. \\ \left. - \frac{4\mu(1 + 2\mu)}{\omega^2 - 1} \sin \nu \cos^2 \nu - \omega^2 \cos^2 \nu \alpha \cos \varphi \right] + \varepsilon^2 \frac{\omega^2}{6} \left[\alpha \cos \varphi + \frac{4\mu}{\omega^2 - 1} \sin \nu \right]^3. \end{aligned}$$

Вводим в рассмотрение резонансную расстройку $\Delta = 2\omega - 1$ ($\Delta = e\gamma$, $0 \leq \gamma \leq 1$) и резонансную фазу $\theta = 2\varphi - \nu$, медленно меняющуюся со временем. В новых переменных α, θ уравнения колебаний будут иметь вид (2.10) при условии замены φ на $(\theta + \nu)/2$, замене первого слагаемого в уравнении по φ на Δ с удвоением второго слагаемого.

2.2.1. Первое приближение метода усреднения

Для того чтобы получить усредненные уравнения первого приближения, удержим в функции (2.10) члены первого порядка малости. После усреднения правых частей по ν , получим систему уравнений, не содержащую ε :

$$\begin{aligned}\frac{d\alpha}{d\nu} &= -\frac{\omega-2}{4}e\alpha \sin \theta, \\ \frac{d\theta}{d\nu} &= \Delta - \frac{\omega-2}{2}e \sin \theta.\end{aligned}$$

Учитывая, что $\omega = (\Delta + 1)/2$, первый интеграл усредненных уравнений примет вид

$$\alpha^2 [-4\Delta + e \cos \theta (\Delta - 3)] = C. \quad (2.11)$$

Сначала рассмотрим случай строгого резонанса, когда резонансная расстройка Δ равна нулю. Тогда амплитуда колебаний будет зависеть от θ следующим образом:

$$\alpha = \sqrt{-\frac{C}{3e \cos \theta}}.$$

Отсюда следует, что при $\theta = \pi/2 + k\pi$ амплитуда α принимает бесконечные значения, что приводит к недопустимой раскачке колебаний спутника. Можно показать, что амплитуда колебаний растет со временем по экспоненте при любом малом e , поэтому колебания являются параметрическими.

Если изменить частоту ω таким образом, что резонансная расстройка станет отличной от нуля, зона экспоненциального роста колебаний сохранится, а кроме того, появится зона ограниченного изменения α . Действительно, из интеграла (2.11) явствует, что в случае

$$\left| \frac{4\Delta}{(3-\Delta)e} \right| \leq 1 \quad (2.12)$$

амплитуда α стремится к бесконечности при $\theta \rightarrow \theta^*$, при условии, что значение θ^* вычисляется по формуле

$$\cos \theta^* = \frac{4\Delta}{e(\Delta-3)}.$$

Если неравенство (2.12) выполняется с противоположным знаком, колебания имеют ограниченный характер, так как коэффициент, стоящий при α^2 в левой части интеграла (2.11), отличен от нуля при любых значениях θ и e .

Элементарный анализ показывает, что неравенство (2.12) эквивалентно неравенству

$$2\frac{(1-e)}{4-e} < \omega < 2\frac{(1+e)}{4+e},$$

определяющему область параметрического резонанса.



2.2.2. Второе приближение метода усреднения

Исследуем колебания спутника во втором приближении метода усреднения. Чтобы привести уравнения (2.10) к стандартному по Боголюбову виду, введем дополнительные переменные z, ψ по формуле

$$z = \theta - \psi, \quad \psi = \Delta\nu.$$

Тогда уравнения (2.10) примут вид

$$\frac{d\alpha}{d\nu} = -\frac{1}{\omega}F(\alpha, z, \psi, \nu) \sin \frac{z + \psi + \nu}{2}, \quad \frac{dz}{d\nu} = -\frac{2}{\alpha\omega}F(\alpha, z, \psi, \nu) \cos \frac{z + \psi + \nu}{2}, \quad \frac{d\psi}{d\nu} = e\beta,$$

где

$$F(\alpha, z, \psi, \nu) = f\left(\alpha, \frac{z + \psi + \nu}{2}, \nu\right).$$

Полагая вектор-столбец x равным $(\alpha, z, \psi)^T$, преобразуем эти уравнения к следующему виду:

$$\frac{dx}{d\nu} = eX_{01} + \varepsilon^2 X_{20} + e^2 X_{02}.$$

Здесь приняты следующие обозначения (угол $\varphi = (z + \psi + \nu)/2$ использован для сокращения записи):

$$X_{01} = \begin{pmatrix} \left[2\alpha \sin \nu \sin \varphi - \frac{6\mu}{\omega(\omega^2 - 1)} \sin 2\nu - \omega\alpha \cos \nu \cos \varphi \right] \sin \varphi \\ \left[4 \sin \nu \sin \varphi - \frac{12\mu}{\alpha\omega(\omega^2 - 1)} \sin 2\nu - 2\omega \cos \nu \cos \varphi \right] \cos \varphi \\ \beta \end{pmatrix},$$

$$X_{20} = \begin{pmatrix} -\frac{\omega}{6} \left[\alpha \cos \varphi + \frac{4\mu \sin \nu}{\omega^2 - 1} \right]^3 \sin \varphi \\ -\frac{\omega}{3\alpha} \left[\alpha \cos \varphi + \frac{4\mu \sin \nu}{\omega^2 - 1} \right]^3 \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$X_{02} = \begin{pmatrix} \left[\cos^2 \nu \left(\frac{4\mu(1 + 2\mu)}{\omega(\omega^2 - 1)} \sin \nu + \omega\alpha \cos \varphi \right) - \alpha \sin 2\nu \sin \varphi \right] \sin \varphi \\ \left[\cos^2 \nu \left(\frac{8\mu(1 + 2\mu)}{\alpha\omega(\omega^2 - 1)} \sin \nu + 2\omega \cos \varphi \right) - 2 \sin 2\nu \sin \varphi \right] \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Проведя усреднение этих уравнений (см. [23]), содержащих два независимых малых параметра e, ε , получим усредненные уравнения второго приближения, зависящие только от одного малого параметра e :

$$\begin{aligned} \frac{d\beta}{d\nu} &= -\frac{e}{4}(\omega - 2)\beta \sin \theta, \\ \frac{d\theta}{d\nu} &= \Delta - \frac{e}{2}(\omega - 2) \cos \theta - \omega \left[\frac{\beta^2}{8} + \frac{4e^2}{(\omega^2 - 1)^2} \right] - \frac{e^2}{2} \left[\omega - \frac{(\omega + 2)^2}{8} \right]. \end{aligned} \tag{2.13}$$

Здесь $\beta = \varepsilon\alpha$, $\theta = z + \psi$ — резонансная фаза.



Уравнения (2.13) допускают интеграл

$$F(\beta, \theta) \equiv \beta^2 (1967e^2 + 18\beta^2 + 144e\Delta \cos \theta - 432e \cos \theta - 576\Delta) = C. \quad (2.14)$$

Рассмотрим случай строгого резонанса: $\Delta = 0$. Тогда интеграл (2.14) упрощается:

$$G(\beta, \theta) \equiv \beta^2 (1967e^2 + 18\beta^2 - 432e \cos \theta) = C.$$

Следует различать два принципиально разных случая колебаний. В первом случае выражение, стоящее в скобках, больше нуля при любых значениях θ , а, следовательно, θ может меняться непрерывным образом от $-\infty$ до $+\infty$, при этом амплитуда β будет ограниченной функцией резонансной фазы, фазовые кривые незамкнуты. Такое поведение решений усредненной системы возможно только тогда, когда

$$1967e^2 - 432e > 0,$$

то есть при

$$e > e_*, \quad e_* = \frac{432}{1967}.$$

Во втором случае выражение, стоящее в скобках, может обращаться в нуль при некоторых значениях θ , что отвечает нулевому значению постоянной C . Появляются области на фазовой плоскости, содержащие положения равновесия и замкнутые траектории. Таким образом, характер колебаний усложняется, так как наряду с чисто вращательными движениями предыдущего случая появляются периодические колебания.

Для построения фазового портрета необходимо найти все положения равновесия уравнений (2.13). Проще всего это сделать, если воспользоваться теоремой Рауса, которая утверждает, что если первый интеграл уравнений движения принимает невырожденное стационарное значение в некоторой точке (на некотором многообразии), то эта точка представляет собой положение равновесия системы (интегральное многообразие).

Условия стационарности функции $G(\beta, \theta)$ имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial \beta} &\equiv \beta (72\beta^2 - 864e \cos \theta + 3934e^2) = 0, \\ \frac{\partial G}{\partial \theta} &\equiv 432\beta^2 e \sin \theta = 0. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Отсюда следует, что

$$\theta^* = 2k\pi, \quad \beta^* = \sqrt{12e - \frac{1967}{36}e^2}.$$

Значения $\theta^* = (2k + 1)\pi$ мы отбрасываем, поскольку им отвечает комплексное значение амплитуды. Очевидно, условие существования β^* задается неравенством $e < e_*$.

Из уравнений (2.15) также следует, что условию стационарности функции $G(\beta, \theta)$ удовлетворяет нулевое значение амплитуды β . Это значит, что многообразие $\beta = 0$ является интегральным.

На рисунке 5 изображен фазовый портрет колебаний в переменных β, θ . Жирным выделена сепаратриса, отвечающая значению $C = 0$. Ее параметрическое представление следует из интеграла $G(\beta, \theta) = 0$:

$$\beta(\theta) = \pm \sqrt{24e \cos \theta - \frac{1967}{18}e^2}.$$

Отсюда вытекает, что максимальная амплитуда колебаний в зоне либрации вычисляется по формуле

$$\beta_{\max}(e) = \frac{\sqrt{432e - 1967e^2}}{\sqrt{18}}.$$

Несложно найти стационарную точку этой функции и значение максимума в ней:

$$\beta_{\max}^* = \beta_{\max}(e_*/2) = \frac{36\sqrt{3934}}{1967} = 1.14793.$$

Интеграл $G(\beta, \theta) = C$ позволяет исследовать эволюцию колебаний при изменении параметра e . Расчеты показывают, что при малом значении эксцентриситета появляется зона периодических движений вблизи оси $\beta = 0$ с максимальной амплитудой колебаний β_{\max} . Фазовый портрет колебаний имеет вид, изображенный слева на рисунке 5. При увеличении e высота зоны колебаний возрастает, достигая максимума β_{\max}^* при $e = e_*/2$. Последующее возрастание эксцентриситета ведет к ее уменьшению вплоть до нулевых значений при $e = e_*$. При $e \geq e_*$ зона либрации исчезает; портрет колебаний представлен справа на рисунке 5.

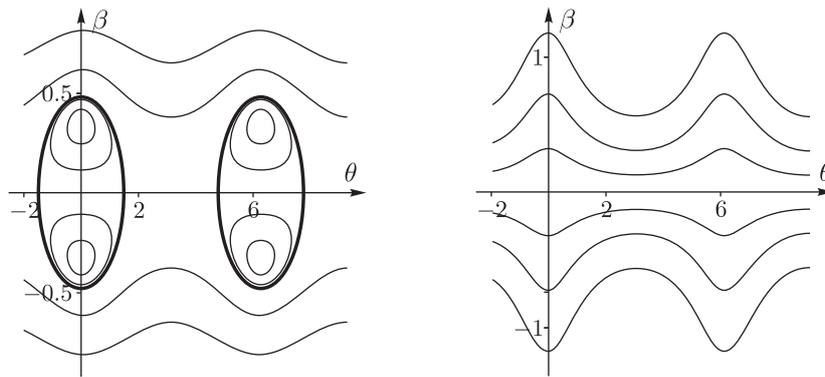


Рис. 5. Фазовый портрет при резонансе $2\omega = 1$ для случаев $e < e_*$ и $e \geq e_*$.

Фазовые кривые уравнений (2.13) описываются равенством

$$\beta(\theta) = \pm \frac{\sqrt{432e \cos \theta - 1967e^2 + \sqrt{(432e \cos \theta - 1967e^2)^2 + 72C}}}{6}, \quad (2.16)$$

следующим из интеграла $G(\beta, \theta) = C$. Отсюда явствует, что изменение θ на $2k\pi$ радиан сохраняет значение амплитуды β , поэтому случай монотонного изменения θ (см. незамкнутые кривые на рис. 5) будем рассматривать как периодический, так как указанные приращения по θ сохраняют значения правых частей уравнений (2.13) и мы оказываемся в тех же условиях, что и в начальный момент $\nu = 0$ (на цилиндрической фазовой поверхности с локальными координатами β, θ ($0 \leq \theta < 2\pi$) кривые $\beta = \beta(\theta)$ будут замкнутыми).

Вернемся к переменным δ, δ' , зависящим от β, θ :

$$\delta = \beta \cos \frac{\theta + \nu}{2} + \frac{4e}{\omega^2 - 1} \sin \nu, \quad \delta' = -\beta \omega \sin \frac{\theta + \nu}{2} + \frac{4e}{\omega^2 - 1} \cos \nu. \quad (2.17)$$

Очевидно, что интегральному многообразию $\beta = 0$ отвечает 2π -периодическое решение

$$\delta = \frac{4e}{\omega^2 - 1} \sin \nu, \quad \delta' = \frac{4e}{\omega^2 - 1} \cos \nu, \quad (2.18)$$

стационарным точкам $\theta = 2k\pi$, $\beta = \beta^*$ — 4π -периодические решения

$$\delta = (-1)^k \beta^* \cos \frac{\nu}{2} + \frac{4e}{\omega^2 - 1} \sin \nu, \quad \delta' = (-1)^{k+1} \beta^* \omega \sin \frac{\nu}{2} + \frac{4e}{\omega^2 - 1} \cos \nu,$$

движению вдоль сепаратрисы $C = 0$ — двоякоасимптотическая к (2.18) траектория.

Однопараметрическому семейству $\beta = \beta(\theta, c)$, $c = \beta(0)$ периодических решений из области либрации отвечают квазипериодические функции $\delta(\nu)$, $\delta'(\nu)$, за исключением случая существования рациональных соотношений между периодом $T(c)$ указанного семейства и периодом изменения функций (2.17) по явно входящему аргументу ν . Это соотношение имеет вид

$$T(c) = \frac{p}{q} 4\pi, \quad (2.19)$$

где p, q — взаимно простые числа.

При выполнении этого равенства переменные δ, δ' будут $4p\pi$ -периодическими функциями ν . Учитывая, что семейство $\beta = \beta(\theta, c)$ является ляпуновским (интеграл $G(\beta, \theta)$ положительно определен в окрестности $\theta = 2k\pi$, $\beta = \beta^*$ при $e < e_*$), можно воспользоваться известной формулой для вычисления периода $T(c)$. Тогда из равенства (2.19) находим $\beta(0) = c$, интегрируем уравнения (2.13) с начальными условиями $\beta(0) = c$, $\theta(0) = 0$; подставляя найденные решения $\beta(\nu)$, $\theta(\nu)$ в формулы (2.17), получим $4p\pi$ -периодические функции $\delta(\nu)$, $\delta'(\nu)$.

Случай монотонного убывания θ исследуется похожим образом. Пусть $T(C)$ — промежуток изменения ν (C — постоянное значение первого интеграла $G(\beta, \theta)$), по истечении которого угол $\theta(\nu)$ получит приращение, равное (-4π) . Тогда если $T(C)$ кратен 4π , то $\delta(\nu)$, $\delta'(\nu)$ — 4π -периодические функции ν . Таким образом, условие периодичности решений есть

$$T(C) = 4k\pi,$$

если $T(C)$ при этом вычисляется по формуле

$$T = \int_0^{-4\pi} \frac{d\theta}{\Delta - \frac{e}{2}(\omega - 2) \cos \theta - \omega \left[\frac{\beta(\theta)^2}{8} + \frac{4e^2}{(\omega^2 - 1)^2} \right] - \frac{e^2}{2} \left[\omega - \frac{(\omega + 2)^2}{8} \right]},$$

вытекающей из уравнений (2.13) после разделения переменных. Здесь $\beta(\theta)$ вычисляется по формуле (2.16).

Поскольку в областях монотонного изменения θ характерный размер угла β составляет величины порядка единицы, из равенства (2.17) следует, что замкнутая фазовая кривая $\delta' = \delta'(\delta)$, удовлетворяющая условию периодичности, близка по форме к эллипсу

$$\frac{\delta^2}{\beta^2} + \frac{\delta'^2}{(\beta\omega)^2} = 1.$$

Теперь можем сделать выводы. Исследование малых колебаний на основе обобщенного метода усреднения с независимыми параметрами дает полную информацию о колебаниях



спутника в первом и втором приближениях метода усреднения. Точность приближения есть величина второго порядка малости по малым параметрам на асимптотически большем промежутке времени порядка $1/\|(\mu, \varepsilon)\|$ в случае резонанса $\omega = 1$ и на промежутке времени порядка $1/\|(e, \varepsilon)\|$ при резонансе $\omega = 1/2$. Результаты исследований свободны от редукции, содержат дополнительную информацию (в сравнении с классической схемой усреднения) о влиянии малого параметра ε на характер колебаний при резонансе $\omega = 1$.

Список литературы

- [1] Laplace P. S. *Traité de la Mécanique Céleste*: Т. 2. Paris: Duprat, 1799. 382 pp.
- [2] Tisserand F. *Traité de la Mécanique Céleste*: Т. 2: Théorie de la figure des corps célestes et de leur mouvement de rotation. Paris: Gauthier-Villars, 1891. 552 pp.
- [3] Routh E. J. *A treatise on the dynamics of a system of rigid bodies*: P. 2. The advanced part. 6th ed. New York: Macmillan, 1905. *См. также*: New York: Dover, 1955 (reprint).
- [4] Baker R. M. L. Jr. Passive stability of a satellite vehicle // *Navigation*, 1958, vol. 6, no. 1, pp. 64–65.
- [5] Baker R. M. L. Jr. Librations on a slightly eccentric orbit // *ARS Journal*, 1960, vol. 30, no. 1, pp. 124–126.
- [6] Klemperer W. B., Baker R. M. L. Jr. Satellite librations // *Astronaut. Acta*, 1957, vol. 3, no. 1, pp. 16–27.
- [7] Stocker T. A., Vachino R. F. The two-dimensional librations of a dumbbell-shaped satellite in a uniform gravitational field // *Proc. of the Western Regional Meeting of the AAS (August, 1958) / N. V. Peterson, H. Jacobs. (Advances in Astronaut. Sci., vol. 3.)* New York: American Astronautical Society, 1958. AAS 58-037.
- [8] Белецкий В. В. О либрации спутника // *Искусственные спутники Земли: Вып. 3 / Л. В. Курносова*. Москва: АН СССР, 1959. С. 13–31.
- [9] Белецкий В. В. Либрация спутника на эллиптической орбите // *Искусственные спутники Земли: Вып. 16 / Л. В. Курносова*. Москва: АН СССР, 1963. С. 46–56.
- [10] Бардин Б. С. О ветвлении периодических решений системы, близкой к системе Ляпунова // *ПММ*, 1999, т. 63, № 4, с. 538–548.
- [11] Bardin B. S. On nonlinear motions of a Hamiltonian system in the case of external resonance // *Rep. Math. Phys.*, 2002, vol. 49, nos. 2–3, pp. 133–142.
- [12] Демин В. Г., Сингх Р. Б. Нелинейные плоские колебания спутника на эллиптической орбите // *Космические исследования*, 1973, т. 11, № 2, с. 192–197.
- [13] Schechter H. B. Dumbbell librations in elliptic orbits // *AIAA Journal*, 1964, vol. 2, no. 6, pp. 1000–1003.
- [14] Liu F. C. Periodic solution of plane libration motion of a satellite // *AIAA Journal*, 1971, vol. 9, no. 7, pp. 1240–1244.
- [15] Сарычев В. А. Вопросы ориентации искусственных спутников. (Итоги науки и техники. Исследование космического пространства, т. 11.) Москва: ВИНТИ, 1978. 223 с.
- [16] Маркеев А. П. К задаче о плоских периодических вращениях спутника на эллиптической орбите // *МГТ*, 2008, № 3, с. 102–115.
- [17] Сарычев В. А., Сазонов В. В., Златоустов В. А. Периодические вращения спутника в плоскости эллиптической орбиты // *Космические исследования*, 1979, т. 17, № 2, с. 190–207.
- [18] Сарычев В. А., Сазонов В. В., Златоустов В. А. Несимметричные периодические колебания спутника в плоскости эллиптической орбиты // *Космические исследования*, 1980, т. 18, № 1, с. 3–10.

- [19] Брюно А. Д. Семейства периодических решений уравнения Белецкого // Космические исследования, 2002, т. 40, № 3, с. 295–316.
- [20] Варин В. П. Критические семейства периодических решений уравнения колебаний спутника: Препринт № 101. Москва: ИПМ РАН, 1996. 30 с.
- [21] Маркеев А. П. Нелинейные колебания спутника при резонансе $1 : 1 : 1$ // ПММ, 2012, т. 76, № 1, с. 52–68.
- [22] Красильников П. С. Метод усреднения как процедура выделения главных членов в рядах решений // Сборник научно-методических статей по теоретической механике / Ю. Г. Мартыненко. Москва: МГУ, 2009. С. 56–68.
- [23] Красильников П. С. О нелинейных колебаниях маятника переменной длины на вибрирующем основании // ПММ, 2012, т. 76, № 1, с. 36–51.
- [24] Белецкий В. В. Движение спутника относительно центра масс в гравитационном поле. Москва: МГУ, 1975. 308 с.

Small plane oscillations of satellite in an weakly elliptical orbit

Pavel S. Krasilnikov

Moscow Aviation Institute (State University of Aerospace Technologies)
Volokolamskoe st. 4, Moscow, 125871, Russia
krasil06@rambler.ru

The equation of plane nonlinear oscillations of satellite in an weakly elliptical orbit is investigated. Suppose, that equation of motion contains two small parameters. Various kinds of procedure which reduce the equation to one small parameter case are investigated. Lacks of such procedure are described. New resonance effects of satellite's rotation are described with the help of the generalized averaging method with independent small parameters.

MSC 2010: 34M10, 70K65

Keywords: independent parameters, average, small oscillations, reductions

Received April 23, 2013, accepted September 5, 2013

Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2013, vol. 9, no. 4, pp. 671–696 (Russian)

