Нелинейная динамика. 2013. Т. 9. № 4. С. 641–649.
Полнотекстовая версия в свободном доступе
http://nd.ics.org.ru

УДК: 517.938
MSC 2010: 37C05

Групповая классификация дискретных динамических систем

П. В. Марков

В статье рассматривается применение теории групп Ли преобразований к анализу дискретных динамических систем. При помощи классификаций двумерных и трехмерных алгебр Ли получены семейства двумерных и трехмерных дискретных динамических систем, допускающих двухпараметрические и трехпараметрические группы Ли преобразований.

Ключевые слова: дискретная динамическая система, непрерывная симметрия, групповая классификация, группа Ли

Введение

Теория дискретных динамических систем в современном математическом моделировании все чаще используется при описании физических, биологических, экономических и многих других процессов. Однако дискретные динамические системы как объект исследования оформились гораздо позже непрерывных систем. Математический аппарат исследования систем обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, которые задают непрерывную динамическую систему, богаче методами исследования. Теория групп Ли преобразований за прошедший век показала себя незаменимым инструментом исследования дифференциальных уравнений. Однако успехи этой теории для дискретных динамических систем пока несколько скромнее.

Изучение любого объекта в математике с точки зрения его симметрии является одним из самых продуктивных подходов. Дискретные динамические системы не являются исключением. Однако поиск дискретных групп симметрии у таких систем является непростой задачей, так как метода их нахождения в общем случае нет. Напротив, у непрерывных групп симметрии имеется возможность сформулировать алгоритм их получения через так называемое определяющее уравнение.

Получено 27 мая 2013 года
После доработки 28 ноября 2013 года

Марков Павел Владимирович
markov.pv@mail.ru
Институт математики и компьютерных наук Тюменского государственного университета
625000, Россия, г. Тюмень, ул. Перекопская, д. 15а

В данной статье в качестве группы симметрии используется классическое понятие локальной r-параметрической группы Ли преобразований G_r [14, 17, 18], то есть семейства преобразований $\{T_a\}$ с локальными групповыми свойствами, зависящего от r существенных параметров $a = (a_1, a_2, \ldots, a_r) \in \Delta \subset \mathbb{R}^r$ и определяемого как $x' = f(x, a)$, где $x', x \in D \subseteq \mathbb{R}^n$.

Современная теория непрерывных групп Ли в своем практическом применении не ограничивается только дифференциальными уравнениями, исследованы также и другие типы уравнений: дифференциально-разностные, интегро-дифференциальные и т. д. Одной из первых работ в области групповой классификации разностных уравнений является статья [20], где проведена групповая классификация разностных схем для системы уравнений газовой динамики. Определение непрерывной симметрии для дискретных динамических систем, которое является основополагающим для данной статьи, сформулировал японский математик Маэда в статьях [8] и [9]. Однако его идеи долгое время не находили практически никакого отражения в работах, посвященных дискретным динамическим системам. Начало развития группового анализа для разностных уравнений было положено в 80–90-х годах прошлого века и связано с работами многих математиков [6, 11, 15, 16]. В этих работах в основном исследовались либо разностные модели для широко известных дифференциальных уравнений, либо дифференциально-разностные уравнения, которые также носят название цепочек.

Многие авторы под понятием «дискретная динамическая система» понимают разностные, дифференциально-разностные уравнения, дискретные по времени и пространству динамические системы (клеточные автоматы) и т. п. Для упомянутых типов систем существуют различные классификации. Для линейных (относительно непрерывной производной) дифференциально-разностных уравнений второго порядка (относительно непрерывной и разностной производной) групповая классификация была проведена в работе [5]; в статье [3] эти результаты распространены на системы из двух уравнений данного типа. Для обыкновенных разностных уравнений второго порядка имеются результаты по их групповой классификации [2], которая подобна классификации обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, полученной Софусом Ли в работе [7]. Вопросы интегрируемости некоторых типов разностных и дифференциально-разностных уравнений были исследованы в работе [12].

В данной работе была проведена групповая классификация двумерных и трехмерных дискретных динамических систем, которые также носят название каскадов (если отображение является гомеоморфизмом) [19] и задаются в соответствии с определением, расположенным ниже. Такие дискретные динамические системы можно рассматривать и как системы разностных уравнений первого порядка, заданных на равномерной сетке, разрешенных относительно разностных производных и не зависящих явно от дискретного времени. Однако классификация таких систем получена ранее не была, и результаты, приведенные в статье, не являются частным случаем или обобщением упомянутых выше классификаций.

Вышеназванные работы послужили основой для развития теории группового анализа дискретных динамических систем. По дискретным системам рассматриваемого ниже типа стоит отметить работу [10], в которой, в частности, указан способ понижения порядка системы с помощью группы симметрии и рассмотрены дискретные системы, заданные на фракталах. Применительно к одномерным системам анализ с помощью непрерывных групп симметрии был выполнен еще в работе [9]. В работе [13] был получен похожий результат: указан способ нахождения линеаризующей замены для одномерных дискретных систем без использования методов группового анализа, однако в случае одномерных систем это эквивалентно нахождению непрерывной симметрии. Для непрерывных автономных динамических систем такого типа (систем обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, разрешенных относительно производных) результаты применения теории непрерывных групп Ли представлены в работе [1].

1. Непрерывная симметрия для дискретной динамической системы

Дискретной динамической системой[1] называется отображение

$$\overline{x} = f(x), \quad x, \overline{x} \in D \subseteq \mathbb{R}^n. \tag{1.1}$$

Под траекторией такой динамической системы понимают набор точек, который получен путем последовательного применения отображения f к некоторой начальной точке x_0. Впервые применение теории групп Ли преобразований для дискретных динамических систем в своей статье описал японский математик Маэда. Он дал определение непрерывной симметрии и показал путь упрощения исходной системы [9].

Если отображение f, которое задает дискретную динамическую систему, коммутирует с локальной группой Ли G_r, то есть для всех a из некоторой окрестности a_0 выполнено равенство $T_a \circ f = f \circ T_a$, где $T_a \in G_r$, то говорят, что G_r является группой симметрии для дискретной системы или что система допускает группу преобразований. Данное определение допускает наглядную геометрическую интерпретацию: под действием группы симметрии траектория дискретной динамической системы переходит в траекторию.

Рассмотрим в качестве примера двумерную линейную дискретную динамическую систему вида

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= \frac{x_k}{2}, \\ y_{k+1} &= 2y_k. \end{aligned}$$

Данная система имеет две однопараметрические группы симметрии, которые вместе образуют двухпараметрическую группу преобразований. Ниже представлены группы и их касательные поля:

$$D\colon \begin{cases} x' = e^a x \\ y' = e^a y \end{cases} \quad X_D = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y},$$

$$G\colon \begin{cases} x' = e^{-a} x \\ y' = e^a y \end{cases} \quad X_G = -x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}.$$

Наличие однопараметрической группы симметрии дает возможность представить дискретную динамическую систему в виде [10]

$$\begin{aligned} \overline{c}^1 &= c^1 + \widetilde{f}^1(0, c^2, \ldots, c^n), \\ \overline{c}^i &= \widetilde{f}^i(0, c^2, \ldots, c^n), \quad i = 2, \ldots, n, \end{aligned} \tag{1.2}$$

[1] В тексте следующие понятия нужно считать эквивалентными автономной дискретной по времени динамической системе: дискретная система, дискретная динамическая система, система с дискретным временем.

где c^i — канонические переменные для группы преобразований [18], а $\widetilde{f}^i$ — функции f^i, записанные в новых координатах. Переход к каноническим переменным позволяет линеаризовать по одной из координат одну из функций, задающих отображение динамической системы, а из остальных функций убрать зависимость от этой координаты.

Понятие инфинитезимального оператора [14] для непрерывной группы преобразований является очень эффективным инструментом исследования не только дифференциальных уравнений, но также и дискретных динамических систем. С помощью данного оператора удобно выписывать систему уравнений для поиска непрерывных симметрий: группа непрерывных преобразований G_1 с инфинитезимальным оператором

$$X = \sum_{i=1}^{n} \xi^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i}$$

является группой симметрии дискретной динамической системы, которая задается отображением (1.1), если справедливо равенство [9]

$$\xi^i(f(x)) - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f^i}{\partial x^j} \xi^j(x) = 0, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{1.3}$$

Функциональное уравнение (1.3) является определяющим уравнением для допустимых групп преобразований дискретной динамической системы. Для заранее заданного отображения f поиск неизвестных компонент касательного поля группы симметрии может вызвать непреодолимые сложности. Однако решение обратной задачи о нахождении по заданной группе преобразований всех допускающих ее дискретных динамических систем является вполне выполнимым, так как связано с решением системы дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка.

2. Семейства дискретных динамических систем с двухпараметрической группой симметрии

Дискретная динамическая система, допускающая однопараметрическую группу Ли, может быть сведена к системе на единицу меньшей размерности (выражение (1.2)). Если же динамическая система имеет двухпараметрическую группу симметрии, то ее размерность не всегда может быть уменьшена на два или сведена к системе из двух линейных отображений в случае двумерных систем.

Использование определяющего функционального уравнения (1.3) для произвольных дискретных динамических систем с заранее заданными алгебрами Ли непрерывных групп преобразований позволяет решить обратную задачу — нахождение всех дискретных систем с заданной непрерывной симметрией. Система уравнений (1.3) для заданных компонент касательных полей группы симметрии является переопределенной системой дифференциальных уравнений на неизвестные функции, задающие дискретную динамическую систему, что делает ее разрешимой во многих случаях. Применение известной классификации двухпараметрических групп Ли на плоскости дает возможность найти все дискретные динамические системы с двухпараметрическими группами симметрии, так как при гладкой обратимой замене переменных группа симметрии остается таковой и в новых координатах.

Трехмерная дискретная динамическая система

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= \widetilde{f}(x_k, y_k, z_k), \\ y_{k+1} &= \widetilde{g}(x_k, y_k, z_k), \quad \widetilde{f}, \widetilde{g}, \widetilde{h} \in C^1, \\ z_{k+1} &= \widetilde{h}(x_k, y_k, z_k), \end{aligned} \tag{2.1}$$

допускающая двумерную группу симметрии, при помощи некоторой гладкой обратимой замены переменных может быть сведена в зависимости от типа алгебры Ли к нескольким из четырех видов

$$1.\ \begin{aligned} x_{k+1} &= x_k + f(z_k), \\ y_{k+1} &= y_k + g(z_k), \\ z_{k+1} &= h(z_k), \end{aligned} \qquad 2.\ \begin{aligned} x_{k+1} &= x_k, \\ y_{k+1} &= y_k + g(x_k, z_k), \\ z_{k+1} &= h(x_k, z_k), \end{aligned}$$

$$3.\ \begin{aligned} x_{k+1} &= f(z_k) x_k, \\ y_{k+1} &= g(z_k) x_k + y_k, \\ z_{k+1} &= h(z_k), \end{aligned} \qquad 4.\ \begin{aligned} x_{k+1} &= f(x_k, z_k), \\ y_{k+1} &= y_k, \\ z_{k+1} &= g(x_k, z_k), \end{aligned}$$

где f, g, h — гладкие функции, а сами алгебры Ли после перехода к новым переменным примут вид [7]

$$1.\ X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial y}, \qquad 2.\ X_1 = \frac{\partial}{\partial y}, \quad X_2 = x\frac{\partial}{\partial y},$$

$$3.\ X_1 = \frac{\partial}{\partial y}, \quad X_2 = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}, \qquad 4.\ X_1 = \frac{\partial}{\partial y}, \quad X_2 = y\frac{\partial}{\partial y}.$$

Замечание. Результат, приведенный выше для трехмерных систем, справедлив и для двумерных дискретных динамических систем, если из рассмотрения исключить переменную z. Пусть $u = \alpha(x, y)$ и $v = \beta(x, y)$ — гладкая замена переменных, а $x = \overline{\alpha}(u, v)$ и $y = \overline{\beta}(u, v)$ — обратная замена. После перехода в новую систему координат исходное отображение будет иметь вид

$$\begin{aligned} u_{k+1} &= \alpha \left\{ \widetilde{f}\left[\overline{\alpha}(u_k, v_k), \overline{\beta}(u_k, v_k)\right], \widetilde{g}\left[\overline{\alpha}(u_k, v_k), \overline{\beta}(u_k, v_k)\right] \right\}, \\ v_{k+1} &= \beta \left\{ \widetilde{f}\left[\overline{\alpha}(u_k, v_k), \overline{\beta}(u_k, v_k)\right], \widetilde{g}\left[\overline{\alpha}(u_k, v_k), \overline{\beta}(u_k, v_k)\right] \right\}. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Общий вид двумерной дискретной динамической системы, допускающей двухпараметрическую группу преобразований с алгеброй Ли второго типа, будет иметь вид

$$\begin{aligned} u_{k+1} &= \alpha \left\{ \overline{\alpha}(u_k, v_k), \overline{\beta}(u_k, v_k) + g\left[\overline{\alpha}(u_k, v_k)\right] \right\}, \\ v_{k+1} &= \beta \left\{ \overline{\alpha}(u_k, v_k), \overline{\beta}(u_k, v_k) + g\left[\overline{\alpha}(u_k, v_k)\right] \right\}. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Анализируя полученные семейства динамических систем с дискретным временем, можно сделать вывод, что для рекуррентных уравнений, которые задаются двумерными отображениями семейств 1–3, можно найти общее решение. Поиск общего решения четвертого типа уравнений связан с решением рекуррентного уравнения $x_{k+1} = f(x_k)$.

3. Семейства дискретных динамических систем с трехпараметрической группой симметрии

В статье [4] была получена классификация трехмерных алгебр Ли групп преобразований трехмерного евклидова пространства. Данная классификация алгебр Ли была использована при построении семейств трехмерных дискретных динамических систем вида (2.1) с трехпараметрической группой симметрии. Получение семейств для трехмерного случая полностью аналогично процессу получения семейств в случае двухпараметрических групп симметрии. Результаты представлены в таблице 1, где c_1, c_2 и c_3 — некоторые константы, f, g и h — гладкие функции.

В качестве примера рассмотрим нахождение канонического вида трехмерных дискретных динамических систем с трехпараметрической группой симметрии для типа алгебры под номером 19, базисные операторы которой имеют вид

$$X_1 = \partial_z, \quad X_2 = \partial_x + z\partial_z, \quad X_3 = 2z\partial_x + e^x\partial_y + z^2\partial_z.$$

Используя определяющее уравнение (1.3) применительно к базисным операторам алгебры под номером 19 и дискретной динамической системе общего вида (2.1), получаем переопределенную систему дифференциальных уравнений для неизвестных функций $f^i(x, y, z)$:

$$\begin{gathered}
f^1_z = 0, \qquad f^2_z = 0, \qquad f^3_z = 1,\\
f^1_x = 1, \qquad f^2_x = 0, \qquad f^3 - f^3_x - z = 0,\\
2f^3 - 2z - f^1_y e^x = 0, \qquad e^{f^1} - e^x f^2_y = 0, \qquad \left(f^3\right)^2 - 2zf^3_x - e^x f^3_y - z^2 = 0.
\end{gathered}$$

Переопределенность полученной системы дифференциальных уравнений позволяет найти общее решение, которое записывается в следующем виде:

$$f^1(x, y) = x - 2\ln(y - c_1) + c_2, \quad f^2(y) = -\frac{e^{c_2}}{y - c_1} + c_3, \quad f^3(x, y, z) = z - \frac{e^x}{y - c_1}.$$

Анализ результатов таблицы 1 показал, что на конечный вид семейства (размерность, количество произвольных функций и констант) влияет в большей степени общий ранг матрицы, составленной из компонент инфинитезимальных операторов. Общий ранг для алгебры Ли инфинитезимальных операторов $X_m = \xi^m(x, y, z)\partial_x + \eta^m(x, y, z)\partial_y + \zeta^m(x, y, z)\partial_z$, где $m = 1, 2, 3$, вычисляется следующим образом:

$$r^* = \operatorname{rank}\begin{Vmatrix} \xi^1 & \eta^1 & \zeta^1\\ \xi^2 & \eta^2 & \zeta^2\\ \xi^3 & \eta^3 & \zeta^3 \end{Vmatrix}.$$

Все полученные семейства содержат в себе тождественное отображение в силу того, что оно коммутирует с любым отображением. Получение тождественного отображения очевидно во всех семействах, кроме семейства для типа алгебры с номером 19, получение которого было рассмотрено выше. В данном случае тождественное отображение может быть получено при устремлении всех произвольных констант к бесконечности. Найденные семейства могут совпадать, пересекаться или полностью содержаться в других семействах. Например, семейство для типа алгебры 3 целиком содержится в семействе 4 в силу того, что при равных общих рангах у типа 4 компоненты касательных полей зависят только от переменной x (это влечет за собой при решении определяющего уравнения (1.3) получение большего множества решений для типа алгебры 4). Семейства для типов алгебры Ли 9, 14, 17, 20 полностью совпадают в силу того, что для этих алгебр общие ранги равны, а компоненты касательных полей групп содержат только переменные x, z. Равенство общего ранга двум для этих типов алгебр позволит при переходе к переменным, в которых алгебра Ли имеет один из представленных в таблице 1 видов, свести исходную трехмерную дискретную систему к одномерной динамической системе. Однако равенство общего ранга двум не гарантирует приведение исходной системы к одномерной. К примеру, для типа 23 было получено семейство трехмерных дискретных динамических систем, а для типа алгебры под номером 7 семейство двумерно.

Таблица 1. Неподобные трехмерные алгебры Ли и дискретные динамические системы с трехпараметрической группой симметрии

№	Алгебра Ли	r^*	Дискретная динамическая система
1	$X_1 = \partial_z,\ X_2 = \partial_x,\ X_3 = \partial_y$	3	$x_{k+1} = x_k + c_1,\ y_{k+1} = y_k + c_2,\ z_{k+1} = z_k + c_3$
2	$X_1 = \partial_z,\ X_2 = \partial_x,\ X_3 = y\partial_x + a(y)\partial_z$	2	$x_{k+1} = x_k + f(y_k),\ y_{k+1} = y_k,\ z_{k+1} = z_k + h(y_k)$
3	$X_1 = \partial_z,\ X_2 = x\partial_z,\ X_3 = y\partial_z$	1	$x_{k+1} = x_k,\ y_{k+1} = y_k,\ z_{k+1} = z_k + h(x_k, y_k)$
4	$X_1 = \partial_z,\ X_2 = x\partial_z,\ X_3 = a(x)\partial_z,$ $a''(x) \neq 0$	1	$x_{k+1} = x_k,\ y_{k+1} = g(x_k, y_k),$ $z_{k+1} = z_k + h(x_k, y_k)$
5	$X_1 = \partial_z,\ X_2 = \partial_x,\ X_3 = \partial_y + x\partial_z$	3	$x_{k+1} = x_k + c_1,\ y_{k+1} = y_k + c_2,$ $z_{k+1} = z_k + c_1 y_k + c_3$
6	$X_1 = \partial_z,\ X_2 = \partial_x,\ X_3 = y\partial_x + x\partial_z$	2	$x_{k+1} = x_k,\ y_{k+1} = y_k,\ z_{k+1} = z_k + h(y_k)$
7	$X_1 = \partial_z,\ X_2 = \partial_x,\ X_3 = x\partial_z$	2	$x_{k+1} = x_k,\ y_{k+1} = g(y_k),\ z_{k+1} = z_k + h(y_k)$
8	$X_1 = \partial_z,\ X_2 = \partial_x,\ X_3 = qx\partial_x + \partial_y + z\partial_z$	3	$x_{k+1} = x_k + c_1 e^{qy_k},\ y_{k+1} = y_k + c_2,$ $z_{k+1} = z_k + c_3 e^{y_k}$
9	$X_1 = \partial_z,\ X_2 = \partial_x,\ X_3 = qx\partial_x + z\partial_z$	2	$x_{k+1} = x_k,\ y_{k+1} = g(y_k),\ z_{k+1} = z_k$
10	$X_1 = \partial_z,\ X_2 = x\partial_z,\ X_3 = (1-q)x\partial_x + z\partial_z$	2,1	$x_{k+1} = x_k,\ y_{k+1} = g(y_k),$ $z_{k+1} = z_k + h(y_k)x_k^{-1/(q-1)}$
11	$X_1 = \partial_z,\ X_2 = \partial_x,\ X_3 = y\partial_x + z\partial_z$	2	$x_{k+1} = x_k + f(y_k),\ y_{k+1} = y_k,\ z_{k+1} = z_k$
12	$X_1 = \partial_z, X_2 = x\partial_z, X_3 = \partial_y + z\partial_z$	2	$x_{k+1} = x_k,\ y_{k+1} = y_k + g(x_k),$ $z_{k+1} = z_k + h(x_k)e^{y_k}$
13	$X_1 = \partial_z,\ X_2 = \partial_x,$ $X_3 = x\partial_x + \partial_y + (x+z)\partial_z$	3	$x_{k+1} = x_k + c_1 e^{y_k},\ y_{k+1} = y_k + c_2,$ $z_{k+1} = (c_1 y_k + c_3)e^{y_k} + z_k$
14	$X_1 = \partial_z,\ X_2 = \partial_x,\ X_3 = x\partial_x + (x+z)\partial_z$	2	$x_{k+1} = x_k,\ y_{k+1} = g(y_k),\ z_{k+1} = z_k$
15	$X_1 = \partial_z,\ X_2 = x\partial_z,$ $X_3 = -\partial_x + \varepsilon\partial_y + z\partial_z,\ \varepsilon = 0, 1$	2	$x_{k+1} = x_k,\ y_{k+1} = -\varepsilon x_k + g(\varepsilon x_k + y_k),$ $z_{k+1} = z_k + h(\varepsilon x_k + y_k)e^{-x_k}$
16	$X_1 = \partial_z,\ X_2 = \partial_x,$ $X_3 = (qx+z)\partial_x + \partial_y - x\partial_z$	3	$x_{k+1} = x_k - r_1 c_1 e^{r_1 y_k} - r_2 c_2 e^{r_2 y_k},$ $y_{k+1} = y_k + c_3,\quad r_{1,2} = (q \pm \sqrt{q^2-4})/2,$ $z_{k+1} = z_k + c_2 e^{r_2 y_k} + c_1 e^{r_1 y_k}$
17	$X_1 = \partial_z,\ X_2 = \partial_x,\ X_3 = (qx+z)\partial_x - x\partial_z$	2	$x_{k+1} = x_k,\ y_{k+1} = g(y_k),\ z_{k+1} = z_k$

Продолжение таблицы 1.

18	$X_1 = \partial_z,\ X_2 = x\partial_z,$ $X_3 = (x^2 - qx + 1)\partial_x + xz\partial_z$	2	$x_{k+1} = x_k,\ y_{k+1} = g(y_k),$ $z_{k+1} = z_k + h(y_k)\sqrt{x_k^2 - qx_k + 1}\cdot e^{D(x_k,q)},$ $D(x_k, q) = \dfrac{q\,\mathrm{arth}\,((-2x_k + q)/\sqrt{q^2-4})}{\sqrt{q^2-4}}$
19	$X_1 = \partial_z,\ X_2 = \partial_x + z\partial_z,$ $X_3 = 2z\partial_x + e^x\partial_y + z^2\partial_z$	3	$x_{k+1} = x_k - 2\ln(y_k - c_1) + c_2,$ $y_{k+1} = -\dfrac{e^{c_2}}{y_k - c_1} + c_3,\ z_{k+1} = z_k - \dfrac{e^{x_k}}{y_k - c_1}$
20	$X_1 = \partial_z,\ X_2 = \partial_x + z\partial_z,$ $X_3 = 2z\partial_x + (z^2 \pm e^{2x})\partial_z$	2	$x_{k+1} = x_k,\ y_{k+1} = g(y_k),\ z_{k+1} = z_k$
21	$X_1 = \partial_z,\ X_2 = z\partial_z,\ X_3 = z^2\partial_z$	1	$x_{k+1} = f(x_k, y_k),\ y_{k+1} = g(x_k, y_k),\ z_{k+1} = z_k$
22	$X_1 = \partial_z,$ $X_2 = \sin z\partial_x + \dfrac{\cos z}{\cos x}\partial_y - \mathrm{tg}\,x\cos z\partial_z,$ $X_3 = \cos z\partial_x - \dfrac{\sin z}{\cos x}\partial_y + \mathrm{tg}\,x\sin z\partial_z$	3	$x_{k+1} = x_k + 2\pi l,\ l \in \mathbb{Z}$ $y_{k+1} = y_k + 2\pi m,\ m \in \mathbb{Z}$ $z_{k+1} = z_k + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$
23	$X_1 = \partial_z,\ X_2 = \sin z\partial_x - \mathrm{tg}\,x\cos z\partial_z,$ $X_3 = \cos z\partial_x + \mathrm{tg}\,x\sin z\partial_z$	2	$x_{k+1} = x_k + 2\pi l,\ l \in \mathbb{Z}$ $y_{k+1} = g(y_k),$ $z_{k+1} = z_k + 2\pi m,\ m \in \mathbb{Z}$

4. Заключение

Данная статья посвящена непрерывной симметрии и групповой классификации дискретных динамических систем с размерностью не выше трех с помощью групп Ли преобразований. В статье приводятся полученные при помощи известных классификаций двумерных и трехмерных алгебр Ли семейства дискретных систем с двух- и трехпараметрической группой симметрии.

Полученные результаты для двумерных и трехмерных дискретных динамических систем могут быть использованы при исследовании дискретных систем и, в частности, при нахождении точного общего решения рекуррентного уравнения, которое соответствует динамической системе, если известна двумерная или трехмерная группа непрерывной симметрии. Полученные семейства могут быть расширены на динамические системы большей размерности, если ввести произвольные функции относительно добавляемых переменных. На примере отображений (2.2) и (2.3) показано получение общего вида дискретной динамической системы, которая допускает определенный тип двумерной или трехмерной группы Ли преобразований.

Список литературы

[1] Cicogna G., Gaeta G. On symmetry and normal form theory: Preprint (1995).

[2] Dorodnitsyn V., Kozlov R., Winternitz P. Lie group classification of second-order ordinary difference equations // J. Math. Phys., 2000, vol. 41, no. 1, pp. 480–504.

[3] Gómez-Ullate D., Lafortune S., Winternitz P. Symmetries of discrete dynamical systems involving two species // J. Math. Phys., 1999, vol. 40, no. 6, pp. 2782–2804.

[4] Khabirov S. V. Classification of three-dimensional Lie algebras in R^3 and their second-order differential invariants // Lobachevskii J. Math., 2010, vol. 31, no. 2, pp. 152–156.

[5] Levi D., Winternitz P. Symmetries of discrete dynamical systems // J. Math. Phys., 1996, vol. 37, no. 11, pp. 5551–5576.

[6] Levi D., Winternitz P. Continuous symmetries of difference equations, arxiv:nlin/0502004v1 (5 Feb 2008).

[7] Lie S. Vorlesungen über Differentialgleichungen mit bekannten infinitesimalen Transformationen. Leipzig: Teubner, 1891. 568 pp.

[8] Maeda S. Canonical structure and symmetries for discrete systems // Math. Japon., 1980, vol. 25, no. 4, pp. 405–420.

[9] Maeda S. The similarity method for difference equations // IMA J. Appl. Math., 1987, vol. 38, no. 2, pp. 129–134.

[10] Moritz B., Schwalm W., Uherka D. Finding Lie groups that reduce the order of discrete dynamical systems // J. Phys. A, 1998, vol. 31, no. 36, pp. 7379–7402.

[11] Winternitz P. Symmetries of discrete systems, arxiv:nlin/0309058v1 (22 Sep 2003).

[12] Адлер В. Э. Классификация дискретных интегрируемых уравнений: дис. ... докт. физ.-мат. наук. Москва: ИТФ им. Л. Д. Ландау, 2010. 289 с.

[13] Бобровски Д. Введение в теорию динамических систем с дискретным временем. Москва–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, 2006. 360 с.

[14] Головин С. В., Чесноков А. А. Групповой анализ дифференциальных уравнений. Новосибирск: Новосиб. гос. ун-т, 2008. 113 с.

[15] Дородницын В. А. Группы преобразований в сеточных пространствах // Современные проблемы математики: Новейшие достижения: Т. 34. Москва: ВИНИТИ, 1989. С. 149–190.

[16] Дородницын В. А. Групповые свойства разностных уравнений. Москва: Физматлит, 2001. 240 с.

[17] Ибрагимов Н. Х. Опыт группового анализа. Москва: Знание, 1991. 48 с.

[18] Овсянников Л. В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. Москва: Наука, 1978. 416 с.

[19] Шильников Л. П., Шильников А. Л., Тураев Д. В., Чуа Л. Методы качественной теории в нелинейной динамике. Москва–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. 428 с.

[20] Яненко Н. Н., Шокин Ю. И. О групповой классификации разностных схем для системы уравнений газовой динамики // Тр. МИАН СССР, 1973, т. 122, с. 85–96.

Group classification of discrete dynamical systems

Pavel V. Markov

Institute of Mathematics and Computer Sciences of Tyumen State University
Perekopskaya 15a, Tyumen, 625000, Russia

markov.pv@mail.ru

An application of Lie groups of transformations theory for analysis of discrete dynamical systems is showed in this article. Families of two-dimensional and three-dimensional discrete dynamical systems with two-parameter and three-parameter Lie groups of transformations as continuous symmetries were obtained with using of classifications of two-dimensional and three-dimensional Lie algebras.

MSC 2010: 37C05
Keywords: discrete dynamical system, continuous symmetry, group classification, Lie group

Received May 27, 2013, accepted November 28, 2013
Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2013, vol. 9, no. 4, pp. 641–649 (Russian)