Т.М. Банникова, Н.А. Баранова, Д.А. Шарычева

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ
ПРАКТИКУМ ПО РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ

Министерство образования и науки Российской Федерации
ФГБОУ ВПО «Удмуртский государственный университет»
Математический факультет
Кафедра алгебры и топологии

Т.М. Банникова, Н.А. Баранова, Д.А. Шарычева

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ
ПРАКТИКУМ ПО РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ

Ижевск
2014

УДК 514.74 (07)
ББК 22.151.54 р30
Б 232

Рекомендовано к изданию Учебно-методическим советом УдГУ

Рецензент: кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики и информатики ФГБОУ ВПО «ИжГТУ имени М. Т. Калашникова» А.Г. Ицков

Б 232 Аналитическая геометрия: учебно-методическое пособие / Т.М. Банникова, Н.А. Баранова, Д.А. Шарычева. –Ижевск, Изд-во «Удмуртский университет», 2014. – 92 с.

ISBN978-5-4312-0252-0

Данное учебно-методическое пособие предназначено студентам первого курса бакалавриата всех направлений подготовки, изучающих разделы аналитической геометрии как в рамках отдельной дисциплины, так икак часть любого другого курса математики. Пособие так же может быть полезно студентам для самостоятельной подготовки к различным видам промежуточной аттестации, преподавателям при проведении практических занятий, при подготовке индивидуальных заданий студентам и при разработке компетентностно-ориентированных оценочных средств.

Учебно-методическое пособие содержит решение типовых задач, варианты лабораторных работ по темам «Векторы», «Прямая на плоскости», «Прямая и плоскость в пространстве», «Кривые 2-го порядка» и позволяет диагностировать совокупность представленных во введении компетенций у студентов бакалавриата следующих направлений подготовки: «Математика и компьютерные науки», «Прикладная математика и информатика», «Механика».

УДК 514.74 (07)
ББК 22.151.54 р30

ISBN978-5-4312-0252-0

Содержание

ВВЕДЕНИЕ

Данное учебно-методическое пособие по курсу «Аналитическая геометрия» разработано на основе опыта преподавания данной дисциплины и современных методик обучения. Аналитическая геометрия – раздел геометрии, в котором геометрические фигуры и их свойства исследуются средствами алгебры на основе метода координат. В основе этого метода лежит так называемый метод координат, впервые применённый Декартом. Каждому геометрическому соотношению этот метод ставит в соответствие некоторое уравнение, связывающее координаты фигуры или тела. Идея координат и попытки записи уравнения кривой встречались в работах древних греков. Архимед и АполлонийПергский в своих сочинениях на примерах конических сечений пытались создать уравнения кривых. Однако из-за невысокого уровня древнегреческой алгебры и слабого интереса к кривым, отличным от прямой и окружности результаты не получили дальнейшего развития.

В Европе в XIV веке Николай Орезмский первым использовал координатное изображение для функции, зависящей от времени, назвав координаты, по аналогии с географическими, долготой и широтой. Возникновение метода координат тесно связано с бурным развитием астрономии, механики и техники в XVI веке. В 1637 годФерма в сочинении «Введение в изучение плоских и телесных мест» рассматривает (в символике Виета) уравнения различных кривых 2-го порядка в прямоугольных координатах. Однако данное сочинение Ферма широкой известностью не пользовалось. Гораздо большее влияние имела «Геометрия»Декарта, вышедшая в том же 1637 году, которая независимо и гораздо более полно развивала те же идеи. Декарт поместил в «Геометрии» множество примеров, иллюстрирующих огромную мощь нового метода, и получил немало результатов, неизвестных ранее.

Дальнейшее развитие аналитической геометрии связано с трудами Г.Лейбница, И.Ньютона и особенно Л.Эйлера. Идеи аналитической геометрии использовал Ж.Лагранжпри построении аналитической механики и Г.Монжв дифференциальной геометрии. На современном этапе аналитическая геометрия не имеет самостоятельного значения как наука, однако её методы широко применяются в различных разделах математики, механики, физики и др. наук. В связи с этим дисциплина «Аналитическая геометрия» занимает особое место в процессе подготовки бакалавров математики. Изучение аналитической геометрии помогает студентам выработать общематематическую культуру: умение логически мыслить, проводить доказательства основных утверждений, устанавливать логические связи между понятиями, знать основные алгоритмы решения геометрических задач, применять полученные знания для решения практических задач.

Получаемые знания лежат в основе математического образования и необходимы для понимания и освоения всех курсов математики, компьютерных наук и их приложений. Дисциплина входит в Базовую часть профессионального цикла ООП (Б3) бакалавриата и является общей для всех профилей подготовки. Дисциплина адресована бакалаврам первого года обучения. Успешное освоение дисциплины позволяет перейти к изучению таких дисциплин как: численные методы, компьютерная геометрия и геометрическое моделирование, дискретная математика, математическая логика и их приложения в информатике и компьютерных науках, основы компьютерных наук, теория чисел и других из базовой и вариативной частей профессионального цикла.

Для достижения этих целей разработано данное пособие, учитывающее требования Федеральных государственных образовательных стандартов.

Федеральные государственные образовательные стандарты третьего поколения определяют требования к результатам освоения основных образовательных программ бакалавриатав форме обладания выпускником определенными общекультурными и профессиональными компетенциями. Реализация компетентностного подхода, заявленного в этих стандартах, означает перенос акцента с целей формирования прочных систематизированных знаний к целям формирования способностей к активной профессиональной деятельности. Знания становятся не основной и единственной целью образования, а средством развития профессиональных и общекультурных компетенций студентов.

При изучении данной дисциплины формируются элементы следующей совокупности общекультурных и профессиональных компетенций:

- готовность использовать фундаментальные знания в области аналитической геометрии, дифференциальной геометрии и топологии;
- способностьрешать стандартные задачи профессиональной деятельности на основе информационной и библиографической культуры с применением информационно-коммуникационных технологий;
- способность к самостоятельной научно-исследовательской работе;
- способность к определению общих форм и закономерностей отдельной предметной области;
- способность математически корректно ставить естественнонаучные задачи, владением знанием постановок классических задач математики;
- способность строго доказать утверждение, сформулировать результат, увидеть следствия полученного результата;
- способность публично представлять собственные и известные научные результаты;
- способность представлять и адаптировать знания с учетом уровня аудитории;

– способность к организации учебной деятельности в предметной области математика;
– способность к планированию и осуществлению педагогической деятельности с учетом специфики предметной области в образовательных организациях;
– способность к проведению методических работ в области математики.

Важно понять, что за формирование большинства компетенций не могут отвечать лишь отдельно взятые учебные дисциплины. Компоненты компетенций формируются при изучении различных дисциплин, а также в немалой степени в процессе практической и самостоятельной работы студента, поэтому в данном учебно-методическом пособии представлены оценочные средства диагностики соответствующей совокупности компетенций, имеющих отношение к дисциплине «Аналитическая геометрия».

Диагностика уровня сформированности совокупности компетенций (порогового или повышенного) включает в себя три типа заданий (знать, уметь, владеть), позволяющих оценить образовательные результаты обучающихся при завершении изучения дисциплины «Аналитическая геометрия» или соответствующего модуля, включенного в ряд математических дисциплин. Оценочные средства представлены в конце каждого параграфа и могут позволить студенту бакалавриата успешно подготовиться к экзамену по данной дисциплине.

Компонент совокупности компетенций **знать** оценивается успешностью ответа студента на вопросы для самоконтроля. Для достижения **порогового уровня** достаточно знания основных определений, примеров к ним, формулировок основных свойств и теорем. **Повышенный уровень** предполагает возможность воспроизведения доказательств основных свойств и теорем, а так же понимания их значимости для решения практических задач.

Компонент совокупности компетенций **уметь** диагностируется в процессе выполнения лабораторной работы по данной теме. Для **порогового уровня** достаточно правильного решения 70 % задач, а для **повышенного уровня** все задачилабораторной работы должны быть решены верно.

Компонент совокупности компетенций **владеть** представляет собой кейс-задание, диагностирующее способность обучающегося использовать, полученные при изучении данной дисциплины знания и умения для решения профессиональных задач. В данном учебно-методическом пособии представлены кейс задания, предполагающие использование идей аналитической геометрии для решения практических задач, использования компьютерных технологий в профессиональной деятельности.

§1 Векторы.

Определение. *Вектором* называется направленный отрезок. *Координатами* вектора называются проекции этого вектора на координатные оси.

Пусть $\bar{a}(x;\ y;\ z)$–произвольный вектор и известно, что он образует с осями координат Ox, Oy, Oz углы α, β, γ соответственно. Тогда числа $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ называются *направляющими косинусами* вектора. Известно равенство: $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

Определение. *Скалярным произведением* двух векторов называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними: $(\bar{a}, \bar{b}) = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \cos\varphi$, где φ – угол между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

Свойства скалярного произведения:

1) $(\bar{a}, \bar{b}) = (\bar{b}, \bar{a})$;

2) $(\lambda\bar{a}, \bar{b}) = \lambda \cdot (\bar{a}, \bar{b})$;

3) $((\bar{a} + \bar{b}), \bar{c}) = (\bar{a}, \bar{c}) + (\bar{b}, \bar{c})$;

4) $(\bar{a}, \bar{a}) > 0$, если $\bar{a} \neq 0$; $(\bar{a}, \bar{a}) = |\bar{a}|^2$.

Теорема. Если векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ заданы декартовыми прямоугольными координатами, то: $\bar{a}(x_1;\ y_1;\ z_1)$, $\bar{b}(x_2;\ y_2;\ z_2)$, то $(\bar{a}, \bar{b}) = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2$.

Из теоремы и свойства (4) следует, что $|\bar{a}| = \sqrt{(\bar{a}, \bar{a})} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$.

Определение. *Проекцией* вектора $\bar{a}$ на вектор $\bar{b}$ называется число: $\text{пр}_{\bar{b}}\bar{a} = |\bar{a}| \cdot \cos(\bar{a}\wedge\bar{b})$.

Определение. *Ортом* вектора $\bar{a}$ называется вектор $\bar{e}_{\bar{a}}$ единичной длины, одинаково с ним направленный.

Применение скалярного произведения векторов:

1) Нахождение угла между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$:

$$\cos\varphi = \frac{(\bar{a}, \bar{b})}{|\bar{a}| \cdot |\bar{b}|} = \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}.$$

2) Вычисление проекции вектора $\bar{a}$ на вектор $\bar{b}$:

$$\text{пр}_{\bar{b}}\bar{a} = \frac{(\bar{a}, \bar{b})}{|\bar{b}|}.$$

3) Для определения длины вектора:

$(\bar{a}, \bar{a}) = |\bar{a}|^2$, следовательно $|\bar{a}| = \sqrt{(\bar{a}, \bar{a})}$.

4) Для определения перпендикулярности векторов:

$$\bar{a} \perp \bar{b} \Leftrightarrow (\bar{a}, \bar{b}) = 0.$$

Определение. *Векторным произведением* вектора $\bar{a}$ на $\bar{b}$ называется вектор, обозначаемый символом $[\bar{a}, \bar{b}]$ и определяемый следующими тремя условиями:

1) Модуль вектора $[\bar{a}, \bar{b}]$ равен $|\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \sin\varphi$, где φ– угол между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

2) Вектор $[\bar{a}, \bar{b}]$ перпендикулярен к каждому из векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

3) Направление вектора $[\bar{a}, \bar{b}]$ соответствует «правилу правой руки».

Свойства векторного произведения:

1) Векторное произведение зависит от порядка сомножителей, именно:$[\bar{a}, \bar{b}] = -[\bar{b}, \bar{a}]$.

2) Модуль векторного произведения$[\bar{a}, \bar{b}]$равен площади S параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a}$и$\bar{b}$: $\left|[\bar{a}, \bar{b}]\right| = S$.

3) Векторное произведение может быть выражено формулой:

$[\bar{a}, \bar{b}] = S \cdot \bar{e}$,где $\bar{e}$– орт векторного произведения.

4) Векторное произведение $[\bar{a}, \bar{b}]$ обращается в нуль тогда и только тогда, когда векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ коллинеарны. В частности $[\bar{a}, \bar{a}] = 0$.

5) $[\bar{a} + \bar{b}, \bar{c}] = [\bar{a}, \bar{c}] + [\bar{b}, \bar{c}]$.

6) $[\lambda\bar{a}, \bar{b}] = \lambda \cdot [\bar{a}, \bar{b}]$.

Теорема. Если векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ заданы декартовыми прямоугольными координатами$\bar{a}(x_1, y_1, z_1)$, $\bar{b}(x_2, y_2, z_2)$,то векторное произведение вектора $\bar{a}$ на вектор $\bar{b}$ определяется формулой:$[\bar{a}, \bar{b}] = \begin{vmatrix} \bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$.

Применение векторного произведения векторов:

1) Для отыскания площади параллелограмма, построенного на векторах$\bar{a}$ и $\bar{b}$:$S = \left|[\bar{a}, \bar{b}]\right|$.

2) Для нахождения вектора $\bar{c}$, перпендикулярного векторам $\bar{a}$ и $\bar{b}$:

$\bar{c} = [\bar{a}, \bar{b}]$.

Определение. Если вектор $\bar{a}$ умножается векторно на вектор $\bar{b}$, и вектор $[\bar{a}, \bar{b}]$ также векторно умножается на вектор $\bar{c}$, то мы получаем вектор $[[\bar{a}, \bar{b}], \bar{c}]$, который называется *двойным векторным произведением*.

Свойства:

1) $[[\bar{a}, \bar{b}], \bar{c}] = \bar{b} \cdot (\bar{a}, \bar{c}) - \bar{a} \cdot (\bar{b}, \bar{c})$.

2) $[[\bar{a}, \bar{b}], \bar{c}] \neq \left[\bar{a}, [\bar{b}, \bar{c}]\right]$.

Определение. *Смешанным произведением* трех векторов $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ называется число, равное скалярному произведению вектора $[\bar{a}, \bar{b}]$ на вектор $\bar{c}$, т.е. $([\bar{a}, \bar{b}], \bar{c})$.

Свойство.Имеет место тождество:$([\bar{a}, \bar{b}], \bar{c}) = \left(\bar{a}, [\bar{b}, \bar{c}]\right)$.

Теорема. Смешанное произведение$\left([\bar{a}, \bar{b}], \bar{c}\right)$равно объему параллелепипеда, построенного на векторах$\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$, взятому со знаком плюс, если тройка $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ правая, и со знаком минус, если тройка левая.

Теорема. Векторы $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ компланарны тогда и только тогда, когда смешанное произведение$\left([\bar{a}, \bar{b}], \bar{c}\right)$равно нулю; иначе говоря, равенство$\left(\left[\bar{a},\bar{b}\right],\bar{c}\right)=0$ –есть необходимое и достаточное *условие компланарности* векторов $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$.

Теорема. Если векторы $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ заданы декартовыми прямоугольными координатами$\bar{a}(x_1;\ y_1;\ z_1)$, $\bar{b}(x_2;\ y_2;\ z_2)$, $\bar{c}(x_3;\ y_3;\ z_3)$, то смешанное произведение$(\left[\bar{a},\bar{b}\right],\bar{c})$определяется формулой:$(\left[\bar{a},\bar{b}\right],\bar{c})=\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3\\ y_1 & y_2 & y_3\\ z_1 & z_2 & z_3\end{vmatrix}$.

Напомним, что система координатных осей предполагается правой (вместе с тем является правой и тройка векторов $\{\bar{\imath},\bar{\jmath},\bar{k}\}$).

Применение смешанного произведения векторов:

1) Для отыскания объема параллелепипеда и тетраэдра, построенныхнавекторах$\bar{a},\bar{b},\bar{c}$: $V_{\text{пар}}=\ |(\left[\bar{a},\bar{b}\right],\bar{c})|$, $V_{\text{тет}}=\frac{1}{6}\cdot|(\left[\bar{a},\bar{b}\right],\bar{c})|$.

2) Для решения вопроса о компланарности векторов.

3) Для решения вопроса о линейной зависимости или независимости трех векторов.

4) Для решения вопроса об ориентации векторов.

Деление отрезка в данном отношении.

Пусть на прямой заданы точки $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ и $M_2(x_2;\ y_2;\ z_2)$, а$M(x;\ y;\ z)$–произвольная точка прямой.

Обозначим через λ отношение$\frac{\overline{M_1M}}{\overline{MM_2}}$; будем говорить, что точка M делит отрезок M_1M_2 в отношении λ. Известно, чтокоординаты точки M определяются по формулам:$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}$; $y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}$; $z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}$.

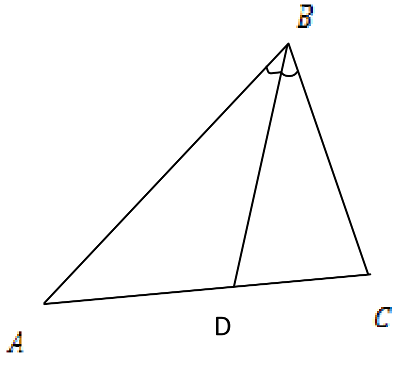
Если точка M является серединой отрезка M_1M_2, то ее координаты определяются по формулам:$x=\frac{x_1+x_2}{2}$; $y=\frac{y_1+y_2}{2}$; $z=\frac{z_1+z_2}{2}$;$(\lambda=1)$.

В зависимости от положения точки M число λ может принимать различные значения.

Решение типовых задач

Задача **№1**:

Даны вершины треугольника $A(1;\ 2;-1)$,$B(2;-1;\ 3)$,$C(-4;\ 7;\ 5)$. Вычислить координаты и длину биссектрисы BDего внутреннего угла при вершине B.



Решение:

1) Известно, что биссектриса треугольника делит противоположную сторону на отрезки, пропорциональные прилежащим сторонам, т.е. $\frac{|\overline{AD}|}{|\overline{DC}|}=\frac{|\overline{AB}|}{|\overline{BC}|}$.

2) Будем считать, что D– делящая точка отрезка AC, $\Rightarrow\frac{|\overline{AD}|}{|\overline{DC}|}=\lambda$;

$\overline{AB} = (1; -3;\ 4);\ \overline{BC} = (-6;\ 8;\ 2)$; поэтому$\lambda = \frac{|\overline{AB}|}{|\overline{BC}|} = \frac{\sqrt{1^2+(-3)^2+4^2}}{\sqrt{(-6)^2+8^2+2^2}} = \frac{\sqrt{26}}{\sqrt{104}} = \frac{1}{2}$.Итак, $\lambda = \frac{1}{2}$.

3) Найдем координаты т.D:$x_D = \frac{X_A+\lambda\cdot X_c}{1+\lambda} = \frac{1+\frac{1}{2}\cdot(-4)}{1+\frac{1}{2}} = -\frac{2}{3}$;

$$y_D = \frac{Y_A+\lambda\cdot Y_c}{1+\lambda} = \frac{2+\frac{1}{2}\cdot 7}{1+\frac{1}{2}} = 3\frac{2}{3};\ z_D = \frac{Z_A+\lambda\cdot Z_c}{1+\lambda} = \frac{-1+5\cdot\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}} = 1;$$

$D = (-\frac{2}{3};\ 3\frac{2}{3};\ 1)$; таким образом,$\overline{BD} = (-2\frac{2}{3}; 4\frac{2}{3}; -2)$.

4) Найдем длину BD:

$$\overline{BD} = \left(-2\frac{2}{3};\ 4\frac{2}{3};\ -2\right) \Rightarrow |\overline{BD}| = \sqrt{\left(-\frac{8}{3}\right)^2 + \left(\frac{14}{3}\right)^2 + (-2)^2} = \frac{2\sqrt{74}}{3}.$$

Ответ:$|\overline{BD}| = \frac{2\sqrt{74}}{3}$.

Задача **№2**:

Найти направляющие косинусы биссектрисы BDугла BтреугольникаABC с вершинами $A(2; -1;\ 3), B(4;\ 0;\ 1), C(-10;\ 5;\ 3)$.

Решение:

1) Найдем координаты точкиD:$\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC} = \lambda$;$\overline{AB} = (2;\ 1;\ -1);\ \overline{BC} = (-14;\ 5;\ 2)$;

$$x_D = \frac{X_A+\lambda\cdot X_c}{1+\lambda} = \frac{2+\frac{1}{5}\cdot(-10)}{1+\frac{1}{5}} = 0; y_D = \frac{Y_A+\lambda\cdot Y_c}{1+\lambda} = \frac{-1+\frac{1}{5}\cdot 5}{1+\frac{1}{5}} = 0;$$

$z_D = \frac{Z_A+\lambda\cdot Z_c}{1+\lambda} = \frac{3+3\cdot\frac{1}{5}}{1+\frac{1}{5}} = 3$; таким образом, $D(0;\ 0;\ 3)$.

2) Найдем координаты $\overline{BD}$: $\overline{BD} = (-4;\ 0;\ 2)$.Пусть$\overline{BD}\ (x;\ y;\ z)$, тогда:$x = |(\overline{BD})|\cdot cos\ \alpha \Rightarrow cos\,\alpha = \frac{x}{|\overline{BD}|} = \frac{-4}{2\sqrt{5}} = -\frac{2}{\sqrt{5}}$;

$y = |(\overline{BD})|\cdot cos\ \beta \Rightarrow cos\,\beta = \frac{y}{|\overline{BD}|} = 0$;

$z = |(\overline{BD})|\cdot cos\ \gamma \Rightarrow cos\,\gamma = \frac{z}{|\overline{BD}|} = \frac{2}{2\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

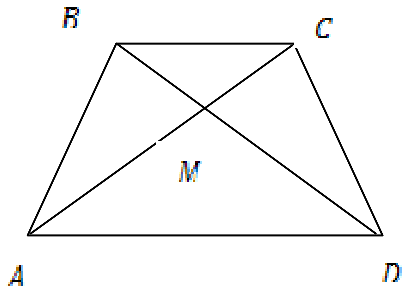
3) Найдем величину угла B:$cos\,\angle B = cos(\overline{BA}\,\hat{}\,\overline{BC}) =$

$$= \frac{(\overline{BA}, \overline{BC})}{|\overline{BA}|\cdot|\overline{BC}|} = \frac{(-2)\cdot(-14)+5\cdot(-1)+4}{\sqrt{9}\cdot\sqrt{225}} = \frac{27}{45} = \frac{3}{5};$$

Ответ: $cos\,\alpha = -\frac{2}{\sqrt{5}};\ cos\,\beta = 0; cos\,\gamma = \frac{1}{\sqrt{5}};\ \angle B = arccos\frac{3}{5}$.

Задача **№3**:

Три последовательные вершины трапеции $ABCD$ находятся в точках $A(-3; -2; -1), B(1;\ 2;\ 3), C(9;\ 6;\ 4)$. Найти четвертую вершину D этой трапеции, зная, что длина основания$\overline{AD}$равна 15. Найти также точку M– пересечения диагоналей трапеции.



Решение:

1) $\overline{BC}$ (8; 4; 1); $|\overline{BC}|$ =9; $\frac{|\overline{AD}|}{|\overline{BC}|} = \frac{15}{9} = \frac{5}{3}$; т.к. $\overline{BC}$ и $\overline{AD}$– сонаправлены⇒$\overline{AD} = \frac{5}{3}\overline{BC}$ =$(\frac{40}{3}; \frac{20}{3}; \frac{5}{3})$; откуда $D(\frac{31}{3}; \frac{14}{3}; \frac{2}{3})$.

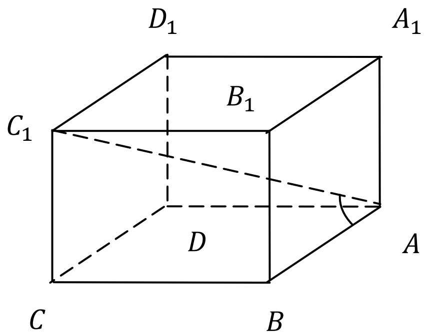
2) $\Delta AMD \backsim \Delta CMB$(они подобны) ⇒$\frac{|\overline{AM}|}{|\overline{MC}|} = \frac{|\overline{AD}|}{|\overline{BC}|} = \frac{5}{3} = \lambda$.

Тогда,по формуламделения отрезка в данном отношении, $M(\frac{9}{2}; 3; \frac{17}{8})$.

Ответ: $D(\frac{31}{3}; \frac{14}{3}; \frac{2}{3})$;$M(\frac{9}{2}; 3; \frac{17}{8})$.

Задача **№4**:

Одна из вершин параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$находится в точке $A(1; 2; 3)$, а концы выходящих из нее ребер– в точках $B(9; 6; 4)$, $D(3; 0; 4)$, $A_1(5; 2; 6)$. Найти: длину диагонали AC_1и угол BAC_1 между ребром AB и диагональю AC_1 этого параллелепипеда.



Решение:

1) Найдем векторы $\overline{AB}(8; 4; 1)$, $\overline{AD}(2; -2; 1)$, $\overline{AA_1}(4; 0; 3)$,$\overline{AC}_1 = \overline{AB} + \overline{AD} + \overline{AA}_1 = (8 + 2 + 4; 4 - 2 + 0; 1 + 1 + 3) = (14; 2; 5)$.

$|\overline{AC_1}| = \sqrt{14^2 + 2^2 + 5^2 = 15}$.

2) $cos(\overline{AB}\wedge\overline{AC_1}) = \frac{(\overline{AB},\overline{AC_1})}{|\overline{AB}|\cdot|\overline{AC_1}|} = \frac{8\cdot14+4\cdot2+1\cdot5}{\sqrt{64+16+1}\cdot\sqrt{196+4+25}} = \frac{25}{27}$.

Ответ: $|\overline{AC_1}| = 15$; $\angle BAC_1 = arccos\frac{25}{27}$.

Задача **№5**:

Найти проекцию вектора $\bar{s} = (4; -3; 2)$ на ось, составляющую с координатными осями равные острые углы.

Решение:

Возьмём на оси вектор $\bar{e}$единичной длины и найдём его координаты.Известно, что $cos^2\alpha + cos^2\beta + cos^2\gamma = 1$, т.к. $\angle\alpha = \angle\beta = \angle\gamma$,то $3\cdot cos^2\alpha = 1$; $cos^2\alpha = \frac{1}{3}$; $cos\,\alpha = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$, берем $cos\,\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$, т.к. угол α острый.Итак, $\bar{e}(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ $\Rightarrow$пр$_{\bar{e}}\bar{s} = \frac{(\bar{s},\bar{e})}{|\bar{e}|}$; $|\bar{e}| = \sqrt{\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}} = 1$; $(\bar{s}, \bar{e}) = 4\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} + (-3)\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} + 2\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{4-3+2}{\sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$; пр$_{\bar{e}}\bar{s} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$.

Ответ: пр$_{\bar{e}}\bar{s} = \sqrt{3}$.

Задача **№6**:

Векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ образуют угол $\varphi = 60°$, причем $|\bar{a}| = 5$ и $|\bar{b}| = 8$. Определить $|\bar{a} + \bar{b}|$ и $|\bar{a} - \bar{b}|$.

Решение:

1 способ:

1) $|\bar{a} + \bar{b}| = \sqrt{(\bar{a} + \bar{b})^2} =$

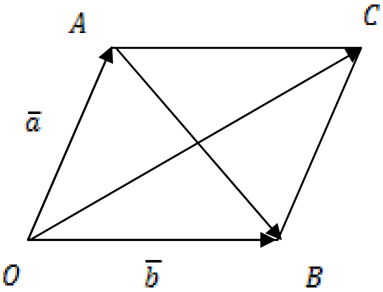
$= \sqrt{\bar{a}^2 + 2 \cdot (\bar{a}, \bar{b}) + \bar{b}^2} = \sqrt{|\bar{a}|^2 + 2 \cdot (|\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \cos 60°) + |\bar{b}|^2}$

$= \sqrt{89 + 5 \cdot 8} = \sqrt{129};$

2) $|\bar{a} - \bar{b}| = \sqrt{(\bar{a} - \bar{b})^2} -$

$= \sqrt{\bar{a}^2 - 2 \cdot (\bar{a}, \bar{b}) + \bar{b}^2} = \sqrt{|\bar{a}|^2 - 2 \cdot (|\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \cos 60°) + |\bar{b}|^2} =$

$\sqrt{89 - 5 \cdot 8} = 7.$



2 способ:

На векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$ построили параллелограмм $OACB$: $\overline{OA} = \bar{a}$, $\overline{OB} = \bar{b}$. Очевидно, что $\overline{OC} = \bar{a} + \bar{b}$, $\overline{AB} = \bar{b} - \bar{a}$. Из треугольника OAB по теореме косинусов найдём .

$AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2 \cdot OA \cdot OB \cdot \cos 60^{\circ} = 64 + 25 - 2 \cdot 8 \cdot 5 \cdot \frac{1}{2} = 49$

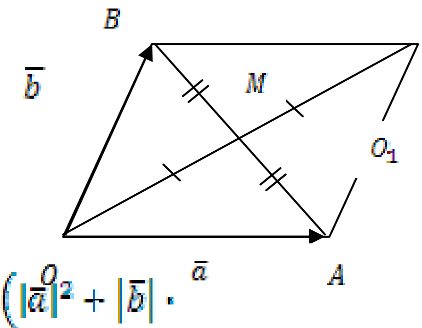
Итак, $|\bar{b} - \bar{a}| = |\bar{a} - \bar{b}| = 7$. Из треугольника OAC аналогично найдём $|\bar{a} + \bar{b}| = |\overline{OC}| = \sqrt{129}$.

Ответ: 1) $|\bar{a} + \bar{b}| = \sqrt{129}$; 2) $|\bar{a} - \bar{b}| = 7$.

Задача **№7**:

Даны векторы $\overline{OA} = \bar{a}$ и $\overline{OB} = \bar{b}$, причем $|\bar{a}| = 2$, $|\bar{b}| = 4$, угол между ними $\frac{\pi}{3}$. Найти угол между медианой OM треугольника AOB и стороной OA.

Решение:



1) Достроим ΔAOB до параллелограмма $AOBO_1$, для этого продолжим медиану OM так, что $MO_1 = OM$, $\overline{OO_1} = \bar{a} + \bar{b} \Rightarrow \overline{OM} = \frac{\bar{a}+\bar{b}}{2}$.

2) $\cos(\overline{OM}, \overline{OA}) = \frac{(\overline{OM}, \overline{OA})}{|\overline{OM}| \cdot |\overline{OA}|}$; .

$(\overline{OM}, \overline{OA}) = \left(\frac{\bar{a}+\bar{b}}{2}, \bar{a}\right) = \frac{1}{2}(\bar{a} + \bar{b}, \bar{a}) = \frac{1}{2}\left((\bar{a}, \bar{a}) + (\bar{b}, \bar{a})\right) = \frac{1}{2}\left(|\bar{a}|^2 + |\bar{b}| \cdot |\bar{a}| \cdot \cos\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}\left(4 + 4 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2}\right) = 4$

3) $|\overline{OM}| = \frac{1}{2}|\overline{OO_1}|, |\overline{OO^1}| = \sqrt{(\bar{a} + \bar{b})^2} =$

$\sqrt{|\bar{a}|^2 + |\bar{b}|^2 + 2 \cdot |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \cos\frac{\pi}{3}} = \sqrt{28} = 2\sqrt{7},$

следовательно $|\overline{OM}| = \sqrt{7}$, $|\overline{OA}| = |\bar{a}| = 2$.

Тогда $cos(\overline{OM}\,\hat{}\,\overline{OA}) = \frac{\overline{OM}\cdot\overline{OA}}{|\overline{OM}|\cdot|\overline{OA}|} = \frac{4}{2\sqrt{7}} = \frac{2}{\sqrt{7}}$.

Ответ: $(\overline{OM}\,\hat{}\,\overline{OA}) = arccos\frac{2}{\sqrt{7}}$..

Задача **№8**:

Вычислить длину вектора $\bar{p} = 10\cdot\bar{a} + 2\cdot\bar{b} + \bar{c}$, если $|\bar{a}| = 1,\ |\bar{b}| = 1, |\bar{c}| = 2, (\bar{a}\,\hat{}\,\bar{b}) = \frac{\pi}{2}, (\bar{a}\,\hat{}\,\bar{c}) = \pi, (\bar{c}\,\hat{}\,\bar{b}) = \frac{\pi}{3}$.

Решение:

$|\bar{p}| = \sqrt{(10\cdot\bar{a} + 2\cdot\bar{b} + \bar{c})^2} = \sqrt{100\cdot|\bar{a}|^2 + 4\cdot|\bar{b}|^2 + |\bar{c}|^2 + 40\cdot(\bar{a},\bar{b}) + 2\cdot(\bar{a},\bar{c}) + 4\cdot(\bar{b},\bar{c})} = \sqrt{100\cdot1 + 4\cdot1 + 4 + 40\cdot1\cdot1\cdot cos\frac{\pi}{2} + 20\cdot1\cdot2\cdot cos\,\pi + 4\cdot1\cdot2\cdot cos\frac{\pi}{3}} = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$;

Ответ: $|\bar{p}| = 6\sqrt{2}$.

Задача **№9**:

Найти угол между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$, если $\bar{a} = 2\cdot\bar{m} + 4\cdot\bar{n}$, $\bar{b} = \bar{m} - \bar{n}$, $|\bar{m}| = 2, |\bar{n}| = 3, (\bar{m}\,\hat{}\,\bar{n}) = \frac{\pi}{3}$.

Решение:

1) $cos\,\varphi = \frac{(\bar{a},\bar{b})}{|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|}$;

2) $(\bar{a},\bar{b}) = (2\cdot\bar{m} + 4\cdot\bar{n}, \bar{m} - \bar{n}) = 2\cdot(\bar{m})^2 - 2\cdot(\bar{m},\bar{n}) + 4\cdot(\bar{m},\bar{n}) - 4\cdot(\bar{n})^2 = -22$;

3) $|\bar{a}| = \sqrt{(2\cdot\bar{m} + 4\cdot\bar{n})^2} = \sqrt{4\cdot(\bar{m})^2 + 16\cdot(\bar{m},\bar{n}) + 16\cdot(\bar{n})^2} = \sqrt{16 + 48 + 144} = \sqrt{208} = 4\sqrt{13}$;

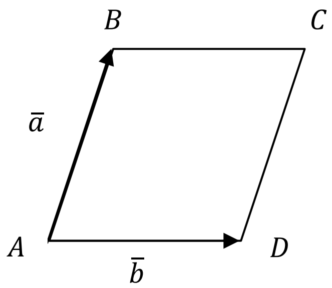
$|\bar{b}| = \sqrt{(\bar{m} - \bar{n})^2} = \sqrt{(\bar{m})^2 - 2\cdot\bar{m}\cdot\bar{n} + (\bar{n})^2} = \sqrt{4 - 6 + 9} = \sqrt{7}$;

4) $cos(\bar{a}\,\hat{}\,\bar{b}) = \frac{(-22)}{4\cdot\sqrt{13}\cdot\sqrt{7}} = -\frac{11}{2\sqrt{91}}$.

Ответ: $(\bar{a}\,\hat{}\,\bar{b}) = arccos(-\frac{11}{2\sqrt{91}})$.

Задача **№10**:

Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a}(-1;\ 2;\ 4)$ и $\bar{b}(0; -1;\ 3)$.



Решение:

$$S_{пар} = |[\bar{a},\bar{b}]|;\ [\bar{a},\bar{b}] = \begin{vmatrix} \bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k} \\ -1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} =$$

$= 10\cdot\bar{\imath} + 3\cdot\bar{\jmath} + \bar{k} = (10;\ 3;\ 1)$;

$$S_{пар} = |10{,}3{,}1| = \sqrt{10^2 + 3^2 + 1^2} = \sqrt{110}.$$

Ответ: $S_{\text{пар}} = \sqrt{110}$ кв. ед.

Задача **№11**:

Даны$|\bar{a}| = 10$, $|\bar{b}| = 2$ и$(\bar{a}, \bar{b}) = 12$. Вычислить: $|[\bar{a}, \bar{b}]|$.

Решение:

Из определения векторного произведения следует:

$$|[\bar{a}, \bar{b}]| = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \sin\varphi \Rightarrow \sin\varphi > 0.$$

Найдем$\sin\varphi$: $(\bar{a}, \bar{b}) = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \cos\varphi$; $\cos\varphi = \frac{(\bar{a},\bar{b})}{|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|}$; $\cos\varphi = \frac{12}{10\cdot 2} = \frac{3}{5}$;$\sin\varphi = \sqrt{1-\cos^2\varphi} = \sqrt{1-\frac{9}{5}} = \frac{4}{5}$; поэтому $|[\bar{a}, \bar{b}]| = 10\cdot 2\cdot \frac{4}{5} = 16.$

Ответ: $|[\bar{a}, \bar{b}]| = 16.$

Задача **№12**:

Векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ взаимно перпендикулярны. Зная, что $|\bar{a}| = 3, |\bar{b}| = 4$,вычислить: $|[(3\cdot\bar{a} - \bar{b}), (\bar{a} - 2\cdot\bar{b})]|$.

Решение:

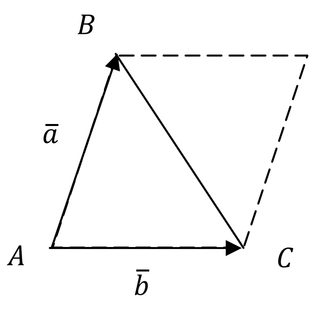
Так как $[\bar{a}, \bar{a}] = [\bar{b}, \bar{b}] = 0$, то$|[(3\cdot\bar{a} - \bar{b}), (\bar{a} - 2\cdot\bar{b})]| = |3\cdot[\bar{a}, \bar{a}] - [\bar{b}, \bar{a}] - 6\cdot[\bar{a}, \bar{b}] + 2\cdot[\bar{b}, \bar{b}]| = | - [\bar{b}, \bar{a}] + 6\cdot[\bar{b}, \bar{a}]| = 5\cdot|[\bar{b}, \bar{a}]| = 5\cdot|\bar{b}|\cdot|\bar{a}|\cdot \sin 90° = 5\cdot 4\cdot 3 = 60.$

Ответ: $|[(3\cdot\bar{a} - \bar{b}), (\bar{a} - 2\cdot\bar{b})]| = 60.$

Задача **№13**:

Найти площадь треугольника, построенного на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$, если $\bar{a} = \bar{p} - 4\cdot\bar{q}$, $\bar{b} = 3\cdot\bar{p} + \bar{q}$, $|\bar{p}| = 1, |\bar{q}| = 2,$ а угол между векторами$\bar{p}$ и $\bar{q}$равен$\frac{\pi}{6}$.

Решение:



Площадь треугольника равна половине площади параллелограмма построенного на векторах$\bar{a}$ и $\bar{b}$.

Найдём площадь параллелограмма:$S = |[\bar{a}, \bar{b}]| = |[(\bar{p} - 4\cdot\bar{q})\cdot(3\cdot\bar{p} + \bar{q})]| = |[3\cdot\bar{p}, \bar{p}] - [12\cdot\bar{q}, \bar{p}] + [\bar{p}, \bar{q}] - -[4\cdot\bar{q}, \bar{q}]| = |[13\cdot\bar{p}, \bar{q}]| = 13\cdot|\bar{p}|\cdot|\bar{q}|\cdot\sin\frac{\pi}{6} = 13\cdot 2\cdot 1\cdot\frac{1}{2} = 13;$

так как$[\bar{p}, \bar{p}] = [\bar{q}, \bar{q}] = 0.$$S_{\Delta} = \frac{13}{2} = 6,5$ кв. ед.

Ответ:$S_{\Delta} = 6,5$ кв. ед.

Задача **№14**:

Вектор $\bar{x}$, перпендикулярный к векторам $\bar{a} = (4;\ -2;\ -3)$ и $\bar{b} = (0;\ 1;\ 3)$, образует с осью Oy тупой угол. Зная, что $|\bar{x}| = 26$, найти его координаты.

Решение:

1 способ: Искомый вектор $\bar{x}$ перпендикулярен $\bar{a}$ и $\bar{b}$, поэтому мы можем его найти, как $[\bar{a},\bar{b}]$, но с точностью до длины.

$$[\bar{a},\bar{b}] = \begin{vmatrix} \bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k} \\ 4 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -3\cdot\bar{\imath} - 12\cdot\bar{\jmath} + 4\cdot\bar{k} = (-3;-12;\ 4).$$

$$|[\bar{a},\bar{b}]| = \sqrt{(-3)^2+(-12)^2+4^2} = \sqrt{9+144+16} = \sqrt{169} = 13.$$

Т.к. $|\bar{x}| = 26$, а $|[\bar{a},\bar{b}]| = 13$, мы делаем вывод, что $|\bar{x}| = 2\cdot|[\bar{a},\bar{b}]|$. Из этого следует, что координаты вектора $\bar{x}$ в два раза больше, чем у вектора $[\bar{a},\bar{b}]$; $\bar{x} = 2\cdot[\bar{a},\bar{b}\,] = (-6;-24;\ 8)$.

Найденный вектор искомый, т.к. он образует с осью Oy тупой угол.

2 способ: Искомый вектор $\bar{x}$ перпендикулярен к векторам $\bar{a}$ и $\bar{b}$. Значит $(\bar{x},\bar{a}) = 0$ и $(\bar{x},\bar{b}) = 0$. Также нам дано, что $|\bar{x}| = 26$. Обозначим координаты вектора $\bar{x}(x;\ y;\ z)$, тогда составим систему: $\begin{cases} (\bar{x},\bar{a}) = 0 \\ (\bar{x},\bar{b}) = 0 \\ |\bar{x}| = 26 \end{cases}$ или

$$\begin{cases} 4\cdot x - 2\cdot y - 3\cdot z = 0 \\ y + 3\cdot z = 0 \\ \sqrt{x^2+y^2+z^2} = 26 \end{cases}.$$

Решая систему и зная, что вектор $\bar{x}$ образует с осью Oy тупой угол, получаем $\bar{x} = (-6;-24;\ 8)$.

Ответ: $\bar{x} = (-6;-24;\ 8)$.

Задача **№15**:

Доказать, что векторы $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ компланарны, если $\bar{a} = (1;\ -2;\ 3)$, $\bar{b} = (0;\ 1;\ 4)$, $\bar{c} = (1;\ -1;\ 1)$.

Доказательство:

$$([\bar{a},\bar{b}],\bar{c}) = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -4 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 3 + 8 - 3 - 4 = 0.$$

Т.к. смешанное произведение равно нулю, то векторы $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ компланарны.

Что и требовалось доказать.

Задача **№16**:

Доказать, что векторы $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ – линейно независимы, т.е. образуют базис, если $\bar{a} = (1;\ 2;\ 3)$, $\bar{b} = (0;\ 4;\ 1)$, $\bar{c} = (3;\ 2;\ 0)$.

Доказательство:

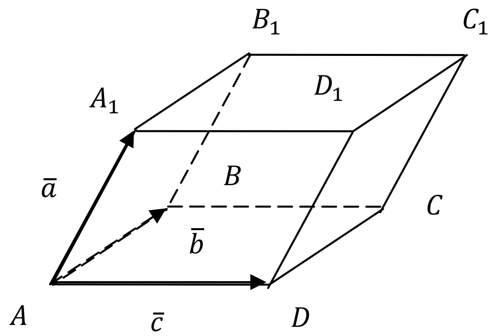
$$([\bar{a},\bar{b}],\bar{c}) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 0 + 6 - 36 - 2 - 0 = -32.$$

Т.к. $([\bar{a},\bar{b}],\bar{c}) \neq 0$, то векторы $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ некомпланарны, а поэтому они линейно независимы, следовательно, образуют базис трёхмерного пространства.

Что и требовалось доказать.

Задача **№17**:

Найти объем параллелепипеда, построенного на векторах $\bar{a} = (0;\ 4;\ 1)$, $\bar{b} = (1;\ 2;\ 3)$, $\bar{c} = (3;\ 2;\ 0)$.



Решение:

$$V = |([\bar{a}, \bar{b}], \bar{c})| = \begin{vmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 32.$$

Ответ: $V = 32$ куб.ед.

Задача **№18**:

Вычислить объем тетраэдра, вершины которого находятся в точках $A(2; -1;\ 1)$, $B(5;\ 5;\ 4)$, $C(3;\ 2; -1)$, $D(4;\ 1;\ 3)$.

Решение:

$V_{\text{тет}} = \frac{1}{6} \cdot V_{\text{пар}}$;$([\overline{AB}, \overline{AC}], \overline{AD}) = \begin{vmatrix} 3 & 6 & 3 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 18 + 6 - 24 - 18 + 12 - 12 = -18 \Rightarrow V_{\text{пар}} = 18;$

$V_{\text{тет}} = \frac{1}{6} \cdot 18 = 3.$

Ответ: $V_{\text{тет}} = 3$ куб. ед.

Задача **№19**:

Даны вершины тетраэдра$A(2;\ 3;\ 1)$, $B(4;\ 1; -2)$, $C(6;\ 3;\ 7)$,$D(-5; -4;\ 8)$. Найти длину его высоты, опущенной из вершиныD.

Решение:

Высота h тетраэдра– это высотаhпараллелепипеда, построенного на векторах $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$, поэтому найдём объём и площадь основания параллелепипеда.

$\overline{AB} = (2;\ -2;\ -3)$, $\overline{AC} = (4;\ 0;\ 6)$, $\overline{AD} = (-7;\ -7;\ 7)$.

$V_{\text{пар}} = S_{\text{осн}} \cdot h$; следовательно$h = \frac{V}{|[\overline{AB}, \overline{AC}]|}$;$S_{\text{осн}} = |[\overline{AB}, \overline{AC}]|$;

$$[\overline{AB}, \overline{AC}] = \begin{vmatrix} \bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k} \\ 2 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 6 \end{vmatrix} = -12\bar{\imath} - 24\bar{\jmath} + 8\bar{k};$$

$[\overline{AB}, \overline{AC}] = (-12; -24;\ 8)$; $|[\overline{AB}, \overline{AC}]| = 28$ кв. ед.;

$$([\overline{AB}, \overline{AC}], \overline{AD}) = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & 6 \\ -7 & -7 & 7 \end{vmatrix} = 0 + 84 + 84 - 0 + 56 + 84 = 308.$$

Итак,$h_{\text{тетр}} = h_{\text{парал}} = \frac{308}{28} = 11.$

Ответ: $h = 11$.

Задача **№20**:

Даны три вектора $\bar{p} = (3; -2;\ 1), \bar{q} = (-1;\ 1; -2), \bar{r} = (2;\ 1;\ -3)$. Найти разложение вектора $\bar{c} = (11; -6;\ 5)$ по базису $\{\bar{p}, \bar{q}, \bar{r}\}$.

Решение:

Разложить вектор $\bar{c}$ по векторам $\bar{p}, \bar{q}, \bar{r}$– это значит представить вектор $\bar{c}$ в виде линейной комбинации векторов $\bar{p}, \bar{q}, \bar{r}$: $\bar{c} = \alpha \cdot \bar{p} + \beta \cdot \bar{q} + \gamma \cdot \bar{r}$, где α, β, γ– координаты вектора $\bar{c}$ в базисе $\{\bar{p}, \bar{q}, \bar{r}\}$, то есть:

$(11, -6{,}5) = \alpha \cdot (3, -2{,}1) + \beta \cdot (-1{,}1, -2) + \gamma \cdot (2{,}1, -3)$,

или $\begin{cases} 11 = 3 \cdot \alpha - \beta + 2 \cdot \gamma \\ -6 = -2 \cdot \alpha + \beta + \gamma \\ 5 = \alpha - 2 \cdot \beta - 3 \cdot \gamma \end{cases}$.

Решая систему, находим $\alpha = 2,\ \beta = -3,\ \gamma = 1$.

Поэтому $\bar{c} = 2 \cdot \bar{p} - 3 \cdot \bar{q} + \bar{r}$.

Ответ: $\bar{c} = 2 \cdot \bar{p} - 3 \cdot \bar{q} + \bar{r}$.

Задача **№21**:

Два вектора $\bar{a} = (2; -3;\ 6)$, $\bar{b} = (-1;\ 2;\ -2)$ приложены к одной точке. Определить координаты вектора $\bar{c}$, направленного по биссектрисе угла между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$, при условии, что $|\bar{c}| = 3\sqrt{42}$.

Решение:

$|\bar{a}| = \sqrt{2^2 + (-3)^2 + 6^2} = \sqrt{4 + 9 + 36} = \sqrt{49} = 7;$

$|\bar{b}| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + (-2)^2} = \sqrt{1 + 4 + 4} = \sqrt{9} = 3; |\bar{a}| \neq |\bar{b}|.$

Найдем орты векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$: $\bar{e}_{\bar{a}} = \frac{\bar{a}}{7} = (\frac{2}{7};\ -\frac{3}{7};\ \frac{6}{7})$,

$\bar{e}_{\bar{b}} = \frac{\bar{b}}{3} = (-\frac{1}{3};\ \frac{2}{3}; -\frac{2}{3})$.

Вектор $\bar{c}$ направлен по диагонали ромба, построенного на векторах $\bar{e}_{\bar{a}}$ и $\bar{e}_{\bar{b}}$;

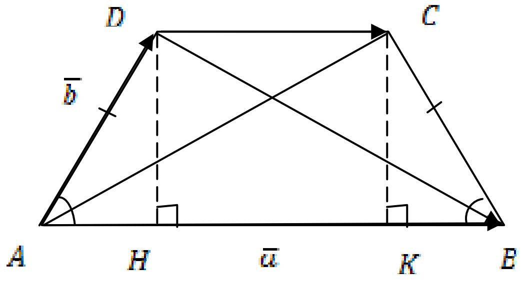
$\bar{e}_{\bar{a}} + \bar{e}_{\bar{b}} = (\frac{2}{7} - \frac{1}{3}, -\frac{3}{7} + \frac{2}{3}, \frac{6}{7} - \frac{2}{3}) = \frac{1}{21}(-1{,}5{,}4);$

$|\bar{e}_{\bar{a}} + \bar{e}_{\bar{b}}| = \frac{1}{21}\sqrt{(-1)^2 + 5^2 + 4^2} = \frac{1}{21}\sqrt{1 + 25 + 16} = \frac{1}{21}\sqrt{42};$

$$\frac{|\bar{c}|}{|\bar{e}_{\bar{a}} + \bar{e}_{\bar{b}}|} = \frac{3 \cdot 21 \cdot \sqrt{42}}{\sqrt{42}} = 63.$$

Следовательно, длина вектора больше длины вектора в 63 раза, поэтому $\bar{c} = \frac{63}{21} \cdot (-1;\ 5;\ 4) = 3 \cdot (-1;\ 5;\ 4) = (-3;\ 15;\ 12)$.

Ответ: $\bar{c} = (-3;\ 15;\ 12)$.



Задача **№22**:

В равнобедренной трапеции $ABCD$ нижнее основание $\overline{AB} = \bar{a}$, боковая сторона $\overline{AD} = \bar{b}$, угол $\angle BAD$

равен $60°$. Выразить остальные стороны и диагонали трапеции через векторы$\bar{a}$ и $\bar{b}$.

Решение:

$DH \perp AB,\ CK \perp AB$– высоты трапеции.

Тогда$|\overline{DC}| = |\overline{HK}| = |\overline{AB}| - 2 \cdot |\overline{AH}| = |\bar{a}| - 2 \cdot \left|\frac{\bar{b}}{2}\right| = |\bar{a}| - |\bar{b}|$;

$\overline{DC} = |\overline{DC}| \cdot \bar{e}_{\overline{DC}} = |\overline{DC}| \cdot \bar{e}_{\overline{AB}} = (|\bar{a}| - |\bar{b}|) \cdot \frac{\bar{a}}{|\bar{a}|} = \bar{a} - \frac{|\bar{b}| \cdot \bar{a}}{|\bar{a}|}$.

ИзΔADB: $\overline{AD} + \overline{DB} = \overline{AB} \Rightarrow \overline{DB} = \overline{AB} - \overline{AD} = \bar{a} - \bar{b}$.

Из ΔDCB: $\overline{DC} + \overline{CB} = \overline{DB} \Rightarrow \overline{CB} = \overline{DB} - \overline{DC} = (\bar{a} - \bar{b}) - \left(\bar{a} - \frac{|\bar{b}| \cdot \bar{a}}{|\bar{a}|}\right) = -\bar{b} + \frac{|\bar{b}| \cdot \bar{a}}{|\bar{a}|} = \frac{|\bar{b}| \cdot \bar{a}}{|\bar{a}|} - \bar{b}$.

Из $\Delta\, ACD$: $\overline{AC} = \overline{AD} + \overline{DC} = \bar{b} + \bar{a} - \frac{|\bar{b}| \cdot \bar{a}}{|\bar{a}|}$.

Ответ:$\overline{DC} = \bar{a} - \frac{|\bar{b}| \cdot \bar{a}}{|\bar{a}|}$; $\overline{CB} = \frac{|\bar{b}| \cdot \bar{a}}{|\bar{a}|} - \bar{b}$; $\overline{DB} = \bar{a} - \bar{b}$; $AC = \bar{b} + \bar{a} - \frac{|\bar{b}| \cdot \bar{a}}{|\bar{a}|}$.

Образовательным результатом после изучения данной темы является сформированность компонент, заявленных во введении, совокупности компетенций (знать, уметь, владеть) на двух уровнях: пороговый и продвинутый. Пороговый уровень соответствует оценке «удовлетворительно», продвинутый уровень соответствует оценкам «хорошо» или «отлично» в зависимости от результатов защиты кейс-заданий.

Для самостоятельной диагностики данных компонент вам предлагаются следующие задания.

Вопросы для самопроверки (знать).

Пороговый уровень:

1. Как выполняются линейные операции над векторами? Каковы свойства этих операций?
2. Какие вектора называются линейно зависимыми, а какие линейно независимыми?
3. Что такое базис? Какие векторы образуют базис на плоскости и в пространстве?
4. Какой базис называют ортонормированным?
5. Что такое координаты вектора?
6. Что называется скалярным произведением векторов? Каковы его свойства? Для решения каких задач и как оно может быть использовано?
7. Что называется векторным произведением векторов? Каковы его свойства? Для решения каких задач и как оно может быть использовано?

8. Что называется смешанным произведением векторов? Каковы его свойства? Для решения каких задач и как оно может быть использовано?
9. Запишите в векторной и координатной формах условия коллинеарности, ортогональности и компланарности векторов.

<u>Повышенный уровень:</u>

1. Докажите свойства скалярного произведения векторов.
2. Докажите свойства векторного произведения векторов.
3. Докажите свойства смешанного произведения векторов.
4. Докажите выражение скалярного, векторного и смешанного произведения векторов через их координаты, заданных в ортонормированном базисе.
5. Для решения каких задач школьного курса геометрии и как используются свойства векторов?
6. Приведите примеры использования векторов в других областях науки, например в физике.

Решение типовых задач (уметь).

Лабораторная работа №1.

Вариант 1.

1. Даны координаты вершин пирамиды $ABCD$: $A(3;\ 4;\ 5)$, $B(1;\ 2;\ 1)$, $C(-2; -3;\ 6)$, $D(3; -6; 3)$.

Задание:

a) найти координаты векторов $\overline{AB}, \overline{CD}, \overline{AD}$ и их модули;

b) найти угол между векторами $\overline{AB}, \overline{AC}$;

c) найти проекцию $\overline{AD}$ на вектор $\overline{AB}$;

d) найти площадь грани ABD;

e) найти объем пирамиды;

f) определить, какой тройкой (левой или правой) являются векторы $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}$;

g) найти орт вектора $\overline{AB}$;

h) найти координаты центра тяжести треугольника ABC.

2. Дано: $A(7;\ 5)$, $B(4;\ 1)$, $C(-4;\ 7)$. Найти координаты высоты, биссектрисы и медианы, проведенных из вершины B треугольника ABC.

3. Доказать, что векторы $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ образуют базис и найти координаты вектора $\bar{d}$ в этом базисе: $\bar{a} = (-2;\ 3; -1)$, $\bar{b} = (1; -2;\ 3)$, $\bar{c} = (1; -3;\ 4)$, $\bar{d} = (-4;\ 5; -1)$.

4. Даны векторы $\bar{a} = 4\bar{m} + \bar{n}, \bar{b} = -\bar{m} + 3\bar{n}$, где $|\bar{m}| = 1, |\bar{n}| = 3, (\bar{m}\hat{}\bar{n}) = \frac{2\pi}{3}$. Найти проекцию $\text{пр}_{\bar{a}}(2\bar{b})$.

5. Найти $\bar{q} = [3\bar{a} + 4\bar{b} + 5\bar{c}, \bar{a} + 6\bar{b} + 4\bar{c}]$, если $|\bar{a}| = 1, |\bar{b}| = 2, |\bar{c}| = 4$, причем $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ – взаимно перпендикулярны и образуют правую тройку.

6. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$, если $\bar{a} = \bar{p} - 4\bar{q}$, $\bar{b} = 3\bar{p} + \bar{q}$, $|\bar{p}| = 4, |\bar{q}| = 2, (\bar{p}\hat{}\bar{q}) = \frac{\pi}{6}$.

7. Вектор $\bar{m}$, перпендикулярный к векторам $\bar{a}(18; -22; -5)$ и $\bar{b}(-3; -2; -2)$, образует острый угол с осью *Oy*. Зная, что $|\bar{m}| = 7$, найти его координаты.

Вариант 2.

1. Даны координаты вершин пирамиды $ABCD$: $A(-7; -5; 6)$, $B(-2; 5; -3)$, $C(3; -2; 4)$, $D(1; 2; 2)$.

Задание:

a) найти координаты векторов $\overline{AB}, \overline{CD}, \overline{AD}$ и их модули;

b) найти угол между векторами $\overline{AB}, \overline{AC}$;

c) найти проекцию $\overline{AD}$ на вектор $\overline{AB}$;

d) найти площадь грани ABD;

e) найти объем пирамиды;

f) определить, какой тройкой (левой или правой) являются векторы $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}$;

g) найти орт вектора $\overline{AB}$;

h) найти координаты центра тяжести треугольника ABC.

2. Дано: $A(-5; -5)$, $B(-15; 10)$, $C(0; 20)$. Найти координаты высоты, биссектрисы и медианы, проведенных из вершины B треугольника ABC.

3. Доказать, что векторы $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ образуют базис и найти координаты вектора $\bar{d}$ в этом базисе: $\bar{a} = (3; 7; -7)$, $\bar{b} = (1; -1; 2)$, $\bar{c} = (2; 2; -1)$, $\bar{d} = (2; 2; -1)$.

4. Даны векторы $\bar{a} = \bar{m} - 2\bar{n}, \bar{b} = -2\bar{m} + 3\bar{n}$, где $|\bar{m}| = 1, |\bar{n}| = 4, (\bar{m}\hat{}\bar{n}) = \frac{\pi}{3}$. Найти проекцию $\text{пр}_{\bar{b}}(\bar{a} - \bar{b})$.

5. Найти $\bar{q} = [\bar{a} + 2\bar{b} + 3\bar{c}, 3\bar{a} + 2\bar{b} + \bar{c}]$, если $|\bar{a}| = 3, |\bar{b}| = 1, |\bar{c}| = 2$, причем $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ – взаимно перпендикулярны и образуют правую тройку.

6. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$, если $\bar{a} = 3\bar{p} + \bar{q}, \bar{b} = \bar{p} - 4\bar{q}$, $|\bar{p}| = 2, |\bar{q}| = 3, (\bar{p}\hat{}\bar{q}) = \frac{5\pi}{6}$.

7. Вектор $\bar{m}$, перпендикулярный к оси *Oz* и к вектору $\bar{a}(8; -15; 3)$, образует острый угол с осью *Ox*. Зная, что $|\bar{m}| = 51$, найти его координаты.

Вариант 3.

1. Даны координаты вершин пирамиды $ABCD$: $A(1;\ 3;\ 1)$, $B(-1;\ 4;\ 6)$, $C(-2;-3;\ 4)$, $D(3;\ 4;\ 4)$.

Задание:

a) найти координаты векторов $\overline{AB}, \overline{CD}, \overline{AD}$ и их модули;

b) найти угол между векторами $\overline{AB}, \overline{AC}$;

c) найти проекцию $\overline{AD}$на вектор $\overline{AB}$;

d) найти площадь грани ABD;

e) найти объем пирамиды;

f) определить, какой тройкой (левой или правой) являются векторы $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}$;

g) найти орт вектора $\overline{AB}$;

h) найти координаты центра тяжести треугольника ABC.

2. Дано: $A(-2;\ 1)$, $B(2;-2)$, $C(8;\ 6)$. Найти координаты высоты, биссектрисы и медианы, проведенных из вершиныB треугольника ABC

3. Доказать, что векторы $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ образуют базис и найти координаты вектора $\bar{d}$ в этом базисе: $\bar{a} = (1;-1;\ 2), \bar{b} = (3;\ 7;-7), \bar{c} = (2;\ 2;-1), \bar{d} = (2;\ 1;\ 0)$.

4. Даны векторы $\bar{a} = 2\bar{m} + 3\bar{n}, \bar{b} = \bar{m} + 2\bar{n}$, где $|\bar{m}| = 2, |\bar{n}| = 3, (\bar{m}\hat{\ }\bar{n}) = \frac{\pi}{3}$. Найти проекцию $\text{пр}_{\bar{b}}(2\bar{a}+\bar{b})$.

5. Найти $\bar{q} = [2\bar{a} + \bar{b} + 4\bar{c}, 6\bar{a} + \bar{b} + \bar{c}]$, если $|\bar{a}| = 1, |\bar{b}| = 1, |\bar{c}| = 3$, причем $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$– взаимно перпендикулярны и образуют правую тройку.

6. Найти угол между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$, если $\bar{a} = 2\bar{m} + 4\bar{n}$, $\bar{b} = \bar{m} - \bar{n}, |\bar{m}| = 2, |\bar{n}| = 3, (\bar{m}\hat{\ }\bar{n}) = \frac{\pi}{3}$.

7. Найти вектор$\bar{x}$, знаяя, что он перпендикулярен к векторам $\bar{a}(2;-3;\ 1)$ и $\bar{b}(1;-2;\ 3)$ и удовлетворяет условию $\bar{x} \cdot \left(\bar{\imath} + 2\bar{\jmath} - 7\bar{k}\right) = 10$.

Вариант 4.

1. Даны координаты вершин пирамиды $ABCD$: $A(1;\ 4;\ 1)$, $B(-3;-2;\ 4)$, $C(-2;\ 6;\ 3)$, $D(-1;\ 0;-2)$.

Задание:

a) найти координаты векторов $\overline{AB}, \overline{CD}, \overline{AD}$ и их модули;

b) найти угол между векторами $\overline{AB}, \overline{AC}$;

c) найти проекцию $\overline{AD}$на вектор $\overline{AB}$;

d) найти площадь грани ABD;

e) найти объем пирамиды;

f) определить, какой тройкой (левой или правой) являются векторы $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}$;

g) найти орт вектора $\overline{AB}$;

h) найти координаты центра тяжести треугольника ABC.

2. Дано: $A(-2;\ 2)$, $B(2;-2)$, $C(2;\ 3)$. Найти координаты высоты, биссектрисы и медианы, проведенных из вершиныBтреугольника ABC.

3. Доказать, что векторы $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ образуют базис и найти координаты вектора $\bar{d}$ в этом базисе: $\bar{a} = (2;\ 1;\ 0)$, $\bar{b} = (1;-1;\ 2)$, $\bar{c} = (3;\ 7;-7)$, $\bar{d} = (2;\ 2;-1)$.

4. Даны векторы $\bar{a} = -\bar{m} + 2\bar{n}$, $\bar{b} = 3\bar{m} + \bar{n}$, где $|\bar{m}| = 3, |\bar{n}| = 4, (\bar{m}\hat{\ }\bar{n}) = \frac{2\pi}{3}$. Найти проекцию $\text{пр}_{\bar{a}}(\bar{a}+2\bar{b})$.

5. Найти $\bar{q} = [\bar{a} + \bar{b} + 2\bar{c}, \bar{a} + 4\bar{b} + 6\bar{c}]$, если $|\bar{a}| = 1, |\bar{b}| = 2, |\bar{c}| = 3$, причем $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$– взаимно перпендикулярны и образуют правую тройку.

6. Найти угол между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$, если $\bar{a} = \bar{m} - \bar{n}$, $\bar{b} = \bar{m} + \bar{n}$,$|\bar{m}| = \sqrt{2}$, $|\bar{n}| = 3$, $(\bar{m}\hat{\ }\bar{n}) = \frac{\pi}{4}$.

7. Даны координаты вершин пирамиды $ABCD$: $A(2;\ 3;\ 1)$, $B(4;\ 1;-2)$, $C(6;\ 3;\ 7)$, $D(-5;-4;\ 8)$. Найти длину его высоты, опущенной из вершины D.

Вариант 5.

1. Даны координаты вершин пирамиды $ABCD$: $A(-5;-3;-4)$, $B(1;\ 4;\ 6)$, $C(3;\ 2;-2)$, $D(8;-2;\ 4)$.

Задание:

a) найти координаты векторов$\overline{AB}, \overline{CD}, \overline{AD}$ и их модули;

b) найти угол между векторами$\overline{AB}, \overline{AC}$;

c) найти проекцию $\overline{AD}$на вектор $\overline{AB}$;

d) найти площадь граниABD;

e) найти объем пирамиды;

f) определить, какой тройкой (левой или правой) являются векторы $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}$;

g) найти орт вектора $\overline{AB}$;

h) найти координаты центра тяжести треугольника ABC.

2. Дано: $A(1;-6)$, $B(3;-3)$, $C(9;-7)$. Найти координаты высоты, биссектрисы и медианы, проведенных из вершиныBтреугольника ABC

3. Доказать, что векторы $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ образуют базис и найти координаты вектора $\bar{d}$ в этом базисе: $\bar{a} = (1;-1;\ 1)$, $\bar{b} = (-5;-3;\ 1)$, $\bar{c} = (2;-1;\ 0)$, $\bar{d} = (-15;-10;\ 5)$.

4. Даны векторы $\bar{a} = 4\bar{m} + \bar{n}$, $\bar{b} = \bar{m} - 3\bar{n}$, где $|\bar{m}| = 2, |\bar{n}| = 5, (\bar{m}\hat{\ }\bar{n}) = \frac{2\pi}{3}$. Найти проекцию $\text{пр}_{\bar{a}+\bar{b}}(\bar{a}-3\bar{b})$.

5. Найти объем параллелепипеда, построенного на векторах$\bar{a} = \bar{m} + \bar{n} - \bar{p}, \bar{b} = 2\bar{m} - \bar{n}$, $\bar{c} = \bar{n} + 2\bar{p}$, где $|\bar{m}| = 1, |\bar{n}| = 2, |\bar{p}| = 3$, причем $\bar{m}, \bar{n}, \bar{p}$– взаимно перпендикулярны и образуют правую тройку.

6. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах$\bar{a}$ и $\bar{b}$, если $\bar{a} = 5\bar{m} - \bar{n}, \bar{b} = 2\bar{m} + \bar{n}, |\bar{m}| = 2, |\bar{n}| = 1, (\bar{m}\hat{}\bar{n}) = \frac{\pi}{3}$.

7. Объем тетраэдра $V = 5$, координаты вершин находятся в точках$A(2;\ 1; -1),\ B(3;\ 0;\ 1),\ C(2; -1;\ 3)$. Найти координаты четвертой вершины D, если известно, что она лежит на оси Oy.

Вариант 6.

1. Даны координаты вершин пирамиды $ABCD$: $A(3;\ 4;\ 2)$, $B(1;\ 2;\ 1),\ C(-2;\ 3; -5),\ D(4; -3;\ 6)$.

Задание:

a) найти координаты векторов$\overline{AB}, \overline{CD}, \overline{AD}$ и их модули;

b) найти угол между векторами $\overline{AB},\ \overline{AC}$;

c) найти проекцию $\overline{AD}$на вектор $\overline{AB}$;

d) найти площадь грани ABD;

e) найти объем пирамиды;

f) определить, какой тройкой (левой или правой) являются векторы $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}$;

g) найти орт вектора$\overline{AB}$;

h) найти координаты центра тяжести треугольника ABC.

2. Дано: A(2; 3), B(2; 0), C(6; 0). Найти координаты высоты, биссектрисы и медианы, проведенных из вершиныB треугольника ABC.

3. Доказать, что векторы $\bar{a},\ \bar{b},\ \bar{c}$ образуют базис и найти координаты вектора $\bar{d}$ в этом базисе: $\bar{a} = (3; -1;\ 2),\ \bar{b} = (-2;\ 3;\ 1),\ \bar{c} = (4; -5; -3),\ \bar{d} = (-3;\ 2; -3)$.

4. Даны векторы $\bar{a} = 4\bar{m} - \bar{n},\ \bar{b} = \bar{m} + 3\bar{n},$ где $|\bar{m}| = 2, |\bar{n}| = \sqrt{3}$, $(\bar{m}\hat{}\bar{n}) = \frac{\pi}{6}$. Найти проекцию $\text{пр}_{\bar{a}+\bar{b}}(\bar{a} - \bar{b})$.

5. Найти объем параллелепипеда, построенного на векторах $\bar{a} = \bar{m} + \bar{n}, \bar{b} = 2\bar{m} + \bar{p},\ \bar{c} = \bar{m} - \bar{n} + \bar{p}$ где $|\bar{m}| = 2, |\bar{n}| = 1, |\bar{p}| = 3$, причем$\bar{m},\ \bar{n},\ \bar{p}$– взаимно перпендикулярны и образуют правую тройку.

6. Найти угол между векторами$\bar{a}$ и $\bar{b}$, если $\bar{a} = \bar{m} + \bar{n},\ \bar{b} = \bar{m} - \bar{n}, |\bar{m}| = \sqrt{3}, |\bar{n}| = 2, (\bar{m}\hat{}\bar{n}) = \frac{\pi}{6}$.

7. Вектор $\bar{c}$ перпендикулярен к векторам $\bar{a}$и $\bar{b}$, угол между$\bar{a}$ и $\bar{b}$равен $30°$. Зная, что $|\bar{a}| = 6, \left|\bar{b}\right| = 3, |\bar{c}| = 3$, вычислить$\bar{a}\bar{b}\bar{c}$.

Вариант 7.

1. Даны координаты вершин пирамиды $ABCD$: $A(-4;\ 6;\ 3)$, $B(2; -6; -1),\ C(2;\ 3; -3),\ D(2;\ 6; -5)$.

Задание:

a) найти координаты векторов$\overline{AB},\ \overline{CD},\ \overline{AD}$ и их модули;

b) найти угол между векторами $\overline{AB}$, $\overline{AC}$;

c) найти проекцию $\overline{AD}$на вектор $\overline{AB}$;

d) найти площадь грани ABD;

e) найти объем пирамиды;

f) определить, какой тройкой (левой или правой) являются векторы $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$;

g) найти орт вектора$\overline{AB}$;

h) найти координаты центра тяжести треугольника ABC.

2. Дано: $A(-3;\ 1)$, $B(1;\ 4)$, $C(7;-4)$. Найти координаты высоты, биссектрисы и медианы, проведенных из вершиныBтреугольника ABC.

3. Доказать, что векторы $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ образуют базис и найти координаты вектора $\bar{d}$ в этом базисе: $\bar{a} = (1;\ 2;-1), \bar{b} = (0;\ 3;-2)$, $\bar{c} = (2;-1;\ 1)$, $\bar{d} = (4;\ 0;\ 1)$.

4. Даны векторы $\bar{a} = 2\bar{m} - \bar{n}, \bar{b} = -3\bar{m} + \bar{n}$, где $|\bar{m}| = 2, |\bar{n}| = 4, (\bar{m}^\wedge\bar{n}) = \frac{2\pi}{3}$. Найти проекцию $\text{пр}_{\bar{a}}\bar{b}$.

5. Найти $\bar{q} = [\bar{a} - \bar{b} - 2\bar{c}, 4\bar{a} + \bar{b} + \bar{c}]$, если $|\bar{a}| = 2, |\bar{b}| = 3, |\bar{c}| = 1$, причем $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ – взаимно перпендикулярны и образуют правую тройку

6. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$, если $\bar{a} = 5\bar{m} - \bar{n}, \bar{b} = 2\bar{m} + 2\bar{n}$, $|\bar{m}| = 3, |\bar{n}| = 1, (\bar{m}^\wedge\bar{n}) = \frac{5\pi}{6}$.

7. Найти вектор $\bar{x}$, зная, что он перпендикулярен к векторам $\bar{a}(1;-2;\ 3)$ и $\bar{b}(2;-3;\ 1)$ и удовлетворяет условию$\bar{x} \cdot \left(\bar{\imath} + 2\bar{\jmath} - 7\bar{k}\right) = -10$.

Вариант 8.

1. Даны координаты вершин пирамиды $ABCD$: $A(-5;-4;-3)$, $B(7;\ 3;-1)$, $C(6;-2;\ 0)$, $D(3;\ 2;-7)$.

Задание:

a) найти координаты векторов $\overline{AB}, \overline{CD}, \overline{AD}$ и их модули;

b) найти угол между векторами $\overline{AB}, \overline{AC}$;

c) найти проекцию $\overline{AD}$на вектор $\overline{AB}$;

d) найти площадь грани ABD;

e) найти объем пирамиды;

f) определить, какой тройкой (левой или правой) являются векторы $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}$;

g) найти орт вектора $\overline{AB}$;

h) найти координаты центра тяжести треугольника ABC.

2. Дано: $A(1;-2)$, $B(0;\ 3)$, $C(5;\ 4)$. Найти координаты высоты, биссектрисы и медианы, проведенных из вершиныBтреугольника ABC.

3. Доказать, что векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ образуют базис и найти координаты вектора $\bar{d}$ в этом базисе: $\bar{a} = (-1;\ 3;\ 3)$, $\bar{b} = (2;\ 4;\ 0)$, $\bar{c} = (3;-1;\ 5)$, $\bar{d} = (-3;\ 6;-2)$.

4. Даны векторы $\bar{a} = 2\bar{m} + \bar{n}, \bar{b} = 3\bar{m} - \bar{n},$ где $|\bar{m}| = 1, |\bar{n}| = 2, (\bar{m}\hat{}\bar{n}) = \frac{\pi}{3}$. Найти проекцию пр$_{\bar{b}}(\bar{a})$.

5. Найти объем параллелепипеда, построенного на векторах $\bar{a} = \bar{m} + \bar{n} - \bar{p},\ \bar{b} = 2\bar{m} + \bar{n},\ \bar{c} = \bar{m} + 2\bar{p}$ где $|\bar{m}| = 1, |\bar{n}| = 3, |\bar{p}| = 2,$ причем $\bar{m}, \bar{n}, \bar{p}$– взаимно перпендикулярны и образуют правую тройку.

6. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$, если$\bar{a} = 5\bar{m} - \bar{n}, \bar{b} = 2\bar{m} - \bar{n}, |\bar{m}| = 2, |\bar{n}| = 2, (\bar{m}\hat{}\bar{n}) = \frac{\pi}{3}$.

7. Найти вектор $\bar{x}$, зная, что он перпендикулярен к векторам $\bar{a}(2;\ 3; -1)$ и$\bar{b}(1; -2;\ 3)$ и удовлетворяет условию$\bar{x} \cdot \left(2\bar{\imath} - \bar{\jmath} + \bar{k}\right) = -6.$

<u>Пороговый уровень:</u>

Достаточно правильно решить 70 % задач лабораторной работы №1.

<u>Повышенный уровень:</u>

Необходимо правильно решить все задачи лабораторной работы №1.

Кейс-задание диагностирует готовность к педагогической деятельности, а так же владение информационными технологиями и заключается в следующем:

Используя любой математический пакет и учебник по стереометрии для 10-11 классов создать презентации всех уроков по теме «Векторы».

При этом для достижения порогового уровня достаточно использование одного пакета и элементов презентаций на уроках по теме «Векторы».

Для продвинутого уровня необходим анализ возможностей использования компьютерных технологий в процессе изучения темы «Векторы» и создание электронного образовательного ресурса по данной теме.

§2 Прямая на плоскости.

Определение. Любой ненулевой вектор, перпендикулярный прямой называется её *нормальным вектором*, и обозначается$\bar{n} = (A; B)$.

Теорема. Алгебраическое уравнение 1-й степени

$Ax + By + C = 0$,

где коэффициентыA, B, C – произвольные действительные числа, одновременно не равные нулю, является *уравнением прямой на плоскости*Oxy, а вектор $\bar{n} = (A; B)$ является её нормальным вектором.

Верно обратное: на координатной плоскости Oxyуравнение любой прямой с нормальным вектором $\bar{n} = (A; B)$, может быть записано в виде алгебраического уравнения $Ax + By + C = 0$.

Определение. Уравнение прямой вида

$$Ax + By + C = 0 ,$$

где коэффициентыA, B, C– произвольные действительные числа, одновременно не равные нулю, называется *общим уравнением прямой*.

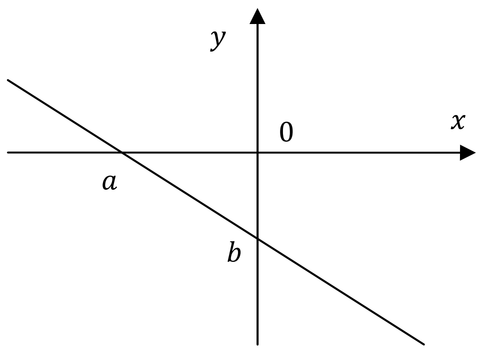
Известно, что прямая определяется двумя точками. Пусть $M_1(x_1;\ y_1)$и$M_2(x_2;\ y_2)$–точки, лежащие на прямойM_1M_2, $M(x;\ y)$–произвольная точка этой прямой. Тогда векторы $\overline{M_1M_2} = (x_2 - x_1;\ y_2 - y_1)$ и $\overline{M_1M} = (x - x_1;\ y - y_1)$–коллинеарны, а их координаты пропорциональны. Получаем *уравнение прямой, проходящей через две точки*:

$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$.

Определение. Вектор, параллельный прямой, называется *направляющим вектором прямой*.

Определение. Пусть $\bar{q} = (l; m)$– направляющий вектор прямой. Тогда из предыдущего уравнения получаем *каноническое уравнение прямой*:$\frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m}$.

Определение. В тех же обозначениях,*параметрическое уравнение прямой* имеет вид:$\begin{cases} x = x_1 + lt \\ y = y_1 + mt \end{cases}$.



Определение. Уравнение прямой вида$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, где a и b – произвольные, не равные нулю действительные числа, называется *уравнением прямой в отрезках*.

Теорема. Пусть $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ – уравнение прямой в отрезках. Тогда $(a; 0)$, $(0; b)$–координаты точек пересечения данной прямой с осями координат.

Определение. Уравнение прямой вида$y = kx + b$, где k и b – произвольные действительные числа, называется *уравнением прямой с угловым коэффициентом*, коэффициент k называется *угловым коэффициентом* данной прямой.

Теорема. Пусть $y = kx + b$– уравнение прямой с угловым коэффициентом. Тогда$k = tg\alpha$,где угол α равен углу наклона данной прямой к оси Ox,b – ордината точки пересечения с осью Oy.

Если известны угловые коэффициенты k_1и k_2 двух прямых, то один из углов φ между этими прямыми определяется по формуле:

$tg\ \varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}$.

Признаком параллельности двух прямых является равенство их угловых коэффициентов: $k_1 = k_2$.

Признаком перпендикулярности двух прямых является соотношение: $k_1 k_2 = -1$ или $k_1 = -\frac{1}{k_2}$.

Теорема. (Связь нормального вектора прямой с её направляющим вектором и её угловым коэффициентом.)

1) Если $\bar{n} = (A; B)$ – нормальный вектор прямой, то$\bar{q} = (B;\ -A)$ – её направляющий вектор, и, если $B \neq 0$, то $k = -\frac{A}{B}$ – её угловой коэффициент.

2) Если $\bar{q} = (l;\ m)$ – направляющий вектор прямой, то$\bar{n} = (m; -l)$ – её нормальный вектор, и, если $m \neq 0$, то $k = \frac{n}{m}$ – её угловой коэффициент.

3) Если kугловой коэффициент прямой, то $\bar{n} = (k; -1)$ – её нормальный вектор, $\bar{q} = (1;\ k)$ – направляющий вектор.

Взаимное расположение двух прямых на плоскости.

Две прямые на плоскости могут пересекаться, совпадать или быть параллельными.

Теорема. Пусть прямые заданы общими уравнениями:

L$_1$:$A_1x + B_1y + C_1 = 0$,L$_2$:$A_2x + B_2y + C_2 = 0$. Тогда:

1) если$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$, то прямые совпадают, и система уравнений

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0 \end{cases}$$

имеет бесконечное множество решений;

2) если $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$, то прямые параллельные, и система уравнений $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0 \end{cases}$не имеет решений;

3) если $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$, то прямые пересекаются и координаты точки их пересечения являются единственным решением системы уравнений

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0 \end{cases}.$$

Определение. Уравнение вида $x \cdot cos\varphi + y \cdot sin\varphi - p = 0$, где p– расстояние от прямой до начала координат, называется *нормальным уравнением прямой*, $(cos\varphi;\ sin\varphi)$–координаты орта вектора $\bar{n}$.

Чтобы привести прямую к указанному виду, разделим общее уравнение прямой на $\pm\sqrt{A^2+B^2}\neq 0$, причем со знаком «+» в случае, когда $C<0$, и со знаком «-» в случае, когда $C>0$, получим:

$$\pm\left\{\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}x+\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}y+\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}\right\}=0.$$

Теорема. Орт нормального вектора $\bar{n}$ имеет координаты:

$$\overline{e_n}=\pm\left\{\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}};\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\right\}=(cos\varphi;\ sin\varphi),$$

где $\varphi=(\bar{n}\,\hat{}\,0x)$.

Теорема. Расстояние от прямой до произвольной точки $M(x_1;\ y_1)$находится по формуле: $d=\frac{|Ax_1+By_1+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$.

Чтобы найти расстояние между двумя параллельными прямыми, нужно взять произвольную точку на одной из прямых и найти расстояние от нее до другой прямой.

Чтобы найти множество точек, равноудаленных от двух прямых$A_1x+B_1y+C_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2=0$, составим уравнение:

$$\frac{|A_1x+B_1y+C_1|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}}=\frac{|A_2x+B_2y+C_2|}{\sqrt{A_2^2+B_2^2}}.$$

Раскрывая модули в случае параллельных прямых, получаем параллельную им прямую, лежащую между данными прямыми, а в случае пересекающихся прямых – биссектрисы углов, образованных пересечением прямых.

Определение. Совокупность прямых, проходящих через некоторую точку *S*, называется *пучком прямых с центром S*.

Теорема. Если $A_1x+B_1y+C_1=0$и $A_2x+B_2y+C_2=0$ – уравнения двух прямых, пересекающихся в точке *S*, то уравнение:

$\alpha(A_1x+B_1y+C_1)+\beta(A_2x+B_2y+C_2)=0$,

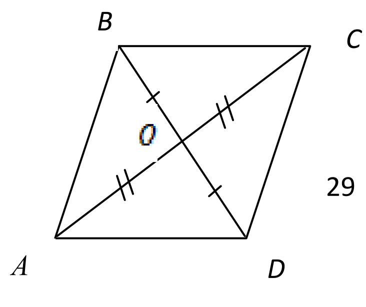
где α и β– какие угодно числа, не равные одновременно нулю, определяют прямую, также проходящую через точку *S*.

Более того, в указанном уравнении числа всегда возможно подобрать так, чтобы оно определяло любую (заранее назначенную) прямую, проходящую через точку *S*, иначе говоря, любую прямую пучка с центром *S*. Поэтому уравнение вида называется уравнением пучка с центром *S*.

Решение типовых задач

Задача **№1**:

Даны уравнения двух сторон параллелограмма $8x+3y+1=0$, $2x+y-1=0$ и уравнение одной из его диагоналей $3x+2y+3=0$. Определить координаты вершин этого параллелограмма.



Решение:

Найдём координаты т. D как точки пересечения прямых AD и AC: $\begin{cases} 8x + 3y + 1 = 0 \\ 2x + y - 1 = 0 \end{cases}$; $\begin{cases} x = -2 \\ y = 5 \end{cases}$; т. $D(-2;\ 5)$. Выясним, какая из диагоналей задана.

Подставим координаты т. $D(-2; 5)$в уравнение диагонали $3x + 2y + 3 = 0$: $3 \cdot (-2) + 2 \cdot 5 + 3 \neq 0$; т.$D$ не принадлежит заданной диагонали, следовательно$3x + 2y + 3 = 0$ – уравнение диагонали AC.

Найдём координаты т. A, как точки пересечения AC и AD:

$\begin{cases} 3x + 2y + 3 = 0 \\ 8x + 3y + 1 = 0 \end{cases}$; $\begin{cases} x = 1 \\ y = -3 \end{cases}$; т. $A(1; -3)$.

Найдём координаты т.C, как точки пересечения AC и DC:

$\begin{cases} 3x + 2y + 3 = 0 \\ 2x + y - 1 = 0 \end{cases}$; $\begin{cases} x = 5 \\ y = -9 \end{cases}$; т.$C(5; -9)$.

Найдём координаты т.B: в параллелограмме диагонали делят друг друга пополам: $AO = OC$. Найдём координаты т.O: т.O – середина AC, следовательно, т.$O\left(\frac{5+1}{2}; \frac{-9-3}{2}\right)$; т.$O(3; -6)$, но т.$O$ – середина BD, следовательно,$x_o = \frac{x_b + x_d}{2}$ и $y_o = \frac{y_b + y_d}{2}$, поэтому $x_b = 2x_o - x_d = 8$ и $y_b = 2y_o - y_d = -17$, т. $B(8; -17)$.

Ответ: $(1; -3)$, $(8; -17)$, $(5; -9)$, $(-2;\ 5)$.

Задача **№2**:

Дана прямая $2x + 3y + 4 = 0$. Составить уравнение прямой, проходящей через точку$M_0(2;\ 1)$:

a) параллельно данной прямой.

b) перпендикулярно к данной прямой.

Решение:

a) Искомая прямая параллельна прямой $2x + 3y + 4 = 0$, поэтому её уравнение имеет вид: $2x + 3y + C = 0$.

Найдём т.C: точка M_0 принадлежит этой прямой, поэтому её координаты удовлетворяют записанному уравнению: $2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 + C = 0$, $C = -7$. Итак, прямая принимает вид: $2x + 3y - 7 = 0$.

b) Т.к. заданная и искомые прямые перпендикулярны, то их угловые коэффициенты удовлетворяют условию: $k_1 \cdot k_2 = -1$.

Найдём угловой коэффициент прямой $2x + 3y + 4 = 0$; $y = -\frac{2}{3}x - \frac{4}{3}$;итак, $k_1 = -\frac{2}{3}$; тогда$k_1 = -\frac{1}{k_2} = \frac{3}{2}$. Запишем уравнение искомой прямой: $y = \frac{3}{2}x + b$.

Точка $M_0(2;\ 1)$ принадлежит этой прямой, поэтому $1 = \frac{3}{2} \cdot 2 + b$; $b = -2$.

Уравнение прямой принимает вид: $y = \frac{3}{2}x - 2 \Rightarrow 3x - 2y - 4 = 0$.

Ответ: $2x + 3y - 7 = 0$;$3x - 2y - 4 = 0$.

Задача **№3**:

Определить, при каких значениях a и b две прямые $ax - 2y - 1 = 0$, $6x - 4y - b = 0$:

a) имеют одну общую точку;

b) параллельны;

c) совпадают.

Решение:

a) Прямые имеют одну общую точку, когда они не параллельны (их коэффициенты при x и y не пропорциональны):$\frac{a}{6} \neq \frac{-2}{-4}$; $a \neq 3$

b) Прямые параллельны, когда коэффициенты при x и y пропорциональны:$\frac{a}{6} = \frac{-2}{-4} \neq \frac{-1}{-b}$;$a = 3,\ b \neq 2$.

c) Прямые совпадают, когда все их коэффициенты пропорциональны:$\frac{a}{6} = \frac{-2}{-4} = \frac{-1}{-b}$; $a = 3,\ b = 2$.

Задача **№4**:

Найти проекцию точки$P(-6;\ 4)$на прямую $4x - 5y + 3 = 0$.

Решение:

Проведём через т.P прямую PO, перпендикулярную прямой $4x - 5y + 3 = 0$. Точка O пересечения прямых и является искомой проекцией.

ПрямаяPO перпендикулярна заданной прямой, поэтому её направляющим вектором служит нормальный вектор прямой $4x - 5y + 3 = 0$, т.е. $\bar{n}(4; -5)$.

Запишем уравнение прямойPO в каноническом виде:

$\frac{x+6}{4} = \frac{y-4}{-5}$; $5x + 4y + 14 = 0$– уравнение PO.

Найдём координаты т.O:

$\begin{cases} 5x + 4y + 14 = 0 \\ 4x - 5y + 3 = 0 \end{cases}$; $\begin{cases} x = -2 \\ y = -1 \end{cases}$; т.$O(-2; -1)$

Ответ:$(-2; -1)$

Задача **№5**:

Найти точку M_1, симметричную точке $M_2(8; -9)$ относительно прямой, проходящей через точки $A(3; -4)$ и$B(-1; -2)$.

Решение:

Составим уравнение AB, как прямой проходящей через 2 точки:

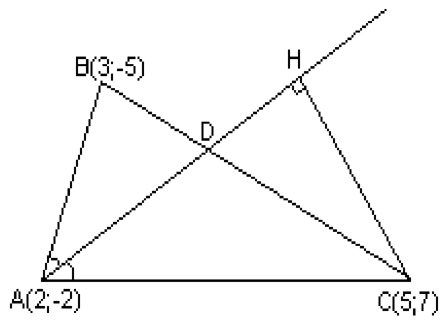
$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1}$; $x + 2y + 5 = 0$ – уравнение AB.

Найдём уравнение прямой M_1M_2 перпендикулярной AB.

Нормальный вектор $\bar{n}(1; 2)$ прямой AB является направляющим вектором прямой M_1M_2, поэтому используем каноническое уравнение прямой:$\frac{x-8}{1} = \frac{y+9}{2}$; $2x - y - 25 = 0$ – уравнение прямойM_1M_2.

Найдём координат т.O, как точки пересечения прямых M_1M_2 и AB:

$\begin{cases} x + 2y + 5 = 0 \\ 2x - y - 25 = 0 \end{cases}$; $\begin{cases} x = 9 \\ y = -7 \end{cases}$; т.$O(9; -7)$.



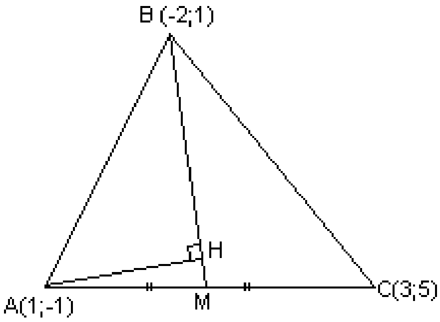
Так как точка M_1 симметрична точке M_2 относительно AB, следовательно$M_2O = OM_1$, то есть т.O – середина отрезка M_1M_2. Найдём координаты точки M_1, зная начало и середину отрезка M_1M_2:

$x_O = \frac{x_{M_1} + x_{M_2}}{2}$, $y_O = \frac{y_{M_1} + y_{M_2}}{2}$, тогда

$x_{M_1} = 2x_O - x_{M_2} = 18 - 8 = 10$,

$y_{M_1} = 2y_O - y_{M_2} = -14 + 9 = -5$, $\Rightarrow$ т.$M_1(10; -5)$.

Ответ: $(10; -5)$.



Задача **№6**:

Даны вершины треугольника $A(1; -1)$, $B(-2; 1)$ и $C(3; 5)$. Составить уравнение перпендикуляра, опущенного из вершины A на медиану, проведенную из вершины B.

Решение:

Найдём координаты т.M, как середины отрезка AC:

т. $M(\frac{1+3}{2}; \frac{-1+5}{2})$, т.$M(2;\ 2)$.

Запишем уравнение медианы BM, как прямой, проходящей через две известные точки:

$\frac{x-2}{-2-2} = \frac{y-2}{1-2}$; $x - 4y + 6 = 0$ – уравнение BM.

Нормальный вектор для BM $\bar{n}(-1; 4)$ является направляющим для прямойAH перпендикулярной BM, тогда уравнение примет вид:

$\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-4}$; $4x - y + 3 = 0$ – уравнение AH.

Ответ: $4x - y + 3 = 0$.

Задача **№7**:

Даны вершины треугольника $A(2; -2)$, $B(3; -5)$, $C(5; 7)$. Составить уравнение перпендикуляра, опущенного из вершины C на биссектрису внутреннего угла при вершине A.

Решение:

Пусть AD – биссектриса.

Найдём координаты т.D воспользовавшись свойством биссектрисы: $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{90}} = \frac{1}{3} = \lambda$. Тогда: $x_D = \frac{x_B + \lambda x_C}{1+\lambda} = \frac{7}{2}$; $y_D = \frac{y_B + \lambda y_C}{1+\lambda} = -2$; т.$D(\frac{7}{2}; -2)$;

Уравнение биссектрисы AD примет вид:$\frac{x-2}{\frac{7}{2}-2} = \frac{y+2}{-2+2}$⇒$y + 2 = 0$, $\bar{n}_{AD}(0;\ 1)$, $\bar{n}_{CH}$ перпендикулярен $\bar{n}_{AD}$⇒$\bar{n}_{CH}(1;\ 0)$.

Точка C принадлежит искомому перпендикуляру, поэтому уравнение CH примет вид: $x - 5 = 0$.

Ответ: $x - 5 = 0$.

Задача **№8**:

Две стороны квадрата лежат на прямых $5x - 12y - 65 = 0$, $5x - 12y + 26 = 0$. Вычислить его площадь.

Решение:

1. Выберем на прямой$5x - 12y + 26 = 0$ некоторую точку M: пусть $x = 2$, тогда $5 \cdot 2 - 12y + 26 = 0$⇒$y = 3$, т.е. $M(2; 3)$.
2. Найдём расстояние от точки Mдо прямой $5x - 12y - 65 = 0$: $d = \frac{|Ax+By+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$⇒$d = \frac{|5\cdot2-12\cdot3-65|}{\sqrt{25+144}} = 7$, где d и есть длина стороны квадрата.
3. $S_{\text{кв.}} = d^2$ т.е. $S_{\text{кв.}} = 49$.

Ответ: $S_{\text{кв.}} = 49$.

Задача **№9**:

Даны две противоположные вершины квадрата $A(-1;\ 3)$ и $C(6;\ 2)$. Составить уравнения его сторон.

Решение:

Зная вершины A и C составим уравнение диагоналиAC, как прямой проходящей через две точки: $\frac{x+1}{6+1} = \frac{y-3}{2-3}$⇒$x + 7y - 20 = 0$ – уравнение прямой AC.

Т.к. $ABCD$ – квадрат, его диагонали являются биссектрисами, поэтому $\angle CAD = 45°$; найдём угловой коэффициент AC: $y = -\frac{1}{7}x + \frac{20}{7}$;

$k_{AC} = -\frac{1}{7}$.

Зная k_{AC} и $tg\angle CAD$, найдём угловой коэффициент AD: $tg45° = 1 = \frac{k_{AC}-k_{AD}}{1+k_{AC}\cdot k_{AD}}$; ⇒$k_{AD} = -\frac{4}{3}$.Уравнение AD примет вид: $y = -\frac{4}{3}x + b$.

Найдём b: $3 = (-\frac{4}{3}) \cdot (-1) + b$ ⇒ $b = \frac{5}{3}$; Тогда уравнение AD: $4x + 3y - 5 = 0$.

Т.к. AB перпендикулярно AD⇒ угловой коэффициент $k_{AB} = -\frac{1}{k_{AD}}$; $k_{AB} = \frac{3}{4}$. Уравнение AB имеет вид: $y = \frac{3}{4}x + b$, где $b = \frac{15}{4}$, тогда $3x - 4y + 15 = 0$– уравнение AB.

Т.к. $ABCD$ – квадрат, то $BC||AD$, то уравнение BC примет вид: $4x + 3y + C = 0$.

Зная, что точка C принадлежит прямой BC, найдём свободный член C искомого уравнения, итак$4x + 3y - 30 = 0$ – уравнение стороны BC.

Аналогично найдём уравнение стороны CD: $3x - 4y - 10 = 0$.

Ответ: $4x + 3y - 5 = 0$, $3x - 4y + 15 = 0$, $4x + 3y - 30 = 0$, $3x - 4y - 10 = 0$.

Задача **№10**:

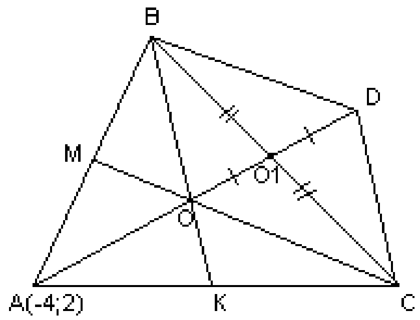
Вычислить площадь треугольника, отсекаемого прямой$3x - 4y - 12 = 0$ от координатного угла.

Решение:

Запишем уравнение прямой$3x - 4y - 12 = 0$ в отрезках: $\frac{x}{4} + \frac{y}{-3} = 1$.

Из этого уравнения следует, что длины отрезков OA и OB соответственно равны 4 и 3, поэтому $S_{\Delta AOB} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 = 6$ кв. ед.

Ответ: $S_{\Delta AOB} = 6$ кв.ед.



Задача **№11**:

Составить уравнения сторон треугольника, зная одну из его вершин $A(-4; 2)$ и уравнения двух его медиан $3x - 2y + 2 = 0$ и $3x + 5y - 12 = 0$.

Решение:

Выясним, что точка A не принадлежит известным медианам BK и CM.

Найдём координаты точки O – пересечения медиан $O = BK \cap CM$: $\begin{cases} 3x - 2y + 2 = 0 \\ 3x + 5y - 12 = 0 \end{cases} \Rightarrow$ т.$O\left(\frac{2}{3};\ 2\right)$.

Продолжим медиану AO, и на её продолжении отложим отрезок $O_1D = OO_1$. Соединим точку D с вершинами B и C. Полученный четырёхугольник $OBDC$ – параллелограмм (его диагонали пересекаясь в точке O_1, делятся пополам).

Найдём координаты точки D, как конца отрезка AD с известным началом A и серединой O: $D(\frac{16}{3};\ 2)$.

Найдём уравнение прямой BD, зная, что $BD||CM$ и точка D лежит на этой прямой: $3x + 5y - 26 = 0$.

Найдём координаты вершины B, как точки пересечения прямых BD и BK:$\begin{cases} 3x + 5y - 26 = 0 \\ 3x - 2y + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow$ т. $B(2; 4)$.

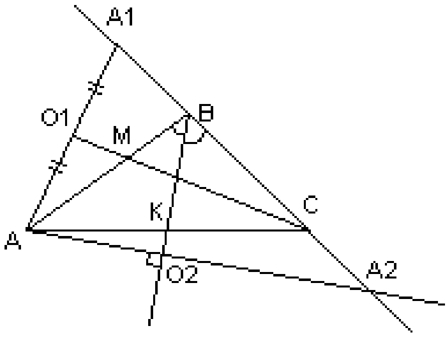
Точка O_1 – середина отрезка OD, поэтому $O_1(3; 2)$.

Найдём координаты точки C, как конца отрезка BC с известными началом B и серединой O_1:$3 = \frac{2+x_c}{2}$; $2 = \frac{4+y_c}{2} \Rightarrow C(4; 0)$.

Зная координаты всех вершин треугольника ABC, найдём уравнения его сторон, как прямых проходящих через две точки.

Ответ: $x - 3y + 10 = 0,\ 2x + y - 8 = 0,\ x + 4y - 4 = 0.$

Задача **№12**:



Составить уравнения сторон треугольника, зная одну из его вершин $A(2;-4)$ и уравнения биссектрис двух его углов: $x + y - 2 = 0,\ x - 3y - 6 = 0.$

Решение:

Очевидно, что точка A не принадлежит заданным биссектрисам BK и CM. Найдём точку A_1, симметричную точке A относительно биссектрисы CM. Можно доказать, что точка A_1 принадлежит прямой BC. Опустим из т.A перпендикуляр на биссектрису CM до пересечения в точке O_1 и отложим $O_1A_1 = O_1A$.

Т.к. AO_1 перпендикулярно CM, то $k_{AO_1} = -\frac{1}{k_{CM}} = -3$; точка $A(2;-4)$ принадлежит прямой AO_1, поэтому её уравнение примет вид: $3x + y - 2 = 0$.

Координаты точки O_1 найдём как точки пересечения прямых AO_1 и CM:$\begin{cases}3x + y - 2 = 0\\ x - 3y - 6 = 0\end{cases}\Rightarrow$ т.$O_1(\frac{6}{5}; -\frac{8}{5})$.

Найдём координаты точки A_1, как конца отрезка AA_1 с известными началом A и серединой O_1:$A_1(\frac{2}{5}; \frac{4}{5})$.

Аналогично найдём точку A_2, симметричную т.A относительно биссектрисы BK. Точка A_2 принадлежит прямой BC, $A_2(6;\ 0)$.

Тогдауравнение стороны BC примет вид: $\frac{x-\frac{2}{5}}{6-\frac{2}{5}} = \frac{y-\frac{4}{5}}{0-\frac{4}{5}}$ или $x + 7y - 6 = 0.$

Найдём координаты точек B и C, как точек пересечения прямой BC и заданных биссектрис: $B(\frac{4}{3}; \frac{2}{3})$; $C(6;\ 0)$.

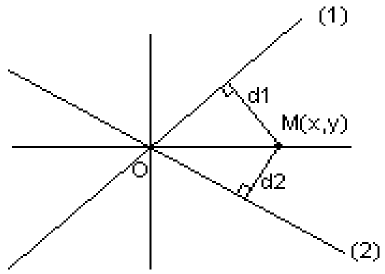
Зная координаты вершин треугольника ABC, найдём уравнения его сторон.

Ответ: $x + 7y - 6 = 0,\ 7x + y - 10 = 0,\ 5x + y - 6 = 0.$

Задача **№13**:

Составить уравнения биссектрис углов, образованных двумя пересекающимися прямыми:$x - 3y + 5 = 0$ и $3x - y - 2 = 0.$

Решение:



Известно свойство: биссектриса есть геометрическое место точек, равноудалённых от сторон угла.

Пусть $M(x;y)$ – произвольная точка искомой биссектрисы, тогда $d_1 = d_2$;

$d_1 = \frac{|x-3y+5|}{\sqrt{1+9}}$; $d_2 = \frac{|3x-y-2|}{\sqrt{9+1}}$; $\Rightarrow \frac{|x-3y+5|}{\sqrt{10}} = \frac{|3x-y-2|}{\sqrt{10}}$; $x - 3y + 5 = \pm(3x - y - 2)$.

Тогда уравнения биссектрис примут вид: $2x + 2y - 7 = 0$ и $4x - 4y + 3 = 0$.

Ответ: $2x + 2y - 7 = 0,\ 4x - 4y + 3 = 0$.

Задача **№14**:

Составить уравнение биссектрисы угла между прямыми $x + 2y - 11 = 0$ и $3x - 6y - 5 = 0$, в котором лежит точка $M(1;\ -3)$.

Решение:

Найдём отклонение точки Mотзаданных прямых, для этого приведём их уравнения к нормальному виду: $x + 2y - 11 = 0$; нормирующий множитель$t = +\frac{1}{\sqrt{1+4}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$;$\frac{1}{\sqrt{5}}x + \frac{2}{\sqrt{5}}y - \frac{11}{\sqrt{5}} = 0$.

Найдём отклонение δ_1 т.M от прямой, для этого в левую часть нормального уравнения подставим координаты т.M: $\delta_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{6}{\sqrt{5}} - \frac{11}{\sqrt{5}} < 0$.

Аналогично найдём отклонение δ_2 т.M от второй прямой: $\delta_2>0$. Отклонения имеют разные знаки, поэтому при раскрытии модулей (см. решение предыдущей задачи) справа ставим знак «минус».

$\frac{|x+2y-11|}{\sqrt{5}} = \frac{|3x-6y-5|}{3\sqrt{5}} \Rightarrow 3(x + 2y - 11) = -(3x - 6y - 5)$

Уравнение биссектрисы принимает вид: $3x - 19 = 0$.

Ответ: $3x - 19 = 0$.

Задача **№15**:

На прямой $x + 2y - 12 = 0$ найти точки, равноудалённые от прямых$x + y - 5 = 0$ и $7x - y + 11 = 0$.

Решение:

Точки равноудалённые от прямых $x + y - 5 = 0$ и $7x - y + 11 = 0$, лежат на биссектрисах углов, образованных этими прямыми. Аналогично решению предыдущих задач найдём их:$x - 3y + 18 = 0$ и $6x + 2y - 7 = 0$.

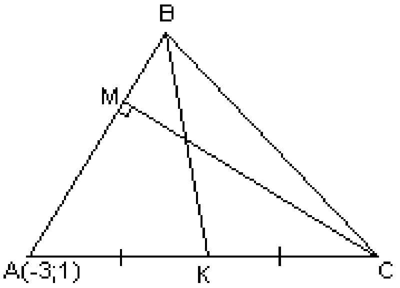
Тогда искомые точки являются точками пересечения этих биссектрис и прямой $x + 2y - 12 = 0$, поэтому найдём их, решая системы:$\begin{cases} x - 3y + 18 = 0 \\ x + 2y - 12 = 0 \end{cases}$ и $\begin{cases} 6x + 2y - 7 = 0 \\ x + 2y - 12 = 0 \end{cases}$.

Ответ: $(0;\ 6);\ (-1;\ \frac{13}{2})$.

Задача **№16**:

Составить уравнения сторон треугольника, зная одну из его вершин $A(-3;\ 9)$ и уравнения медианы $6x + 11y - 19 = 0$ и высоты $4x - y - 5 = 0$, проведённых из различных вершин.

Решение:



Убедимся, что точка A не принадлежит заданным медиане и высоте.

Найдём уравнение стороны AB, зная, что $AB \perp CM. k_{CM} = 4 \Rightarrow k_{AB} = -\frac{1}{4}$, тогда уравнение примет вид: $y = -\frac{1}{4}x + b$, зная координаты т.A, принадлежащей AB, найдём b, тогда уравнение примет вид: $x + 4y - 1 = 0$.

Найдём координаты т.B, как точки пересечения AB и медианы BK: $\begin{cases} x + 4y - 1 = 0 \\ 6x + 11y - 19 = 0 \end{cases} \Rightarrow B(5; -1)$.

Пусть точка C имеет координаты x_C и y_C, найдём их. Точка K – середина AC, поэтому $K(\frac{-3+x_C}{2};\ \frac{1+y_C}{2})$.

Точка K принадлежит медиане BK, точка C принадлежит высоте CM, поэтому x_C и y_C найдём, решая систему: $\begin{cases} 6 \cdot \frac{-3+x_C}{2} + 11 \cdot \frac{1+y_C}{2} - 19 = 0 \\ 4x_C - y_C - 5 = 0 \end{cases}$

Откуда $C(2;\ 3)$ Зная координаты вершин треугольника, найдём уравнения всех его сторон.

Ответ: $x + 4y - 1 = 0,\ 4x + 3y - 17 = 0,\ 2x - 5y + 11 = 0$.

Задача **№17**:

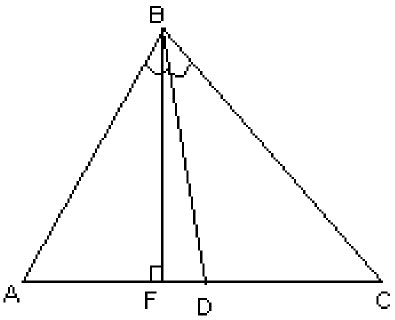
Через точку $P(0;\ 1)$ провести прямую так, чтобы её отрезок, заключённый между прямыми $x - 3y + 10 = 0$ и $2x + y - 8 = 0$, делился бы в точке P пополам.

Решение:

Обозначим через A и B точки пересечения заданных прямых и искомой прямой и пусть $B(x_C;\ y_C)$, тогда $A(-x_C;\ 2 - y_C)$, т.к. $P(0;\ 1)$ – середина отрезка AB. Координаты x_C, y_C найдём, составив систему уравнений: $\begin{cases} -x_C - 3(2 - y_C) + 10 = 0 \\ 2x_C + y_C - 8 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_C = 4 \\ y_C = 0 \end{cases} \Rightarrow B(4;\ 0)$.

Составим уравнение искомой прямой, которая проходит через две точки, например, B и P: $x + 4y - 4 = 0$.

Ответ: $x + 4y - 4 = 0$.



Задача **№18**:

Составить уравнения сторон треугольника ABC, зная одну из его вершин $A(2;\,-1)$, а также уравнение высоты $7x - 10y + 1 = 0$ и биссектрисы $3x - 2y + 5 = 0$, проведённых из одной вершины. Решить задачу, не вычисляя координат вершин B и C.

Решение:

Можно проверить, что т.A не принадлежит ни высоте, ни биссектрисе. Найдём уравнение стороны AC: $AC \perp BD$, поэтому $k_{AC} = -\frac{10}{7}$; $y = -\frac{10}{7}x + b$, зная координаты т.A, найдём b.

Итак, уравнение AC имеет вид: $10x + 7y - 13 = 0$.

Рассмотрим пучок с центром в т.B:$\alpha(3x - 2y + 5) + \beta(7x - 10y + 1) = 0$.

Пусть $\alpha = 1$, тогда уравнение пучка примет вид:

$(3 + 7\beta) - (2 + 10\beta) + 5 + \beta = 0.$ (1)

AB – прямая пучка, причём координаты т.A известны, поэтому найдём β для прямой AB:$\beta = -\frac{13}{25}$, поэтому уравнение AB примет вид: $(3 - \frac{7 \cdot 13}{25})x - (2 - \frac{10 \cdot 13}{25})y + 5 - \frac{13}{25} = 0$, т.е. $x - 5y - 7 = 0$.

Найдём угол между прямыми AB и BF: $\mathrm{tg}\varphi = \frac{\frac{3}{2} - \frac{1}{5}}{1 + \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{5}} = 1 \Rightarrow \varphi = 45°$.

Тогда угол ABC равен 90°, т.е. $BC \perp AB$; - $k_{BC} = \frac{1}{\mathrm{k_{AB}}} = -5$. С другой стороны найдём k_{BC} из уравнения (1): $k_{BC} = \frac{3+7\beta}{2+10\beta}$.

Итак, $\frac{3+7\beta}{2+10\beta} = -5 \Rightarrow \beta = -\frac{13}{57}$.

Найдём уравнение стороныBC зная, что она принадлежит пучку. Подставимβ в уравнение (1) и получим уравнение стороны BC: $5x + y + 17 = 0$.

Ответ: $10x + 7y - 13 = 0$, $x - 5y - 7 = 0$, $5x + y + 17 = 0$.

Образовательным результатом после изучения данной темы является сформированность компонент, заявленных во введении, совокупности компетенций (знать, уметь, владеть) на двух уровнях: пороговый и продвинутый. Пороговый уровень соответствует оценке «удовлетворительно», продвинутый уровень соответствует оценкам «хорошо» или «отлично» в зависимости от результатов защиты кейс-заданий.

Для самостоятельной диагностики данных компонент вам предлагаются следующие задания.

Вопросы для самопроверки (знать).

Пороговый уровень:

1. Прямая линия на плоскости, её общее уравнение
2. Понятие нормального и направляющего векторов прямой на плоскости, углового коэффициента.
3. Различные виды уравнений прямой и геометрический смысл параметров уравнения.
4. Угол между прямыми. Условия параллельности и перпендикулярности прямых на плоскости в случае различных видов уравнений прямых.
5. Формула расстояния от точки до прямой на плоскости?

Повышенный уровень:

Дайте развернутые ответы на следующие вопросы (доказательства свойств, встречающихся в данном вопросе являются обязательными):

1. Линия как геометрическое место точек, обладающих каким-либо определенным свойством. Уравнение линии как связь между координатами произвольной ее точки, выраженная аналитически.
2. Прямая линия. Общее уравнение прямой. Взаимно однозначное соответствие между уравнением первой степени с двумя переменными$Ax + By + C = 0$ и прямой линией.
3. Различные виды уравнений прямой и их выводы. Записать различные виды уравнений прямойпоодному из заданных.
4. Пучок прямых.
5. Отклонение точки от прямой. Применение в решении задач.

Решение типовых задач (уметь).

Лабораторная работа №2.

Вариант 1

1. Напишите все виды уравнений (канонические, параметрические, общее, в отрезках, с угловым коэффициентом) для прямой, проходящей через точки $A(2;\ 1)$ и $B(4;\ 1)$, ее угловой коэффициент, нормальный и направляющий векторы, точки пересечения с координатными осями. Сделайте чертеж.

2. Дана прямая$2x + 3y + 4 = 0$. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M(-2; 0)$: а) параллельно данной прямой; б) перпендикулярно данной прямой.

3. Найти точку пересечения двух прямых$3x - 4y - 29 = 0$ и $2x + 5y + 19 = 0$и угол между ними.

4. При каких aиb прямые $ax + 8y - b = 0$ и$2x + ay + 1 = 0$:

1) параллельны; 2) совпадают; 3) перпендикулярны?

5. Составить уравнение прямой, если точка$N(4;\ 5)$ служит основанием перпендикуляра, опущенного из начала координат на эту прямую.

6. Докажите, что данные прямые параллельны и найдите расстояние между ними: $4x + y - 9 = 0$ и$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -3 - 4t \end{cases}$.

7. Дано уравнение пучка прямых$\alpha(5x + 3y - 7) + \beta(3x + 10y + 4) = 0$.Найти все значения a, при которых прямая $ax + 5y + 9 = 0$ не принадлежит данному пучку.

8. Диагональ квадрата расположена на прямой$y = 2x - 1$. Одна из его вершин находится в точке $(4; -3)$. Составить уравнения его сторон и второй диагонали.

Вариант 2

1. Напишите все виды уравнений (канонические, параметрические, общее, в отрезках, с угловым коэффициентом) для прямой, проходящей через точки $A(-2;\ 6)$ и $B(4;\ 2)$, ее угловой коэффициент, нормальный и направляющий векторы, точки пересечения с координатными осями. Сделайте чертеж.

2. Составьте общее уравнение прямой, проходящей через точку $A(1; -4)$: а) перпендикулярно; б) параллельно прямой$-x + \frac{y}{4} = 1$.

3. Докажите, что прямые$2x + y - 1 = 0$ и$\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = -2 - 4t \end{cases}$ параллельные и найдите расстояние между ними.

4. При каких a и b прямые $ax + 8y - b = 0$ и $ax + 2y + 1 = 0$:

1) параллельны; 2) совпадают; 3) перпендикулярны?

5. Найти проекцию точки $A(1; -3)$на прямую$2x - y + 5 = 0$.

6. Составить уравнение биссектрисы угла междупрямыми$3x - y - 4 = 0$ и$2x + 6y + 3 = 0$, в котором лежит начало координат.

7. Найти уравнение прямой, принадлежащей пучку$\alpha(3x - 2y - 1) + \beta(4x - 5y + 8) = 0$ и проходящей через середину отрезка прямой$x + 2y + 4 = 0$, заключенного между прямыми$2x + 3y + 5 = 0$ и $x + 7y - 1 = 0$.

8. Центр симметрии квадрата находится в точке $(-1; 0)$, уравнение одной из его сторон $x + 3y - 5 = 0$. Составить уравнения трех других сторон квадрата.

Вариант 3

1. Напишите все виды уравнений (канонические, параметрические, общее, в отрезках, с угловым коэффициентом) для прямой, проходящей через точки $A(1;\ 4)$ и $B(-4;\ 1)$, ее угловой

коэффициент, нормальный и направляющий векторы, точки пересечения с координатными осями. Сделайте чертеж.

2. Найдите параметрические уравнения прямой, проходящей через вершину A треугольника ABC: а) параллельно; б) перпендикулярно стороне BC, если $A(2;-3),\ B(3;\ 0),\ C(0;-2)$.

3. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $A(1;\ 5)$ на расстоянии пять единиц от начала координат.

4. При каких a и b прямые $3x+ay+4=0$ и $ax+27y-b=0$:

1) параллельны; 2) совпадают; 3) перпендикулярны?

5. Найти координаты точки N, симметричной точке $M(-3;\ 4)$ относительно прямой $4x-y-1=0$.

6. Составить уравнение биссектрисы угла между прямыми $3x-4y-29=0$ и $2x+5y+19=0$, в котором лежит начало координат.

7. Из пучка прямых $\alpha(2x+4y-13)+\beta(2x-y+2)=0$ выберите прямую, проходящую через точку $A(1;\ 3)$.

8. Известны координаты точек $A(3;\ 5)$ и $B(-1;-2)$. На прямой $7x-6y+1=0$ найти такую точку C, что площадь треугольника ABC равна 1.

Вариант 4

1. Напишите все виды уравнений (канонические, параметрические, общее, в отрезках, с угловым коэффициентом) для прямой, проходящей через точки $A(-3;4)$ и $B(1;-2)$, ее угловой коэффициент, нормальный и направляющий векторы, точки пересечения с координатными осями. Сделайте чертеж.

2. Найдите уравнение прямой в отрезках, проходящей через вершину B треугольника ABC: а) параллельно; б) перпендикулярно стороне AC, если $A\left(2;-3\right),\ B(3;0),\ C(0;-2)$.

3. Найти расстояние между параллельными прямыми: $3x+4y-20=0$ и $\begin{cases} x=1+4t \\ y=2-3t \end{cases}$.

4. При каких a и b прямые $ax+27y-1=0$ и $3x+ay+b=0$:

1) параллельны; 2) совпадают; 3) перпендикулярны?

5. Даны уравнения сторон треугольника $AB: 3x+2y-6=0$, $AC: 7x-y-31=0$, $BC: 2x+7y-38=0$. Найти уравнение перпендикуляра, опущенного из вершины B на медиану, проведенную из вершины A.

6. Определить высоту CD в треугольнике $A(4;-3)$, $B(-2;\ 6)$, $C(5;\ 4)$, вычислив расстояние от точки C до прямой AB.

7. Из пучка прямых $\alpha(2x+4y-1)+\beta(2x-y+2)=0$ выберите прямую параллельную прямой $x+y-1=0$.

8. Составьте уравнения сторон треугольника, если его вершина$A(-5;5)$, а биссектриса$3x+3y-11=0$ и медиана$19x+26y-79=0$, проведены из другой его вершины.

Вариант 5

1. Напишите все виды уравнений (канонические, параметрические, общее, в отрезках, с угловым коэффициентом) для прямой, проходящей через точки $A(-2;\ 1)$, $B(3;\ 5)$, ее угловой коэффициент, нормальный и направляющий векторы, точки пересечения с координатными осями. Сделайте чертеж.
2. Составьте общее уравнениепрямой, проходящей через точку$A(1;-1)$ а) перпендикулярно; б) параллельно прямой$x+\frac{y}{2}=1$.
3. Найти расстояние между прямыми:$\begin{cases} x=2+t \\ y=-3-4t \end{cases}$ и$\frac{x-1}{3}=\frac{y+1}{1}$.
4. При каких a и b прямые $ax-2y+1=0$ и $6x-4y+b=0$:
1) имеют одну общую точку; 2) параллельны; 3) совпадают; 4) перпендикулярны?
5. Даны две противоположные вершины квадрата $A(-1;3)$ и $C(6;2)$. Найти уравнения его сторон.
6. Определить высоту BD в треугольнике $A(4;-3)$, $B(-2;6)$, $C(5;4)$, вычислив расстояние от точки Bдо прямой AC.
7. Из пучка прямых $\alpha(2x+y-1)+\beta(2x-y+2)=0$ выберите прямую перпендикулярную прямой $x+y-1=0$.
8. Составить уравнения сторон ромба, зная две противоположные вершины $A(-3;\ 1)$, $C(5;7)$и площадь$S=25$ кв. ед.

Вариант 6

1. Напишите все виды уравнений (канонические, параметрические, общее, в отрезках, с угловым коэффициентом) для прямой, проходящей через точки $A(-2;\ 1)$ и $B(10;\ 3)$, ее угловой коэффициент, нормальный и направляющий векторы, точки пересечения с координатными осями. Сделайте чертеж.
2. Найдите параметрические уравнения прямой, проходящей через вершину A треугольника ABC и а) параллельно; б) перпендикулярно стороне BC, если $A(3;\ 2)$, $B(3;\ 8)$, $C(6;\ 2)$.
3. Точка $A(2;\ -5)$ является вершиной квадрата, одна из сторон которого лежит на прямой$x-2y-7=0$. Найти площадь этого квадрата.
4. При каких a и b прямые$6x+2y-b=0$ и$ax+4y+3=0$:
1) имеют одну общую точку;
2) параллельны;
3) совпадают;
4) перпендикулярны?

5. Найти уравнение прямой, проходящей через точку с координатами $(2;\ 1)$ под углом 45°к прямой$2x + 3y + 4 = 0$.

6. Найти точку A, симметричную точке $B(8; -9)$относительно прямой$x + 2y + 5 = 0$.

7. Докажите, что прямая$x + 8y - 7 = 0$ принадлежит пучку $\alpha(2x + y - 2) + \beta(x - 2y + 1) = 0$.

8. Дана вершина равнобедренного треугольника $B(3; 5)$, уравнение его основания $x - 2y + 12 = 0$и площадь $S = 15$ кв. ед. Составить уравнения его боковых сторон.

Вариант 7

1. Напишите все виды уравнений (канонические, параметрические, общее, в отрезках, с угловым коэффициентом) для прямой, проходящей через точки $A(2;\ -1)$ и $B(4;\ 1)$, ее угловой коэффициент, нормальный и направляющий векторы, точки пересечения с координатными осями. Сделайте чертеж.

2. Составьте общее уравнение прямой, проходящей через точку $A(1;\ -1)$: а) перпендикулярно; б) параллельно биссектрисе второго и четвертого координатных углов.

3. Составить уравнение прямой, симметричной прямой $x + 2y - 6 = 0$ относительно точки $A(4;\ 2)$.

4. При каких a иb прямые $2x + 4y + b = 0$и$ax + 3y - 3 = 0$:

1) имеют одну общую точку;

2) параллельны;

3) совпадают;

4) перпендикулярны?

5. Составить уравнения сторон треугольника, зная координаты одной из его вершин $(4;\ -1)$ и уравнения двух биссектрис:$x = 1$ и $y = x - 1$.

6. Даны уравнения оснований трапеции: $3x - 4y - 15 = 0$, $3x - 4y - 35 = 0$. Найти высоту трапеции.

7. Из пучка прямых $\alpha(2x + y - 1) + \beta(2x - y + 2) = 0$ выберите две взаимно перпендикулярных прямых.

8. Составьте уравнения сторон треугольника, если известны координаты двух его вершин $A(-1; 7)$, $B(5;\ 3)$и точка пересечения медиан$O(1; -2)$.

Вариант 8

1. Напишите все виды уравнений (канонические, параметрические, общее, в отрезках, с угловым коэффициентом) для прямой, проходящей через точки $A(2;\ 1)$ и $B(-4;\ -1)$, ее угловой коэффициент, нормальный и направляющий векторы, точки пересечения с координатными осями. Сделайте чертеж.

2. Составьте общее уравнение прямой, проходящей через точку $A(1;\,-2)$ а) перпендикулярно; б) параллельно биссектрисе первого и третьего координатных углов.

3. Даны 3 параллельные прямые $10x+15y-3=0, 2x+3y+5=0, 2x+3y-9=0$. Установить, что первая из них лежит между двумя другими, и вычислить отношение, в котором она делит расстояние между ними.

4. При каких a и b прямые $ax+3y-3=0$ и $2x-2y+b=0$:

1) имеют одну общую точку;

2) параллельны;

3) совпадают;

4) перпендикулярны?

5. Составить уравнение прямой, проходящей через начало координат, зная, что длина её отрезка, заключённого между прямыми $2x-y+5=0$ и $2x-y+10=0$, равна $\sqrt{10}$.

6. Определить высоту BD в треугольнике $A(4;\,-3)$, $B(-2;\,6)$, $C(5;\,4)$, вычислив расстояние от точки Bдо прямой AC.

7. При каком значении Cпрямая$4x-3y+C=0$ принадлежит пучку $\alpha(3x+2y-9)+\beta(2x+5y+5)=0$.

8. Даны уравнения двух медиан треугольника $x+y-5=0;\ x+y-7=0$и уравнение одной из его сторон $2x+y-5=0$.Составить уравнения двух других сторон треугольника и найти его вершины.

<u>Пороговый уровень:</u>

Достаточно правильно решить 70 % задач лабораторной работы №2.

<u>Повышенный уровень:</u>

Необходимо правильно решить все задачи лабораторной работы №2.

Кейс-заданиедиагностирует готовность к педагогической деятельности и заключается в следующем:

На основе предложенных в учебно-методическом пособии типовых задач составить систему тестовых заданий, позволяющих оценить когнитивную составляющую формируемых компетенций.

При этом для порогового уровня достаточно демонстрационного варианта теста.

Для продвинутого уровня необходимо создание хотя бы 5 вариантов с выделением уровня сформированности когнитивной составляющей формируемых компетенций.

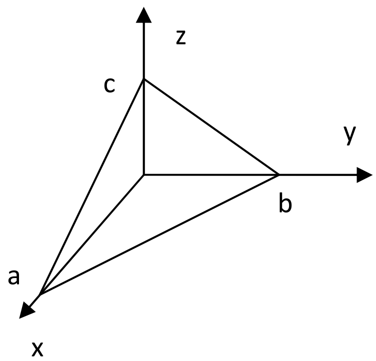
§3 Прямая и плоскость в пространстве.

ПЛОСКОСТЬ.

Определение. Любой ненулевой вектор, перпендикулярный плоскости, называется её *нормальным вектором*, и обозначается $\overline{n}\ (A; B; C)$.

Определение. Уравнение плоскости вида $Ax + By + Cz + D = 0$, где коэффициенты A, B, C, D – произвольные действительные числа, одновременно не равные нулю, называется *общим уравнением плоскости.*

Теорема. Уравнение $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$ определяет плоскость, проходящую через точку $M(x_0;\ y_0;\ z_0)$ и имеющую нормальный вектор $\overline{n}\ (A; B; C)$.



Определение. Уравнение плоскости вида $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$, где $a = -\frac{D}{A}, b = -\frac{D}{B}, c = -\frac{D}{C}$ – произвольные, не равные нулю действительные числа, называется *уравнением плоскости в отрезках.*

Теорема. Пусть $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ – уравнение плоскости в отрезках. Тогда $(a;\ 0;\ 0)$, $(0;\ b;\ 0)$, $(0;\ 0;\ c)$ – координаты точек её пересечения с осями координат.

Определение. Общее уравнение плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$ называется *нормированным* или *нормальным* уравнением плоскости, если
$A^2 + B^2 + C^2 = 1$ и $D < 0$.

Теорема. Нормальное уравнение плоскости может быть записано в виде $xcos\alpha + ycos\beta + zcos\gamma - p = 0$, где $p > 0$ – расстояние от начала координат до данной плоскости, $cos\alpha, cos\beta, cos\gamma$ – направляющие косинусы её нормального вектора $\overline{n} = (cos\alpha; cos\beta;\ cos\gamma)$.

Определение. *Нормирующим множителем* общего уравнения плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$ называется число $t = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$, где знак выбирается противоположным знаку свободного члена D.

Теорема. Пусть t – нормирующий множитель общего уравнения плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$. Тогда уравнение $tAx + tBy + tCz + tD = 0$ – является нормированным уравнением данной плоскости.

Теорема. Расстояние d от точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$ до плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$ равно $d = \frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.

Взаимное расположение двух плоскостей.

Две плоскости либо совпадают, либо являются параллельными, либо пересекаются по прямой.

Теорема. Пусть плоскости заданы общими уравнениями: σ_1: $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$, σ_2: $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$. Тогда:

1) если $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}$, то плоскости совпадают;

2) если $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2}$, то плоскости параллельные;

3) если $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$ или $\frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$,то плоскости пересекаются по прямой, уравнением которой служит система уравнений: $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$.

Теорема. Пусть $\overline{n_1}, \overline{n_2}$ – нормальные векторы двух плоскостей, тогда один из двух углов между данными плоскостями равен: $arccos \frac{\overline{n_1} \cdot \overline{n_2}}{|\overline{n_1}| \cdot |\overline{n_2}|}$.

Следствие. Пусть $\overline{n_1} = (A_1; B_1; C_1)$, $\overline{n_2} = (A_2; B_2; C_2)$ – нормальные векторы двух данных плоскостей. Если скалярное произведение $\overline{n_1} \cdot \overline{n_2} = = A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$,то данные плоскости являются перпендикулярными.

Теорема. Пусть даны координаты трех различных точек координатного пространства: $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$, $M_3(x_3; y_3; z_3)$.

Тогда уравнение $\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$ – является уравнением плоскости, проходящей через эти три точки.

Теорема. Пусть даны общие уравнения двух пересекающихся плоскостей: $\sigma_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $\sigma_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$, причем $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 > 0$. Тогда:

$$\frac{A_1x+B_1y+C_1z+D_1}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}} + \frac{A_2x+B_2y+C_2z+D_2}{\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}} = 0.$$

– уравнение биссекторной плоскости острого двугранного угла, образованного пересечением данных плоскостей;

$$\frac{A_1x+B_1y+C_1z+D_1}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}} - \frac{A_2x+B_2y+C_2z+D_2}{\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}} = 0.$$

– уравнение биссекторной плоскости тупого двугранного угла.

Связка и пучок плоскостей.

Определение. *Связкой плоскостей* называется множество всех плоскостей, имеющих одну общую точку, которая называется *центром связки*.

Теорема. Пусть $\sigma_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$, $\sigma_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$, $\sigma_3: A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0$ – три плоскости, имеющие единственную общую точку M_0. Тогда уравнение $\alpha(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \beta(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) + \gamma(A_3x + B_3y + C_3z + D_3) = 0$, где $\alpha, \beta, \gamma \in R$ – произвольные действительные параметры одновременно не равные нулю, есть уравнение связки плоскостей.

Теорема. Уравнение $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$, где A, B и C произвольные действительные параметры, одновременно не равные нулю, является уравнением связки плоскостей с центром связки в точке $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$.

Теорема. Пусть даны общие уравнения трех плоскостей:

$\sigma_1\colon A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \sigma_2\colon A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0,$

$\sigma_3\colon A_3x+B_3y+C_3z+D_3=0,\ \overline{n_i}=(A_i;\ B_i;\ C_i),\ i=1,2,3$ – их соответствующие нормальные векторы. Для того чтобы три данные плоскости пересекались в единственной точке необходимо и достаточно, чтобы смешанное произведение их нормальных векторов не равнялось нулю: $\overline{n_1}\cdot\overline{n_2}\cdot\overline{n_3}=\begin{vmatrix}A_1 & B_1 & C_1\\ A_2 & B_2 & C_2\\ A_3 & B_3 & C_3\end{vmatrix}\neq 0.$

В этом случае, координаты их единственной общей точки являются единственным решением системы уравнений: $\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0.\\ A_3x+B_3y+C_3z+D_3=0\end{cases}$

Определение. *Пучком плоскостей* называется множество всех плоскостей пересекающихся по одной и той же прямой, называемой осью пучка.

Теорема. Пусть $\sigma_1\colon A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ и $\sigma_2\colon A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$– две плоскости, пересекающиеся по прямой L. Тогда уравнение $\alpha(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+\beta(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0$, где $\alpha,\beta\in R$ – произвольные действительные параметры одновременно не равные нулю, есть уравнение пучка плоскостей с осью пучка L.

ПРЯМАЯ.

Определение. Любой ненулевой вектор, коллинеарный данной прямой называется ее *направляющим вектором*, и обозначается $\overline{q}=(m;\ n;\ p)$.

Теорема. Следующая система уравнений является уравнением прямой в пространстве и называется *параметрическим уравнением прямой* в пространстве: $\begin{cases}x=x_0+mt\\ y=y_0+nt\\ z=z_0+pt\end{cases}$, где x_0,y_0,z_0 – координаты произвольной фиксированной точки данной прямой, $m,\ n,\ p$ – соответствующие координаты произвольного направляющего вектора данной прямой, $t\epsilon R$ – параметр.

Следствие. Следующая система уравнений является уравнением прямой в пространстве и называется *каноническим уравнением прямой* в пространстве: $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$, где $x_0,\ y_0,\ z_0$ – координаты произвольной фиксированной точки данной прямой, $m,\ n,\ p$– соответствующие координаты произвольного направляющего вектора данной прямой.

Определение. Каноническое уравнение прямой вида $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$–называется *каноническим уравнением прямой, проходящей через две* *различные данные точки*$M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ и $M_2(x_2;\ y_2;\ z_2)$.

Взаимное расположение двух прямых в пространстве.

Возможны 4 случая расположения двух прямых в пространстве. Прямые могут совпадать, быть параллельными, пересекаться в одной точке или быть скрещивающимися.

Теорема. Пусть даны канонические уравнения двух прямых:

$$L_1\colon \frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1},\qquad L_2\colon \frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2},$$

где $\overline{q_1}=(m_1;\ n_1;\ p_1)$, $\overline{q_2}=(m_2;\ n_2;\ p_2)$ – их направляющие векторы, $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$, $M_2(x_2;\ y_2;\ z_2)$ – произвольные фиксированные точки, лежащие на прямых L_1 и L_2 соответственно. Тогда:

1) прямые совпадают, если $\overline{q_1}\parallel\overline{q_2}$ и $M_1\in L_2$, т.е. $\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2}$ и $\frac{x_1-x_2}{m_2}=\frac{y_1-y_2}{n_2}=\frac{z_1-z_2}{p_2}$;

2) прямые параллельные, если $\overline{q_1}\parallel\overline{q_2}$ и $M_1\notin L_2$, т.е. $\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2}$ и не выполняется хотя бы одно из равенств $\frac{x_1-x_2}{m_2}=\frac{y_1-y_2}{n_2}=\frac{z_1-z_2}{p_2}$;

3) прямые пересекаются в одной точке, если $\overline{q_1}\nparallel\overline{q_2}$, т.е. хотя бы одно из равенств $\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2}$ не выполняется и

$$\overline{q_1}\cdot\overline{q_2}\cdot\overline{M_1M_2}=0,\ \text{т.е.}\begin{vmatrix} m_1 & n_1 & p_1\\ m_2 & n_2 & p_2\\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1\end{vmatrix}=0;$$

4) прямые скрещивающиеся, если $\overline{q_1}\cdot\overline{q_2}\cdot\overline{M_1M_2}\neq 0$, т.е.

$$\begin{vmatrix} m_1 & n_1 & p_1\\ m_2 & n_2 & p_2\\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1\end{vmatrix}\neq 0.$$

Теорема. Пусть $L_1\colon \begin{cases} x=x_1+m_1t\\ y=y_1+n_1t\\ z=z_1+p_1t\end{cases}$ и $L_2\colon \begin{cases} x=x_2+m_2t\\ y=y_2+n_2t\\ z=z_2+p_2t\end{cases}$

– две произвольные прямые в пространстве, заданные параметрическими уравнениями. Тогда:

1) если система уравнений $\begin{cases} x_1+m_1t=x_2+m_2k\\ y_1+n_1t=y_2+n_2k\\ z_1+p_1t=z_2+p_2k\end{cases}\quad(*)$

имеет единственное решение $(t;\ k)$, то прямые пересекаются в одной точке;

2) если система уравнений $(*)$ не имеет решений, то прямые скрещивающиеся или параллельные.

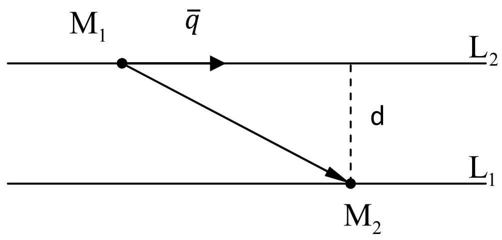
3) если система уравнений $(*)$ имеет более одного решения, то прямые совпадают.

Расстояние между двумя прямыми в пространстве.

Теорема. (Формула расстояния между двумя параллельными прямыми.): Расстояние между двумя параллельными прямыми

$L_1: \frac{x-x_1}{m} = \frac{y-y_1}{n} = \frac{z-z_1}{p}$ и $L_2: \frac{x-x_2}{m} = \frac{y-y_2}{n} = \frac{z-z_2}{p}$, где$\bar{q} = (m;\ n;\ p)$ – их общий направляющий вектор, $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1) \in L_1$ и $M_2(x_2;\ y_2;\ z_2) \in L_2$ – точки на этих прямых, можно вычислить по формуле:

$d(L_1; L_2) = |\overline{M_1M_2}| \cdot sin(\bar{q}\,\hat{}\,\overline{M_1M_2})$или$d(L_1; L_2) = \frac{|\bar{q}\times\overline{M_1M_2}|}{|\bar{q}|}$.



Теорема. (Формула расстояния между двумя скрещивающимися прямыми.): Расстояние между двумя скрещивающимися прямыми

$$L_1: \frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{n_1} = \frac{z-z_1}{p_1} \text{ и } L_2: \frac{x-x_2}{m_2} = \frac{y-y_2}{n_2} = \frac{z-z_2}{p_2}$$

можно вычислить по формуле:$d(L_1; L_2) = \frac{|\overline{q_1}\cdot\overline{q_2}\cdot\overline{M_1M_2}|}{|\overline{q_1}\times\overline{q_2}|}$,

где$|\overline{q_1}\cdot\overline{q_2}\cdot\overline{M_1M_2}|$ – модуль смешанного произведения направляющих векторов $\overline{q_1} = (m_1;\ n_1;\ p_1)$и $\overline{q_2} = (m_2;\ n_2;\ p_2)$ и вектора $\overline{M_1M_2} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$, $|\overline{q_1}\times\overline{q_2}|$ – модуль векторного произведения направляющих векторов.

Теорема. Пусть$\sigma_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,\ \sigma_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ – уравнения двух пересекающихся плоскостей. Тогда следующая система уравнений является уравнением прямой линии, по которой пересекаются эти плоскости:$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$. Направляющим вектором этой прямой может служить вектор$\bar{q} = \overline{n_1}\times\overline{n_2} = \left(\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}\right)$,где$\overline{n_1} = (A_1;\ B_1;\ C_1)$, $\overline{n_2} = (A_2;\ B_2;\ C_2)$– нормальные векторы данных плоскостей.

Теорема.Пусть дано каноническое уравнение прямой:$\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}$,где $m \neq 0$. Тогда следующая система уравнений является уравнением данной прямой, заданной пересечением двух плоскостей:$\begin{cases} \frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} \\ \frac{x-x_0}{m} = \frac{z-z_0}{p} \end{cases}$.

Теорема. Уравнение перпендикуляра, опущенного из точки $M_1(x_1, ; y_1;\ z_1)$ на прямую$\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}$ имеет вид$\begin{cases} A(x-x_1) + B(y-y_1) + C(z-z_1) = 0 \\ m(x-x_1) + n(y-y_1) + p(z-z_1) = 0 \end{cases}$,где $(A;\ B;\ C) = \bar{q}\times\overline{M_0M_1}$– координаты векторного произведения, $\bar{q} = (m;\ n;\ p)$ – координаты направляющего вектора данной прямой. Длину перпендикуляра можно найти по формуле: $d = \frac{|\bar{q} \times \overline{M_0 M_1}|}{|\bar{q}|}$.

Теорема. Уравнение общего перпендикуляра двух скрещивающихся прямых $L_1: \frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{n_1} = \frac{z-z_1}{p_1}$ и $L_2: \frac{x-x_2}{m_2} = \frac{y-y_2}{n_2} = \frac{z-z_2}{p_2}$ имеет вид: $\begin{cases} A_1(x-x_1) + B_1(y-y_1) + C_1(z-z_1) = 0 \\ A_2(x-x_2) + B_2(y-y_2) + C_2(z-z_2) = 0 \end{cases}$, где $(A_1;\ B_1;\ C_1) = \overline{q_1} \times (\overline{q_1} \times \overline{q_2})$, $(A_2;\ B_2;\ C_2) = \overline{q_2} \times (\overline{q_1} \times \overline{q_2})$.

Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве.

Возможны три случая взаимного расположения прямой в пространстве и плоскости:

1) прямая лежит на плоскости;

2) прямая параллельна плоскости;

3) прямая пересекает плоскость в некоторой точке.

Теорема. Пусть плоскость α задана общим уравнением $\alpha: Ax + By + Cz + D = 0$, а прямая L задана каноническим или параметрическим уравнениями $\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}$ или $\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \\ z = z_0 + pt \end{cases}$, где вектор $\overline{n}\ (A;\ B;\ C)$ – нормальный вектор плоскости α, $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ – координаты произвольной фиксированной точки прямой L, $\bar{q}(m;\ n;\ p)$ – соответствующие координаты произвольного направляющего вектора прямой L. Тогда:

1) если $\bar{n} \cdot \bar{q} = Am + Bn + Cp \neq 0$, то прямая L пересекает плоскость α в точке, координаты которой можно найти из системы уравнений $\begin{cases} A(x_0 + mt) + B(y_0 + nt) + C(z_0 + pt) + D = 0 \\ x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \\ z = z_0 + pt \end{cases}$; $(*)$

2) если $\bar{n} \cdot \bar{q} = Am + Bn + Cp = 0$ и $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$, то прямая лежит на плоскости;

3) если $\bar{n} \cdot \bar{q} = Am + Bn + Cp = 0$ и $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0$, то прямая параллельна плоскости.

Следствие. Если система (*) имеет единственное решение, то прямая пересекается с плоскостью; если система (*) не имеет решений, то прямая параллельная плоскости; если система (*) имеет бесконечно много решений, то прямая лежит на плоскости.

Решение типовых задач.

Задача **№1**:

Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_1(3;\ 4; -5)$ параллельно векторам $\bar{a}(3;\ 1; -1)$ и $\bar{b}(1; -2;\ 1)$.

Решение:

Найдём нормальный вектор искомой плоскости:$\bar{n} = [\bar{a}, \bar{b}]$;

$$\bar{n}_\alpha = \begin{vmatrix} \bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k} \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = (-1; -4; -7).$$

В качестве нормального вектора плоскости можно взять вектор (1; 4; 7), тогда общее уравнение плоскости примет вид: $x + 4y + 7z + D = 0$.

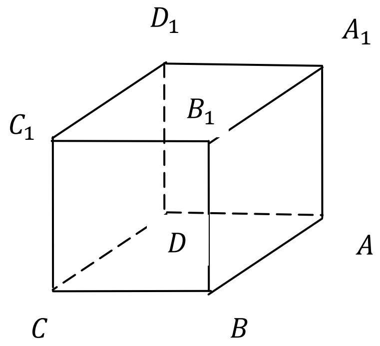
Чтобы найти D, нужно заменить в этом уравнении x, y, z координатами точки M_1, принадлежащей плоскости$D = 16$.

Ответ: $x + 4y + 7z + 16 = 0$.

Задача **№2**:

Две грани куба лежат на плоскостях $2x - 2y + z - 1 = 0$ и $2x - 2y + z + 5 = 0$. Вычислить объём этого куба.

Решение:



Очевидно, что плоскости параллельны. Длиной ребра a куба является расстояние между плоскостями. Выберем на первой плоскости произвольную точку M_1: пусть $y = 0$, $z = -1$, найдём x: $2x - 2 \cdot 0 + (-1) - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$.

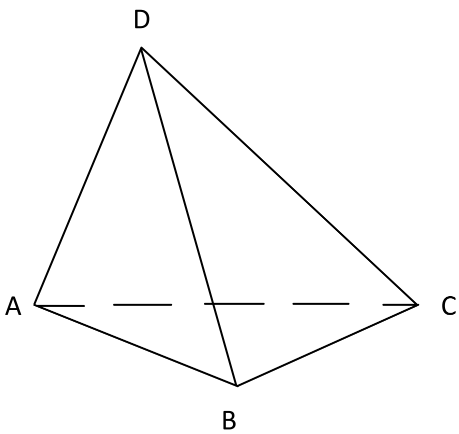
Итак,$M_1(1;\ 0; -1)$.

Найдём расстояние между плоскостями как расстояние от точки M_1 до второй плоскости:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|2 \cdot 1 - 2 \cdot 0 - 1 + 5|}{\sqrt{4 + 4 + 1}} = 2.$$

Итак, объём куба равен$2^3 = 8$(ед.^{3})

Ответ: 8.



Задача **№3**:

Найти угол между гранями ABC и ABD пирамиды $ABCD$свершинами $A(1;\ 3;\ 1)$, $B(2;\ 0;\ 1)$, $C(-1;\ 1;\ 2)$, $D(0; -2;\ 1)$.

Решение:

Угол между плоскостями ABC и ABD– это угол между нормальными векторами к этим плоскостям. Найдём нормальный вектор $\bar{n}_{ABC}$ плоскости ABC: $\bar{n}_{ABC} = [\overline{AB}, \overline{AC}]$;

$\overline{AB} = (1; -3;\ 0)$, $\overline{AC} = (-2; -2;\ 1)$, $\overline{AD} = (-1; -5;\ 0)$.

$$\bar{n}_{ABC} = \begin{vmatrix} \bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k} \\ 1 & -3 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = (-3; -1; -8)\text{ , или}\bar{n}_{ABC} = (3;\ 1;\ 8).$$

Аналогично$\bar{n}_{ABD} = [\overline{AB}, \overline{AD}] = (0;\ 0; -8)$

$\cos\varphi = \frac{\bar{n}_{ABC}\cdot\bar{n}_{ABD}}{|\bar{n}_{ABC}|\cdot|\bar{n}_{ABD}|} = \frac{64}{\sqrt{74}\cdot 8} = \frac{8}{\sqrt{74}}$.

Ответ: $\varphi = \arccos\frac{8}{\sqrt{74}}$.

Задача **№4**:

Составить каноническое уравнение прямой $\begin{cases} 2x+3y-z-4=0 \\ 3x-5y+2z+1=0 \end{cases}$.

Решение:

1. Найдём произвольную точку M_1прямой, для этого решим систему. Пусть $y=0$, тогда $\begin{cases} 2x-z=4 \\ 3x+2z=-1 \end{cases}$, откуда $x=1,\ z=-2$.

Итак, $M_1(1;\ 0;-2)$.

2. Найдём направляющий вектор $\bar{q}$ прямой.

Вектор $\bar{n}_1(2;\ 3;-1)$ и $\bar{n}_2(3;-5;\ 2)$перпендикулярны прямой, поэтому $\bar{q} = [\bar{n}_1, \bar{n}_2]$,

$$\bar{q} = \begin{vmatrix} \bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k} \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & -5 & 2 \end{vmatrix} = (1;-7;-19).$$

Итак, каноническое уравнение прямой примет вид $\frac{x-1}{1} = \frac{y}{-7} = \frac{z+2}{-19}$

.

Ответ: $\frac{x-1}{1} = \frac{y}{-7} = \frac{z+2}{-19}$.

Задача **№5**:

Найти расстояние между прямыми

$$\frac{x-5}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z+25}{-2} \text{и} \frac{x-2}{3} = \frac{y-3}{2} = \frac{z+1}{-2}.$$

Решение:

Прямые параллельны, т.к. их направляющие векторы $\overline{q_1}$ и $\overline{q_2}$ равны. Пусть точка $M_1(5;\ 0;-25)$ принадлежит первой прямой, а точка $M_2\ (2;\ 3;-1)$ лежит на второй прямой. Найдём площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overline{M_1M_2}$ и $\bar{q}_1$.

$S = |\overline{M_1M_2} \cdot \bar{q}_1|$;

$[\overline{M_1M_2}, \bar{q}_1] = \begin{vmatrix} \bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k} \\ -3 & 3 & 24 \\ 3 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 3(18\bar{\imath} - 22\bar{\jmath} + 5\bar{k})$;

$S = 3\cdot\sqrt{18^2 + (-22)^2 + 5^2} = 21\cdot\sqrt{17}$(ед.^{3}).

Далее найдём длину основание параллелограмма:

$|\bar{q}_1| = \sqrt{9+4+4} = \sqrt{17}$.

Искомым расстоянием является высота параллелограмма, опущенная из точки M_2:

$h = \frac{S}{|q|} = \frac{21\sqrt{17}}{\sqrt{17}} = 21$ ед.

Ответ: 21.

Задача **№6**:

Вычислить кратчайшее расстояние между прямыми:

$$\frac{x+7}{3}=\frac{y+4}{4}=\frac{z+3}{-2}, \qquad M_1(-7;-4;-3), \bar{q}_1(3;\ 4;-2).$$

$$\frac{x-21}{6}=\frac{y+5}{-4}=\frac{z-2}{-1}, \qquad M_2(21;-5;\ 2), \qquad \bar{q}_2(6;-4;-1).$$

Покажем, что прямые скрещивающиеся, т.е. векторы $\overline{M_1M_2}$,$\bar{q}_1$ и $\bar{q}_2$ не принадлежат одной плоскости: $\begin{vmatrix} 28 & -1 & 5 \\ 3 & 4 & -2 \\ 6 & -4 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$.

<u>1 способ:</u>

Через вторую прямую проведём плоскость α, параллельную первой прямой. Для искомой плоскости известны принадлежащие ей векторы $\bar{q}_1$и $\bar{q}_2$ и точка M_2. Нормальный вектор $\bar{n}_\alpha$ плоскости α есть векторное произведение векторов $\bar{q}_1$и $\bar{q}_2$, поэтому$\bar{n}_\alpha = \begin{vmatrix} \bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k} \\ 3 & 4 & -2 \\ 6 & -4 & -1 \end{vmatrix} = -12\bar{\imath} - 9\bar{\jmath} - 36\bar{k}$.

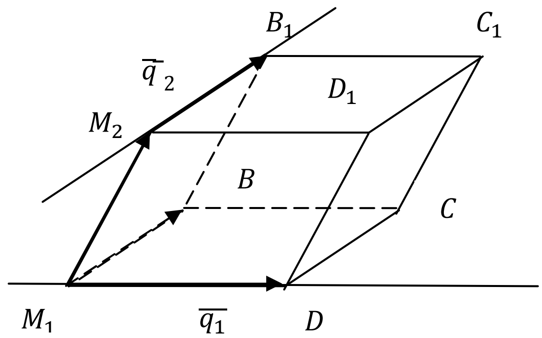
Итак, в качестве нормального вектора плоскости α можно взять вектор (4; 3; 12), поэтому уравнение плоскости примет вид: $4x+3y+12z+D=0$ зная, что точка M_2 принадлежит плоскости $\alpha,$ найдёмD и запишем уравнение: $4x+3y+12z-93=0$.

Искомое расстояние– это расстояние от точки M_1 первой прямой до плоскости α и находится по формуле:

$$d=\frac{|4\cdot(-7)+3\cdot(-4)+12\cdot(-3)-93|}{\sqrt{4^2+3^2+12^2}}=13.$$

<u>2 способ:</u>

На векторах $\overline{M_1M_2}$,$\bar{q}_1$ и $\bar{q}_2$ построим параллелепипед.



Искомое расстояние– это высота параллелепипеда, опущенная из точки M_1, на его основание, построенного на векторах$\bar{q}_1$и$\bar{q}_2$.

Ответ: 13 единиц.

Задача **№7**:

Найти проекцию точки$P(5;\ 2;-1)$ на плоскость$2x-y+3z+23=0$.

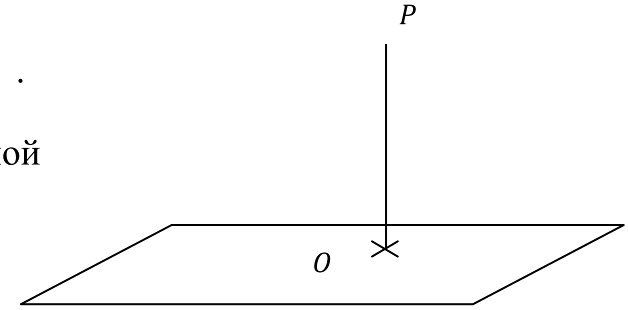
Решение:

1. Через точку P проведём прямую, перпендикулярную плоскости.

2. Найдём точку O пересечения прямой и плоскости. Точка O – проекция точки P на плоскость.

Нормальный вектор $\bar{n}$ плоскости является направляющий вектором прямой:

$\frac{x-5}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+1}{3}$ или $\begin{cases} x = 2t + 5 \\ y = -t + 2 \\ z = 3t - 1 \end{cases}$.



Найдём точку O пересечения прямой и плоскости:

$$\begin{cases} x = 2t + 5 \\ y = -t + 2 \\ z = 3t - 1 \\ 2x - y + 3z + 23 = 0 \end{cases}.$$

Подставив x, y, z в уравнение плоскости, найдёмt, а затем x, y, z: $t = -2,\ x = 1,\ y = 4,\ z = -7.$

Ответ: $(1;\ 4; -7)$.

Замечание. Чтобы найти точку Q, симметричную точке Pотносительно плоскости, нужно(аналогично предыдущей задаче) найти проекцию O точки P на плоскость, затем рассмотреть отрезок PQ с известными началом P и серединой O, воспользовавшись формулами $x_O = \frac{x_P+x_Q}{2}$,$y_O = \frac{y_P+y_Q}{2}$,$z_O = \frac{z_P+z_Q}{2}$.

Задача **№8**:

Найти уравнение перпендикуляра, опущенного из точки $M_0\ (2;\ 3; -1)$ на прямую$\frac{x-5}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z+25}{-2}$.

Решение:

1 способ:

1. Проведём плоскостьα через точкуM_0 и заданную прямую.
2. Проведём плоскость β через точку M_0 перпендикулярно прямой.
3. Искомый перпендикуляр есть пересечение плоскостейα и β.

2 способ:

1. Проведём плоскость α через точку M_0, перпендикулярно прямой.
2. Найдём точкуO пересечения плоскости α и прямой.
3. Уравнение искомого перпендикуляра– это уравнение прямой, проходящей через точкиM_0 иO.

Задачу решим вторым способом:

Плоскость α перпендикулярна заданной прямой, поэтому направляющий вектор прямой является нормальным вектором плоскости. Зная нормальный вектор плоскости и точку на плоскости, запишем её уравнение: $3x+2y-2z-14=0$.

Найдём точку O пересечения плоскости и прямой, записанной параметрически:

$$\begin{cases} 3x+2y-2z-14=0 \\ x=5+3t \\ y=2t \\ z=-25-2t \end{cases},$$

$3\cdot(5+3t)+2\cdot(2t)-2\cdot(-25-2t)-14=0 \Rightarrow t=0,\ x=-4,$ $y=-6,\ z=-19$, итак, $O\ (-4;-6;-19)$.

Составим уравнение прямой проходящей через точкиM_0 и O:

$\frac{x-2}{2}=\frac{y-3}{3}=\frac{z+1}{6}$.

Ответ: $\frac{x-2}{2}=\frac{y-3}{3}=\frac{z+1}{6}$.

Таким же способом можно решить и следующие задачи:

1. Найти расстояние от точки до прямой. (Для предыдущей задачи ответом будет расстояние$|M_0O|$).
2. Найти проекцию точки на прямую (точка O–проекция точки M_0).
3. Найти точку, симметричную точке относительно прямой.

Задача **№9**:

Найти точкуQ, симметричную точке $P(2;-5;\ 7)$ относительно прямой$\frac{x-5}{1}=\frac{y-4}{3}=\frac{z-6}{2}$.

Решение:

1. Проведём плоскость через точкуP перпендикулярно заданной прямой: $x+3y+2z-1=0$.
2. Найдём точку O пересечения прямой и плоскости

$$\begin{cases} \frac{x-5}{1}=\frac{y-4}{3}=\frac{z-6}{2} \\ x+3y+2z-1=0 \end{cases} \Rightarrow O(3;-2;\ 2).$$

3. Найдём координаты точки Q как конца отрезка PQ с известными началом P и серединой O: $Q(4;\ 1;-3)$.

Ответ: $Q(4;\ 1;-3)$.

Задача **№10**:

Дан треугольник ABC с вершинами $A(2;\ 1;\ 5),\ B(6;-4;\ 5), C(2;\ 5;\ 2)$. Найти, уравнение высоты, опущенной из вершины B на сторону AC.

Решение:

Ход решения совершенно аналогичен предыдущим задачам.

Ответ: $\frac{x-6}{-20}=\frac{y+4}{9}=\frac{z-5}{12}$.

Задача **№11**:

Найти уравнение общего перпендикуляра к двум прямым: $\frac{x+1}{2}=\frac{y-3}{4}=\frac{z+2}{3}$ и $\frac{x-2}{3}=\frac{y}{5}=\frac{z-1}{2}$.

Решение:

1. Докажем, что прямые являются скрещивающимися, для этого составим определитель, строками которого являются координаты векторов $\overline{M_1M_2}$,$\bar{q}_1$, $\bar{q}_2$:

$M_1(-1;\ 3;-2),\ M_2(2;\ 0;\ 1), \begin{vmatrix} 3 & -3 & 3 \\ 2 & 4 & 3 \\ 3 & 5 & 2 \end{vmatrix} \neq 0.$

2. Найдём уравнение плоскости α, проходящей через первую прямую параллельно второй прямой $\bar{n}_\alpha = \begin{vmatrix} \bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k} \\ 2 & 4 & 3 \\ 3 & 5 & 2 \end{vmatrix} = (-7;\ 5;-2)$, $(\bar{n}_\alpha = \bar{q}_1 \cdot \bar{q}_2)$.

Учитывая, что плоскость α проходит через точку M_1, запишем уравнение этой плоскости: $7x-5y+2z+26=0$.

3. Найдём уравнение плоскости β, перпендикулярной плоскости α и проходящей через первую прямую: $\bar{n}_\beta = \begin{vmatrix} \bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k} \\ 2 & 4 & 3 \\ -7 & 5 & -2 \end{vmatrix} = (-23;-17;\ 38)$, $(\bar{n}_\beta = \bar{q}_1 \cdot \bar{n}_\alpha)$.

Точка M_1 принадлежит β, поэтому уравнение плоскости β примет вид: $23x+17y-38z-104=0$.

4. Аналогично, найдём уравнение плоскости γ, перпендикулярной плоскости α и проходящей через вторую прямую: $10x+4y-25z+5=0$.

5. Уравнением общего перпендикуляра кзаданным прямым является уравнение линии пересечения плоскостей: $\begin{cases} 23x+17y-38z-104=0 \\ 10x+4y-25z+5=0 \end{cases}$.

Ответ: $\begin{cases} 23x+17y-38z-104=0 \\ 10x+4y-25z+5=0 \end{cases}$.

Задача **№12**:

Составить уравнение прямой проходящей через точку $A(2;\ 1;\ 0)$ и пересекающей прямые $\frac{x+1}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{3}$; $\frac{x-2}{3}=\frac{y+2}{2}=\frac{z}{1}$.

Решение:

Первая прямая проходит через точку $M_1(-1;\ 1;\ 0)$ и имеет направляющий вектор $\bar{q}_1(2;\ 1;\ 3)$; вторая– проходит через точку $M_2(2; -2;\ 0)$ и имеет направляющий вектор $\bar{q}_2(3;\ 2;\ 1)$.

Покажем, что эти прямые являются скрещивающимися, для этого составим определитель, строки которого являются координатами векторов $\overline{M_1M_2}$,$\bar{q}_1$,$\bar{q}_2$: $\begin{vmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0,\quad \Rightarrow$ векторы не принадлежат одной плоскости.

Проведём плоскость α через точку A и первую прямую: $\begin{vmatrix} x+1 & y-1 & z \\ 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0.$

Пусть$M(x;\ y;\ z)$–произвольная точка плоскости α, тогда векторы $\overline{M_1M}$,$\overline{M_1A}$ и$\bar{q}_1$ компланарны. Уравнение плоскости α имеет вид: $3x - z - 3 = 0$.

Аналогично составим уравнение плоскости β, проходящей через точку A и вторую прямую: $\begin{vmatrix} x-2 & y+2 & z \\ 0 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ =0 $\Rightarrow x - 3z - 2 = 0$.

Искомая прямая есть пересечение плоскостей α и β, т.е. $\begin{cases} 3y - z - 3 = 0 \\ x - 3z - 2 = 0 \end{cases}.$

Ответ:$\begin{cases} 3y - z - 3 = 0 \\ x - 3z - 2 = 0 \end{cases}.$

Образовательным результатом после изучения данной темы является сформированность компонент, заявленных во введении, совокупности компетенций (знать, уметь, владеть) на двух уровнях:

пороговый и продвинутый. Пороговый уровень соответствует оценке «удовлетворительно», продвинутый уровень соответствует оценкам «хорошо» или «отлично» в зависимости от результатов защиты кейс-заданий.

Для самостоятельной диагностики данных компонент вам предлагаются следующие задания.

Вопросы для самопроверки (знать).

Пороговый уровень:

1. Запишите различные виды уравнений плоскости в пространстве и поясните смысл параметров, входящих в уравнения.
2. Как определяется взаимное расположение плоскостей? Запишите условия параллельности и перпендикулярности плоскостей.
3. Как вычисляется расстояние от точки до плоскости?
4. Запишите различные виды уравнений прямой в пространстве и поясните смысл параметров, входящих в уравнения.
5. Как определить взаимное расположение прямых в пространстве?
6. Как вычисляется расстояние от точки до прямой в пространстве?
7. Как определить взаимное расположение прямой и плоскости?
8. Как находится точка пересечения прямой и плоскости?

Повышенный уровень:

Дайте развернутые ответы на следующие вопросы (доказательства свойствили теорем, встречающихся в данном вопросе, являются обязательными):

1. Расстояние между прямыми в пространстве.
2. Нахождение общего перпендикуляра к двум скрещивающимся прямым.
3. Взаимное расположение прямой и плоскости.
4. Взаимное расположение трёх плоскостей.
5. Связка плоскостей.
6. Пучок плоскостей.

Решение типовых задач (уметь).

Лабораторная работа №3.

Вариант 1.

1.Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(1;\ 4; -5)$ и $B(4;\ 2; -3)$ и перпендикулярной плоскости $3x+5y-6z-8=0$.

2.Дана пирамида $ABCD$: $A(-1;\ 2;\ 1)$, $B(2;\ 0;\ 3)$, $C(-2;\ 3;\ 1)$, $D(-3;\ 1;\ 2)$. Найти угол между гранями ABCиABD.

3.Дан тетраэдр $ABCD$ с вершинами $A(1; -2;\ 2)$, $B(\ 2; -3; -6)$, $C(5;\ 1;\ 4)$, $D(0; -4;\ 4)$. Написать уравнение плоскостиABC и найти уравнение высоты, проведенной из вершины D.

4.Составить каноническое уравнение прямой, которая является линией пересечения двух плоскостей: $\begin{cases} x-2y+3z-4=0 \\ 3x+2y-5z-4=0 \end{cases}$.

5. Найти проекцию точки $P(2;\ 3;\ 1)$на прямую$\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z}{3}$.

6.Вычислить кратчайшее расстояние между двумя прямыми:
$\frac{x+7}{3}=\frac{y+4}{4}=\frac{z+3}{-2}$ и$\frac{x-21}{6}=\frac{y+5}{-4}=\frac{z-2}{-1}$.

7.Найти угол между прямой $\begin{cases} x=2t-1 \\ y=-3t+2 \\ z=t-3 \end{cases}$ и плоскостью $3x-y+2z-1=0$.

Вариант 2.

1.Составить уравнение плоскости, параллельной оси Oy и проходящей через точки $A(0;\ 3; -2)$ и $B(5; -4; -1)$.

2.Дана пирамида $ABCD$: $A(4;\ 3;\ 3)$, $B(5;\ 2;\ 3)$, $C(3;\ 0;\ 2)$, $D(3;\ 2;\ 2)$. Найти угол между гранямиABC и ABD.

3.Даны 3 точки: $M_1(3; -1;\ 2), M_2(4; -1; -1), M_3(2;\ 0;\ 2)$.

a) Составить уравнение плоскости α, проходящей через эти точки.

b) Записать каноническое уравнение прямой, перпендикулярной плоскости α и проходящей через точку $M_0(-2; -4;\ 7)$.

c) Найти точку пересечения найденной прямой и плоскости α.

4.Составить каноническое уравнение прямой, которая является линией пересечения двух плоскостей:$\begin{cases} 5x+y+z=0 \\ 2x+3y-2z+5=0 \end{cases}$.

5. Найти проекцию точки $P(-1;\ 4;\ 1)$на прямую$\frac{x+3}{5}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-8}{-2}$.

6.Вычислить кратчайшее расстояние между двумя прямыми:$\begin{cases} x=2t-4 \\ y=-t+4 \\ z=-2t-1 \end{cases}$ и $\begin{cases} x=4t-5 \\ y=-3t+5 \\ z=-5t+5 \end{cases}$.

7.Найти угол между прямой$\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-2}{3}$и плоскостью $3x-2y-z+5=0$.

Вариант 3.

1.Составить уравнение плоскости, параллельной оси Oz и проходящей через точки $A(-1;\ 4; -7)$ и $B(2; -3;\ 6)$.

2.Дана пирамида $ABCD$: $A(1;\ 2;\ 1)$, $B(1;\ 3;\ 2)$, $C(2;\ 2;\ 2)$, $D(2;\ 0;\ 1)$. Найти угол между гранями ABC и ABD.

3.Дан тетраэдр $ABCD$ с вершинами $A(5;\ 6;\ 0)$, $B(3;\ 4; -1)$, $C(2; -4;\ 2)$, $D(11; -3; -12)$. Написать уравнение плоскости ABC и найти уравнение высоты, проведенной из вершиныD.

4.Составить каноническое уравнение прямой, которая является линией пересечения двух плоскостей: $\begin{cases} x-2y+3z+1=0 \\ 2x+y-4z-8=0 \end{cases}$.

5. Найти проекцию точки $P(2; -5;\ 1)$на прямую, проходящую через точки $M_1(2;\ 4;\ 0)$ и $M_2(0;\ 2;\ 4)$.

6.Вычислить кратчайшее расстояние между двумя прямыми:

$\frac{x+4}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-3}{-1}$ и $\begin{cases} x = 3t-4 \\ y = 2t+1 \\ z = t-2 \end{cases}$.

7.Найти угол между прямой $\begin{cases} x = t-4 \\ y = 3t-1 \\ z = 5t \end{cases}$ и плоскостью $3x+y-5z+4=0$.

Вариант 4.

1.Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(-2;\ 7;\ 3)$ и $B(1; -2;\ 8)$ и перпендикулярной плоскости$7x-3y+2z-10=0$.

2.Дана пирамида $ABCD$: $A(2;\ 0;\ 1)$, $B(1;\ 3;\ 2)$, $C(2; -2;\ 2)$, $D(1;\ 2;\ 1)$. Найти угол между гранями ABCи ABD.

3.Дан тетраэдр $ABCD$ с вершинами $A(0;\ 1;\ 1)$, $B(-2;\ 0;\ 1)$, $C(4;\ 3;\ 0)$, $D(2; -3;\ 6)$. Написать уравнение плоскостиABC и найти уравнение высоты, проведенной из вершины D.

4.Составить параметрическое уравнение прямой, которая является линией пересечения двух плоскостей:$\begin{cases} 2x-3y-z-4=0 \\ 2x-5y+2z+1=0 \end{cases}$.

5. Найти расстояние от точки$P(2; -1;\ 3)$до прямой$\begin{cases} x = 3t \\ y = 5t-7 \\ z = 2t+2 \end{cases}$.

6.Вычислить кратчайшее расстояние между двумя прямыми:

$\frac{x+4}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-3}{-1}$ и $\begin{cases} x = 3t-4 \\ y = 2t+1 \\ z = t-2 \end{cases}$.

7.Найти угол между прямой $\frac{x}{2}=\frac{y+2}{4}=\frac{z-3}{1}$и плоскостью $4x-2y+z=0$.

Вариант 5.

1.Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(-1;-3;-4)$ и $B(4;-5;\ 3)$ и перпендикулярной плоскости $3x+4y-z=-12$.

2.Дана пирамида $ABCD$: $A(1;\ 1;\ 1)$, $B(1;\ 2;\ 2)$, $C(1;-1;\ 3)$, $D(-1;\ 1;\ 0)$. Найти угол между гранями ABCи ABD.

3.Дан тетраэдр $ABCD$ с вершинами $A(2;\ 1;\ 0)$, $B(7;-1;\ 1)$, $C(0;\ 1;\ 1)$, $D(4;\ 6;\ 4)$. Написать уравнение плоскости ABC и найти уравнение высоты, проведенной из вершины D.

4.Составить параметрическое уравнение прямой, которая является линией пересечения двух плоскостей: $\begin{cases} x-2y-z-6=0 \\ 2x-y+z+1=0 \end{cases}$.

5. Найти расстояние от точки$P(2;\ 3;-1)$до прямой$\begin{cases} x=t+1 \\ y=t+2 \\ z=4t+13 \end{cases}$.

6.Вычислить кратчайшее расстояние между двумя прямыми:

$\frac{x+3}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-2}{4}$ и$\begin{cases} x=t-3 \\ y=2t-1 \\ z=-t+2 \end{cases}$.

7.Найти угол между прямой$\begin{cases} x=t-1 \\ y=2t+4 \\ z=-3t+1 \end{cases}$ и плоскостью $2x+3y+z-7=0$.

Вариант 6.

1.Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $A(-4;\ 8;\ 6)$, параллельной вектору $\alpha(2;-4;-3)$ и перпендикулярной плоскости $3x-7y-5z-8=0$.

2.Дана пирамида $ABCD$: $A(0;\ 2;\ 3)$, $B(1;\ 3;-1)$, $C(1;\ 3;\ 3)$,$D(1;\ 2;\ 5)$. Найти угол между гранямиABC иABD.

3.Дан тетраэдр $ABCD$ с вершинами $A(1;\ 2;\ 0)$, $B(2;\ 2;\ 2)$, $C(3;\ 0;-2)$, $D(1;\ 4;-4)$. Написать уравнение плоскости ABC и найти уравнение высоты, проведенной из вершины D.

4.Доказать перпендикулярность прямых: $\frac{x}{1}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z}{3}$ и $\begin{cases} 3x+y-5z+1=0 \\ 2x+3y-8z+3=0 \end{cases}$.

5. Найти расстояние от точки$P(2;\ 3;-1)$допрямой $\frac{x-5}{3}=\frac{y}{2}=\frac{z+25}{-2}$.

6.Вычислить кратчайшее расстояние между двумя прямыми:

$\frac{x}{2}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-3}{4}$ и $\begin{cases} x=t+1 \\ y=2t-1 \\ z=-t+3 \end{cases}$.

7.При каком значении m прямая $\frac{x+1}{3}=\frac{y-2}{m}=\frac{z+3}{-2}$ параллельна плоскости $x-3y+6z+7=0$?

Вариант 7.

1.Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(1;-1;\ 3)$ и $B(1;\ 2;\ 4)$ и перпендикулярной плоскости $2x-3y+4z+1=0$.

2.Дана пирамида $ABCD$: $A(3;\ 2;\ 2)$, $B(3;\ 0;\ 2)$, $C(5;\ 2;\ 3)$, $D(4;\ 3;\ 3)$. Найти угол между гранямиABCи ABD.

3.Дан тетраэдр $ABCD$ с вершинами $A(0;\ 0;\ 2)$, $B(3;\ 0;\ 5)$, $C(1;\ 1;\ 0)$, $D(4;\ 1;\ 2)$. Написать уравнение высоты, проведенной из вершины D и найти ее основание.

4. Доказать параллельность прямых:$\begin{cases} x=2t+5 \\ y=-t+2 \\ z=t-7 \end{cases}$ и $\begin{cases} x+3y+z+2=0 \\ x-y-3z-2=0 \end{cases}$.

5. Найти расстояние от точки$P(1;-1;-2)$до прямой $\frac{x+3}{3}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-8}{-2}$.

6.Вычислить кратчайшее расстояние между двумя прямыми:

$\begin{cases} x=p+3 \\ y=-p+1 \\ z=2p+2 \end{cases}$ и $\begin{cases} x=-p \\ y=3p+2 \\ z=3p \end{cases}$.

7. При каких значениях A и B плоскость $Ax+By+3z-5=0$ перпендикулярна прямой$\begin{cases} x=2t+3 \\ y=-3t+5 \\ z=-2t-2 \end{cases}$.

Вариант 8.

1.Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(3;-2;\ 1)$ и $B(2;\ 1;\ 4)$параллельно оси Ox.

2.Дана пирамида $ABCD$: $A(2;\ 0;\ 3)$, $B(-1;\ 2;\ 1)$, $C(2;\ 3;\ 1)$, $D(2;\ 4;-1)$. Найти угол между гранямиABC и ABD.

3.Дан тетраэдр $ABCD$ с вершинами $A(2;\ 5;\ 1)$, $B(1;\ 0;\ 1)$, $C(0;\ 3;\ 5)$, $D(5;\ 1;\ 1)$. Написать уравнение плоскостиABC и найти уравнение высоты, проведенной из вершины D.

4. Найти каноническое уравнение прямой$\begin{cases} x-y+2z-3=0 \\ 2x+y-z+6=0 \end{cases}$.

5. Найти проекцию прямой $\frac{x}{4}=\frac{y-4}{3}=\frac{z+1}{-2}$ на плоскость $x-y+3z+8=0$.

6.Вычислить кратчайшее расстояние между двумя прямыми: $\frac{x-9}{4}=\frac{y+2}{-3}=\frac{z}{1}$ и $\frac{x}{-2}=\frac{y+7}{9}=\frac{z-2}{2}$.

7. При каких значениях A и D прямая $\frac{x-3}{4}=\frac{y-1}{-4}=\frac{z+3}{1}$ лежит в плоскости $Ax+2y-4z+D=0$.

<u>Пороговый уровень:</u>

Достаточно правильно решить 70 % задач лабораторной работы №3.

<u>Повышенный уровень:</u>

Необходимо правильно решить все задачи лабораторной работы №3.

Кейс-задание предполагает готовность к педагогической деятельности, владение компьютерными технологиями и демонстрирует возможность использования идей аналитической геометрии для решения ряда стереометрических задач и заключается в следующем:

Используя компьютерные технологии проиллюстрировать решение стереометрических задач (нахождение расстояний между скрещивающимися прямыми, от точки до прямой, от точки до плоскости; вычисление угла между плоскостями, между скрещивающимися прямыми и др.).

При этом для порогового уровня достаточно иллюстрации 5 задач и в качестве примера может рассматриваться только куб.

Для продвинутого уровня необходима иллюстрация хотя бы 10 задач и фигуры в условиях задач должны быть разнообразны.

§4 Кривые 2-го порядка.

В аналитической геометрии на плоскости подробно изучаются геометрические свойства эллипса, гиперболы и параболы, представляющих собой линии пересечения кругового конуса с плоскостями, не проходящими через его вершину. Эти линии часто встречаются во многих задачах естествознания и техники. Например, движение материальной точки под воздействием центрального поля силы тяжести происходит по одной из этих линий; в инженерном деле для конструирования прожекторов, антенн и телескопов пользуются важным оптическим свойством параболы, заключающимся в том, что лучи света, исходящие из определённой точки (фокуса параболы), после отражения от параболы образуют параллельный пучок.

Определение.*Кривой второго порядка* называется геометрическое место точек координатной плоскости, координаты которых удовлетворяют алгебраическому уравнению 2-й степени с двумя неизвестными:$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$.

ОКРУЖНОСТЬ.

Определение.*Окружностью* называется геометрическое место точек плоскости равноудаленных от одной фиксированной точки плоскости, называемой *центром окружности*.

Определение. Расстояние от любой точки окружности до ее центра называется *радиусом окружности*.

Теорема. Окружность является кривой 2-го порядка и ее уравнение имеет вид:$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$,где $(x_0;\ y_0)$ – координаты центра окружности, R – радиус окружности.

Определение. Если центр окружности находится в начале координат, то такая система координат называется *канонической* для окружности, а уравнение$x^2 + y^2 = R^2$называется каноническим уравнением окружности.

ЭЛЛИПС.

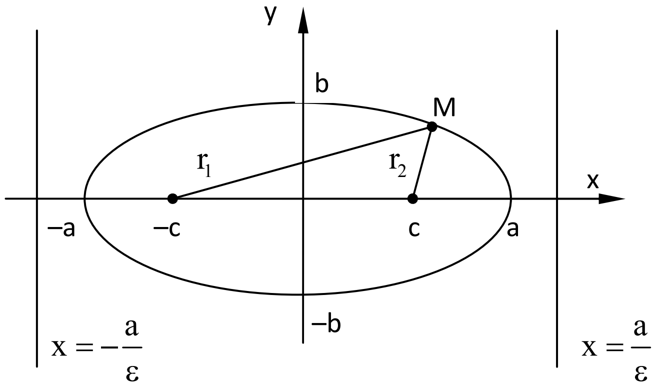
Определение.*Эллипсом* называется геометрическое место точек плоскости, для которых сумма расстояний до двух фиксированных точек плоскости, называемых *фокусами*, есть величина постоянная. Эту величину принято обозначать через $2a$.

Определение. Расстояние между фокусами эллипса называется *фокусным расстоянием*. Фокусы эллипса принято обозначать буквами F_1 и F_2, расстояние между ними – через$2c$. По определению эллипса $a > c$.

Определение. Расстояния от точки M, лежащей на эллипсе, до фокусов $r_1(M) = MF_1$ и $r_2(M) = MF_2$называются *фокальными радиусамиточки*M.

Замечание.Из определения эллипса следует, что точка M является точкой эллипса тогда и только тогда, когда сумма её фокальных радиусов $r_1(M) + r_2(M) = 2a$.

Определение. Число$2a$ называется *большой осью* эллипса, число $2b$, где $b = \sqrt{a^2 - c^2}$, называется *малой осью* эллипса. Числа a и b называются соответственно *большой и малойполуосями* эллипса.



Определение. Отношение фокусного расстояния эллипса к его большой оси называется *эксцентриситетом* эллипса, и обозначается буквой e илиε:$\varepsilon = \frac{c}{a} < 1$.

Определение. Ось, на которой лежат фокусы эллипса, называется *фокальной осью* эллипса.

В канонической для эллипса системе координат, оси координат являются главными осями эллипса, а начало координат является центром эллипса.

Определение.Точки эллипса, лежащие на его осях, называются *вершинами* эллипса.

Теорема. (Каноническое уравнение эллипса.) Эллипс является кривой 2-го порядка, и в канонической для эллипса системе координат его уравнение имеет вид:$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Теорема. (Фокальные радиусы точки эллипса.) Пусть в канонической для эллипса системе координат точка$M(x;\ y)$лежит на эллипсе. Тогда ее фокальные радиусы равны:$r_1 = a + \varepsilon x,\ \ r_2 = a - \varepsilon x$, где a– большая полуось эллипса, ε – его эксцентриситет.

Определение. В канонической для эллипса системе координат прямые$x = \pm\frac{a}{\varepsilon}$называются *директрисами* эллипса.

Теорема. (Свойство директрис эллипса.) Пусть M– произвольная точка эллипса, r_1иr_2– ее фокальные радиусы. Обозначим черезd_1 иd_2, соответственно, расстояния от точки M до левой и правой директрисы эллипса. Тогда$\frac{r_1}{d_1} = \frac{r_2}{d_2} = \varepsilon$.

Теорема. (Зеркальное свойство эллипса.) Луч света, выпущенный из одного фокуса эллипса после отражения от зеркала эллипса проходитчерез второй его фокус.

Теорема. В канонической для эллипса системе координат уравнение касательной к эллипсу в точке $(x_0;\ y_0)$ имеет вид:$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1$.

ГИПЕРБОЛА

Определение. *Гиперболой* называется геометрическое место точек плоскости, модуль разности расстояний которых до двух фиксированных точек плоскости, называемых фокусами, есть величина постоянная.

Фокусы гиперболы принято обозначать буквами F_1 и F_2. Расстояния от точки M, лежащей на гиперболе, до фокусов обозначаются $r_1(M) = MF_1$ и $r_2(M) = MF_2$, и называются её *фокальными радиусами*.

Замечание. Из определения гиперболы следует, что точка M является точкой гиперболы тогда и только тогда, когда модуль разности её фокальных радиусов $|r_1(M) - r_2(M)|$ есть величина постоянная для данной гиперболы. Эту константу принято обозначать через $2a$.

Определение. Расстояние между фокусами гиперболы называется *фокусным расстоянием*.

Фокусное расстояние для данной гиперболы есть величина постоянная и ее принято обозначать через $2c$: $2c = F_1F_2$.

Замечание. Так как сторона треугольника больше модуля разности двух его других сторон, то отсюда и из определения гиперболы следует, что $c > a$.

Определение. Число $2a$ называется *действительной осью* гиперболы, число $2b$, где $b = \sqrt{c^2 - a^2}$, называется *мнимой осью* гиперболы. Числа a и b называются соответственно *действительной и мнимой полуосями* гиперболы.

Определение. Отношение фокусного расстояния гиперболы к её действительной оси называется *эксцентриситетом* гиперболы, и обозначается буквой e или ε: $\varepsilon = \frac{c}{a} > 1$.

В канонической для гиперболы системе координат, оси координат являются главными осями гиперболы, а начало координат является центром гиперболы.

Теорема. (Каноническое уравнение гиперболы.) Гипербола является кривой 2-го порядка, и в канонической для гиперболы системе координат её уравнение имеет вид: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Определение. Точки гиперболы, лежащие на её действительной оси, называются *действительными вершинами* гиперболы. Две точки плоскости $(0; \pm b)$ (в канонической для гиперболы системе координат), лежащие на мнимой оси гиперболы называются *мнимыми вершинами* гиперболы.

Определение. Две пары прямых, параллельных осям гиперболы $x = \pm a,\ y = \pm b,$ высекают прямоугольник, который называется *основным прямоугольником* гиперболы.

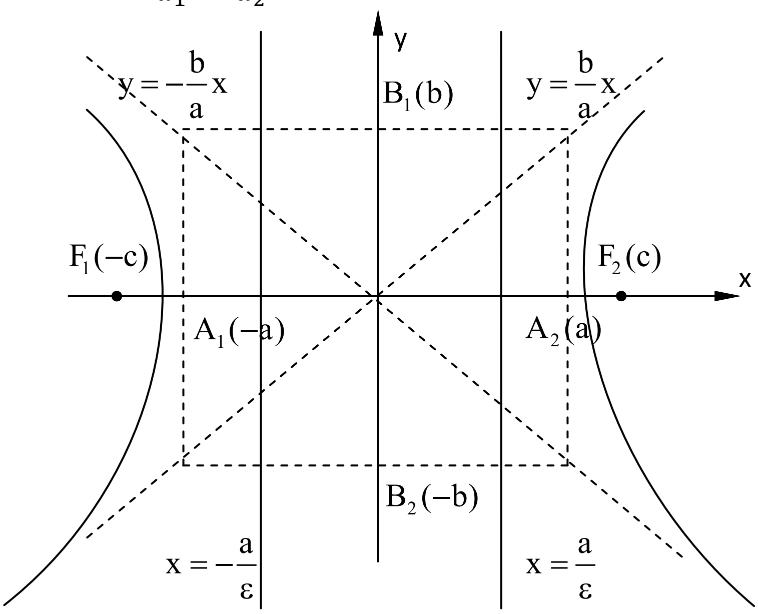
Гипербола состоит из двух кривых, называемых её *ветвями*, которые в канонической системе координат описываются уравнениями $x = \pm\frac{a}{b}\sqrt{y^2 + b^2}$.

Теорема. Прямые $y = \pm\frac{b}{a}x$являются асимптотами гиперболы.

Теорема. (Фокальные радиусы точек гиперболы.) Пусть в канонической для гиперболы системе координат точка$M(x;\ y)$лежит на гиперболе. Тогда ее фокальные радиусы равны:$r_1 = |a + \varepsilon x|$, $r_2 = |a - \varepsilon x|$, где a – действительная полуось гиперболы, ε– её эксцентриситет.

Определение. В канонической для гиперболы системе координат прямые $x = \pm\frac{a}{\varepsilon}$называются *директрисами* гиперболы.

Теорема. (Свойство директрис гиперболы.) Пусть M–произвольная точка гиперболы, r_1 и r_2– ее фокальные радиусы. Обозначим черезd_1 и d_2, соответственно, расстояния от точки M до левой и правой директрисы гиперболы. Тогда$\frac{r_1}{d_1} = \frac{r_2}{d_2} = \varepsilon$.



Теорема. (Зеркальное свойство гиперболы.) Луч света, выпущенный из одного фокуса гиперболы после отражения от зеркала гиперболы кажется наблюдателю идущим из второго её фокуса.

Теорема. В канонической для гиперболы системе координат уравнение касательной к гиперболе в точке$(x_0;\ y_0)$имеет вид:$\frac{x_0 x}{a^2} - \frac{y_0 y}{b^2} = 1$.

ПАРАБОЛА

Определение.*Параболой* называется геометрическое место точек плоскости, расстояние от которых до фиксированной прямой, называемой *директрисой*, равно расстоянию до фиксированной точки, называемой *фокусом*.

Определение. Расстояние от произвольной точкиM плоскости до фокуса параболы называется *фокальным радиусом точки*M.

Обозначения: F – фокус параболы, $r = FM$ – фокальный радиус точки

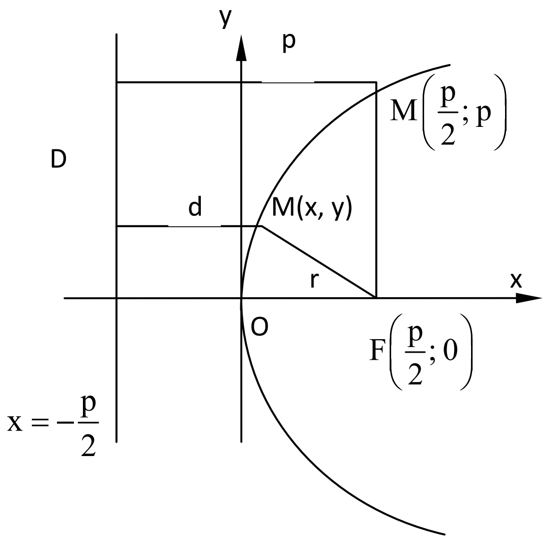
M, d – расстояние от точкиM до директрисы D.

По определению параболы, точка M является точкой параболы тогда и только тогда, когда$r = d$.

Определение. Расстояние от фокуса параболы до ее директрисы называется *фокальным параметром* параболы, и обозначается буквой p.

Замечание. Из определений следует, что в канонической для параболы системе координат фокус имеет координаты $F\left(\frac{p}{2}; 0\right)$, а директриса описывается уравнением$x = -\frac{p}{2}$.

Теорема. (Каноническое уравнение параболы.) Парабола является кривой 2-го порядка, и в канонической для неё системе координат её уравнение имеет вид:$y^2 = 2px$.



Теорема. В канонической для параболы системе координат, фокальный радиус точки $M(x;\ y)$ параболы равен$r = x + \frac{p}{2}$.

Теорема. (Зеркальное свойство параболы.) Луч света, выпущенный из фокуса параболы после отражения от зеркала параболы проходит параллельно её фокальной оси.

Теорема. В канонической для параболы системе координат уравнение касательной к параболе в точке $(x_0;\ y_0)$ имеет вид:$y_0 y = p(x + x_0)$.

Определение.Парабола имеет одну ось симметрии, называемую *осью* параболы, с которой она пересекается в единственной точке. Точка пересечения параболы с осью называется ее *вершиной*.

Замечание. Если координатная система выбрана так, что ось абсцисс совмещена с осью параболы, начало координат – с вершиной, но парабола лежит в левой полуплоскости, то ее уравнение будет иметь вид:$y^2 = -2px$.

В случае, когда начало координат находится в вершине, а с осью совмещена ось ординат, то парабола будет иметь уравнение:

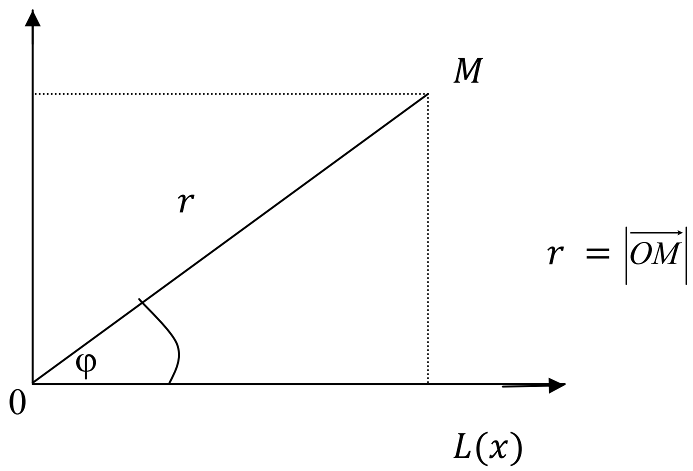
$x^2 = 2py$, если она лежит в верхней полуплоскости, и

$x^2 = -2py$ - если в нижней полуплоскости.

Полярная система координат.

Определение. Точка О называется *полюсом*, а луч L – *полярной осью.*

Задание какой-либо системы координат на плоскости состоит в том, чтобы каждой точке плоскости поставить в соответствие пару действительных чисел, определяющих положение этой точки на плоскости. В случае полярной системы координат роль этих чисел играют расстояние точки от полюса и угол между полярной осью и радиус–вектором этой точки. Этот угол φ называется *полярным углом*.



Можно установить связь между полярной системой координат и декартовой прямоугольной системой, если поместить начало декартовой прямоугольной системы в полюс, а полярную ось направить вдоль положительного направления оси Ox.

Тогда координаты произвольной точки в двух различных системах координат связываются соотношениями:

$x = r\cos\varphi;\qquad y = r\sin\varphi;\qquad x^2 + y^2 = r^2.$

Взаимосвязь полярных и декартовых координат определяется формулами: $r = \sqrt{x^2 + y^2}$; $\qquad \cos\varphi = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

В полярной системе координат уравнения эллипса, параболы или правой ветви гиперболы имеют вид: $r = \frac{p\varepsilon}{1-\varepsilon\cos\varphi}$, причем, данное уравнение задает эллипс, если $\varepsilon < 1$; параболу, если $\varepsilon = 1$; гиперболу, если $\varepsilon > 1$. Левая ветвь гиперболы задается уравнением $r = \frac{p\varepsilon}{1+\varepsilon\cos\varphi}$.

Инварианты кривых второго порядка.

Определение.*Инвариантами* уравнения линии второго порядка $a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$ называются следующие выражения: $I_1 = a_{11} + a_{22}$, $I_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}$, $I_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$.

Определение. Если инвариант $I_2 > 0$, то линия называется линией эллиптического типа, если $I_2 < 0$, то – гиперболического типа, если $I_2 = 0$, то – параболического типа.

Таблица для определения типа кривой второго порядка.

<table>
<tr><td colspan="5">$I_2 \neq 0$</td><td colspan="2">$I_2 = 0$</td></tr>
<tr><td colspan="3">$I_1 > 0. I_2 > 0$</td><td colspan="2">$I_2 < 0$</td><td>$I_3 \neq 0$</td><td>$= 0$</td></tr>
<tr><td>$I_3 < 0$</td><td>$I_3 = 0$</td><td>$I_3 > 0$</td><td>$I_3 \neq 0$</td><td>$I_3 = 0$</td><td rowspan="2">парабола</td><td rowspan="2">пара параллельных прямых</td></tr>
<tr><td>эллипс</td><td>точка</td><td>$\emptyset$</td><td>гипербола</td><td>пара пересекающихся прямых</td></tr>
</table>

Решение типовых задач.

Задача**№1.**

Составить уравнение параболы, если даны её фокус $F(7;\,2)$ и директриса$x - 5 = 0$.

Решение:

I способ

Пусть$M(x;\ y)$ – произвольная точка параболы, тогда (по определению параболы) расстояние от точки Mдо фокуса F равно её расстоянию d до директрисы.

$$\grave{I}F = \sqrt{(x-7)^2 + (y-2)^2}$$

$$d = \frac{|x-5|}{1} = |x-5|$$

$$\sqrt{(x-7)^2 + (y-2)^2} = |x-5|$$

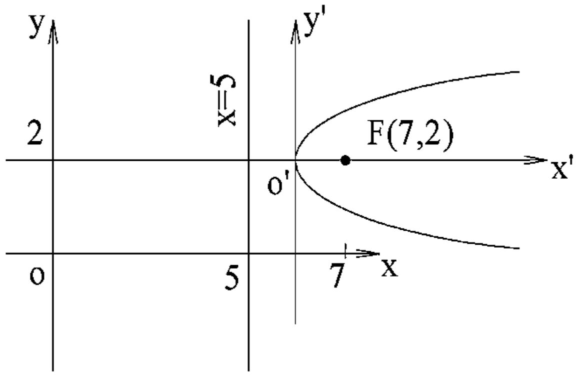
Возведём в квадрат обе части, получим искомое уравнение: $y^2 - 4x - 4y + 28 = 0$

II способ

Сделаем чертёж:

Очевидно, осью симметрии параболы является прямаяу = 2.

Вершина O'параболы находится на этой оси на одинаковом расстоянии от фокуса и директрисы, т.е. имеет координаты $O'(6;\ 2)$.



Совершим параллельный перенос системы XOY на вектор OO':

$$\begin{cases} x = x'+6 \\ y = y'+2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = x-6 \\ y' = y-2 \end{cases}$$

В полученной системе координат $X'O'Y'$ уравнение параболы имеет канонический вид:

$y'^2 = 2px$, где p – расстояние между фокусом и директрисой, $p = 2$. Тогда $y'^2 = 4x'$. Из формул параллельного переноса следует: $(y-2)^2 = 4(x-6)$. Поэтому уравнение параболы примет вид: $y^2 - 4x - 4y + 28 = 0$.

Ответ: $y^2 - 4x - 4y + 28 = 0$.

Задача**№2.**

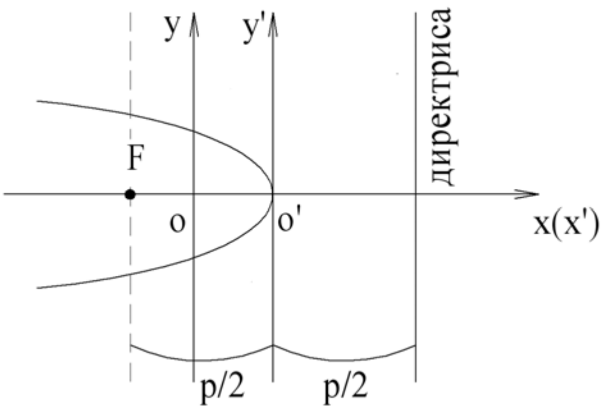
Найти фокус и директрису параболы $3y^2 + 16x - 2 = 0$.

Решение:выразим из уравнения: $y^2 = -\frac{16}{3}(x - \frac{1}{8})$.

Сделаем преобразование системы координат XOY:

$\begin{cases} x' = x - \frac{1}{8} \\ y' = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x' + \frac{1}{8} \\ y = y' \end{cases}$. Тогда $O'(\frac{1}{8};\ 0)$ - это преобразование есть параллельный перенос.

Уравнение параболы в системе $X'O'Y'$примет вид: $y'^2 = -\frac{16}{3}x' \Rightarrow p = \frac{8}{3} \Rightarrow \frac{p}{2} = \frac{4}{3}$



Очевидно, в новой системе координат $X'O'Y'$ уравнение директрисы имеет вид: $x' = \frac{4}{3}$. Фокус F имеет координаты $F(-\frac{4}{3};\ 0)$.

Перейдём к исходной системе координат: уравнение директрисы: $x-\frac{1}{8}=\frac{4}{3} \Rightarrow x=\frac{35}{24}$.

Фокус F имеет координаты: $F(-\frac{4}{3}+\frac{1}{8};\ 0) \Rightarrow F(-\frac{29}{4};\ 0)$.

Ответ: $F\ (-\frac{29}{4};\ 0), x=\frac{35}{24}$.

Задача **№3.**

Точка $A(-3;-5)$ лежит на гиперболе, фокус которой $F(-2;-3)$, а соответствующая директриса задана уравнением $x+1=0$. Составить уравнение этой гиперболы.

Решение:

Пусть $M(x;\ y)$ – произвольная точка гиперболы. По теореме об отношении расстояний (отношение расстояния r от любой точки гиперболы до фокуса к расстоянию d от этой точки до соответствующей директрисы есть величина постоянная, равная эксцентриситету гиперболы):

$\frac{r}{d}=e$, $r=\sqrt{(x+2)^2+(y+3)^2}$; $d=|x+1|$, e найдём, применив теорему для данной точки $A(-3;-5)$: $e=\frac{\sqrt{5}}{2}$; тогда $\frac{\sqrt{(x+2)^2+(y+3)^2}}{|x+1|}=\frac{\sqrt{5}}{2}$.

Сделав соответствующие преобразования, получим уравнение: $x^2-4y^2-6x-24y-47=0$.

Ответ: $x^2-4y^2-6x-24y-47=0$.

Задача **№4.**

Точка $M_1(2;-1)$ лежит на эллипсе, фокус которого $F(1;\ 0)$, а соответствующая директриса задана уравнением $2x-y-10=0$. Составить уравнение этого эллипса.

Решение:

Решение этой задачи аналогично предыдущей задачи.

Пусть $M(x;\ y)$ – произвольная точка эллипса. По теореме об отношении расстояний имеем: $\frac{\sqrt{(x-1)^2+y^2}}{\frac{|2x-y-10|}{\sqrt{5}}}=e$.

e найдём по этой же теореме, используя точку $M_1(2;-1)$: $e=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$.

Тогда уравнение эллипса примет вид: $17x^2+8xy+23y^2+30x-40y-175=0$.

Ответ: $17x^2 + 8xy + 23y^2 + 30x - 40y - 175 = 0$.

Задача**№5.**

Из фокуса параболы $y = \frac{x^2}{16}$ опущен перпендикуляр на прямую, проходящую через центр эллипса $x^2 + 2y^2 + 6x - 7 = 0$ и составляющую с осью OX угол 135°. Составить уравнение этой прямой и найти длину перпендикуляра.

Решение:

Найдём координаты центра эллипса, для этого преобразуем его уравнение:

$$x^2 + 2y^2 + 6x - 7 = 0;$$

$$(x+3)^2 + 2y^2 = 16$$

$$\frac{(x+3)^2}{16} + \frac{y^2}{8} = 1.$$

Итак, координаты O' эллипса $O'(-3;\ 0)$. Прямая проходит через точку O', угловой коэффициент прямой $k = 135° = -1$, поэтому уравнение прямой примет вид: $y = kx + b$, т.е. $x + y + 3 = 0$.

Найдём фокус параболы $x^2 = 16y$, т.е. $p = 8$, поэтому $F(0;\ 4)$.

Искомая длина перпендикуляра – это расстояние d от фокуса до прямой $x + y + 3 = 0$, поэтому $d = \frac{|0+4+3|}{\sqrt{2}} = \frac{7}{\sqrt{2}}$.

Ответ: $x + y + 3 = 0$, $d = \frac{7\sqrt{2}}{2}$.

Задача**№6.**

Даны вершина параболы $A(-2;-1)$ и уравнение её директрисы $x + 2y - 1 = 0$. Составить уравнение этой параболы.

Решение:

Найдём фокус параболы, для этого опустим из вершины $A(-2;-1)$ параболы перпендикуляр на директрису:

$\frac{x+2}{1} = \frac{y+1}{2} \Rightarrow 2x - y + 3 = 0$. Эта прямая является осью симметрии параболы.

Найдём точку K, пересечение оси симметрии параболы с её директрисой: $\begin{cases} 2x - y + 3 = 0 \\ x + 2y - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow K(-1{,}1)$.

Фокус параболы – это конец отрезка KF с известными началом $K(-1;\ 1)$ и серединой $A(-2;-1)$, поэтому $F(-3;-3)$. Зная фокус параболы и её директрису, найдём её уравнение.

Ответ: $4x^2 - 4xy + y^2 + 32x + 34y + 89 = 0$.

Задача**№7.**

Определить, при каких значениях mпрямая $y = -x + m$:

1) пересекает эллипс $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{5} = 1$;

2) касается его;

3) проходит вне этого эллипса.

Решение:

Решая систему $\begin{cases} y = -x + m \\ \frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{5} = 1 \end{cases}$, получим уравнение $5x^2 - 8mx + 4m^2 - 20 = 0$.

1) Чтобы прямая пересекала эллипс, нужно чтобы полученное квадратное уравнение относительно x имело два решения, для этого дискриминант D>0.

$D = 64m^2 - 20(4m^2 - 20) > 0$. Откуда $m \in (-5,5)$.

2) Чтобы прямая касалась эллипса, нужно чтобы $D = 0$, т.е. $m = \pm 5$.

3) Нет пересечений, если $D < 0$, т.е. $m \in (-\infty,-5) \cup (5,+\infty)$.

Ответ:1) при$|m| < 5$ пересекает эллипс;

2) при $m = \pm 5$ касается эллипса;

3) при $|m| > 5$ проходит вне эллипса.

Задача**№8.**

Провести касательные к эллипсу $\frac{x^2}{30} + \frac{y^2}{24} = 1$ параллельно прямой $4x - 2y + 23 = 0$ и вычислить расстояние между ними.

Решение:

Если $\grave{I}_0(x_0, y_0)$- точка касания, то уравнение касательной к эллипсу имеет вид: $\frac{xx_0}{30} + \frac{yy_0}{24} = 1 \Rightarrow 4xx_0 + 5yy_0 - 120 = 0$.

Угловой коэффициент k к этой касательной равен: $k = -\frac{4x_0}{5y_0}$.

Но касательная параллельна прямой$4x - 2y + 23 = 0$, поэтому $k = 2$.

Поэтому, чтобы найти точки касания, решим систему: $\begin{cases} -\frac{4x_0}{5y_0} = 2 \\ \frac{x_0^2}{20} + \frac{y_0^2}{5} = 1 \end{cases}$.

Оттуда точка$M(x_0;\ y_0)$ имеет координаты $(-5;\ 2)$ и $(5; -2)$. Поэтому, используя уравнение $4xx_0 + 5yy_0 - 120 = 0$, будем иметь уравнения касательных: $2x - y + 12 = 0$ и $2x - y - 12 = 0$.

Расстояние между касательными – это расстояние от точки $\grave{I}_0(5; -2)$ до второй касательной:

$$d = \frac{|2 \cdot 5 + 2 + 12|}{5} = \frac{24\sqrt{5}}{5}.$$

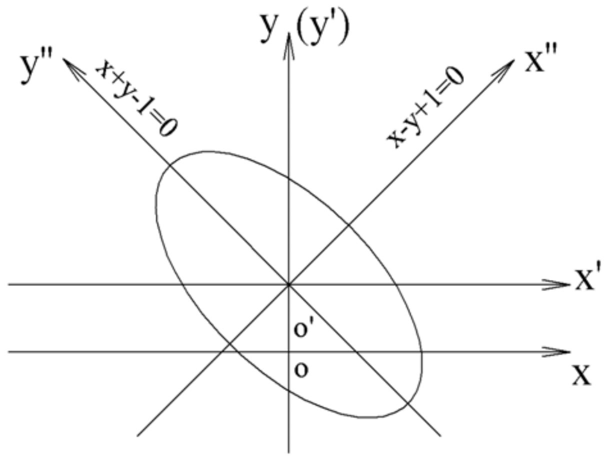
Ответ: $2x - y + 12 = 0$, $2x - y - 12 = 0$, $d = \dfrac{24\sqrt{5}}{5}$.

Задача**№9.**

Написать уравнение эллипса, для которого прямые $x - y + 1 = 0$ и $x + y - 1 = 0$ есть соответственно большая и малая оси, и длины полуосей которого $a = 2, b = 1$.

Решение:

Найдём центр O' эллипса: $\begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ x + y - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow O'(0;\ 1)$.



Обозначим через $X'O'Y'$ систему координат, началом которой является точка O' $(0;\ 1)$, а оси параллельны осям OX и OY.

Через $X''O'Y''$ обозначим систему координат с началом в точке $O'(0;\ 1)$ и осями координат, совпадающими с осями эллипса.

В этой системе координат эллипс задаётся каноническим уравнением: $\dfrac{x''^2}{1} + \dfrac{y''^2}{2} = 1$

Повернём систему $X''O'Y''$ на угол, равный -45º, тогда система совпадёт с системой $X'O'Y'$. Формулы поворота:

$$\begin{aligned} x'' &= x'\cos(-45) - y'\sin(-45) \\ y'' &= x'\sin(-45) + y'\cos(-45) \end{aligned} \quad \text{или} \quad \begin{aligned} x'' &= \frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y') \\ y'' &= \frac{\sqrt{2}}{2}(-x' + y)' \end{aligned}.$$

А уравнение эллипса примет вид: $3x'^2 + 2x'y' + 3y'^2 - 4 = 0$.

Сделаем второе преобразование: параллельно перенесём систему $X'O'Y'$ на вектор $O'O(0,-1)$.

Формулы параллельного переноса: $\begin{cases} x' = x \\ y' = y - 1 \end{cases}$.

Уравнение эллипса в системе XOY примет вид: $3x^2 + 2xy + 3y^2 - 2x - 6y - 1 = 0$.

Ответ: $3x^2 + 2xy + 3y^2 - 2x - 6y - 1 = 0$.

Задача **№10.**

Не приводя преобразование координат, установить, какой геометрический образ определяет уравнение, и найти величины его полуосей: $5x^2 + 8xy + 5y^2 - 18x - 18y + 9 = 0$.

Решение:

$I_1 = 5 + 5 = 10 > 0$.

$$I_2 = \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 9 > 0.$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} 5 & 4 & -9 \\ 4 & 5 & -9 \\ -9 & -9 & 9 \end{vmatrix} = -81 < 0.$$

Итак, уравнение определяет эллипс. Составим характеристическое уравнение:

$$\begin{array}{l} \lambda^2 - 10\lambda + 9 = 0 \\ \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 9 \end{array}.$$

Тогда преобразованное уравнение примет вид: $1x'^2 + 9y'^2 - \frac{81}{9} = 0$.

Откуда каноническое уравнение примет вид: $\frac{x'^2}{9} + \frac{y'^2}{1} = 1$.

Ответ: эллипс, $a = 3$, $b = 1$.

Задача **№11.**

Не приводя преобразования координат, установить тип кривой и найти величины её полуосей: $3x^2 + 10xy + 3y^2 - 2x - 14y - 13 = 0$.

Решение:

$I_1 = 6$

$$I_2 = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = -16$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 5 & 3 & -7 \\ -1 & -7 & -13 \end{vmatrix} = 128$$

Уравнение определяет гиперболу. Т.к. I_3>0, то действительной осью является ось $O'X'$. Составим характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 - 6\lambda - 16 = 0$$
$$\lambda_1 = 8, \lambda_2 = -2 \quad .$$

Каноническое уравнение гиперболы: $8x''^2 - 2y''^2 + \frac{128}{-16} = 0$, т.е. $\frac{x'^2}{9} - \frac{y'^2}{4} = 1$.

Ответ: гипербола, $a = 3$, $b = 2$.

Задача**№12.**

Не приводя преобразования координат, установить тип кривой и найти величины её полуосей: $x^2 - 4xy + 4y^2 + 4x - 3y - 7 = 0$**.**

Решение:

$I_1 = 5$, $I_2 = 0$, $I_3 = -\frac{25}{4}$ - парабола, $p = \frac{1}{2\sqrt{5}}$. Каноническое уравнение: $y'^2 = \frac{1}{2\sqrt{5}} x'$.

Ось параболы определяется уравнением: $a_{11}x + a_{12y} + \frac{a_{11}a_1 + a_{12}a_2}{a_{11} + a_{22}} = 0$.

В разбираемом случае имеем: $x - 2y + 1 = 0$. Вершину параболы находим как точку пересечения линии с её осью из системы уравнений:

$$\begin{cases} x^2 - 4xy + 4y^2 + 4x - 3y - 7 = 0 \\ x - 2y + 1 = 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} (x - 2y)^2 + 4x - 3y - 7 = 0 \\ x - 2y + 1 = 0 \end{cases} \text{ или}$$

$$\begin{cases} 1 + 4x - 3y - 7 = 0 \\ x - 2y = -1 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} 4x - 3y - 6 = 0 \\ x - 2y = -1 \end{cases} .$$

Вершина параболы $O'(3;\ 2)$. Единичный направляющий вектор оси параболы в сторону вогнутости при $I_1 > 0$ определяется уравнением и неравенством: $\begin{matrix} a_{11}x + a_{12}y = 0 \\ a_1 x + a_2 y < 0 \end{matrix}$.

В рассматриваемом случае имеем: $\begin{cases} x - 2y = 0 \\ 2x - \frac{3}{2}y < 0. \end{cases}$

Имеем: $e'_1 = \left\{ -\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}} \right\}$; $e'_2 = \left\{ \frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}} \right\}$.

Ответ:парабола, $e'_1 = \left\{ -\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}} \right\}$; $e'_2 = \left\{ \frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}} \right\}$.

Задача**№13.**

Не приводя преобразования координат, установить тип кривой и найти величины её полуосей: $x^2-5xy+4y^2+x+2y-2=0$.

Решение:

$I_1=5$, $I_2=-\frac{9}{4}$, $I_3=0$ - пересекающиеся прямые. Точка пересечения находиться как центр линий: $\begin{cases} x-\frac{5}{2}y+\frac{1}{2}=0 \\ -\frac{5}{2}x+4y+1=0. \end{cases}$

Точка пересечения $O'(2;\ 1)$. Направляющие векторы прямых находятся как векторы асимптотических направлений: $x^2-5xy+4y^2=0$.

Направляющие векторы прямых: $\overline{q_1}(1;\ 1)$, $\overline{q_2}(4;\ 1)$.

Уравнения прямых:

$\frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{1}$ и $\frac{x-2}{4}=\frac{y-1}{1}$ или $\begin{matrix} x-y-1=0; \\ x-4y+2=0. \end{matrix}$

Ответ:пересекающиеся прямые: $\begin{matrix} x-y-1=0; \\ x-4y+2=0. \end{matrix}$

Задача**№14.**

Не приводя преобразования координат, установить тип кривой и найти величины её полуосей: $4x^2-12xy+9y^2-2x+3y-2=0$

Решение:

$I_1=13$, $I_2=0$, $I_3=0$ - пара прямых (действительных, мнимых или совпадающих).

Чтобы решить, какие это прямые, достаточно найти точки пересечения данной линии с осью OY.

Имеем: $x^2-5xy+4y^2+x+2y-2=0$, x = 0, или $\begin{matrix} 9y^2+3y-2=0, \\ y_1=\frac{1}{3}, y_2=-\frac{2}{3} \end{matrix}$ - действительные параллельные прямые. Направляющие векторы прямых имеют асимптотические направления и находятся из уравнения: $4x^2-12xy+9y^2=0$.

Направляющие векторы прямых $\bar{q}(3;2)$. Их угловой коэффициент $k=\frac{2}{3}$. Уравнения прямых: $\begin{matrix} y=\frac{2}{3}x+\frac{1}{3} \\ y=\frac{2}{3}x-\frac{2}{3} \end{matrix}$ или $\begin{matrix} 2x-3y+1=0 \\ 2x-3y-2=0 \end{matrix}$.

Ответ:параллельные прямые: $\begin{matrix} 2x-3y+1=0 \\ 2x-3y-2=0 \end{matrix}$.

Задача**№15.**

Установить, какие линии определяются следующими уравнениями:

1) $y = -7 + \frac{2}{5}\sqrt{-x^2 + 6x + 16}$;

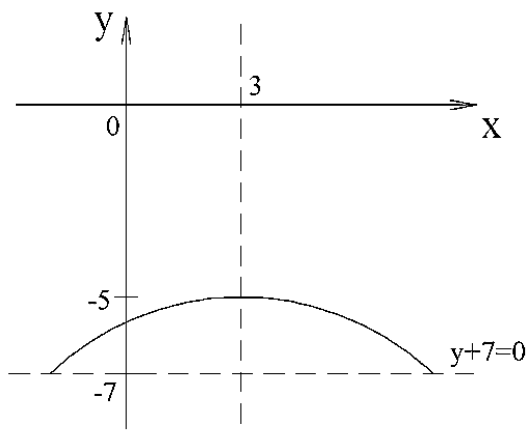
2) $x = -2\sqrt{-y^2 - 6y - 5}$.

Решение: 1) $y = -7 + \frac{2}{5}\sqrt{-x^2 + 6x + 16}$.

ОДЗ: $-x^2 + 6x + 16 \geq 0 \Rightarrow x \in [-2,8]$; $y + 7 = \frac{2}{5}\sqrt{-x^2 + 6x + 16} \Rightarrow y \geq 7$.

После преобразований уравнение эллипса принимает вид: $\frac{(x-3)^2}{25} - \frac{(y+4)^2}{4} = 1$.

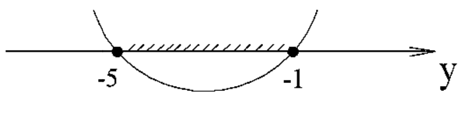
Итак, координаты центра эллипса O' полуоси и . Учитывая, что $y \geq 7$, можно сказать, что искомой линией является половина эллипса, расположенная над прямой $y + 7 = 0$.

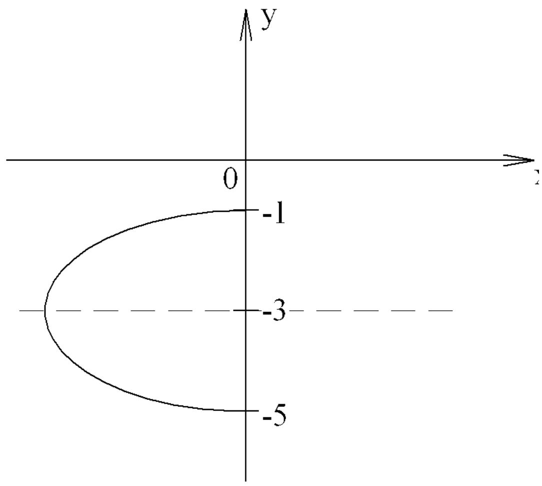


2) $x = -2\sqrt{-y^2 - 6y - 5}$.

ОДЗ:

$-y^2 - 6y - 5 \geq 0$





Т.к. $-2\sqrt{-y^2-6y-5} \le 0 \Rightarrow x \le 0$

Итак, преобразуем уравнение:

$$\frac{x^2}{16} - \frac{(y+3)^2}{4} = 1$$

Центр эллипса $O'(0;-3)$; $a = 4$, $b = 2$.

Ответ: половина эллипса $\frac{x^2}{16} - \frac{(y+3)^2}{4} = 1$, расположенная в левой полуплоскости.

Задача**№16.**

Определить, какие линии определяются следующими уравнениями:

1) $y = \frac{2}{3}\sqrt{x^2-9}$

2) $y = -3\sqrt{x^2+1}$

3) $x = -\frac{4}{3}\sqrt{y^2+9}$

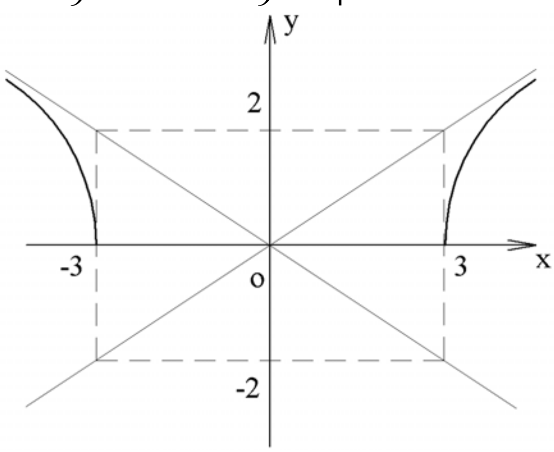
Изобразить линии на чертеже.

Решение:

1) $y = \frac{2}{3}\sqrt{x^2-9}$

ОДЗ: $x^2 - 9 \ge 0 \Rightarrow x \in (-\infty,-3] \cup [3,+\infty)$, $y \ge 0$.

$$y^2 = \frac{4}{9}(x^2-9) \Rightarrow \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$$



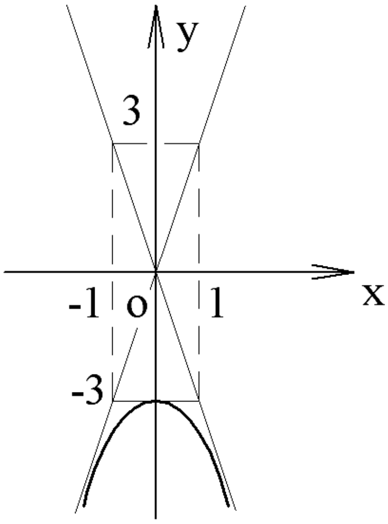
Ответ: часть гиперболы $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$, расположенная в верхней полуплоскости.

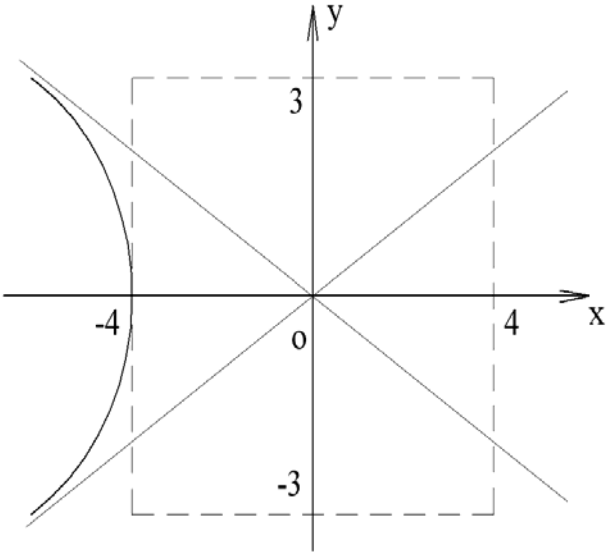
2) $y = -3\sqrt{x^2+1}$

$x \in R, y < 0$

$y^2 = 9(x^2+1) \Rightarrow \frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{1} = 1$

Ответ: ветвь гиперболы $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{1} = 1$, расположенная в нижней полуплоскости.





$3) x = -\frac{4}{3}\sqrt{y^2+9}$

$y \in R, x < 0$.

Ответ: Ветвь гиперболы $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$, расположенная в левой полуплоскости.

Задача **№17.**

Уравнение кривой в полярной системе координат имеет вид: $r = \frac{4}{3 - \cos\varphi}$. Найти уравнение кривой в декартовой прямоугольной системе координат, определит тип кривой, найти фокусы и эксцентриситет. Схематично построить кривую.

Решение.

Воспользуемся связью декартовой прямоугольной и полярной системы координат: $r = \sqrt{x^2+y^2}$; $\cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$;

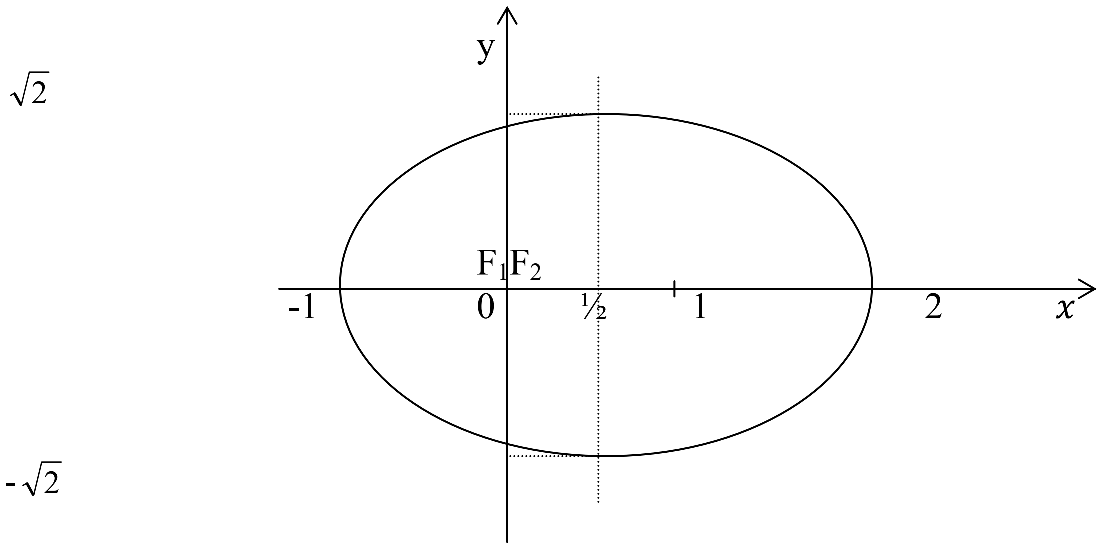
$\sqrt{x^2+y^2} = \frac{4}{3 - \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}}$; $3\sqrt{x^2+y^2} - x = 4$; $3\sqrt{x^2+y^2} = x + 4$

$9x^2 + 9y^2 = 16 + 8x + x^2$; $8x^2 - 8x + 9y^2 - 16 = 0$;

$8(x^2 - x + 1/4) - 8 \cdot 1/4 + 9y^2 - 16 = 0$; $8(x - 1/2)^2 - 2 + 9y^2 - 16 = 0$;

$$8(x-1/2)^2+9y^2=18;\ \frac{(x-1/2)^2}{9/4}+\frac{y^2}{2}=1.$$

Получили каноническое уравнение эллипса. Из уравнения видно, что центр эллипса сдвинут вдоль оси Ox на $1/2$ вправо, большая полуось а равна $3/2$, меньшая полуось b равна $\sqrt{2}$, половина расстояния между фокусами равно $c=\sqrt{a^2-b^2}=1/2$. Эксцентриситет равен $\varepsilon = c/a = 1/3$. Фокусы$F_1(0;\ 0)$ и$F_2(1;\ 0)$.



Образовательным результатом после изучения данной темы является сформированность компонент, заявленных во введении, совокупности компетенций (знать, уметь, владеть) на двух уровнях: пороговый и продвинутый. Пороговый уровень соответствует оценке «удовлетворительно», продвинутый уровень соответствует оценкам «хорошо» или «отлично» в зависимости от результатов защиты кейс-заданий.

Для самостоятельной диагностики данных компонент вам предлагаются следующие задания.

Вопросы для самопроверки (знать).

<u>Пороговый уровень:</u>

1. Сформулируйте определение кривой второго порядка.
2. Сформулируйте определение эллипса и его каноническое уравнение. Уравнение окружности.
3. Сформулируйте определение гиперболы и запишите её каноническое уравнение.
4. Сформулируйте определение параболы и запишите её каноническое уравнение.
5. Дайте определение фокуса, эксцентриситета и директрисы эллипса.
6. Дайте определение фокуса, эксцентриситета и директрисы гиперболы.

7. Дайте определение фокуса, эксцентриситета и директрисы параболы.

Повышенный уровень:

1. Преобразование прямоугольных декартовых координат на плоскости.
2. Преобразование прямоугольных декартовых координат в пространстве.
3. Выведите каноническое уравнение эллипса.
4. Выведите каноническое уравнение гиперболы.
5. Выведите каноническое уравнение параболы.
6. Теорема об отношении расстояний для эллипса и гиперболы.
7. Полярные уравнения эллипса, гиперболы и параболы.
8. Касательные к кривым второго порядка.
9. Приведение уравнения кривой второго порядка к каноническому виду при помощи параллельного переноса и поворота.
10. Инварианты уравнения линии второго порядка. Классификация линий второго порядка по их инвариантам.

Решение типовых задач (уметь).

Лабораторная работа №4.

Вариант 1

1. Для эллипса $9x^2 + 25y^2 = 450$ найдите все его параметры: большую и малую полуоси, координаты вершин и фокусов, фокусное расстояние, эксцентриситет, уравнения директрис и расстояние между директрисами, фокальный параметр. Убедитесь, что точка $M(5; -3)$ лежит на эллипсе и найдите её фокальные радиусы. Найдите уравнение касательной к данному эллипсу, проходящей через точку M. Постройте чертеж и отметьте на нем все найденные параметры.

2. Дано уравнение $16x^2 - 9y^2 - 64x - 54y - 161 = 0$. Убедитесь, что оно определяет гиперболу, и найдите координаты её центра и уравнения главных осей. Найдите полуоси, эксцентриситет, уравнения асимптот и уравнения директрис. Выполните чертеж.

3. Найдите уравнение параболы, если известно, что:

а) ее вершина в начале координат, парабола симметрична относительно оси ординат и её ветви направлены вниз, фокальный параметр $p = 5$;

б) ее вершина в начале координат, парабола симметрична относительно оси ординат и её ветви направлены вниз, парабола проходит через точку с координатами $M(1; -2)$;

в) её вершина находится в начале координат, осью её симметрии является ось абсцисс и парабола проходит через точку $M(2; 1)$;

г) координаты её фокуса $F(-2; 1)$ и уравнение директрисы $y = 2$.

4. Составить уравнения касательных к гиперболе $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$,

проходящей через точку$M(1;\ 4)$.

5. Установите, какая линия определяетсяуравнением $y = 1 - \frac{4}{3}\sqrt{-6x - x^2}$. Найдите ее центр и полуоси.

6. Линия задана уравнением $r = r(\varphi)$ в полярной системе координат. Требуется: 1) построить линию по точкам, начиная от$\varphi = 0$ до $\varphi = 2\pi$; 2) найти уравнение данной линии в декартовой прямоугольной системе координат, у которой начало совпадает с полюсом, а положительная полуось абсцисс – с полярной осью; 3) назвать линию, найти координаты фокусов и эксцентриситет:$r = \frac{9}{5-4\cos\varphi}$.

7. Из левого фокуса эллипса$\frac{x^2}{45} + \frac{y^2}{20} = 1$ под тупым углом α к оси OX направлен луч света. Известно, что $tg\ \alpha = -2$. Дойдя до эллипса, луч от него отразился. Составить уравнение прямой, на которой лежит отраженный луч.

Вариант 2

1. Для эллипса $x^2 + 3y^2 = 36$найдите все его параметры: большую и малую полуоси, координаты вершин и фокусов, фокусное расстояние, эксцентриситет, уравнения директрис и расстояние между директрисами, фокальный параметр. Убедитесь, что точка$M(3;\ -3)$лежит на эллипсе и найдите её фокальные радиусы. Найдите уравнение касательной к данному эллипсу, проходящей через точку M. Постройте чертеж и отметьте на нем все найденные параметры.

2. Дано уравнение $9x^2 - 16y^2 + 90x + 32y - 367 = 0$. Убедитесь, что оно определяет гиперболу, и найдите координаты её центра и уравнения главных осей. Найдите полуоси, эксцентриситет, уравнения асимптот и уравнения директрис. Выполните чертеж.

3. Найдите уравнение параболы, если известно, что:

а) ее вершина в начале координат, парабола симметрична относительно оси ординат и её ветви направлены вверх, фокальныйпараметр$p = 5$;

б) ее вершина в начале координат, парабола симметрична относительно оси ординат и её ветви направлены вверх, парабола проходит через точку с координатами $M(1;\ 2)$;

в) её вершина находится в начале координат, осью её симметрии является ось абсцисс и парабола проходит через точку$M(-2;\ 1)$;

г) координаты её фокуса$F(2;\ 1)$ и уравнение директрисы$y = 2$.

4. Написать уравнение прямой, имеющей угловой коэффициент $k = \frac{1}{2}$и касающейся параболы$y^2 = 5x$.

5. Установите, какая линияопределяется уравнением $x = -2\sqrt{-5 - 6y - y^2}$. Найдите ее центр и полуоси.

6. Линия задана уравнением $r = r(\varphi)$ в полярной системе

координат. Требуется: 1) построить линию по точкам, начиная от $\varphi = 0$ до $\varphi = 2\pi$; 2) найти уравнение данной линии в декартовой прямоугольной системе координат, у которой начало совпадает с полюсом, а положительная полуось абсцисс – с полярной осью; 3) назвать линию, найти координаты фокусов и эксцентриситет: $r = \frac{9}{4-5\cos\varphi}$.

7. Из фокуса параболы $y^2 = 12x$ под острым углом α к оси OX направлен луч света. Известно, что $tg\,\alpha = \frac{3}{4}$. Дойдя до параболы, луч от него отразился. Составить уравнение прямой, на которой лежит отраженный луч.

Вариант 3

1. Для эллипса $9x^2 + 25y^2 = 1800$ найдите все его параметры: большую и малую полуоси, координаты вершин и фокусов, фокусное расстояние, эксцентриситет, уравнения директрис и расстояние между директрисами, фокальный параметр. Убедитесь, что точка $M(10;\,-6)$ лежит на эллипсе и найдите её фокальные радиусы. Найдите уравнение касательной к данному эллипсу, проходящей через точку M. Постройте чертеж и отметьте на нем все найденные параметры.

2. Дано уравнение $x^2 + 8x - 9y - 29 = 0$. Убедитесь, что оно определяет параболу, и найдите ее фокальный параметр, координаты вершины и фокуса, уравнение директрисы. Выполните чертеж.

3. Найдите каноническое уравнение гиперболы, если даны:

а) её полуоси равны 5 и 4;

б) её мнимая ось $2b = 8$, а расстояние между фокусами $2c = 10$;

в) $2c = 6$ и эксцентриситет $\varepsilon = 1{,}5$;

г) уравнения асимптот $y = \pm\frac{4}{3}x$ и фокусное расстояние $2c = 20$;

д) расстояние между директрисами $2d = 6{,}4$ и $2b = 6$;

е) точки $M(6;-1)$ и $N(-8;2\sqrt{2})$ гиперболы;

ж) точка $M(4{,}5;\,-1)$ гиперболы и уравнения асимптот $y = \pm\frac{2}{3}x$;

з) уравнения асимптот $y = \pm\frac{3}{4}x$ и уравнения директрис $x = \pm\frac{16}{5}$.

4. Составить уравнения касательных к эллипсу $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$, проходящей через точку $M(10;\,4)$.

5. Установите, какая линия определяется уравнением $x = -5 + \frac{2}{3}\sqrt{8 + 2y - y^2}$. Найдите ее центр и полуоси.

6. Линия задана уравнением $r = r(\varphi)$ в полярной системе координат. Требуется: 1) построить линию по точкам, начиная от $\varphi = 0$ до $\varphi = 2\pi$; 2) найти уравнение данной линии в декартовой прямоугольной системе координат, у которой начало совпадает с полюсом, а положительная полуось абсцисс – с полярной осью; 3) назвать линию, найти координаты фокусов и эксцентриситет: $r = \frac{2}{1-\cos\varphi}$.

7. Из правого фокуса гиперболы $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{4}=1$под острым углом $\alpha\left(\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}\right)$к оси OX направлен луч света. Известно, что $tg\,\alpha=2$. Дойдя до гиперболы, луч от него отразился. Составить уравнение прямой, на которой лежит отраженный луч.

Вариант 4

1. Для гиперболы $16x^2-9y^2=432$найдите все ее параметры: действительную и мнимую полуоси, координаты вершин и фокусов, фокусное расстояние, эксцентриситет, уравнения асимптот, уравнения директрис и расстояние между директрисами, фокальный параметр. Убедитесь, что точка $M(6;-4)$лежит на гиперболе и найдите её фокальные радиусы. Найдите уравнение касательной к данной гиперболе, проходящей через точку M. Постройте чертеж и отметьте на нем все найденные параметры.
2. Дано уравнение $x=2y^2-12y+14$. Убедитесь, что оно определяет параболу, и найдите ее фокальный параметр, координаты вершины и фокуса, уравнение директрисы. Выполните чертеж.
3. Найдите каноническое уравнение эллипса, если:

а) его малая ось$2b=24$, фокусное расстояние $2c=10$;

б) большая ось $2a=20$, эксцентриситет $\varepsilon=0{,}6$;

в) его малая ось $2b=6$, $2d=13$;

г) $M(2;\,-2)$ – точка эллипса и его большая полуось $a=4$;

д) $M(2;-\frac{5}{3})$ – точка эллипса и его эксцентриситет $\varepsilon=\frac{2}{3}$.

4. Найти углы между касательными, проведенными из точки $A(-2;\,3)$ к эллипсу$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$.
5. Установите, какая линия определяется уравнением $y=7-\frac{3}{2}\sqrt{x^2-6x+13}$. Найдите ее центр и полуоси.
6. Линия задана уравнением $r=r(\varphi)$ в полярной системе координат. Требуется: 1) построить линию по точкам, начиная от $\varphi=0$ до $\varphi=2\pi$; 2) найти уравнение данной линии в декартовой прямоугольной системе координат, у которой начало совпадает с полюсом, а положительная полуось абсцисс – с полярной осью; 3) назвать линию, найти координаты фокусов и эксцентриситет: $r=\frac{16}{5-3\cos\varphi}$.
7. Из фокуса параболы$y^2=4x$ направлен луч света, который отражается от нее в точке $A(9;\,6)$.Составить уравнение прямой, на которой лежит отраженный луч.

Вариант 5

1. Для гиперболы $20x^2-16y^2=320$ найдите все ее параметры: действительную и мнимую полуоси, координаты вершин и фокусов,

фокусное расстояние, эксцентриситет, уравнения асимптот, уравнения директрис и расстояние между директрисами, фокальный параметр. Убедитесь, что точка$M(6;\ 5)$лежит на гиперболе и найдите её фокальные радиусы. Найдите уравнение касательной к данной гиперболе, проходящей через точку M. Постройте чертеж и отметьте на нем все найденные параметры.

2. Дано уравнение$5x^2+9y^2-30x+18y+9=0$. Убедитесь, что оно определяет эллипс, и найдите координаты её центра и уравнения главных осей. Найдите полуоси, эксцентриситет, уравнения асимптот и уравнения директрис. Выполните чертеж.

3. Найдите уравнение параболы, если известно, что:

а) ее вершина в начале координат, она симметрична относительно оси абсцисс и её ветви направлены вправо, фокальный параметр $p=3$;

б) ее вершина в начале координат, она симметрична относительно оси абсцисс и её ветви направлены вправо, парабола проходит через точку с координатами$M(1;\ 2)$;

в) координаты её фокуса$F(4;\ 3)$ и уравнение её директрисы$y=-1$;

г) координаты её фокуса$F(7;\ 2)$ и уравнение её директрисы$x=5$.

4. Из точки $A(\frac{10}{3};\ \frac{5}{3})$проведены касательные к эллипсу $x^2+4y^2=20$. Найдите уравнения этих касательных.

5. Установите, какая линия определяется уравнением $x=9-2\sqrt{y^2+4y+8}$. Найдите ее центр и полуоси.

6. Линия задана уравнением $r=r(\varphi)$ в полярной системе координат. Требуется: 1) построить линию по точкам, начиная от $\varphi=0$ до $\varphi=2\pi$; 2) найти уравнение данной линии в декартовой прямоугольной системе координат, у которой начало совпадает с полюсом, а положительная полуось абсцисс – с полярной осью; 3) назвать линию, найти координаты фокусов и эксцентриситет: $r=\frac{18}{4-5\cos\varphi}$.

7. Из левого фокуса эллипса $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$направлен луч света, который отражается от него в точке $A(2;-3)$. Составить уравнение прямой, на которой лежит отраженный луч.

Вариант 6

1. Для гиперболы $4x^2-25y^2=300$найдите все ее параметры: действительную и мнимую полуоси, координаты вершин и фокусов, фокусное расстояние, эксцентриситет, уравнения асимптот, уравнения директрис и расстояние между директрисами, фокальный параметр. Убедитесь, что точка $M(10;\ -2)$ лежит на гиперболе и найдите её фокальные радиусы. Найдите уравнение касательной к данной гиперболе, проходящей через точку M. Постройте чертеж и отметьте на нем все найденные параметры.

2. Дано уравнение $y=4x^2-8x+7$. Убедитесь, что оно

определяет параболу, и найдите ее фокальный параметр, координаты вершины и фокуса, уравнение директрисы. Выполните чертеж.

3. Найдите каноническое уравнение эллипса, если:

а) его полуоси равны5 и 2;

б) его большая ось $2a = 10$, а расстояние между фокусами$2c = 8$;

в) $2c = 6$ и эксцентриситет$\varepsilon = \frac{3}{5}$;

г) расстояние между его директрисами$2d = 5$ и $2c = 4$;

д) его большая ось$2a = 8, d = 16$;

е)$M(-2\sqrt{5};\ 2)$ – точка эллипса и его малая полуось$b = 3$;

ж) $M_1(4; -\sqrt{3})$, $M_2(2\sqrt{2};\ 3)$– точки эллипса.

4. Определите, при каких значениях mпрямая$y = \frac{5}{2}x + m$ пересекает гиперболу $36x^2 - 9y^2 = 144$, касается её, проходит вне её.

5. Установите, какая линия определяется уравнением $x = 5 - \frac{3}{4}\sqrt{y^2 + 4y - 12}$. Найдите ее центр и полуоси.

6. Линия задана уравнением $r = r(\varphi)$ в полярной системе координат. Требуется: 1) построить линию по точкам, начиная от $\varphi = 0$ до $\varphi = 2\pi$; 2) найти уравнение данной линии в декартовой прямоугольной системе координат, у которой начало совпадает с полюсом, а положительная полуось абсцисс – с полярной осью; 3) назвать линию, найти координаты фокусов и эксцентриситет:$r = \frac{3}{1-\cos\varphi}$.

7. Из левого фокуса гиперболы$\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 1$ направлен луч света, который отражается от нее в точке $A(5;\ 4)$. Составить уравнение прямой, на которой лежит отраженный луч.

Вариант 7

1. Для параболы $y^2 = 16x$ найдите фокальный параметр, координаты вершины и фокуса, и уравнение директрисы. Убедитесь, что точка $M(1; -4)$лежит на параболе и найдите её фокальный радиус. Найдите уравнение касательной к данной параболе, проходящей через точку M. Постройте чертеж и отметьте на нем все найденные параметры.

2. Дано уравнение$x^2 + y^2 + 4x - 8y + 2 = 0$. Убедитесь, что оно определяет окружность, найдите ее центр и уравнения осей, найдите уравнения касательных к ней, проходящих через начало координат. Сделайте чертеж.

3. Найдите каноническое уравнение гиперболы, если даны:

а) её действительная ось$2a = 16$ и эксцентриситет$\varepsilon = 1{,}25$;

б) расстояние между директрисами равно $22\frac{2}{13}$и фокусное расстояние$2c = 26$;

в) уравнения асимптот$y = \pm\frac{3}{4}x$ и расстояние между директрисами$2d = 12\frac{4}{5}$;

г) точка $M(-5;\ 3)$ гиперболы и эксцентриситет $\varepsilon = \sqrt{2}$;

д) точка $M(-3;\ 2{,}5)$ гиперболы и уравнения директрис $x = \pm\frac{4}{3}$.

4. Провести касательную к параболе $y^2 = 12x$ параллельно прямой $3x - 2y + 30 = 0$ и вычислить расстояние между этой касательной и данной прямой.

5. Установите, какая линия определяется уравнением $x = -4 + 3\sqrt{y+5}$. Сделайте чертеж.

6. Линия задана уравнением $r = r(\varphi)$ в полярной системе координат. Требуется: 1) построить линию по точкам, начиная от $\varphi = 0$ до $\varphi = 2\pi$; 2) найти уравнение данной линии в декартовой прямоугольной системе координат, у которой начало совпадает с полюсом, а положительная полуось абсцисс – с полярной осью; 3) назвать линию, найти координаты фокусов и эксцентриситет: $r = \frac{5}{3-2\cos\varphi}$.

7. Из правого фокуса гиперболы $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ направлен луч света, который отражается от нее в точке $A\left(-5;\ \frac{9}{4}\right)$. Составить уравнение прямой, на которой лежит отраженный луч.

Вариант 8

1. Для параболы $y^2 = -8x$ найдите фокальный параметр, координаты вершины и фокуса, и уравнение директрисы. Убедитесь, что точка $M(-2;\ 4)$ лежит на параболе и найдите её фокальный радиус. Найдите уравнение касательной к данной параболе, проходящей через точку M. Постройте чертеж и отметьте на нем все найденные параметры.

2. Дано уравнение $16x^2 + 25y^2 + 32x - 100y - 284 = 0$. Убедитесь, что оно определяет эллипс, и найдите координаты её центра и уравнения главных осей. Найдите полуоси, эксцентриситет, уравнения асимптот и уравнения директрис. Выполните чертеж.

3. Составьте уравнение гиперболы, фокусы которой расположены на оси ординат симметрично относительно начала координат, если даны:

а) $a = 18,\ b = 6$ (буквой a, по-прежнему, обозначаем действительную полуось, b – мнимую полуось);

б) фокусное расстояние $2c = 10$ и эксцентриситет $\varepsilon = \frac{5}{3}$;

в) уравнения асимптот $y = \pm\frac{12}{5}x$ и расстояние между действительными вершинами равно 48;

г) расстояние между директрисами равно $\frac{50}{7}$ и эксцентриситет $\varepsilon = \frac{7}{5}$;

д) уравнения асимптот $y = \pm\frac{4}{3}x$ и расстояние между директрисами равно 6,4.

4. Составьте уравнение касательных к гиперболе $64x^2 - 16y^2 = 1024$, параллельных прямой $10x - 3y + 9 = 0$.

5. Установите, какая линия определяется уравнением

$x = 2 - \sqrt{-2y + 6}$. Сделайте чертеж.

6. Линия задана уравнением $r = r(\varphi)$ в полярной системе координат. Требуется: 1) построить линию по точкам, начиная от $\varphi = 0$ до $\varphi = 2\pi$; 2) найти уравнение данной линии в декартовой прямоугольной системе координат, у которой начало совпадает с полюсом, а положительная полуось абсцисс – с полярной осью; 3) назвать линию, найти координаты фокусов и эксцентриситет: $r = \frac{6}{2 - \cos\varphi}$.

7. Из правого фокуса эллипса $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{12} = 1$ направлен луч света, который отражается от нее в точке A. Найдите координаты точки A, если прямая, на которой лежит отраженный луч, параллельна прямой $5x + 12y + 25 = 0$.

<u>Пороговый уровень:</u>

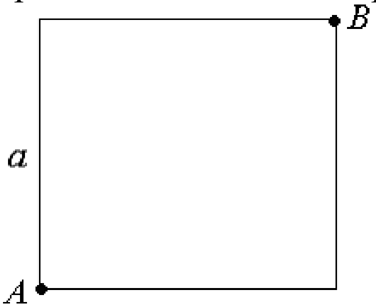
Достаточно правильно решить 70 % задач лабораторной работы №4.

<u>Повышенный уровень:</u>

Необходимо правильно решить все задачи лабораторной работы №4.

Кейс-задание для порогового уровня предполагает решение задач практического содержания. Например:

В городском парке, имеющем форму квадрата со стороной а, установлены две осветительные установки A и B, расположенные в противолежащих вершинах этого квадрата (см. рисунок).



Устройство этих установок таково, что наилучшая освещенность на поверхности парка достигается в таких точках M, для которых выполняется условие: $|MA|^2 = 3 \cdot |MB|^2$. Через все такие точки проложили пешеходную дорожку.

В местах пересечения этой дорожки со сторонами квадрата расположены входы в парк. Пусть сторона квадрата равна $a = 36(\sqrt{5} + 1)$ м. Тогда расстояние от установки B до ближайшего такого входа равно ___м.

Кейс-задание для продвинутого уровня предполагает самостоятельное составление хотя бы одной практической задачи, в решении которой используются свойства кривых второго порядка.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Александров П. С. Лекции по аналитической геометрии – 2-е изд., стер. – СПб.: Лань, 2008. – 911 с.

1. Банникова Т.М. Визуализация геометрических объектов в пакете Maple // Актуальные проблемы гуманитарных и естественных наук, 2013. - № 4. - С. 22-23.

Банникова Т.М., Баранова Н.А., Леонов Н.И. Профессиональная математическая подготовка бакалавра: компетентностный подход – Ижевск: Удмурт.ун-т, 2012. – 150 с.

2. Банникова Т.М., Шарычева Д.А., Баранова Н.А. Аналитическая геометрия: учеб.-метод. комплекс для напр. 511200 "Математика. Прикладная математика". УдГУ, Мат. фак. Каф.алгебры и топологии. – Ижевск, 2008. – 33 с.

3. Баранова Н.А. К вопросу об использовании информационных технологий в математическом образовании//Актуальные проблемы развития высшей школы. Проблемы качества подготовки специалистов: материалы междунар. науч.-методолог. конф. – СПб., 2009. – С.149-152

4. Баранова Н.А. Об информатизации курсов математического содержания // Информатика и образование, 2009. – №7. –С.114-116.

5. Баранова Н.А., Банникова Т.М. Визуализация математических понятий // Десятая российская университетско-академическая научно-практическая конференция: материалы конф. – Ижевск: Удмурт.ун-т, 2010. - С. 118-120.

2. Бортаковский А.С., Пантелеев А.В. Аналитическая геометрия в примерах и задачах: учеб.пособие для втузов рек. УМО вузов РФ. – М.: Высш. шк., 2005. – 495 с.

3. Головизин В. В. Основные задачи курса «Алгебра и геометрия». Часть 2: Основные задачи аналитической геометрии на прямую и плоскость: учеб.-метод. пособие. – Ижевск, 2009. – 158 с.

4. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Аналитическая геометрия: учеб.для вузов по спец. "Приклад. математика" рек. МО РФ. – 7-е изд., стер. – М.: Физматлит, 2006. – 223 с.

6. Клетеник Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии. – Санкт-Петербург: Профессия, 2009. – 200 с.

5. Оболенский А.Ю., Оболенский И.А. Лекции по аналитической геометрии. – Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004. – 216 с. www.alleng.ru/edu/math9.htm

6. Умнов А.Е. Аналитическая геометрия и линейная алгебра. 3-е изд., испр. и доп. – М.: МФТИ, 2011. — 543 с. www.alleng.ru/edu/math9.htm

7. Цубербиллер О.Н. Задачи и упражнения по аналитической геометрии. 32-е издание. – СПб.:Лань, 2005. – 336 с.

Учебное издание

Банникова Татьяна Михайловна
Баранова Наталья Анатольевна
Шарычева Дина Андреевна

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ
ПРАКТИКУМ ПО РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ

Авторская редакция

Подписано в печать 00.00.00. Формат 60x84 $^{1}/_{16}$.
Усл. печ. л. 0,00. Уч.-изд. л. 0,00.
Тираж 150 экз. Заказ № 0000.

Издательство «Удмуртский университет»
426034, Ижевск, Университетская, д. 1, корп. 4, каб. 207
Тел./факс: + 7 (3412) 500-295 E-mail: editorial@udsu.ru