Нелинейная динамика. 2014. Т. 10. № 1. С. 101–112.
Полнотекстовая версия в свободном доступе
http://nd.ics.org.ru

УДК: 517.938.5
MSC 2010: 37J35

Фокусные особенности в классической механике

Г. Е. Смирнов

Изучаются фокусные особенности интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы. Найдено топологическое препятствие к существованию фокусной особенности заданной сложности. Показано, что в типичной механической системе могут возникать лишь простые фокусные особенности. Приведены модельные примеры механических систем, допускающих сложную фокусную особенность.

Ключевые слова: интегрируемые гамильтоновы системы, фокусные особенности, препятствия к существованию особенностей

Введение

Интегрируемая гамильтонова система с двумя степенями свободы представляет собой симплектическое 4-многообразие (M^4, ω) (фазовое пространство) с двумя почти всюду независимыми функциями (первыми интегралами) $H, F\colon M^4 \to \mathbb{R}$, находящимися в инволюции $\{H, f\} = 0$ относительно естественной скобки Пуассона, и векторным полем $\operatorname{sgrad} H$, задающим динамику на M^4. Уровень функции $\{H = h\}$ называется *уровнем энергии*. Будем предполагать, что все уровни энергии компактны. Отображение $\mathcal{F}\colon M^4 \to \mathbb{R}^2(h, f)$, $\mathcal{F}(x) = \big(H(x), F(x)\big)$ называется *отображением момента*. Отображение момента определяет слоение на многообразии M^4, называемое *слоением Лиувилля*, слоями которого являются связные компоненты прообразов $\mathcal{F}^{-1}(h, f)$. Точка $x \in M^4$ называется *особой точкой ранга* i $(i = 0, 1)$ гамильтоновой системы, если $\operatorname{rank} \mathrm{d}\,\mathcal{F}(x) = i$, а содержащий эту точку слой называется *особым слоем*.

Если во всех точках слоя ранг отображения момента равен 2, то слой называется *регулярным*, и, согласно теореме Лиувилля, такой слой диффеоморфен двумерному тору $\mathbb{T}^2$.

Получено 8 декабря 2013 года
После доработки 25 февраля 2014 года

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 14-01-00119)

Смирнов Глеб Евгеньевич
glebevgen@yandex.ru
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
механико-математический факультет
119991, Россия, г. Москва, Ленинские горы, д. 1

Поэтому с топологической точки зрения интерес представляют именно особые слои отображения $\mathcal{F}$. Изложение основных понятий гамильтоновой механики можно найти в [1]. Топологические методы подробно описаны в [4, 16, 19, 21] (см. также [2, 8, 14, 20, 26, 28]).

Локальная классификация особых точек дается теоремой Элиассона (см. [20, 23]). В настоящей работе рассматривается лишь один из типов особых точек и особых слоев — так называемые фокусные особенности.

Особая точка x ранга 0 называется особой точкой типа *фокус-фокус*, если гессианы $\mathrm{d}^2H(x), \mathrm{d}^2F(x)$ линейно независимы и для некоторой их линейной комбинации $a\,\mathrm{d}^2H(x) + b\,\mathrm{d}^2F(x)$ корни многочлена

$$P(\lambda) = \det\bigl(a\,\mathrm{d}^2H(x) + b\,\mathrm{d}^2F(x) - \lambda\Omega(x)\bigr)$$

различны и имеют вид $\pm x \pm iy$, где $x, y \neq 0$. Здесь через Ω обозначена матрица симплектической формы.

Напомним основные свойства фокусных особенностей (подробности можно найти в [4, 7, 10, 20, 29, 30, 32]). Пусть точка x является особой точкой типа фокус-фокус. Тогда (см., например, [25, 31]) в некоторой ее окрестности существуют канонические координаты p_1, q_1, p_2, q_2, $x = (0, 0, 0, 0)$, такие, что исходные первые интегралы H, F являются функциями от пары *канонических интегралов* f_1, f_2, то есть

$$H = H(f_1, f_2),\ F = F(f_1, f_2),$$

где $f_1 = p_1q_1 + p_2q_2$, $f_2 = p_1q_2 - p_2q_1$, причем $\omega = \mathrm{d}\,p_1 \wedge \mathrm{d}\,q_1 + \mathrm{d}\,p_2 \wedge \mathrm{d}\,q_2$.

Пусть L — особый слой лиувиллева слоения, содержащий одну или несколько особых точек типа фокус-фокус. Если особый слой не содержит точек ранга 1, а все особые точки ранга 0 имеют тип фокус-фокус, то будем слой L называть *фокусным* и говорить, что интегрируемая система имеет *фокусную особенность*.

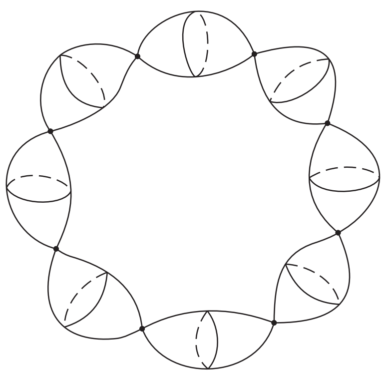

Рис. 1. Фокусный особый слой.

Число особых точек на слое будем называть *сложностью* фокусной особенности. В случае только одной особой точки будем говорить, что особенность *простая*. Пусть $x_1, \ldots, x_n$ — особые точки на слое. Тогда особый слой представляет собой последовательность вложенных лагранжевых 2-сфер L_i, на каждой из которых отмечена пара точек x_i, x_{i+1}, и соседние сферы склеены по этим точкам. В каждой точке x_i две соседние сферы L_{i-1} и L_i в M^4 пересекаются трансверсально.

Особый слой L является пределом семейства регулярных торов. Этот предельный переход выглядит следующим образом: на регулярном торе выделяются n параллельных нетривиальных циклов, каждый из которых стягивается в точку. В результате получается предельный «тор с n перетяжками» (рис. 1).

Фокусные особенности возникают во многих интегрируемых системах механики. Укажем для примера случаи интегрируемости Клебша [11, 15] и Лагранжа [27] из динамики твердого тела, сферический маятник, а также движение эллипсоида по гладкой плоскости [3, 6]. За исключением последней задачи, во всех перечисленных системах возникающие фокусные особенности просты. В то же время можно построить модельный пример сколь угодно сложной особенности [10] (см. также [4]). Естественно ожидать, что существуют некие топологические препятствия к существованию сложной фокусной особенности на симплектическом многообразии. Следующий раздел работы посвящен обсуждению широко известного вопроса: как по данному симплектическому многообразию понять, какие фокусные особенности оно допускает? В такой форме вопрос сформулирован в обзоре [20].

Топологическое препятствие к существованию фокусной особенности заданной сложности

Напомним необходимые сведения из алгебраической топологии [5, 24]. Пусть S — замкнутое компактное ориентированное 2-подмногообразие в ориентированном 4-многообразии M^4. Тогда этому подмногообразию может быть сопоставлен класс когомологий де Рама с компактным носителем $[\eta_S] \in H^2_c(M)$, однозначно определяемый условием

$$\int\limits_S \psi = \int\limits_M \psi \wedge \eta_S \quad \text{для любой замкнутой 2-формы } \psi \tag{1}$$

и называемый *двойственным по Пуанкаре* к подмногообразию S. Каждый класс когомологий в $H^2_c(M)$ естественно определяет класс в $H^2(M)$, который, вообще говоря, может оказаться тривиальным. Однако в рамках данной работы эти тонкости несущественны, и в дальнейшем будем говорить о классе $[\eta_S]$ как о классе когомологий в $H^2(M)$. Для любого компактного замкнутого ориентированного двумерного подмногообразия X, трансверсально пересекающегося с S, значение интеграла $\int_X \eta_S$ будем обозначать через $X{\cdot}S$ и называть *алгебраическим числом точек пересечения* X с S или *индексом пересечения* X с S.

Индекс пересечения двух трансверсально пересекающихся 2-подмногообразий X и S также можно определить чисто геометрически. Пересечение $S \cap X$ состоит из конечного числа точек $x_1, \ldots, x_n$. Пусть $\tau_i(S)$ — ориентирующий касательный репер к S в точке x_i, а $\tau_i(X)$ — ориентирующий касательный репер к X в точке x_i; точке x_i приписывается знак «+», если ориентация репера $(\tau_i(X), \tau_i(S))$ совпадает с ориентацией M^4 в точке x_i, и знак «−» в противном случае; этот знак обозначим $\operatorname{sgn} x_i$. Тогда индексом пересечения подмногообразий X и S называется целое число

$$X{\cdot}S = \sum_i \operatorname{sgn} x_i.$$

Индекс пересечения не меняется при замене вложений X и S на гомотопные. Для каждого вложения подмногообразия S существует гомотопное ему вложение S', такое, что подмногообразия S и S' пересекаются трансверсально. Алгебраическое число точек пересечения подмногообразий S и S' называется *индексом самопересечения* подмногообразия S. Для индекса самопересечения $S{\cdot}S$ верна формула

$$S{\cdot}S = \int\limits_{S'} \eta_S = \int\limits_S \eta_S. \tag{2}$$

Нам потребуется следующий хорошо известный факт из симплектической топологии (см. [9]).

Лемма 1. *Индекс самопересечения вложенного лагранжева 2-подмногообразия X симплектического многообразия (M^4, ω), ориентированного формой $(-1)\omega \wedge \omega$, равен его эйлеровой характеристике $\chi(X)$.*

Доказательство. На кокасательном расслоении T^*X существует каноническая 1-форма α, внешний дифференциал которой определяет на T^*X симплектическую форму. В стандартных локальных координатах $(\mathbf{q}, \mathbf{p})$, где $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^2$ и $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^2$ — координаты базы и слоя соответственно, каноническая 1-форма и ее дифференциал задаются формулами

$$\alpha = p_1 \, \mathrm{d}\, q_1 + p_2 \, \mathrm{d}\, q_2, \quad \mathrm{d}\, \alpha = \mathrm{d}\, p_1 \wedge \mathrm{d}\, q_1 + \mathrm{d}\, p_2 \wedge \mathrm{d}\, q_2.$$

По теореме Вейнстейна (см., например, [9]) существует симплектоморфизм $\psi \colon U(X^2) \to \to V(X^2)$ некоторой окрестности $U(X^2) \subset M$ подмногообразия X в M^4 на окрестность $V(X) \subset T^*X$ нулевого сечения расслоения T^*X с симплектической формой $\mathrm{d}\, \alpha$, переводящий X в нулевое сечение.

Форма $(-1)\mathrm{d}\, \alpha \wedge \mathrm{d}\, \alpha$ задает на T^*X стандартную ориентацию, определяемую порядком координат $(\mathbf{q}, \mathbf{p})$. Для стандартной ориентации индекс самопересечения нулевого сечения совпадает с суммой индексов векторного поля общего положения на X и равен $\chi(X)$. ■

Теорема 1. *Пусть интегрируемая гамильтонова система на симплектическом* 4*-многообразии* M^4 *содержит фокусную особенность сложности* $n \geqslant 2$. *Тогда*

а) $\pi_2(M) \neq 0$,

б) размерность группы когомологий де Рама $\dim H^2(M) \geqslant n - 1$,

в) если многообразие M^4 *является компактным, то* $\dim H^2(M^4) \geqslant n$.

Доказательство. Ориентируем многообразие M^4 формой $(-1)\omega \wedge \omega$. Тогда алгебраическое число точек самопересечения лагранжева подмногообразия $X \subset M^4$ равно его эйлеровой характеристике $X{\cdot}X = \chi(X)$.

а) Особый слой сложной фокусной особенности содержит лагранжеву сферу. Согласно лемме 1, лагранжева сфера имеет ненулевой индекс самопересечения и, следовательно, не гомотопна нулю.

б) Рассмотрим цепочку сфер $L_1, \ldots, L_n$ фокусного особого слоя сложности $n \geqslant 2$. Обозначим через $[\varphi_i]$ классы, двойственные по Пуанкаре сферам L_i. Так как каждая из сфер лагранжева, ее индекс самопересечения равен $+2$. Тогда из формулы (2) имеем

$$\int\limits_{L_i} \varphi_i = 2.$$

Таким образом, классы $[\varphi_i]$ нетривиальны. Докажем, что они порождают подпространство размерности не меньше $n-1$ в $H^2(M^4)$. Выбросим из цепочки одну сферу. В новой незамкнутой цепочке $L_1, \ldots, L_{n-1}$ ориентируем сферы таким образом, чтобы индекс пересечения соседних сфер был равен $+1$. Достаточно показать, что не существует такой нетривиальной линейной комбинации классов $[\varphi_1], \ldots, [\varphi_{n-1}]$, интеграл от которой по любой сфере особого слоя равен нулю. Для линейной комбинации $\sum_i \lambda_i \varphi_i$ интегрирование по сферам L_i приводит к следующей однородной системе линейных уравнений на коэффициенты:

$$\begin{cases} 2\lambda_1 + \lambda_2 = 0, \\ \lambda_{i-1} + 2\lambda_i + \lambda_{i+1} = 0, \quad i = 2, \ldots, n-2 \\ \lambda_{n-2} + 2\lambda_{n-1} = 0. \end{cases}$$

Ее определитель равен n, поэтому единственное решение — нулевое.

в) Рассмотрим отображение умножения на симплектическую форму

$$\wedge\omega\colon H^2(M^4) \to H^4(M^4) = \mathbb{R}.$$

Согласно формуле (1), все классы $[\varphi_i]$ лежат в ядре данного отображения:

$$\int\limits_{M^4} \omega \wedge \varphi_i = \int\limits_{S_i} \omega = 0.$$

Симплектическая форма ω не принадлежит ядру, так как $\omega \wedge \omega$ — форма объема, которая не является точной в силу компактности M^4. Таким образом, классы $[\varphi_i]$, двойственные к лагранжевым сферам особого слоя, не порождают класс когомологий симплектической формы, и, следовательно, $\dim H^2(M^4) \geqslant n$. ■

Рассмотрим некоторые примеры применения данной теоремы. Сразу отметим, что в этих примерах оценка сложности фокусной особенности, доставляемая теоремой 1, не точна, и ее можно улучшить, прибегнув к использованию иных топологических инвариантов.

Примеры:

- $M^4 = \mathbb{CP}^2$

  Так как $H^2(\mathbb{CP}^2) = \mathbb{R}$, то из пункта (в) следует, что $\mathbb{CP}^2$ допускает только простые фокусные особенности.

- $M^4 = M^2_{g_1} \times M^2_{g_2}$ (произведение сфер с ручками)

  Если числа g_1 и g_2 одновременно больше нуля, то $\pi_2(M^2_{g_1} \times M^2_{g_2}) = 0$. Тогда из пункта (а) имеем, что фокусные особенности в M^4 просты.

  Пусть $g_2 = 0$, а $g_1 = g \neq 0$, то есть $M^4 = M^2_g \times S^2$. Так как группа $H^2(M^2_g \times S^2) = \mathbb{R}^2$, то из пункта (в) следует, что не существует особенностей сложности выше 2. Далее, группа $\pi_2(M^2_g \times S^2) = \mathbb{Z}$. Гомотопический класс любой сферы в $M^2_g \times S^2$ является кратным гомотопического класса сферы-сомножителя и, следовательно, имеет нулевой индекс самопересечения. Таким образом, в $M^2_g \times S^2$ не существует сложных фокусных особенностей при $g \neq 0$.

  Наиболее интересным является случай $g_1 = g_2 = 0$, то есть $M^4 = S^2 \times S^2$. Здесь $H^2(M^4) = \mathbb{R}^2$. То есть из пункта (в) снова получаем, что не существует особенностей сложности 3 и выше. Могут ли существовать особенности сложности 2? Ориентируем некоторым образом сомножители, а на всем многообразии M^4 зададим ориентацию прямого произведения. Пусть a, b — образующие группы $H_2(S^2 \times S^2, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^2$, реализуемые сомножителями. Для произвольного класса гомологий $\alpha a + \beta b$ вычислим индекс самопересечения

  $$(\alpha a + \beta b) \cdot (\alpha a + \beta b) = 2\alpha\beta.$$

  Будем считать, что ориентация, задаваемая формой $(-1)\,\omega \wedge \omega$, противоположна ориентации прямого произведения. В этом случае, индекс самопересечения лагранжевой сферы равен -2, и, следовательно, она реализуется только классом $a - b$ (или $b - a$). Далее,

  $$\int\limits_{a-b} \omega = \int\limits_{a} \omega - \int\limits_{b} \omega = 0. \qquad (3)$$

Интеграл от симплектической формы по данному классу равен нулю в том и только в том случае, если симплектические площади сфер-сомножителей одинаковы. Условие (3) является необходимым условием существования в $S^2 \times S^2$ фокусных особенностей сложности 2.

- $M^4 = M^2_g \times \mathbb{R}^2$ (произведение сферы с ручками на плоскость)

  При $g \neq 0$ имеем $\pi_2(M^2_g \times \mathbb{R}^2) = 0$; из пункта (а) получаем, что M^4 не допускает сложных фокусных особенностей.

  В случае $g = 0$ группа $H^2(S^2 \times \mathbb{R}^2) = \mathbb{R}$. Тогда из пункта (б) вытекает, что в $S^2 \times \mathbb{R}^2$ не может быть особенностей сложности выше 2. Класс гомологий, реализуемый сферой, будет иметь нулевой индекс самопересечения, так как любая сфера в $S^2 \times \mathbb{R}^2$ гомотопна сфере-сомножителю (или кратному). Окончательно получаем, что многообразие $S^2 \times \mathbb{R}^2$ допускает только простые фокусные особенности.

Замечание 1. В отличие от сложных особенностей простые фокусные особенности являются локальными, то есть могут быть реализованы в пространстве $(\mathbb{R}^4, \omega)$ со стандартной симплектической формой. В качестве примера укажем следующую пару функций:

$$H = \frac{1}{2}\left(p_1^2 + p_2^2\right) + \left(q_1^2 + q_2^2 - 1\right)^2, \quad F = p_1 q_2 - p_2 q_1,$$
$$\omega = \mathrm{d}\, p_1 \wedge \mathrm{d}\, q_1 + \mathrm{d}\, p_2 \wedge \mathrm{d}\, q_2.$$

Точка $(0, 0, 0, 0)$ является особой точкой типа фокус-фокус. Компактность фокусного особого слоя следует из компактности уровней энергии $H = \mathrm{const}$. Таким образом, не существует топологического препятствия к существованию простой фокусной особенности.

Приложения к механике

Этот раздел посвящен исследованию фокусных особенностей в интегрируемых системах классической механики. Кроме работ, упомянутых выше, о приложениях к механике см. книгу [22] и приведенную в ней библиографию.

В системах гамильтоновой механики, сводимых к двум степеням свободы, фазовое пространство является кокасательным расслоением T^*M^2 к двумерному многообразию M^2 (конфигурационному пространству). Предположим, что конфигурационное пространство замкнуто (компактно и без края), то есть в ориентируемом случае является сферой M^2_g с g ручками, а в неориентируемом — сферой N^2_μ с μ пленками Мёбиуса. На фазовом пространстве рассмотрим симплектическую форму вида

$$\omega = \mathrm{d}\,\alpha + \pi^*\varkappa. \tag{4}$$

Здесь через $\mathrm{d}\,\alpha$ обозначена стандартная симплектическая форма кокасательного расслоения, $\pi\colon T^*M^2 \to M^2$ — проекция, а $\varkappa$ — замкнутая 2-форма на M^2 (форма гироскопических сил; подробности см., например, в [18]).

Теорема 2. *Рассмотрим двумерное замкнутое многообразие M^2 и интегрируемую гамильтонову систему на кокасательном расслоении T^*M^2 с симплектической формой ω вида* (4)*. Тогда*

1) *Если $M^2 = M^2_g$ и $g > 0$, либо если $M^2 = N^2_\mu$, то в системе могут возникать лишь простые фокусные особенности.*

2) *При* $g = 0$ *могут возникать фокусные особенности сложности* 1 *и* 2. *Особенности сложности* 2 *могут быть лишь в случае, когда форма* $\varkappa$ *точна.*

Доказательство. 1) Фазовое пространство T^*M^2 стягивается на конфигурационное пространство M^2. Группы $\pi_2(M^2_g), \pi_2(N^2_\mu)$ нетривиальны только в случае $g = 0$ (сфера) и $\mu = 1$ (проективная плоскость). В случае $M^2 = \mathbb{RP}^2$ имеем $H^2(\mathbb{RP}^2) = 0$. Теперь утверждение следует из пунктов (а) и (б) теоремы 1.

2) Так как $H^2(S^2) = \mathbb{R}$, то из пункта (б) теоремы 1 получаем, что особенностей сложности выше 2 быть не может. Обозначим через $[\varphi]$ класс, двойственный к одной из сфер S особого слоя сложной фокусной особенности, а через $[\omega]$ — класс когомологий симплектической формы. Тогда $[\omega] = k[\varphi]$, $k \in \mathbb{R}$. Из (2) и леммы 1 получаем, что $\int_S \varphi = S \cdot S = 2$. Так как сфера S лагранжева, то $\int_S \omega = 0$. Тогда

$$\int\limits_S \omega = k \int\limits_S \varphi = 2k = 0.$$

Таким образом, $k = 0$, и симплектическая форма точна. ■

Другую интересную с физической точки зрения серию интегрируемых систем представляют системы на двойственных пространствах к алгебрам Ли. Пусть $\mathfrak{g}$ — конечномерная алгебра Ли, а $\mathfrak{g}^*$ — пространство линейных функций на $\mathfrak{g}$. Рассмотрим базис $e_1, \ldots, e_n$ в алгебре $\mathfrak{g}$. Пусть c^k_{ij} — структурные константы алгебры $\mathfrak{g}$ в этом базисе:

$$[e_i, e_j] = \sum_k c^k_{ij} e_k.$$

Рассмотрим линейные координаты $x_1, \ldots, x_n$ на $\mathfrak{g}^*$, соответствующие базису, дуальному к $e_1, \ldots, e_n$. На $\mathfrak{g}^*$ определена естественная скобка Пуассона, задаваемая формулой

$$\{f, g\} = \sum_{i,j,k} c^k_{ij} x_k \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_j}, \quad f, g \in C^\infty(\mathfrak{g}^*).$$

Она называется *скобкой Ли – Пуассона.*

Для произвольной гладкой функции H на $\mathfrak{g}^*$ уравнения

$$\dot{x}_i = \{x_i, H\} \tag{5}$$

называются *уравнениями Эйлера* на $\mathfrak{g}^*$ с гамильтонианом H.

На пространстве $\mathfrak{g}^*$ определено слоение на орбиты коприсоединенного представления соответствующей группы Ли. Ограничение на эти орбиты скобки Ли – Пуассона невырожденно и, следовательно, определяет на них естественную симплектическую форму. Подробности см. в [13].

В случае, когда орбиты имеют размерность 4, интегрируемость системы (5) означает существование дополнительного интеграла, функционально независимого с H на орбитах. При ограничении гамильтониана и дополнительного интеграла на конкретную орбиту приходим к рассмотрению обычной интегрируемой гамильтоновой системы с двумя степенями свободы, и можно поставить вопрос о существовании у нее сложных фокусных особенностей.

Многие динамические системы, описывающие задачи механики и физики, могут быть представлены в виде гамильтоновых систем на двойственных пространствах к алгебрам Ли. Например, уравнения Кирхгофа с современной точки зрения представляют собой гамильтонову систему на $e(3)^*$. Задача о движении по инерции четырехмерного твердого тела может быть записана в форме уравнений Эйлера на $so(4)^*$. Подробно рассмотрим эти два случая.

Случай $\mathfrak{g} = e(3)$

Скобка Ли – Пуассона в $e(3)^*$ в переменных m_1, m_2, m_3, q_1, q_2, q_3 имеет вид

$$\{m_i, m_j\} = \sum_k \varepsilon_{ijk} m_k, \quad \{m_i, q_j\} = \sum_k \varepsilon_{ijk} q_k, \quad \{q_i, q_j\} = 0, \tag{6}$$

а орбиты коприсоединенного представления задаются уравнениями

$$\mathcal{O}_{q,m} = \big\{ f_1 = q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = q^2, f_2 = m_1 q_1 + m_2 q_2 + m_3 q_3 = mq \big\}.$$

Теорема 3. *В интегрируемых гамильтоновых системах на подмногообразиях коприсоединенного представления в* $e(3)^*$*, за исключением, быть может, орбит* $m = 0$*, могут возникать лишь простые фокусные особенности. На орбитах* $m = 0$ *фокусные особенности имеют сложность не выше двух.*

Доказательство. Любая неособая ($q \neq 0$) орбита $\mathcal{O}_{q,m}$ диффеоморфна кокасательному расслоению сферы T^*S^2. При различных значениях m и q получаем различные симплектические формы $\omega_{q,m}$ вида (4) на T^*S^2 и, таким образом, оказываемся в условиях теоремы 2. С помощью введения сферических координат (подробности см. в [12]) можно вычислить интеграл от симплектической формы по базе S^2:

$$\int\limits_{S^2} \omega_{q,m}^2 = 4\pi m.$$

Согласно пункту 2 теоремы 2, многообразие T^*S^2 не допускает фокусных особенностей сложности выше 2, причем особенности сложности 2 возможны только в случае точной симплектической формы, то есть только если $m = 0$. Отметим, что нетривиальность класса когомологий симплектической формы $\omega_{q,m}^2$ при $mq \neq 0$ также следует из результатов работы [17]. ■

Случай $\mathfrak{g} = so(4)$

Рассмотрим координаты m_1, m_2, m_3, q_1, q_2, q_3 на $so(4)^*$. Базисные скобки Пуассона определяются следующим образом:

$$\{m_i, m_j\} = \sum_k \varepsilon_{ijk} m_k, \quad \{m_i, q_j\} = \sum_k \varepsilon_{ijk} q_k, \quad \{q_i, q_j\} = \sum_k \varepsilon_{ijk} m_k.$$

Пара функций

$$f_1 = q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + m_1^2 + m_2^2 + m_3^2, \quad f_2 = m_1 q_1 + m_2 q_2 + m_3 q_3$$

задает слоение в $so(4)^*$ на орбиты коприсоединенного представления

$$\mathcal{O}_{c,m} = \big\{ f_1 = c^2, \ f_2 = mc \big\}. \tag{7}$$

Теорема 4. *В интегрируемых гамильтоновых системах на орбитах коприсоединенного представления в* $so(4)^*$*, за исключением, быть может, орбит* $m = 0$*, могут возникать лишь простые фокусные особенности. На орбитах* $m = 0$ *фокусные особенности имеют сложность не выше двух.*

Доказательство. Доказательство основано на использовании хорошо известного изоморфизма алгебр $so(4)$ и $so(3) \oplus so(3)$. В переменных s_1, s_2, s_3, p_1, p_2, p_3 на пространстве $so(3)^* \oplus so(3)^*$ скобки Пуассона имеют вид

$$\{s_i, s_j\} = \sum_k \varepsilon_{ijk} s_k, \quad \{s_i, p_j\} = 0, \quad \{p_i, p_j\} = \sum_k \varepsilon_{ijk} p_k,$$

а изоморфизм задается формулами

$$m_i = s_i + p_i, \ q_i = p_i - s_i.$$

Уравнения орбит коприсоединенного представления в переменных s_i, p_i имеют простой вид:

$$s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 = s^2, \quad p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = p^2. \tag{8}$$

Отсюда видно, что орбиты $\mathcal{O}_{s,p}$ общего положения диффеоморфны $S^2 \times S^2$. Каждое из уравнений (8) задает сферу в $so(3)^*$. Эти сферы представляют собой орбиты коприсоединенного представления в $so(3)^*$ и имеют естественную симплектическую форму. Пусть ω_s и ω_q являются симплектическими формами на сферах S_s^2 и S_p^2 соответственно. Тогда симплектическая форма $\omega_{s,p}$ на $\mathcal{O}_{s,p} = S_s^2 \times S_p^2$ имеет вид

$$\omega_{s,p} = \pi_s^* \omega_s + \pi_p^* \omega_p,$$

где отображения π_s и π_p — это проекции на сомножители.

Ориентируем сферы S_s^2 и S_p^2 формами ω_s и ω_p соответственно. Тогда ориентация прямого произведения на $S_s^2 \times S_p^2$ задается формой $\pi_s^*\omega_s \wedge \pi_p^*\omega_p$. Далее,

$$\omega_{s,p} \wedge \omega_{s,p} = 2(\pi_s^*\omega_s) \wedge (\pi_p^*\omega_p),$$

и, как уже отмечалось выше, необходимым условием существования сложной фокусной особенности является равенство симплектических площадей сфер S_s^2 и S_p^2.

Переходя к сферическим координатам, можно показать, что

$$\int\limits_{S_s^2} \omega_s = 4\pi s, \quad \int\limits_{S_p^2} \omega_p = 4\pi p.$$

Таким образом, сложные особенности бывают только на орбитах $s = p$. В терминах значений исходных функций f_1 и f_2 эти орбиты выделяются условием $m = 0$. ■

Модельный пример механической системы с фокусной особенностью сложности 2

В этом разделе будет показано, что оценки на сложность фокусной особенности, доставляемые теоремами 2, 3 и 4, являются точными, то есть будут приведены соответствующие примеры интегрируемых систем с фокусной особенностью сложности 2.

На пространстве $e(3)^*$ рассмотрим пару функций

$$H = \frac{1}{2}(m_1^2 + m_2^2 + m_3^2) + q_3^2, \ F = m_3, \tag{9}$$

находящихся в инволюции относительно скобки (6) и, следовательно, определяющих на орбитах $\mathcal{O}_{q,m}$ интегрируемые гамильтоновы системы с двумя степенями свободы. Обозначим через h и f константы интегралов H и F соответственно.

Предложение 1. *Система* (9) *на орбите* $\mathcal{O}_{q,0} = \{f_1 = q^2, f_2 = 0\}$ *в* $e(3)^*$ *имеет фокусную особенность сложности 2. Фокусный особый слой* L *задается уравнениями* $L = \{H = q^2, F = 0\}$.

Доказательство. Точки $P_\pm = \{q_1 = q_2 = m_1 = m_2 = 0, m_3 = \pm m, q_3 = \pm q\}$ на орбитах $\mathcal{O}_{q,m}$ при $|m| < 2\sqrt{2}\,q$ являются особыми точками типа фокус-фокус. При $m = 0$ две этих точки находятся на одном уровне $L = \{h = q^2, g = 0\}$. Докажем, что особый слой L, содержащий точки $P_\pm$, связен, то есть орбита $\mathcal{O}_{q,0}$ действительно содержит сложную фокусную особенность, а не пару простых. Слой L задается в пространстве $\mathbb{R}^6(m_1, m_2, m_3, q_1, q_2, q_3)$ системой из четырех уравнений

$$L\colon \begin{cases} f_1 = q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = q^2, \\ f_2 = m_1 q_1 + m_2 q_2 + m_3 q_3 = 0, \\ H = \dfrac{1}{2}(m_1^2 + m_2^2 + m_3^2) + q_3^2 = q^2, \\ F = m_3 = 0, \end{cases}$$

которая имеет явное решение, а именно: точка $\mathbf{q} = (q_1, q_2, q_3)$ — любая на сфере $q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = q^2$, а точка $\mathbf{m} = (m_1, m_2, m_3)$ определена уравнениями

$$m_1 = \pm\sqrt{2} q_2, \quad m_2 = \mp\sqrt{2} q_1, \quad m_3 = 0.$$

Ясно, что каждый выбранный знак (оба верхних или оба нижних) дает сферу и эти сферы пересекаются ровно по двум точкам P_+ и P_-.

Таким образом, система (9) представляет собой пример интегрируемой системы на $\mathcal{O}_{q,0}$ с фокусной особенностью сложности 2, причем при переходе на близкие орбиты $\mathcal{O}_{q,m}$, то есть при малом интегрируемом возмущении, сложная фокусная особенность распадается на пару простых. ■

Функции (9) находятся в инволюции не только относительно скобки на $e(3)^*$, но и относительно целого семейства скобок Пуассона вида

$$\{m_i, m_j\} = \sum_k \varepsilon_{ijk} m_k, \quad \{m_i, q_j\} = \sum_k \varepsilon_{ijk} q_k, \quad \{q_i, q_j\} = \lambda \sum_k \varepsilon_{ijk} m_k. \tag{10}$$

Уравнения орбит коприсоединенного представления для таких скобок следующим образом зависят от параметра λ:

$$\mathcal{O}_{c,m} = \{f_1 = \lambda(m_1^2 + m_2^2 + m_3^2) + (q_1^2 + q_2^2 + q_3^2) = c^2,\ f_2 = m_1 q_1 + m_2 q_2 + m_3 q_3 = mc\}.$$

При $\lambda > 0$ законна замена переменных вида $m_i = \widetilde{m}_i$, $q_i = \sqrt{\lambda}\widetilde{q}_i$, после которой видно, что скобка (10) соответствует алгебре $so(4)$.

Предложение 2. *Система* (9) *со скобкой* (10) *на орбите* $\mathcal{O}_{c,0} = \{f_1 = c^2, f_2 = 0\}$ *в* $so(4)^*$ *имеет фокусную особенность сложности 2. Фокусный особый слой* L *задается уравнениями* $L = \{H = c^2, F = 0\}$.

Доказательство. Рассмотрим систему (9) на регулярной ($c \neq 0$) орбите $\mathcal{O}_{c,0}$. Точки

$$P_\pm = \{q_1 = q_2 = m_1 = m_2 = m_3 = 0, q_3 = \pm c\}$$

для достаточно малых λ имеют тип фокус-фокус.

Как и в предыдущем примере, особый слой L можно задать в пространстве $\mathbb{R}^6$ «почти явно»: точка $\mathbf{q} = (q_1, q_2, q_3)$ — любая на эллипсоиде

$$\frac{1}{1-2\lambda}(q_1^2 + q_2^2) + q_3^2 = c^2,$$

и для любой такой точки $\mathbf{q}$

$$m_1 = \pm q_2\sqrt{\frac{2}{1-2\lambda}}, \quad m_2 = \mp q_1\sqrt{\frac{2}{1-2\lambda}}, \quad m_3 = 0.$$

Как и ранее, получаем пару сфер, трансверсально пересекающихся по точкам P_+ и P_-.

Таким образом, система (9) является интегрируемой системой с двумя степенями свободы на орбите $\mathcal{O}_{c,0}$, которая имеет фокусную особенность сложности 2. ■

Автор благодарен А. А. Ошемкову за внимание к работе.

Список литературы

[1] Арнольд В. И. Математические методы классической механики. Москва: Едиториал УРСС, 2003. 416 с.

[2] Болсинов А. В., Борисов А. В., Мамаев И. С. Топология и устойчивость интегрируемых систем // УМН, 2010, т. 65, № 2(392), с. 71–132.

[3] Болсинов А. В., Казаков А. О., Килин А. А. Топологическая монодромия в неголономных системах // Нелинейная динамика, 2013, т. 9, № 2, с. 203–227.

[4] Болсинов А. В., Фоменко А. Т. Интегрируемые гамильтоновы системы: Геометрия, топология, классификация: В 2-х тт. Ижевск: УдГУ, 1999. 444 с.; 448 с.

[5] Ботт Р., Ту Л. В. Дифференциальные формы в алгебраической топологии. Москва: Наука, 1989. 336 с.

[6] Ивочкин М. Ю. Топологический анализ движения эллипсоида по гладкой плоскости // Матем. сб., 2008, т. 199, № 6, с. 85–104.

[7] Изосимов А. М. Гладкие инварианты особенностей типа фокус-фокус // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Механ., 2011, № 4, с. 59–61.

[8] Лерман Л. М., Уманский Я. Л. Классификация четырехмерных интегрируемых гамильтоновых систем и пуассоновских действий $\mathbb{R}^2$ в расширенных окрестностях простых особых точек: 1 // Матем. сб., 1992, т. 181, № 12, с. 141–176.

[9] Макдафф Д., Саламон Д. Введение в симплектическую топологию. Москва–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Ижевский институт компьютерных исследований, 2012. 568 с.

[10] Матвеев В. С. Интегрируемые гамильтоновы системы с двумя степенями свободы. Топологическое строение насыщенных окрестностей точек типа фокус-фокус и седло-седло // Матем. сб., 1996, т. 187, № 4, с. 29–58.

[11] Морозов П. В. Лиувиллева классификация интегрируемых систем случая Клебша // Матем. сб., 2002, т. 193, № 10, с. 113–138.

[12] Новиков С. П., Шмельцер И. Периодические решения уравнений Кирхгофа для свободного твердого тела в жидкости и расширенная теория Люстерника – Шнирельмана – Морса (ЛШМ): 1 // Функц. анализ и его прил., 1981, т. 15, № 3, с. 54–66.

[13] Олвер П. Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. Москва: Мир, 1989. 639 с.

[14] Ошемков А. А. Классификация гиперболических особенностей ранга нуль интегрируемых гамильтоновых систем // Матем. сб., 2010, т. 201, № 8, с. 63–102.

[15] Погосян Т. И. Критические интегральные поверхности в задаче Клебша // МТТ, 1984, № 16, с. 19–24.

[16] Смейл С. Топология и механика // УМН, 1972, т. 27, № 2(164), с. 77–134.

[17] Харламов М. П. Характеристический класс расслоения и существование глобальной функции Рауса // Функц. анализ и его прил., 1977, т. 11, № 1, с. 89–90.
[18] Харламов М. П. О некоторых применениях дифференциальной геометрии к теории механических систем // МТТ, 1979, № 11, с. 37–49.
[19] Харламов М. П. Топологический анализ интегрируемых задач динамики твердого тела. Ленинград: ЛГУ, 1988. 200 с.
[20] Bolsinov A. V., Oshemkov A. A. Singularities of integrable Hamiltonian systems // Topological methods in the theory of integrable systems / A. V. Bolsinov, A. T. Fomenko, A. A. Oshemkov (eds.). Cambridge: Camb. Sci. Publ., 2006. P. 1–67.
[21] Cushman R., Bates L. Global aspects of classical integrable systems. Basel: Birkhäuser, 1997. 435 pp.
[22] Efstathiou K. Metamorphoses of Hamiltonian systems with symmetries. (Lect. Notes in Math., vol. 1864.) Berlin: Springer, 2005. 149 pp.
[23] Eliasson L. H. Normal forms for Hamiltonian systems with Poisson commuting integrals — elliptic case // Comment. Math. Helv., 1990, vol. 65, no. 1, pp. 4–35.
[24] Hatcher A. Algebraic Topology. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2002. 550 pp.
[25] Ito H. Convergence of Birkhoff normal forms for integrable systems // Comment. Math. Helv., 1989, vol. 64, no. 3, pp. 412–461.
[26] Leung N. C., Symington M. Almost toric symplectic four-manifolds // J. Symplectic Geom., 2010, vol. 8, no. 2, pp. 143–187.
[27] Oshemkov A. A. Fomenko invariants for the main integrable cases of the rigid body motion equations // Topological classification of integrable systems / A. T. Fomenko (ed.). (Adv. Soviet Math., vol. 6.) Providence, RI: AMS, 1991. P. 67–146.
[28] Nguyen T. Z. Symplectic topology of integrable Hamiltonian systems: 1. Arnold – Liouville with singularities // Compositio Math., 1996, vol. 101, no. 2, pp. 179–215.
[29] Nguyen T. Z. A note on focus-focus singularities // Differential Geom. Appl., 1997, vol. 7, no. 2, pp. 123–130.
[30] Nguyen T. Z. Another note on focus-focus singularities // Lett. Math. Phys., 2002, vol. 60, no. 1, pp. 87–99.
[31] Vey J. Sur certains systèmes dynamiques séparables // Amer. J. Math., 1978, vol. 100, no. 3, pp. 591–614.
[32] Vu Ngoc S. On semi-global invariants for focus-focus singularities // Topology, 2002, vol. 42, no. 2, pp. 365–380.

Focus-focus singularities in classical mechanics

Gleb E. Smirnov

Lomonosov Moscow State University
Faculty of Mechanics and Mathematics
Leninskye gori 1, GSP-1, Moscow, 119991, Russia
glebevgen@yandex.ru

In this paper the local singularities of integrable Hamiltonian systems with two degrees of freedom are studied. The topological obstruction to the existence of a focus-focus singularity with given complexity is found. It is shown that only simple focus-focus singularities can appear in a typical mechanical system. Model examples of mechanical systems with complicated focus-focus singularity are given.

MSC 2010: 37J35
Keywords: integrable hamiltonian systems, focus-focus singularities, obstruction to the existence of singularities

Received December 8, 2013, accepted February 25, 2014
Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2014, vol. 10, no. 1, pp. 101–112 (Russian)