



УДК: 532.5
MSC 2010: 35Q35

Процессы концентрации энергии при образовании волн-убийц

Р. В. Шамин, А. В. Юдин

Изучаются процессы концентрации энергии при образовании аномально больших поверхностных волн. С помощью вычислительных экспериментов, основанных на точных уравнениях гидродинамики идеальной жидкости, получены количественные характеристики энергетических процессов в момент формирования волн-убийц. Полученные результаты могут быть использованы при оценке риска опасного воздействия волн-убийц в океане.

Ключевые слова: аномально большие поверхностные волны, волны-убийцы, вычислительный эксперимент, гидродинамика идеальной жидкости

1. Введение

Феномен образования аномально больших поверхностных волн в океане, называемых волнами-убийцами, представляет собой локальную концентрацию энергии в одной-двух волнах. Эти волны не только представляют серьезную опасность для кораблей и морских платформ, но и вызывают большой теоретический интерес [1, 2]. К сожалению, возможности натурных измерений и лабораторных исследований сильно ограничены. В последнее время

Получено 22 ноября 2013 года
После доработки 31 января 2014 года

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ № 12-05-33046_мол_а_вед, а также при поддержке гранта Правительства РФ для государственной поддержки научных исследований, проводимых под руководством ведущих ученых в российских образовательных учреждениях высшего профессионального образования (договор № 11.G34.31.0035 от 25 ноября 2010 г. между Минобрнауки РФ, НГУ и ведущим ученым).

Шамин Роман Вячеславович
roman@shamin.ru

Юдин Александр Викторович
yudinorel@gmail.com

Сахалинский государственный университет
693000, Россия, г. Южно-Сахалинск, ул. Ленина, д. 290
Российский университет дружбы народов
117198, Россия, г. Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6



наиболее популярным становится изучение этих волн на основе вычислительных экспериментов [3–8].

В наших предыдущих работах с помощью численных опытов мы рассматривали статистику волн-убийц, возникающих вследствие нелинейной динамики поверхностных волн идеальной жидкости [10, 11]. Возможности численного моделирования волн-убийц позволяют «заглянуть внутрь» процессов, протекающих при образовании аномально больших волн. В настоящей работе на основании вычислительных экспериментов проведена количественная оценка концентрации энергии и импульса. Эти результаты показывают, что в момент образования экстремальной волны основные динамические характеристики поверхностных волн (энергия, импульс и др.) принимают значения, в несколько раз превышающие средние значения. Таким образом, волны-убийцы могут быть охарактеризованы путем концентрации динамических и геометрических характеристик поверхностных волн.

2. Основные уравнения и вычислительные эксперименты

В наших вычислительных экспериментах рассматривались волны, бегущие в одну сторону, что соответствует волнам зыби в океане (зыбью называются поверхностные волны с периодом 8–12 и длиной волны 150–300 метров). В этих экспериментах мы численно решали уравнения Эйлера в предположении потенциальности течения со свободной поверхностью $\eta(x, t)$ и бесконечной глубиной:

$$\begin{aligned} -\infty < y < \eta(x, t), \\ 0 < x < 2\pi, \end{aligned}$$

где x и y — горизонтальная и вертикальная пространственные переменные соответственно, t — время.

Граничные условия по переменной x были 2π -периодическими. В силу потенциальности течения и несжимаемости жидкости можно использовать уравнение Лапласа

$$\Delta\Phi(x, y, t) = 0, \quad (2.1)$$

где $\Phi(x, y, t)$ — потенциал поля скоростей, а $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ — оператор Лапласа. С этим уравнением рассматриваются кинематическое и динамическое граничные условия:

$$\begin{aligned} (\eta_t + \Phi_x \eta_x - \Phi_y)|_{y=\eta(x,t)} &= 0, \\ (\Phi_t + \frac{1}{2}|\nabla\Phi|^2 + gy)|_{y=\eta(x,t)} &= 0, \end{aligned} \quad (2.2)$$

где g — ускорение поля тяжести. Кроме того, рассматривается условие непротекания на дне:

$$\Phi_y|_{y=-\infty} = 0. \quad (2.3)$$

Введем величину $\Psi(x, t) = \Phi(x, \eta(x, t), t)$, которая является значением потенциала на свободной поверхности (см. [12]). В работе [13] было установлено, что переменные η и Ψ являются канонически сопряженными величинами, то есть

$$\begin{aligned} \frac{\partial\eta}{\partial t} &= \frac{\delta H}{\delta\Psi}, \\ \frac{\partial\Psi}{\partial t} &= \frac{\delta H}{\delta\eta}; \end{aligned}$$

здесь гамильтониан H совпадает с полной энергией жидкости $H = T + U$,

$$T = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} dx \int_{-\infty}^{\eta(x,t)} |\nabla\Phi|^2 dy,$$

$$U = \frac{g}{2} \int_0^{2\pi} \eta^2(x,t) dx,$$

где T — кинетическая энергия жидкости, а U — ее потенциальная энергия.

Система уравнений (2.1)–(2.3) сложна для непосредственного изучения. Для организации численного счета мы использовали уравнения в конформных переменных. Впервые такой метод изучения динамики жидкости со свободной поверхностью был предложен в теоретических работах [14, 15]. Дальнейшее развитие метод получил в работе [16]. Динамические уравнения в конформных переменных были получены в [17].

Рассмотрим комплексную плоскость $z = x + iy$. Совершим конформное отображение области, занимаемой жидкостью в плоскости z , в полупространство с переменными $w = u + iv$:

$$-\infty < u < +\infty, \quad -\infty < v < 0.$$

Обратное конформное отображение выражается аналитической функцией $z = z(t, w)$ при каждом фиксированном моменте времени. Зная функцию $z(t, u)$, можно восстановить профиль свободной поверхности. После преобразования поверхность $\eta(x, t)$ может быть представлена в параметрическом виде

$$y = y(u, t), \quad x = u + \tilde{x}(u, t),$$

где $\tilde{x}(u, t)$ и $y(u, t)$ связаны оператором Гильберта $H[f]$:

$$y = H[\tilde{x}], \quad \tilde{x} = -H[y],$$

$$H[f](u) = \frac{1}{2\pi} v.p. \int_0^{2\pi} \frac{f(u')}{\tan\left(\frac{u' - u}{2}\right)} du'.$$

Как показано в [12], переменные $y(u, t)$ и $\Psi(u, t)$ полностью описывают движение жидкости и подчиняются следующей системе интегро-дифференциальных уравнений:

$$y_t = y_u H \left[\frac{H[\Psi_u]}{J} \right] - x_u \frac{H[\Psi_u]}{J},$$

$$\Psi_t = -\frac{\Psi_u^2 + (H[\Psi_u])^2}{2J} + H \left[\frac{H[\Psi_u]}{J} \right] \Psi_u + \frac{H[\Psi_u]}{J} H[\Psi_u] - gy, \tag{2.4}$$

где $J = x_u^2 + u_u^2$ — якобиан отображения.

Согласно работе [17], уравнения (2.4) можно переписать в более удобной форме. Итак, существует такая аналитическая по переменной w в нижней полуплоскости функция $\Pi(t, w)$, что

$$\Psi(t, x) = \text{Re} \Pi(t, w(t, x)).$$



Введем новые переменные:

$$R(t, w) = \frac{1}{z'(t, w)}, \quad V = i \frac{\Pi'(t, w)}{z'(t, w)}.$$

Здесь и далее штрихом мы обозначаем производную по переменной w . Эти функции являются аналитическими в нижней полуплоскости и удовлетворяют следующим краевым условиям:

$$\begin{aligned} R(t, w) &\rightarrow 1, & \operatorname{Im} w &\rightarrow -\infty, \\ V(t, w) &\rightarrow 0, & \operatorname{Im} w &\rightarrow -\infty. \end{aligned} \quad (2.5)$$

По построению, функции R и V также являются 2π -периодическими по переменной u . Поскольку функции R и V являются аналитическими, то нам достаточно знать лишь значения этих функций на вещественной оси (при $v = 0$), поэтому в дальнейшем мы будем рассматривать аргумент u вместо w . По значениям этих функций можно найти профиль свободной поверхности и потенциал скоростей.

Согласно работе [17], функции R и V удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{R}(t, u) &= i(U(t, u)R'(t, u) - U'(t, u)R(t, u)), \\ \dot{V}(t, u) &= i(U(t, u)V'(t, u) - B'(t, u)R(t, u)) + g(R(t, u) - 1), \\ 0 < u < 2\pi, & \quad 0 < t < T, \\ R(0, u) &= R(t, 2\pi), \quad V(t, 0) = V(t, 2\pi), \quad 0 < t < T, \\ R(0, u) &= R_0(u), \quad V(0, u) = V_0(u), \quad 0 < u < 2\pi. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Функции U и B вычисляются по формулам

$$U = P(V\bar{R} + \bar{V}R), \quad B = P(V\bar{V}),$$

где P — оператор проектирования на нижнюю полуплоскость

$$P = \frac{1}{2}(I + i\tilde{H}).$$

В работах [18–20] рассматривались математические вопросы корректности этих уравнений, а также проблемы численных расчетов. Уравнения в конформных переменных позволяют проводить нужные нам вычислительные эксперименты с высокой точностью на больших временных интервалах (в частности, наблюдать возникновение волн-убийц).

Обычно волны-убийцы регистрируются на основе амплитудного критерия

$$\frac{H_{\max}}{H_s} \geq 2.1,$$

где H_{\max} — максимальная амплитуда, а H_s — значительная высота волнения (среднее арифметическое высот трети самых больших волн). Как правило, при обработке натуральных записей волнения величины H_{\max} и H_s рассчитываются на основе мареограммы, то есть по возвышениям поверхности в заданной точке. В случае вычислительных экспериментов мы вычисляем эти величины на основе пространственной записи цуга волн. В каждый момент времени t^* по профилю поверхностных волн ($\eta(x, t^*)$, $0 \leq x < 2\pi$) фиксируются две величины: амплитуда максимальной волны в этом профиле $H_{\max}(t^*)$ и значительная высота

волн $H_s(t^*)$, построенная по профилю в момент t^* . Регистрация аномальной волны осуществлялась с помощью критерия

$$\nu(t) = \frac{H_{\max}(t)}{\overline{H}_s(t)} \geq 2.1,$$

где $\overline{H}_s(t) = \frac{1}{t} \int_0^t H_s(\tau) d\tau$. Усреднение по времени для значительной высоты волнения позволяет нивелировать влияние аномальной волны на расчет H_s в случае, когда цуг поверхностных волн состоит из не очень большого количества волн. Критическое значение $\nu^* = 2.1$ выбрано эмпирически и используется во многих работах, посвященных волнам-убийцам [1].

3. Энергетические характеристики отдельных волн

В наших вычислительных экспериментах мы рассматриваем периодический по пространственной переменной цуг волн. При этом профиль свободной поверхности задается функцией $y = y(x, t)$, являющейся 2π -периодической по переменной x . Без ограничения общности мы можем считать, что при всех фиксированных значениях переменной t функция $y = y(x, \cdot)$ является достаточно гладкой (существует не менее двух непрерывных производных по x) и имеет ровно N минимумов и N максимумов. Таким образом, мы имеем разбиение отрезка $[0, 2\pi]$ на N подынтервалов

$$[0, 2\pi] = \bigcup_{i=1}^N [x_{i-1}, x_i],$$

где x_i — точки минимумов (мы для простоты предположили, что в точке $x_0 = 0$ функция $y(x, \cdot)$ имеет минимум). Области

$$W_i(t) = \{(x, y) : -\infty < y < y(x, t), x_{i-1}(t) < x < x_i(t)\},$$

$$i = 1, \dots, N,$$

будем называть отдельными волнами. Вообще говоря, для различных значений t количество отдельных волн может меняться, но для сокращения письма мы будем пользоваться обозначениями N и W_i для некоторого значения t . В случае, когда необходимо подчеркнуть, какой момент времени мы имеем в виду, будем писать N_t и $W_i(t)$.

Для каждой волны W_i можно вычислить полную энергию \tilde{E}_i (кинетическую \tilde{T}_i и потенциальную \tilde{U}_i) и модуль импульса \tilde{I}_i (горизонтальную \tilde{I}_i^x и вертикальную \tilde{I}_i^y компоненты).

Для анализа удобно использовать следующую нормировку для характеристик отдельных волн. Пусть через \tilde{X}_i обозначена какая-нибудь характеристика $\tilde{E}_i, \tilde{T}_i, \tilde{U}_i, \tilde{I}_i^x$ или \tilde{I}_i^y . Без ограничения общности можно считать, что

$$|\tilde{X}_1| < |\tilde{X}_2| < \dots < |\tilde{X}_N|.$$

Далее построим набор величин

$$X_i = \frac{|\tilde{X}_i|}{\overline{X}},$$

$$\overline{X} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \tilde{X}_i.$$

Значение величины X_i показывает, как относится значение характеристики i -й волны к среднему значению \overline{X} .



Мы будем сравнивать графики величин X_i , построенные в начальный момент времени и в момент времени образования волны-убийцы. Эти диаграммы показывают характерные значения концентрации рассматриваемых величин в момент образования волны-убийцы.

4. Пример образования волны-убийцы

Ранее в работах [10, 11] были описаны масштабные вычислительные эксперименты по моделированию нелинейной динамики поверхностных волн с целью изучения статистики возникновения волн-убийц. В этих работах мы рассматривали начальное возмущение поверхности как ансамбль бегущих в одну сторону волн со средним значением волнового числа $K = K_0$. Мы задавали начальное возмущение поверхности суммой гармоник со случайными фазами:

$$\eta(x, 0) = \sum_{-\frac{1}{2}K_{\max}}^{\frac{1}{2}K_{\max}} \phi(k - K_0) \cos(kx - \xi_k).$$

Здесь K_{\max} — полное число спектральных мод, ξ_k — случайная величина, равномерно распределенная на интервале $0 \leq \xi_k < 2\pi$. Параметры спектра подбирались так, чтобы квадрат средней крутизны

$$\mu^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \eta_x^2 dx$$

и дисперсия

$$D = \left(\int_{-K_w}^{K_w} k^2 e^{-\alpha k^2} dk \right) \left(\int_{-K_w}^{K_w} e^{-\alpha k^2} dk \right)^{-1}$$

принимали заданные значения (число K_w определяет спектральную ширину). Функция $\phi(k)$ определялась по формуле

$$\phi(k) = \begin{cases} \delta_k, & |k| > K_w, \\ \kappa \exp(-\alpha k^2) + \delta_k, & |k| \leq K_w. \end{cases} \quad (4.1)$$

Здесь δ_k — независимые случайные параметры, равномерно распределенные на интервале $-\frac{1}{2}K_{\max} < k < \frac{1}{2}K_{\max}$.

При образовании anomalно больших волн наблюдаются процессы концентрации энергии и импульса. Концентрация происходит по однотипному сценарию. Рассмотрим характерный пример формирования волны-убийцы. В данном эксперименте начальное поле волнения представлено пучком из 25 волн, бегущих в одну сторону. Квадрат средней крутизны принимал значение $\mu^2 = 2.06 \times 10^{-3}$, дисперсия D равна 5. Длительность эксперимента составляла примерно 500 периодов. Примерно через 355 периодов возникла волна-убийца. Начальный профиль и профиль волны-убийцы приведен на рисунке 1. Максимальное значение функционала ν равнялось

$$\nu(t^*) = 2.32.$$

Временной график значений $\nu(t)$ приведен на рисунке 2.



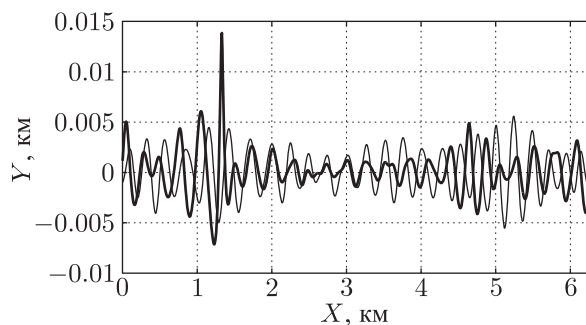


Рис. 1. Профили поверхностных волн: тонкая линия — в начальный момент, жирная линия — в момент образования волны-убийцы.

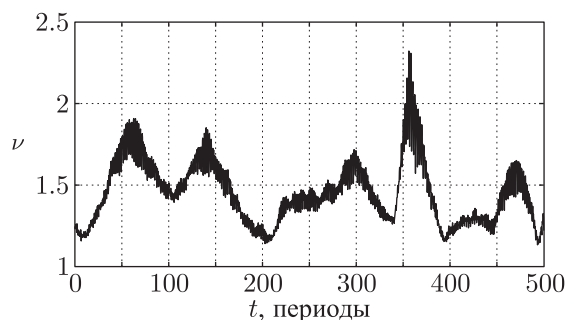


Рис. 2. Значения функции $\nu(t)$.

Теперь рассмотрим концентрацию энергии в момент образования волны-убийцы. Для наглядности мы приведем также график концентрации энергии в начальный момент времени. Таким образом, из рисунке 3 мы видим, что если в начальный момент времени график концентрации близок к линейной функции (линейный коэффициент детерминации $R^2 = 0.9$), то в момент образования волны-убийцы три самых больших волны концентрируют в себе большую часть энергии. Абсолютные значения концентрации E_i на этих графиках показывают, во сколько раз энергия i -й волны превосходит среднее значение энергии волн в данный момент времени. Аналогичный график для модуля импульса приведен на рисунке 4. Чтобы оценить динамику максимальной концентрации энергии по времени, приведем график максимальных значений концентрации энергии в вычислительном эксперименте (см. рис. 5).

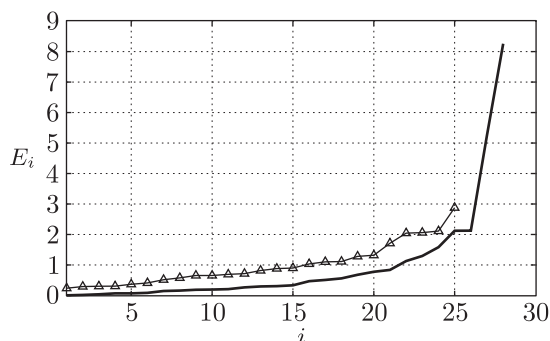


Рис. 3. Концентрация энергии: отмеченная треугольниками линия — в начальный момент, жирная линия — в момент образования волны-убийцы.

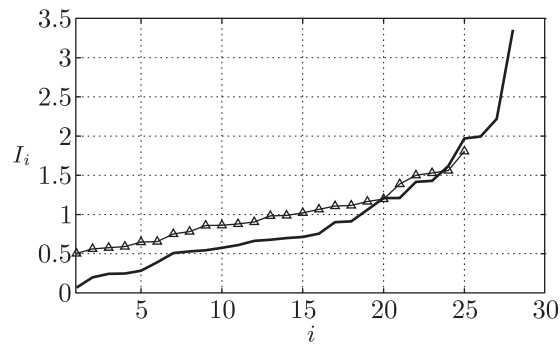


Рис. 4. Концентрация модуля импульса: отмеченная треугольниками линия — в начальный момент, жирная линия — в момент образования волны-убийцы.

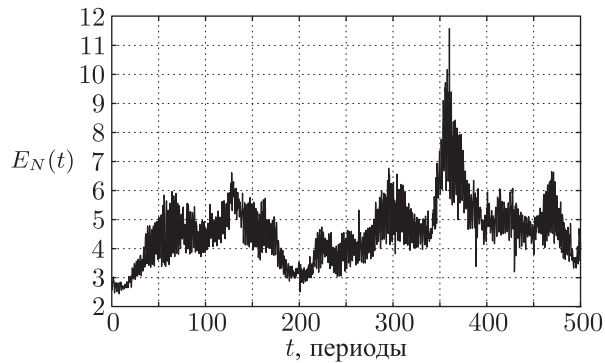


Рис. 5. Динамика максимальных значений концентрации полной энергии.

Приведем также гистограмму средних значений концентрации энергии и импульса, построенную по большой серии однотипных вычислительных экспериментов (см. рис. 6). На этой гистограмме показаны средние значения максимальной концентрации характеристик в момент образования волны-убийцы.

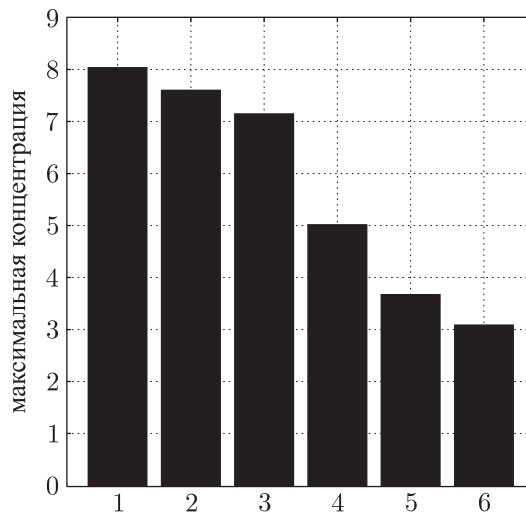


Рис. 6. Средние значения максимальной концентрации: (1) — кинетическая энергия, (2) — полная энергия, (3) — потенциальная энергия, (4) — вертикальный импульс, (5) — горизонтальный импульс, (6) — модуль импульса.

5. Выводы

В настоящей статье на основе вычислительных экспериментов проведен количественный анализ процессов концентрации энергии и импульса в момент образования аномально больших поверхностных волн, так называемых волн-убийц. Показано, что энергия и импульс аномально больших волн могут быть на порядок выше средних значений энергии и импульса окрестных волн.

Этот результат может быть использован при оценке риска опасного воздействия волн-убийц на суда и морские сооружения, поскольку показывает, что энергетические характеристики таких волн могут быть значительно выше, чем используемые в нормативных расчетах значения.

6. Благодарности

Авторы выражают благодарность профессору Е. Н. Пелиновскому и А. В. Слюняеву за полезные обсуждения результатов статьи.

Список литературы

- [1] Kharif C., Pelinovsky E., Slunyaev A. Rogue waves in the ocean. Berlin: Springer, 2009. 216 pp.
- [2] Nikolkina I., Didenkulova I. Rogue waves in 2006–2010 // Nat. Hazards Earth Syst. Sci., 2011, vol. 11, pp. 2913–2924.
- [3] Henderson K.L., Pelegrine D.H., Dold J.W. Unsteady water wave modulations: Fully nonlinear solutions and comparison with the nonlinear Schrödinger equation // Wave Motion, 1999, vol. 29, no. 4, pp. 341–361.
- [4] Batherman W.J.D., Swan C., Taylor P.H. On the efficient numerical simulation of directionally spread surface water waves // J. Comput. Phys., 2001, vol. 174, no. 1, pp. 277–305.
- [5] Dyachenko A.I., Zakharov V.E. On the formation of freak waves on the surface of deep water // Письма в ЖЭТФ, 2008, т. 88, № 5, с. 356–359.
- [6] Zakharov V.E., Dyachenko A.I., Shamin R.V. How probability for freak wave formation can be found // Eur. Phys. J. Spec. Top., 2010, vol. 185, no. 1, pp. 113–124.
- [7] Chalikov D. Freak waves: Their occurrence and probability // Phys. Fluids, 2009, vol. 21, no. 7, 076602, 18 pp.
- [8] Fochesato C., Grilli S., Dias F. Numerical modeling of extreme rogue waves generated by directional energy focusing // Wave Motion, 2007, vol. 44, no. 5, pp. 395–416.
- [9] Xiao W., Liu Y., Wu G., Yue D.K.P. Rogue wave occurrence and dynamics by direct simulations of nonlinear wave-field evolution // J. Fluid Mech., 2013, vol. 720, pp. 357–392.
- [10] Захаров В.Е., Шамин Р.В. О вероятности возникновения волн-убийц // Письма в ЖЭТФ, 2010, т. 91, № 2, с. 68–71.
- [11] Захаров В.Е., Шамин Р.В. Статистика волн-убийц в вычислительных экспериментах // Письма в ЖЭТФ, 2012, т. 96, № 1, с. 68–71.
- [12] Дьяченко А.И., Захаров В.Е., Кузнецов Е.А. Нелинейная динамика свободной поверхности идеальной жидкости // Физика плазмы, 1999, № 10, с. 916–928.
- [13] Захаров В.Е. Устойчивость периодических волн на поверхности глубокой жидкости // Прикл. механ. и техн. физ., 1968, № 2, с. 86–94.
- [14] Whitney J.C. The numerical solution of unsteady free-surface flows by conformal mapping // Proc. of the 2nd Internat. Conf. on Numerical Methods in Fluid Dynamics (University of California,

- Berkeley, CA, Sept 15–19, 1970) / M. Holt (ed.). (Lecture Notes in Phys., vol. 8.) Berlin: Springer, 1971. P. 458–462.
- [15] Овсянников Л. В. К обоснованию теории мелкой воды // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / Акад. наук СССР, Сиб. отд-ние, Ин-т гидродинамики. Новосибирск: АН СССР, 1973. Вып. 15, с. 104–125.
- [16] Chalikov D., Sheinin D. Modeling of extreme waves based on equations of potential flow with a free surface // J. Comput. Phys., 2005, vol. 210, no. 1, pp. 247–273.
- [17] Zakharov V. E., Dyachenko A. I., Vasilyev O. A. New method for numerical simulation of a nonstationary potential flow of incompressible fluid with a free surface // Eur. J. Mech. B Fluids, 2002, vol. 21, no. 3, pp. 283–291.
- [18] Shamin R. V. Dynamics of an ideal liquid with a free surface in conformal variables // J. Math. Sci., 2009, vol. 160, no. 5, pp. 537–678.
- [19] Шамин Р. В. О существовании гладких решений уравнений Дьяченко, описывающих неустановившиеся течения идеальной жидкости со свободной поверхностью // Докл. РАН, 2006, т. 406, № 5, с. 112–113.
- [20] Шамин Р. В. Об одном численном методе в задаче о движении идеальной жидкости со свободной поверхностью // Сиб. журн. вычисл. матем., 2006, т. 9, № 4, с. 379–389.

Processes of concentration of energy in the formation of rogue waves

Roman V. Shamin, Alexander V. Yudin

Sakhalin State University
Lenina st. 290, Yuzhno-Sakhalinsk, 693000, Russia
Peoples' Friendship University of Russia
Miklukho-Maklaya st. 6, Moscow, 117198, Russia
¹roman@shamin.ru, ²yudinorel@gmail.com

We study the processes of concentration of energy in the formation of anomalously large surface waves. We got quantitative characteristics of energy processes in the formation of freak waves using numerical experiments which is based on the full nonlinear equations of hydrodynamics of ideal liquid. The results can be used to assess the risk of dangerous effects of rogue waves in the ocean.

MSC 2010: 35Q35

Keywords: abnormally large surface waves, rogue waves, numerical experiment, hydrodynamics of ideal liquid

Received November 22, 2013, accepted January 31, 2014

Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2014, vol. 10, no. 1, pp. 49–58 (Russian)

