Нелинейная динамика. 2014. Т. 10. № 1. С. 127–131.
Полнотекстовая версия в свободном доступе
http://nd.ics.org.ru

УДК: 531.31, 531.44
MSC 2010: 70E18, 70F40

Комментарий к статье А. В. Борисова, А. А. Килина, И. С. Мамаева «Как управлять шаром Чаплыгина при помощи роторов. II»

Т. Б. Иванова, Е. Н. Пивоварова

В работе рассмотрено управление динамически несимметричным уравновешенным шаром по плоскости в случае проскальзывания в точке контакта. Получены необходимые условия, при которых управление возможно. Построены конкретные алгоритмы управления по заданной траектории.

Ключевые слова: управление, сухое трение, шар Чаплыгина, сфероробот

1. Введение

В связи с созданием и развитием новых систем передвижения, имеющих шаровую форму, в последнее время активно исследуется динамика и возможность управления сферороботами с различными внутренними механизмами [1–4, 7–10]. Одним из примеров является механизм, в котором с помощью роторов создается переменный гироскопический момент [2, 3, 5, 6, 9]. В работах [2, 9] исследуется модель движения данной системы, основанная на неголономных связях, согласно которой проскальзывание отсутствует (то есть скорость точки контакта равна нулю).

Получено 18 октября 2013 года
После доработки 11 ноября 2013 года

Работа выполнена при поддержке гранта Президента РФ поддержки ведущих научных школ НШ-2964.2014.1, гранта Президента РФ поддержки молодых кандидатов наук МК-2171.2014.1. Работа Т. Б. Ивановой поддержана грантом РФФИ 14-01-00289-а.

Иванова Татьяна Борисовна
tbesp@rcd.ru
Пиворарова Елена Николаевна
l.n.pivovarova@gmail.com
Удмуртский государственный университет
426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, д. 1

С другой стороны, в реальных системах, как правило, проскальзывание присутствует и оказывает значительное влияние на динамику всей системы. Задача об управлении при помощи задания скоростей вращения роторов с учетом вязкого и сухого трения рассмотрена в работе [3]. Однако для случая сухого трения в указанной работе была допущена неточность при решении возникающей системы уравнений для проекций скорости точки контакта. В результате был сделан вывод о невозможности управления системой вдоль заданной траектории. В настоящей работе будет показано, что управление возможно (хотя и с ограничениями), будут построены конкретные алгоритмы управления по различным траекториям.

2. Управление при наличии сухого трения

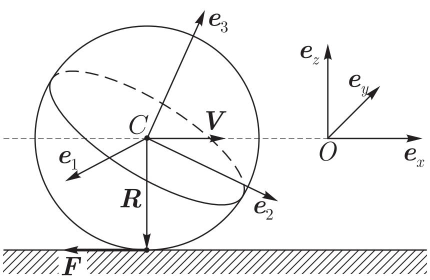

Рис. 1

Рассмотрим движение динамически несимметричного уравновешенного шара (центр масс совпадает с геометрическим центром) по плоскости с учетом проскальзывания в точке контакта. При этом уравнения движения системы имеют вид

$$m\dot{\boldsymbol{V}} = \boldsymbol{F}, \quad (\widetilde{\mathbf{I}}\boldsymbol{\Omega} + \boldsymbol{K})^{\cdot} = \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{F}, \tag{1}$$

где m — масса шара, $\boldsymbol{V}$, $\boldsymbol{\Omega}$ — скорость центра масс и угловая скорость шара, $\boldsymbol{K}$ — гироскопический момент роторов, $\boldsymbol{F}$ — сила трения, действующая в точке контакта шара с плоскостью, $\boldsymbol{R} = -R\boldsymbol{e}_z$ — вектор, направленный из центра масс в точку контакта, $\widetilde{\mathbf{I}}$ — тензор инерции шара относительно центра масс в неподвижных осях, он связан с главным тензором инерции $\mathbf{I} = \operatorname{diag}(I_1, I_2, I_3)$ соотношением

$$\widetilde{\mathbf{I}} = \mathbf{Q}^{\mathrm{T}}\mathbf{I}\mathbf{Q},$$

где $\mathbf{Q}$ — ортогональная матрица, параметризующая поворот подвижных осей $C\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3$ относительно неподвижных $O\boldsymbol{e}_x\boldsymbol{e}_y\boldsymbol{e}_z$ (см. рис. 1). Для того чтобы скорость центра оставалась параллельной плоскости, то есть $V_z \equiv 0$, будем полагать, что в уравнениях (1) сила также удовлетворяет условию $F_z \equiv 0$.

Эти уравнения необходимо дополнить кинематическими соотношениями, описывающими вращение подвижных осей и движение центра масс; их можно представить в матричной и скалярной форме следующим образом:

$$\begin{gathered} \dot{\mathbf{Q}} = \mathbf{Q}\widetilde{\boldsymbol{\Omega}}, \quad \widetilde{\Omega}_{ij} = \varepsilon_{ijk}\Omega_k, \\ \dot{x} = V_x, \quad \dot{y} = V_y, \end{gathered} \tag{2}$$

где ε_{ijk} — тензор Леви-Чивиты, индексы i, j, k принимают значения x, y, z.

Система уравнений (1), (2) допускает векторный интеграл — угловой момент относительно точки контакта:

$$\boldsymbol{M} = \widetilde{\mathbf{I}}\boldsymbol{\Omega} + \boldsymbol{K} + m\boldsymbol{V} \times \boldsymbol{R} = \mathrm{const}. \tag{3}$$

В случае сухого трения

$$\boldsymbol{F} = -\mu mg\frac{\boldsymbol{V}_p}{|\boldsymbol{V}_p|} = -\mu mg\frac{\boldsymbol{V} + \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{R}}{|\boldsymbol{V} + \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{R}|}, \tag{4}$$

где $\boldsymbol{V}_p$ — скорость точки контакта, μ — коэффициент сухого трения, g — ускорение свободного падения.

Нашей задачей является определение управляющего гироскопического момента $\boldsymbol{K}$ при движении центра шара по заданной траектории $\boldsymbol{r}(s(t))$, где $s(t)$ — закон движения по траектории.

Из соотношений (1), (4) следует, что

1) для ускорения центра масс шара выполняется соотношение

$$\ddot{\boldsymbol{r}}^2 = \mu^2 g^2, \tag{5}$$

2) невозможно определить модуль скорости точки контакта, а только ее направление.

Действительно, скорость точки контакта можно представить в виде

$$\boldsymbol{V}_p = -|\,\boldsymbol{V}_p|\frac{\ddot{\boldsymbol{r}}}{\mu g},$$

и так как $|\ddot{\boldsymbol{r}}| = \mu g$, то $\boldsymbol{V}_p = -|\,\boldsymbol{V}_p|\boldsymbol{i}$, где $\boldsymbol{i} = \dfrac{\ddot{\boldsymbol{r}}}{|\ddot{\boldsymbol{r}}|}$ — орт в направлении вектора ускорения $\ddot{\boldsymbol{r}}$. Таким образом, $|\,\boldsymbol{V}_p| = \lambda$ может быть любой положительно-определенной функцией. При движении по заданной траектории в общем случае $\lambda(t)$ — функция времени. Если необходимо при управлении поддерживать постоянную скорость точки контакта, необходимо выбрать $\lambda = \mathrm{const}$.

Предложение. *Для любой гладкой траектории $\boldsymbol{r}(s)$ существует такое управление, при котором центр шара будет двигаться по заданной траектории по закону $s(t)$, который удовлетворяет уравнению*

$$\ddot{s}^2 + k(s)^2\dot{s}^4 = \mu^2 g^2, \tag{6}$$

где $k(s)$ — кривизна траектории. При этом имеется произвол в выборе функции $\Omega_z(t)$, который можно использовать для некоторой дополнительной ориентации шара либо в процессе движения, либо в конечной точке траектории.

Доказательство. Угловой момент относительно точки контакта (3) сохраняется, а следовательно, на нулевом уровне этого интеграла гироскопический момент роторов, определяющий управление, может быть получен из соотношения

$$\boldsymbol{K} = -\frac{1}{R}\widetilde{\mathbf{I}}\left(\left(\ddot{\boldsymbol{r}}\frac{\lambda}{\mu g} - \dot{\boldsymbol{r}}\right)\times\boldsymbol{k}\right) - m\dot{\boldsymbol{r}}\times\boldsymbol{R}, \tag{7}$$

где $\boldsymbol{k} = (0, 0, 1)$.

Таким образом, для нахождения управления необходимо:

– используя выражение для силы трения (4), из первого уравнения (1) определить $\Omega_x(t)$, $\Omega_y(t)$,

– при помощи (7) определить управление $\boldsymbol{K}(t)$. ■

Замечание. В данном случае траектория движения может быть любой, но закон движения строго фиксирован уравнением (6).

Пример 1. Рассмотрим движение шара по прямой вдоль оси Ox с постоянным ускорением $a_0 = \mu g$ по закону

$$x(t) = \frac{\mu g t^2}{2}, \quad y(t) = 0.$$

Угловую скорость шара найдем из первого уравнения (1) с заданным значением $\lambda = \text{const}$:

$$\Omega_x(t) = 0, \quad \Omega_y(t) = \frac{\dot{x}}{R} + \frac{\lambda \ddot{x}}{\mu g R} = \frac{\mu g}{R} t + \frac{\lambda}{R}, \quad \Omega_z(t) = 0.$$

Тогда гироскопический момент роторов —

$$K_1 = K_3 = 0, \quad K_2 = -\frac{I_2}{R}\lambda - \mu g \left(\frac{I_2}{R} + mR\right) t.$$

Таким образом, поскольку в начальный момент времени угловая скорость не равна нулю, параметр λ определяет начальное проскальзывание в точке контакта.

Пример 2. Рассмотрим движение шара по дуге окружности радиуса r по закону

$$x(t) = r\cos\omega t, \quad y(t) = r\sin\omega t,$$

значение ω выберем так, чтобы выполнялось условие (5), то есть $\omega = \sqrt{\frac{\mu g}{r}}$. В этом случае угловые скорости имеют вид:

$$\Omega_x(t) = -\frac{1}{R}\left(\dot{y} + \frac{\lambda \ddot{y}}{\mu g}\right) = \frac{r\omega}{R}\left(\cos\omega t - \frac{\lambda\omega}{\mu g}\sin\omega t\right),$$
$$\Omega_y(t) = \frac{1}{R}\left(\dot{x} + \frac{\lambda \ddot{x}}{\mu g}\right) = -\frac{r\omega}{R}\left(\sin\omega t + \frac{\lambda\omega}{\mu g}\cos\omega t\right).$$

Подставляя полученные соотношения в (7), найдем зависимость для гироскопического момента, представленную на рисунке 2.

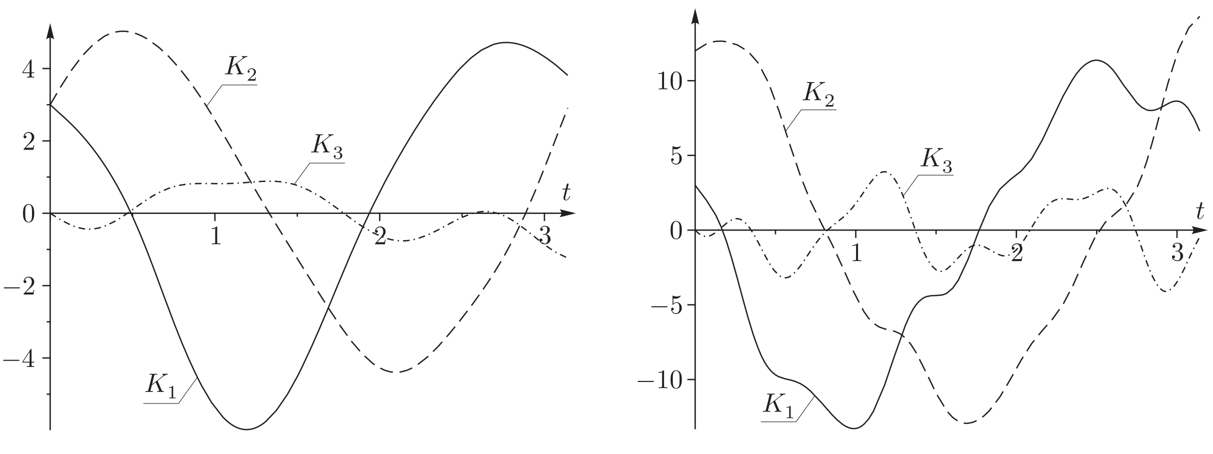

Рис. 2. Управляющий гироскопический момент роторов при движении сфероробота по дуге окружности за время прохождения шаром полной окружности при параметрах: $\mu = 0.2$, $\mathbf{I} = \text{diag}(2, 3, 4)$, $R = 1$, $r = 0.5$. Слева графики для $\lambda = 1$, справа — для $\lambda = 4$.

Авторы благодарят А. В. Борисова, И. С. Мамаева, А. А. Килина за обсуждения и полезные замечания.

Список литературы

[1] Alves J., Dias J. Design and control of a spherical mobile robot // J. Systems and Control Engineering, 2003, vol. 217, pp. 457–467.

[2] Борисов А. В., Килин А. А., Мамаев И. С. Как управлять шаром Чаплыгина при помощи роторов // Нелинейная динамика, 2012, т. 8, № 2, с. 289–307. (*См. также*: Borisov A. V., Kilin A. A., Mamaev I. S. How to control Chaplygin's sphere using rotors // Regul. Chaotic Dyn., 2012, vol. 17, nos. 3–4, pp. 258–272.)

[3] Борисов А. В., Килин А. А., Мамаев И. С. Как управлять шаром Чаплыгина при помощи роторов: II // Нелинейная динамика, 2013, т. 9, № 1, с. 59–76. (*См. также*: Borisov A. V., Kilin A. A., Mamaev I. S. How to control the Chaplygin ball using rotors: II // Regul. Chaotic Dyn., 2013, vol. 18, nos. 1–2, pp. 144–158.)

[4] Camicia C., Conticelli F., Bicchi A. Nonholonimic kinematics and dynamics of the sphericle // Proc. of the 2000 IEEE/RSJ Internat. Conf. on Intelligent Robots and Systems, 2000, pp. 805–810.

[5] Joshi V. A., Banavar R. N. Motion analysis of a spherical mobile robot // Robotica, 2009, vol. 27, no. 3, pp. 343–353.

[6] Joshi V. A., Banavar R. N., Hippalgaonkar R. Design and analysis of a spherical mobile robot // Mech. Mach. Theory, 2010, vol. 45, pp. 130–136.

[7] Koshiyama A., Yamafuji K. Design and control of an All-direction Steering Type Mobile Robot // Int. J. Robot. Res., 1993, vol. 12, no. 5, pp. 411–419.

[8] Sang S., Zhao J., Wu H., Chen S., An Q. Modeling and simulation of a spherical mobile robot // Computer Science and Information Systems, 2010, vol. 7, no. 1, pp. 51–62.

[9] Svinin M., Morinaga A., Yamamoto M. On the dynamic model and motion planning for a spherical rolling robot actuated by orthogonal internal rotors // Regul. Chaotic Dyn., 2013, vol. 18, nos. 1–2, pp. 126–143.

[10] Tomik F., Nudehi S., Flynn L. L., Mukherjee R. Design, fabrication and control of Spherobot: a spherical mobile robot // J. Intell. Robot. Syst., 2012, vol. 67, no. 2, pp. 117–131.

Comment on the paper by A. V. Borisov, A. A. Kilin, I. S. Mamaev "How to control the Chaplygin ball using rotors. II"

Tatyana B. Ivanova[1], Elena N. Pivovarova[2]

[1,2]Udmurt State University
Universitetskaya 1, Izhevsk, 426034 Russia

[1]`tbesp@rcd.ru`, [2]`l.n.pivovarova@gmail.com`

In this paper we consider the control of a dynamically asymmetric balanced ball on a plane in the case of slipping at the contact point. Necessary conditions under which a control is possible are obtained. Specific algorithms of control along a given trajectory are constructed.

MSC 2010: 70E18, 70F40
Keywords: control, dry friction, Chaplygin's ball, spherical robot

Received October 18, 2013, accepted November 11, 2013
Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2014, vol. 10, no. 1, pp. 127–131 (Russian)