Нелинейная динамика. 2014. Т. 10. № 1. С. 17–33.
Полнотекстовая версия в свободном доступе
http://nd.ics.org.ru

УДК: 517.938
MSC 2010: 37E30

О топологической классификации диффеоморфизмов на 3-многообразиях с поверхностными двумерными аттракторами и репеллерами

В. З. Гринес, Ю. А. Левченко, О. В. Починка

Рассматривается класс диффеоморфизмов, заданных на трехмерных многообразиях и удовлетворяющих аксиоме A С. Смейла в предположении, что неблуждающее множество каждого диффеоморфизма состоит из поверхностных двумерных базисных множеств. Исследована взаимосвязь между динамикой такого диффеоморфизма и топологией несущего многообразия. Также установлено, что каждый рассматриваемый диффеоморфизм является Ω-сопряженным модельному диффеоморфизму, заданному на многообразии, являющемся локально тривиальным расслоением над окружностью со слоем тор. При некоторых ограничениях на асимптотическое поведение двумерных инвариантных многообразий точек базисных множеств получена топологическая классификация структурно устойчивых диффеоморфизмов из рассматриваемого класса.

Ключевые слова: диффеоморфизм, базисное множество, топологическая сопряженность, аттрактор, репеллер

Получено 30 декабря 2013 года
После доработки 22 января 2014 года

Работа выполнена при финансовой поддержке грантов 12-01-00672, 13-01-12452-офи-м РФФИ, гранта Правительства Российской Федерации 11.G34.31.0039 и гранта Минобрнауки РФ в рамках государственного задания на оказание услуг в 2012–2014 гг. подведомственными высшими учебными заведениями (шифр заявки 1.1907.2011).

Гринес Вячеслав Зигмундович
vgrines@yandex.ru
Левченко Юлия Алексеевна
ulev4enko@gmail.com
Починка Ольга Витальевна
olga-pochinka@yandex.ru
Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского
603950, Россия, г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, д. 23

1. Введение и формулировка результатов

В работе рассматриваются диффеоморфизмы, заданные на гладком замкнутом ориентируемом 3-многообразии M^3 и удовлетворяющие аксиоме A С. Смейла (A-диффеоморфизмы). Согласно спектральной теореме С. Смейла [25], неблуждающее множество $NW(f)$ A-диффеоморфизма f представляется в виде объединения конечного числа попарно-непересекающихся замкнутых инвариантных множеств, называемых *базисными*, каждое из которых содержит всюду плотную траекторию. Условие нуль-мерности или одномерности базисного множества A-диффеоморфизма $f\colon M^3 \to M^3$ не накладывает ограничений на топологию объемлющего многообразия, что следует, например, из работ [3, 15, 26]. Однако в других случаях это не так. Действительно, если $NW(f)$ содержит базисное множество $\mathcal{B}$, размерность которого равна трем, то f в этом случае является диффеоморфизмом Аносова, многообразие M^3 является трехмерным тором $\mathbb{T}^3$, и топологическая классификация таких диффеоморфизмов была получена Дж. Фрэнксом в [6]. Если $\dim \mathcal{B} = 2$, то, согласно [20], $\mathcal{B}$ является либо аттрактором, либо репеллером. Из [5] следует, что любой двумерный аттрактор (репеллер) A-диффеоморфизма $f\colon M^3 \to M^3$ является либо растягивающимся аттрактором (сжимающимся репеллером), либо поверхностным аттрактором (поверхностным репеллером). Из [9] и [18] следует, что любое многообразие M^3, допускающее структурно устойчивый диффеоморфизм $f: M^3 \to M^3$ с двумерным растягивающимся аттрактором (сжимающимся репеллером), диффеоморфно трехмерному тору $\mathbb{T}^3$, и, более того, f топологически сопряжен с диффеоморфизмом, полученным из диффеоморфизма Аносова с помощью обобщенной хирургической операции Смейла.

В настоящей работе рассматривается класс A-диффеоморфизмов на трехмерных многообразиях, неблуждающее множество которых состоит из двумерных поверхностных базисных множеств. Устанавливается, что каждый диффеоморфизм из рассматриваемого класса существует только на многообразии, являющемся локально тривиальным расслоением над окружностью со слоем тор, и является Ω-сопряженным модельному диффеоморфизму. При некоторых ограничениях на асимптотическое поведение двумерных инвариантных многообразий точек базисных множеств получена топологическая классификация структурно устойчивых диффеоморфизмов из рассматриваемого класса. Введем необходимые определения для точной формулировки результатов.

Напомним (см. [25]), что под выполнением *аксиомы* A для диффеоморфизма $f\colon M^3 \to M^3$ понимается выполнение следующих условий: 1) множество неблуждающих точек $NW(f)$ является гиперболическим[1], 2) периодические точки плотны в $NW(f)$. В силу [17, 22, 23], необходимым и достаточным условием структурной устойчивости диффеоморфизма f является выполнение аксиомы A и строгого условия трансверсальности. *Строгое условие трансверсальности* предполагает наличие только трансверсальных пересечений устойчивых и неустойчивых многообразий точек из неблуждающего множества.

[1]Замкнутое f-инвариантное множество $\Lambda \subset M^3$ называется *гиперболическим*, если существует непрерывное Df-инвариантное разложение касательного подрасслоения $T_\Lambda M$ в сумму $E^s_\Lambda \oplus E^u_\Lambda$ устойчивого и неустойчивого подрасслоений, таких, что выполняются следующие оценки: $\|Df^k(v)\| \leqslant C\lambda^k\|v\|$, $\|Df^{-k}(w)\| \leqslant C\lambda^k\|w\|$, $\forall v \in E^s_\Lambda$, $\forall w \in E^u_\Lambda$, $\forall k \in \mathbb{N}$, для некоторых фиксированных чисел $C > 0$ и $\lambda < 1$. Гиперболическая структура множества Λ приводит к существованию у каждой точки $x \in \Lambda$ устойчивого W^s_x и неустойчивого W^u_x многообразий, которые определяются следующим образом: $W^s_x = \{y \in M\colon d(f^k(x), f^k(y)) \to 0, k \to +\infty\}$, $W^u_x = \{y \in M\colon d(f^k(x), f^k(y)) \to 0, k \to -\infty\}$, где d — метрика на Λ, индуцированная римановой метрикой на $T_\Lambda M$.

В силу [2, 4] каждое базисное множество $\mathcal{B}$ представляется в виде объединения $\mathcal{B}_1 \cup \ldots \cup \mathcal{B}_k$, $k \geqslant 1$ замкнутых подмножеств, таких, что $f^k(\mathcal{B}_i) = \mathcal{B}_i$, $f(\mathcal{B}_i) = \mathcal{B}_{i+1}$ ($\mathcal{B}_{k+1} = \mathcal{B}_1$). Множества $\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_k$ называются *периодическими компонентами*[2], а число k — *периодом* базисного множества $\mathcal{B}$.

Пусть $\mathcal{B}$ — базисное множество диффеоморфизма f. Положим $a = \dim E^s_{\mathcal{B}}$, $b = \dim E^u_{\mathcal{B}}$ и назовем пару (a, b) *типом* базисного множества $\mathcal{B}$.

Базисное множество $\mathcal{B}$ диффеоморфизма f называется *аттрактором*, если существует замкнутая окрестность U множества $\mathcal{B}$, такая, что $f(U) \subset \operatorname{int} U$, $\bigcap\limits_{j \geqslant 0} f^j(U) = \mathcal{B}$. Аттрактор для диффеоморфизма f^{-1} называется *репеллером* диффеоморфизма f.

Согласно работе [20], для любого A-диффеоморфизма $f\colon M^3 \to M^3$ имеют место следующие факты (их доказательство можно найти в книге [12]).

Утверждение 1.

- *Базисное множество $\mathcal{B}$ диффеоморфизма f является аттрактором (репеллером) тогда и только тогда, когда $\mathcal{B} = \bigcup\limits_{x \in \mathcal{B}} W^u(x)$ $(\mathcal{B} = \bigcup\limits_{x \in \mathcal{B}} W^s(x))$;*
- *если базисное множество $\mathcal{B}$ диффеоморфизма f имеет топологическую размерность 2 или 3, то оно является либо аттрактором, либо репеллером.*

Напомним, что (см. [27]) аттрактор $\mathcal{B}$ диффеоморфизма f называется *растягивающимся*, если топологическая размерность $\dim \mathcal{B}$ равна размерности W^u_x, $x \in \mathcal{B}$. *Сжимающийся репеллер* диффеоморфизма f определяется как растягивающийся аттрактор для f^{-1}. Согласно [8], базисное множество $\mathcal{B}$ диффеоморфизма $f : M^3 \to M^3$ называется *поверхностным*, если оно принадлежит f-инвариантной замкнутой поверхности $M^2_{\mathcal{B}}$ (не обязательно связной), топологически вложенной в многообразие M^3 и называемой *носителем* множества $\mathcal{B}$.

В [8] доказано следующее утверждение.

Утверждение 2. *Для любого двумерного поверхностного аттрактора (репеллера) $\mathcal{B}$ A-диффеоморфизма $f\colon M^3 \to M^3$ выполняется следующее:*

- *$\mathcal{B}$ имеет тип $(2, 1)$ $((1, 2))$ и не является, следовательно, растягивающимся аттрактором (сжимающимся репеллером);*
- *$\mathcal{B}$ совпадает со своим носителем, являющимся объединением конечного числа многообразий, каждое из которых ручно вложено*[3] *в M^3 и гомеоморфно двумерному тору;*
- *ограничение некоторой степени диффеоморфизма f на любую компоненту связности носителя сопряжено с гиперболическим автоморфизмом*[4] *тора.*

---

[2] В [4] множества $\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_k$ назывались C-плотными компонентами; мы называем их периодическими, следуя книге [12].

[3] Следует подчеркнуть, что носитель двумерного поверхностного множества диффеоморфизма f может быть не гладким в каждой своей точке (соответствующий пример имеется в [14]).

[4] *Алгебраическим автоморфизмом* тора $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ называется диффеоморфизм $\widehat{C}$, задаваемый матрицей $C = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ из множества $GL(2, \mathbb{Z})$ целочисленных матриц с определителем ± 1, то есть $\widehat{C}(x, y) = (ax + by, cx + dy) \pmod 1$. Алгебраический автоморфизм $\widehat{C}$ называется *гиперболическим*, если собственные значения λ_1, λ_2 матрицы C удовлетворяют условиям $|\lambda_1| < 1 < |\lambda_2|$. При этом матрица C также называется *гиперболической*.

В настоящей работе рассматривается класс G, состоящий из сохраняющих ориентацию A-диффеоморфизмов $f\colon M^3 \to M^3$, неблуждающее множество которых состоит только из двумерных поверхностных базисных множеств, причем для любого базисного множества $\mathcal{B}$ периода k ограничение диффеоморфизма f^k на его периодическую компоненту сохраняет ее ориентацию.

Пусть $f \in G$. Обозначим через $\mathcal{A}$ ($\mathcal{R}$) объединение всех аттракторов (репеллеров), принадлежащих $NW(f)$. Следующее утверждение уточняет топологию многообразия M^3. Этот результат был доказан в работе [10], мы приводим его доказательство в разделе 2 для полноты изложения.

Утверждение 3. *Для любого диффеоморфизма $f \in G$ верно следующее:*

- *множества $\mathcal{A}$, $\mathcal{R}$ не пусты и состоят из одинакового числа $n_f \geqslant 1$ базисных множеств;*
- *все периодические компоненты базисных множеств имеют один и тот же период $k_f \geqslant 1$;*
- *множество $M^3 \setminus (\mathcal{A} \cup \mathcal{R})$ состоит из $2n_f k_f$ компонент связности, граница каждой из которых состоит в точности из одной периодической компоненты аттрактора и одной периодической компоненты репеллера, а ее замыкание гомеоморфно многообразию $\mathbb{T}^2 \times [0,1]$.*

В силу утверждения 3 (см. также лемму 2), несущее многообразие M^3 гомеоморфно фактор-пространству M_τ, полученному из $\mathbb{T}^2 \times [0,1]$ отождествлением точек $(z,1)$ и $(\tau(z),0)$, где $\tau\colon \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ есть некоторый гомеоморфизм. Будем говорить, что M_τ есть локально тривиальное расслоение со слоем тор. Следующая теорема (доказательство приведено в разделе 2) выделяет множество всех многообразий, которые допускают диффеоморфизмы из класса G.

Теорема 1. *Пусть многообразие M^3 допускает диффеоморфизм f из класса G. Тогда M^3 диффеоморфно многообразию $M_{\widehat{J}}$, где $\widehat{J}$ — алгебраический автоморфизм тора, заданный матрицей J, которая либо является гиперболической, либо совпадает с единичной матрицей $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, либо совпадает с матрицей $-I = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.*

Замечание 1. В работе [13] аналогичный вывод о структуре многобразия получен в предположении, что многообразие M^3 является неприводимым (то есть любая цилиндрически вложенная в M^3 двумерная сфера ограничивает в нем трехмерный шар) и допускает диффеоморфизм $f\colon M^3 \to M^3$ с *инвариантным аносовским тором* (то есть диффеоморфизмы с гладким f-инвариантным подмногообразием, гомеоморфным тору, на фундаментальной группе которого f индуцирует гиперболическое действие). Заметим, что в теореме 1 не требуется неприводимость многообразия M^3.

Представим многообразие $M_{\widehat{J}}$ как пространство орбит $M_{\widehat{J}} = (\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R})/\Gamma$, где $\Gamma = \{\gamma^k, k \in \in \mathbb{Z}\}$ есть группа степеней диффеоморфизма $\gamma\colon \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}$, заданного формулой $\gamma(z,r) = (\widehat{J}(z), r-1)$. Обозначим через $p_{\widehat{J}}\colon \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R} \to M_{\widehat{J}}$ естественную проекцию.

Введем класс $\Phi \subset G$ модельных диффеоморфизмов. Напомним, что $SL(2,\mathbb{Z})$ является подмножеством множества $GL(2,\mathbb{Z})$, состоящим из гиперболических матриц с определителем 1. Пусть $C \in SL(2,\mathbb{Z})$ — гиперболическая матрица, такая, что $CJ = JC$. Для $n,k \in \mathbb{N}$ обозначим через $\psi_{n,k}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ диффеоморфизм, являющийся сдвигом на единицу времени потока $\dot{r} = \sin 2\pi nkr$. Для $k = 1$ положим $l = 0$ и для $k > 1$ пусть $l \in \{1, \ldots, k-1\}$ и является натуральным числом, взаимно простым с k. Обозначим через $\chi_{k,l}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ диффеоморфизм, заданный формулой $\chi_{k,l}(r) = r - \dfrac{l}{k}$. Положим $\varphi_{n,k,l} = \psi_{n,k}\chi_{k,l}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Обозначим через $\widetilde{\phi}_{C,n,k,l}\colon \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}$ диффеоморфизм, заданный формулой $\widetilde{\phi}_{C,n,k,l}(z, r) = (\widehat{C}(z), \varphi_{n,k,l}(r))$. Непосредственно проверяется, что $\widetilde{\phi}_{C,n,k,l}\gamma = \gamma\widetilde{\phi}_{C,n,k,l}$, откуда следует, что отображение $\phi_{C,n,k,l}\colon M_{\widehat{J}} \to M_{\widehat{J}}$, заданное формулой $\phi_{C,n,k,l} = p_{\widehat{J}}\widetilde{\phi}_{C,n,k,l}p_{\widehat{J}}^{-1}$, где $p_{\widehat{J}}^{-1}(x)$ есть полный прообраз точки x, является диффеоморфизмом. Обозначим через Φ множество таких диффеоморфизмов.

Следующий результат дает топологическую классификацию модельных диффеоморфизмов (доказательство в разделе 2.1).

Теорема 2. *Два диффеоморфизма $\phi_{C,n,k,l}\colon M_{\widehat{J}} \to M_{\widehat{J}}$, $\phi_{C',n',k',l'}\colon M_{\widehat{J}'} \to M_{\widehat{J}'}$ из класса Φ топологически сопряжены тогда и только тогда, когда*

1. *существует матрица $H \in GL(2, \mathbb{Z})$, такая, что $CH = HC'$;*
2. *$k = k'$, $n = n'$ и выполнено хотя бы одно из следующих условий:*
   - *$JH = HJ'$ и $l = l'$,*
   - *$J^{-1}H = HJ'$ и $k - l = l'$,*
   - *$J^{-1}H = HJ'$ и $l = l' = 0$.*

Напомним, что два диффеоморфизма $f\colon M^n \to M^n$, $f'\colon M'^n \to M'^n$ называются *Ω-сопряженными*, если существует гомеоморфизм $h\colon M^n \to M'^n$, такой, что $h(NW(f)) = NW(f')$ и $hf|_{NW(f)} = f'h|_{NW(f)}$.

Следующая теорема доказана в разделе 3.

Теорема 3. *Любой диффеоморфизм из класса G является Ω-сопряженным некоторому диффеоморфизму из класса Φ.*

Обозначим через G_* подмножество G, состоящее из структурно устойчивых диффеоморфизмов $f\colon M^3 \to M^3$, удовлетворяющих следующему условию: 1) для любых точек x, y, таких, что $x \in \mathcal{A}$, $y \in \mathcal{R}$, либо пересечение $W^s(x) \cap W^u(y)$ пусто, либо каждая компонента связности пересечения $W^s(x) \cap W^u(y)$ является открытой дугой, имеющей в точности две граничные точки, одна из которых принадлежит $\mathcal{A}$, другая $\mathcal{R}$; 2) объединение замыканий всех таких дуг определяет f-инвариантное одномерное слоение на многообразии M^3. Непосредственно из конструкции диффеоморфизмов класса Φ следует, что $\Phi \subset G_*$.

Следующая теорема доказана в разделе 4.

Теорема 4. *Любой диффеоморфизм из класса G_* топологически сопряжен некоторому диффеоморфизму из класса Φ.*

2. Структура несущего многообразия диффеоморфизмов класса G

Доказательство утверждения 3.

Утверждение 3 будет следовать из предложений 1 и 2.

Предложение 1. *Для любого диффеоморфизма $f \in G$ множества $\mathcal{A}$, $\mathcal{R}$ не пусты и состоят из одинакового числа $n_f \geqslant 1$ базисных множеств одного и того же периода $k_f \geqslant 1$. Множество $M^3 \setminus (\mathcal{A} \cup \mathcal{R})$ имеет $2n_fk_f$ компонент связности, граница каждой* *из которых состоит в точности из одной периодической компоненты аттрактора и одной периодической компоненты репеллера.*

Доказательство. Покажем сначала, что множества $\mathcal{A}$, $\mathcal{R}$ не пусты. Предположим противное. Согласно [25, следствие 6.3 к теореме 6.2], все многообразие M^3 представляется в виде $M^3 = \bigcup\limits_i W^s_{\mathcal{B}_i} = \bigcup\limits_i W^u_{\mathcal{B}_i}$, где $\mathcal{B}_i$ — базисное множество диффеоморфизма f из разложения $NW(f) = \bigcup\limits_i \mathcal{B}_i$. Пусть $\mathcal{A} = \varnothing$. Тогда $M^3 = \bigcup\limits_i W^s_{\mathcal{B}_i}$, при этом, согласно [20], для любой точки $z \in \mathcal{R}$ устойчивое многообразие $W^s(z)$ принадлежит $\mathcal{R}$. Следовательно, $M^3 \subset \mathcal{R}$, что невозможно, так как множество $\mathcal{R}$ двумерно. Таким образом, множества $\mathcal{A}$, $\mathcal{R}$ не пусты.

Рассмотрим множество $M^3 \setminus (\mathcal{A} \cup \mathcal{R})$ и обозначим через V его любую компоненту связности. Заметим, что $V \subset \bigcup\limits_{z\in\mathcal{A}} W^s(z)$ и $V \subset \bigcup\limits_{z\in\mathcal{R}} W^u(z)$. Тогда существует единственная компонента связности A некоторого аттрактора из множества $\mathcal{A}$ и единственная компонента связности R некоторого репеллера из множества $\mathcal{R}$, такие, что $V \subset \bigcup\limits_{z\in A} W^s(z)$ и $V \subset \bigcup\limits_{z\in R} W^u(z)$. Следовательно, $cl\ V = A \cup V \cup R$ и $\partial V = A \cup R$.

Покажем, что число компонент всех аттракторов из множества $\mathcal{A}$ совпадает с числом компонент репеллеров из множества $\mathcal{R}$. Зафиксируем любую компоненту некоторого аттрактора из множества $\mathcal{A}$ и обозначим ее через A_1. Тогда A_1 принадлежит границе двух областей $V_1, V_2 \subset M^3 \setminus (\mathcal{A} \cup \mathcal{R})$. Пусть $\partial V_1 = A_1 \cup R_1$ и $\partial V_2 = A_1 \cup R_2$. Тогда либо R_1 и R_2 совпадают и доказываемое утверждение верно, либо существуют области V_3, V_4, такие, что $R_1 \subset \partial V_3$, $R_2 \subset \partial V_4$. Обозначим через A_2 граничную компоненту области V_4, отличную от R_2, и через A_3 — граничную компоненту области V_3, отличную от R_1. Возможны два случая: либо $A_2 = A_3$ и доказываемое утверждение верно, либо существуют области V_5, V_6, в границу которых входят компоненты A_3, A_2 соответственно. Продолжая рассуждения и учитывая, что число базисных множеств конечно, получаем, что число периодических компонент всех аттракторов совпадает с числом периодических компонент всех репеллеров.

Докажем, что все компоненты из множества $\mathcal{A} \cup \mathcal{R}$ имеют одинаковый период. Для этого сначала покажем, что если в $\mathcal{A} \cup \mathcal{R}$ существует компонента периода 1, то и все компоненты множества $\mathcal{A} \cup \mathcal{R}$ будут периода 1.

Предположим для определенности, что некоторая компонента связности A из множества $\mathcal{A}$ имеет период 1. Пусть V — область, принадлежащая $M^3 \setminus (\mathcal{A} \cup \mathcal{R})$, такая, что $\partial V = A \cup R$, где R — компонента связности, принадлежащая множеству $\mathcal{R}$. Покажем, что R также имеет период 1. Предположим противное, то есть $f(R) \neq R$. Положим $\widetilde{V} = f(V)$ и заметим, что $\partial \widetilde{V} = f(A) \cup f(R) = A \cup f(R)$, откуда следует, что $V \cap \widetilde{V} \neq \varnothing$. Рассмотрим трубчатую окрестность $U(A)$ аттрактора A, такую, что $U(A) \subset V \cup A \cup \widetilde{V}$. Обозначим через Q, $\widetilde{Q}$ компоненты связности множества $U(A) \setminus A$, такие, что $Q \subset V$ и $\widetilde{Q} \subset \widetilde{V}$ соответственно. Тогда $f(Q) \subset \widetilde{V}$ и $f(\widetilde{Q}) \subset V$. Так как диффеоморфизм f сохраняет ориентацию M^3, то получаем противоречие с тем, что ограничение диффеоморфизма f на A сохраняет ориентацию A.

Пусть теперь в $\mathcal{A} \cup \mathcal{R}$ существуют компоненты различного периода. Обозначим через k наименьший из периодов базисных множеств f, то есть для диффеоморфизма f^k по крайней мере одно базисное множество из $NW(f^k)$ имеет период 1. Тогда, в силу доказанного выше все базисные множества диффеоморфизма f^k имеют период 1, а значит, все базисные множества диффеоморфизма f имеют период k.

В доказательстве предложения 2 используются две следующие леммы.

Лемма 1. *Пусть на замкнутом n-мерном многообразии M заданы две связные области Q и P, причем граница P состоит из двух не пересекающихся множеств S_1, S_2, таких, что $S_1 \subset Q$, $S_2 \cap (Q \cup \partial Q) = \varnothing$. Тогда если S_1 ограничивает область $Q_1 \subset Q$, то $\partial Q \subset P$.*

Доказательство. Положим $P_1 = P \cup Q_1 \cup S_1$. Так как $P_1 \cap Q \neq \varnothing$ и граница S_2 области P_1 не имеет общих точек с замыканием $cl\ Q$, то $Q \cup \partial Q \subset P_1$. Из равенства $\partial Q \cap (Q_1 \cup S_1) = \varnothing$ следует, что $\partial Q \subset P$.

Лемма 2. *Пусть P_1, P_2 и Q — топологические пространства, такие, что существуют гомеоморфизмы $h_1\colon Q \times [0,1] \to P_1$ и $h_2\colon Q \times [0,1] \to P_2$. Тогда*

a) если $P_1 \cap P_2 = h_1(Q \times \{1\}) = h_2(Q \times \{0\})$, то существует гомеоморфизм $H\colon Q \times [0,1] \to P_1 \cup P_2$;

b) если $P_1 \cap P_2 = h_1(Q \times \{0,1\}) = h_2(Q \times \{0,1\})$, то существует непрерывное отображение $H\colon Q \times [0,1] \to P_1 \cup P_2$, такое, что ограничения $H|_{Q\times(0,1)}$, $H|_{Q\times\{0\}}$ и $H|_{Q\times\{1\}}$ являются гомеоморфизмами.

Доказательство. В случае a) определим гомеоморфизм $h_{1,2}\colon Q \to Q$ формулой $h_2^{-1}(h_1(q,1)) = (h_{1,2}(q),0)$ для любой точки $q \in Q$ и гомеоморфизм $H_{1,2}\colon Q \times [0,1] \to Q \times [0,1]$ формулой $H_{1,2}(q,t) = (h_{1,2}(q),t)$. Положим $H_2 = h_2 H_{1,2}\colon Q \times [0,1] \to P_2$. Тогда искомый гомеоморфизм $H\colon Q \times [0,1] \to P_1 \cup P_2$ определяется формулой
$$H(q,t) = \begin{cases} h_1(q,2t), t \in \left[0,\dfrac{1}{2}\right], \\ H_2(q,2t-1), t \in \left[\dfrac{1}{2},1\right]. \end{cases}$$

В случае b), не уменьшая общности, можно считать, что $h_1(Q \times \{1\}) = h_2(Q \times \{0\})$. Тогда отображение H, построенное в пункте a), будет взаимно однозначным на множестве $Q \times [0,1)$ и $H(Q \times \{0\}) = H(Q \times \{1\})$. По построению, отображение H является непрерывным и его ограничения $H|_{Q\times(0,1)}$, $H|_{Q\times\{0\}}$ и $H|_{Q\times\{1\}}$ являются гомеоморфизмами.

Предложение 2. *Для любого диффеоморфизма $f \in G$ каждая компонента связности множества $M^3 \setminus (\mathcal{A} \cup \mathcal{R})$ гомеоморфна $\mathbb{T}^2 \times [0,1]$.*

Доказательство. Положим $g = f^{k_f}$. Пусть A (или R) некоторый аттрактор (или репеллер), принадлежащий неблуждающему множеству диффеоморфизма g. Согласно утверждению 2, поверхность A (R) является цилиндрически вложенной. Поэтому существует замкнутая окрестность $U(A)$ ($U(R)$) и гомеоморфизм h_A (h_R), такие, что $h_A\colon U(A) \to \mathbb{T}^2 \times [-1,1]$ ($h_R\colon U(R) \to \mathbb{T}^2 \times [-1,1]$), причем $h_A(A) = \mathbb{T}^2 \times \{0\}$ ($h_R(R) = \mathbb{T}^2 \times \{0\}$). Не уменьшая общности, будем считать, что граница окрестности $U(A)$ ($U(R)$) является гладкой[5]. Положим $U_A^1 = h_A^{-1}(\mathbb{T}^2 \times [-1,0])$, $U_A^2 = h_A^{-1}(\mathbb{T}^2 \times [0,1])$ ($U_R^1 = h_R^{-1}(\mathbb{T}^2 \times [-1,0])$, $U_R^2 = h_R^{-1}(\mathbb{T}^2 \times [0,1])$) и $T_A^1 = h_A^{-1}(\mathbb{T}^2 \times \{-1\})$, $T_A^2 = h_A^{-1}(\mathbb{T}^2 \times \{1\})$ ($T_R^1 = h_R^{-1}(\mathbb{T}^2 \times \{-1\})$, $T_R^2 = h_R^{-1}(\mathbb{T}^2 \times \{1\})$).

Зафиксируем аттрактор A. Так как неблуждающее множество диффеоморфизма g состоит только из аттракторов и репеллеров, то существует натуральное число m, такое, что $f^{-m}(T_A^1)$ принадлежит окрестности некоторого репеллера $R_1 \subset NW(g)$ и $f^{-m}(T_A^2)$ принадлежит окрестности репеллера $R_2 \subset NW(g)$ (заметим, что если $n_f = 1$, то $R_1 = R_2 = R$). Не

[5] Так как $\operatorname{int} U$ — открытое подмножество гладкого многообразия M^3, то $\operatorname{int} U$ является гладким подмногообразием. По условию оно гомеоморфно $\mathbb{T}^2 \times (-1,1)$, а значит, в силу [19], диффеоморфно $\mathbb{T}^2 \times (-1,1)$, то есть существует диффеоморфизм $\widetilde{h}\colon \operatorname{int} U \to \mathbb{T}^2 \times (-1,1)$. Тогда существует $t > 0$, такое, что $U^* = \widetilde{h}^{-1}(\mathbb{T}^2 \times [-t,t])$ является замкнутой окрестностью аттрактора A с гладкой границей.

уменьшая общности, можем считать, что $f^{-m}(T_A^1) \subset \operatorname{int} U_{R_1}^1$, а $f^{-m}(T_A^2) \subset \operatorname{int} U_{R_2}^2$. Покажем, что R_1 и $T_{R_1}^1$ принадлежат различным компонентам связности множества $U_{R_1}^1 \setminus f^{-m}(T_A^1)$. Предположим противное. Тогда, в силу [11, лемма 3.1], $f^{-m}(T_A^1)$ является границей некоторой области $D_A^1 \subset \operatorname{int} U_{R_1}^1$. По лемме 1, положив $Q = \operatorname{int} U_{R_1}^1$, $P = \operatorname{int} f^{-m}(U_A^1)$, получаем, что $R_1 \subset \operatorname{int} f^{-m}(U_A^1)$. Так как поверхность R_1 является инвариантной, мы получили противоречие. Таким образом, множество $U_{R_1}^1 \setminus f^{-m}(T_A^1)$ состоит из двух компонент связности. В силу теоремы 3.3 работы [11], замыкание каждой компоненты гомеоморфно $\mathbb{T}^2 \times [0,1]$.[6] Тогда поверхности R_1 и $f^{-m}(T_A^1)$ ограничивают в M^3 замкнутую область, гомеоморфную $\mathbb{T}^2 \times [0,1]$. Поскольку множество $f^{-m}(U_A^1)$ тоже гомеоморфно $\mathbb{T}^2 \times [0,1]$, то, согласно лемме 2, компонента связности множества $M^3 \setminus (\mathcal{A} \cup \mathcal{R})$, ограниченная A и R_1, гомеоморфна прямому произведению $\mathbb{T}^2 \times [0,1]$. Аналогично показывается, что компонента связности множества $M^3 \setminus (\mathcal{A} \cup \mathcal{R})$, ограниченная A и R_2, гомеоморфна прямому произведению $\mathbb{T}^2 \times [0,1]$. Рассуждая аналогично для всех аттракторов из множества $NW(g)$, получаем, что каждая компонента связности множества $M^3 \setminus (\mathcal{A} \cup \mathcal{R})$ гомеоморфна $\mathbb{T}^2 \times [0,1]$.

Напомним, что для матрицы $J \in GL(2,\mathbb{Z})$ через $M_{\widehat{J}}$ мы обозначили многообразие, являющееся пространством орбит $M_{\widehat{J}} = (\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R})/\Gamma$, где $\Gamma = \{\gamma^k, k \in \mathbb{Z}\}$ — группа степеней диффеоморфизма $\gamma\colon \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}$, заданного формулой $\gamma(z,r) = (\widehat{J}(z), r-1)$. Также мы обозначили через $p_{\widehat{J}}\colon \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R} \to M_{\widehat{J}}$ естественную проекцию.

Перед доказательством теоремы 1 сформулируем утверждение, доказательство которого следует из работ [1] и [7].

Утверждение 4.

- *Пусть $J \in GL(2,\mathbb{Z})$. Тогда фундаментальная группа $\pi_1(M_{\widehat{J}})$ является полупрямым произведением подгруппы $R_J \cong \mathbb{Z}$ и нормальной подгруппы $N_J = p_{\widehat{J}*}(\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}) \cong \mathbb{Z}^2$, то есть любой гомотопический класс $[c] \in \pi_1(M_{\widehat{J}})$ единственным образом записывается в виде (a,b), $a \in R_J$, $b \in N_J$, и групповая операция имеет вид $(a_1,b_1)(a_2,b_2) = (a_1 + a_2, J^{a_1}(b_2) + b_1)$.*
- *Если гомеоморфизм $h\colon M_{\widehat{J}} \to M_{\widehat{J'}}$ индуцирует изоморфизм $h_*\colon \pi_1(M_{\widehat{J}}) \to \pi_1(M_{\widehat{J'}})$, такой, что $h_*(N_J) = N_{J'}$, то $h_*|_{N_J}$ определяется матрицей $H \in GL(2,\mathbb{Z})$, такой, что $h_*(0,b) = (0,H(b))$. При этом существует элемент $\beta \in N_{J'}$, такой, что либо $h_*(1,0) = (1,\beta)$ и $HJ = J'H$, либо $h_*(1,0) = (-1,\beta)$ и $HJ^{-1} = J'H$.*
- *Если гомеоморфизм $h\colon M_{\widehat{J}} \to M_{\widehat{J'}}$ индуцирует изоморфизм $h_*\colon \pi_1(M_{\widehat{J}}) \to \pi_1(M_{\widehat{J'}})$, такой, что $h_*(N_J) = N_{J'}$, то гомеоморфизм h поднимается до гомеоморфизма $\widetilde{h}\colon \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}$, такого, что $\widetilde{h}_*\colon \pi_1(\mathbb{T}^2) \to \pi_1(\mathbb{T}^2)$ определяется матрицей H.*

Доказательство теоремы 1. Докажем, что многообразие M^3, допускающее диффеоморфизм f из класса G, диффеоморфно многообразию $M_{\widehat{J}}$, где $\widehat{J}$ — алгебраический автоморфизм тора, заданный матрицей J, которая либо является гиперболической, либо $J = \pm I$.

Доказательство. Зафиксируем любую периодическую компоненту B любого базисного множества диффеоморфизма $f \in G$. В силу утверждения 3 и леммы 2, существует непрерывное отображение $E_f\colon \mathbb{T}^2 \times [0,1] \to M^3$, такое, что отображения $E_f|_{\mathbb{T}^2 \times (0,1)}\colon \mathbb{T}^2 \times (0,1) \to M^3 \setminus B$, $E_f|_{\mathbb{T}^2 \times \{0\}}\colon \mathbb{T}^2 \times \{0\} \to B$, $E_f|_{\mathbb{T}^2 \times \{1\}}\colon \mathbb{T}^2 \times \{1\} \to B$ являются гомеоморфизмами.

[6] В теореме 3.3 работы [11] требуется, чтобы многообразие P было диффеоморфно $\mathbb{T}^2 \times [0,1]$, но утверждение теоремы справедливо и в случае, когда P гомеоморфно $\mathbb{T}^2 \times [0,1]$.

Обозначим через $E_{f,0}\colon \mathbb{T}^2 \to B$ ($E_{f,1}\colon \mathbb{T}^2 \to B$) гомеоморфизм, такой, что $E_f(z,0) = E_{f,0}(z)$ ($E_f(z,1) = E_{f,1}(z)$) для любого $z \in \mathbb{T}^2$. Положим $\tau = E_{f,0}^{-1}E_{f,1}\colon \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$. Тогда, по построению, многообразие M_τ гомеоморфно многообразию M^3 посредством гомеоморфизма $\check{E}_f$, ставящего в соответствие классу эквивалентности $[(z,t)]$, $(z,t) \in \mathbb{T}^2 \times [0,1]$, точку $E_f(z,t)$.

Обозначим через $J \in GL(2,\mathbb{Z})$ матрицу, определенную действием автоморфизма $\tau_*\colon \pi_1(\mathbb{T}^2) \to \pi_1(\mathbb{T}^2)$, и покажем, что многообразия M_τ и $M_{\widehat{J}}$ гомеоморфны.

Поскольку гомеоморфизмы τ и $\widehat{J}$ одинаково действуют в фундаментальной группе, то они изотопны (см., например, теорему 4 в [24]), и, следовательно, существует изотопия $g_t\colon \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$, $t \in [0,1]$, соединяющая гомеоморфизм $g_0 = J\tau^{-1}$ с тождественным отображением g_1. Определим гомеоморфизм $E_J\colon \mathbb{T}^2 \times [0,1] \to \mathbb{T}^2 \times [0,1]$ формулой $E_J(z,t) = (g_t(z),t)$. Тогда гомеоморфизм $\check{E}_J\colon M_\tau \to M_{\widehat{J}}$, ставящий в соответствие классу эквивалентности $[(z,t)]$ класс эквивалентности $[E_J(z,t)]$, является искомым.

Положим $\check{L}_f = \check{E}_f\check{E}_J^{-1}\colon M_{\widehat{J}} \to M^3$. Таким образом, гладкие многообразия $M_{\widehat{J}}$ и M^3 гомеоморфны посредством гомеоморфизма $\check{L}_f$. В силу теоремы о сглаживании гомеоморфизмов[7] (см., например, в [19]), они диффеоморфны. Покажем, что матрица J либо является гиперболической, либо совпадает с матрицей $\pm I$.

Положим $\psi = \check{L}_f^{-1}f^{k_f}\check{L}_f\colon M_{\widehat{J}} \to M_{\widehat{J}}$. Так как гомеоморфизм ψ топологически сопряжен с диффеоморфизмом f^{k_f} и $f^{k_f}(B) = B$, то $\psi_*(N_J) = N_J$ и, в силу утверждения 2, действие ψ_* определяется гиперболической матрицей $\Psi \in SL(2,\mathbb{Z})$. В силу утверждения 4, матрица J коммутирует с матрицей Ψ, то есть диффеоморфизм $\widehat{J}$ принадлежит централизатору $Z(\widehat{\Psi})$ гиперболического автоморфизма двумерного тора $\widehat{\Psi}$. В силу работы [21], группа $Z(\widehat{\Psi})$ изоморфна группе $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2$. Поскольку централизатору $Z(\widehat{\Psi})$ принадлежат все степени диффеоморфизма $\widehat{\Psi}$, а также диффеоморфизм $\widehat{-I}$, то любой элемент централизатора имеет вид $\widehat{\xi}^m(\widehat{-I})^i$, $m \in \mathbb{Z}$, $i \in \{0,1\}$, где ξ — гиперболическая матрица, некоторая степень которой совпадает с $\widehat{\Psi}$. Таким образом, $\widehat{J}$ — алгебраический автоморфизм тора, заданный матрицей J, которая либо является гиперболической, либо совпадает с матрицей $\pm I$.

2.1. Топологическая классификация модельных диффеоморфизмов

Этот раздел посвящен доказательству теоремы 2.

Пусть $J \in GL(2,\mathbb{Z})$ либо гиперболическая матрица, либо $J = \pm I$. Напомним, что мы представили многообразие $M_{\widehat{J}}$ как пространство орбит $M_{\widehat{J}} = (\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R})/\Gamma$, где $\Gamma = \{\gamma^k, k \in \mathbb{Z}\}$ для гомеоморфизма $\gamma\colon \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}$, заданного формулой $\gamma(z,r) = (\widehat{J}(z), r-1)$, и обозначили через $p_{\widehat{J}}\colon \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R} \to M_{\widehat{J}}$ естественную проекцию.

Напомним конструкцию модельных диффеоморфизмов.

Пусть $C \in SL(2,\mathbb{Z})$ — гиперболическая матрица, такая, что $CJ = JC$. Для $n,k \in \mathbb{N}$ обозначим через $\psi_{n,k}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ диффеоморфизм, являющийся сдвигом на единицу времени потока $\dot{r} = \sin 2\pi nkr$. Для $k = 1$ положим $l = 0$ и для $k > 1$ пусть $l \in \{1,\ldots,k-1\}$ является натуральным числом, взаимно простым с k. Обозначим через $\chi_{k,l}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ диффеоморфизм, заданный формулой $\chi_{k,l}(r) = r - \dfrac{l}{k}$. Положим $\varphi_{n,k,l} = \psi_{n,k}\chi_{k,l}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Обозначим через $\widetilde{\phi}_{C,n,k,l}\colon \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}$ диффеоморфизм, заданный формулой $\widetilde{\phi}_{C,n,k,l}(z,r) = (\widehat{C}(z), \varphi_{n,k,l}(r))$. Непосредственно проверяется, что $\widetilde{\phi}_{C,n,k,l}\gamma = \gamma\widetilde{\phi}_{C,n,k,l}$, откуда следует,

[7] **Теорема о сглаживании гомеоморфизмов.** Пусть X, Y — гладкие 3-многообразия. Тогда $\mathrm{Diff}^{\,r}(X,Y)$ плотно в $\mathrm{Diff}^{\,s}(X,Y)$ при $0 \leqslant s < r$.

что отображение $\phi_{C,n,k,l}\colon M_{\widehat{J}} \to M_{\widehat{J}}$, заданное формулой $\phi_{C,n,k,l} = p_{\widehat{J}}\widetilde{\phi}_{C,n,k,l}p_{\widehat{J}}^{-1}$, где $p_{\widehat{J}}^{-1}(x)$ есть полный прообраз точки x, является диффеоморфизмом. Обозначим через Φ множество таких диффеоморфизмов.

Докажем, что диффеоморфизмы $\phi_{C,n,k,l}\colon M_{\widehat{J}} \to M_{\widehat{J}}$, $\phi_{C',n',k',l'}\colon M_{\widehat{J'}} \to M_{\widehat{J'}}$ из класса Φ топологически сопряжены тогда и только тогда, когда

1. существует матрица $H \in GL(2,\mathbb{Z})$, такая, что $CH = HC'$;
2. $k = k'$, $n = n'$ и выполнено хотя бы одно из следующих условий:
   - $JH = HJ'$ и $l = l'$,
   - $J^{-1}H = HJ'$ и $k - l = l'$,
   - $J^{-1}H = HJ'$ и $l = l' = 0$.

Доказательство.

Необходимость. Пусть диффеоморфизмы $\phi_{C,n,k,l}\colon M_{\widehat{J}} \to M_{\widehat{J}}$, $\phi_{C',n',k',l'}\colon M_{\widehat{J'}} \to M_{\widehat{J'}}$ из класса Φ топологически сопряжены посредством некоторого гомеоморфизма $h\colon M_{\widehat{J}} \to M_{\widehat{J'}}$. Тогда h индуцирует изоморфизм $h_*\colon \pi_1(M_{\widehat{J}}) \to \pi_1(M_{\widehat{J'}})$, такой, что $h_*(N_J) = N_{J'}$, и, в силу утверждения 4, $h_*|_{N_J}$ определяется матрицей $H \in GL(2,\mathbb{Z})$, такой, что $h_*(0,b) = (0,H(b))$. Из условия топологической сопряженности следует, что $HC = C'H$. При этом, в силу утверждения 4, либо $h_*(1,0) = (1,\beta)$ и $HJ = J'H$, либо $h_*(1,0) = (-1,\beta)$ и $HJ^{-1} = J'H$.

В силу утверждения 4, гомеоморфизм h поднимается до гомеоморфизма $\widetilde{h}\colon \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R} \to \to \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}$, такого, что $\widetilde{h}_*$ определяется матрицей H. Кроме того, поднятие можно выбрать так, что $\widetilde{h}$ сопрягает диффеоморфизмы $\widetilde{\phi}_{C,n,k,l}$ и $\widetilde{\phi}_{C',n',k',l'}$. Поскольку отображение $\widetilde{h}|_{\mathbb{T}^2\times\{0\}}$ сопрягает отображения $\widehat{C}$ и $\widehat{C}'$, то, в силу [6], $\widetilde{h}|_{\mathbb{T}^2\times\{0\}} = \widehat{H}$.

Обозначим через $O \in \mathbb{T}^2$ нейтральный элемент группы $\mathbb{T}^2$. Положим $\widetilde{S} = \{O\} \times \mathbb{R}$. Из построения модельных диффеоморфизмов следует, что прямая $\widetilde{S}$ инвариантна относительно диффеоморфизмов $\widetilde{\phi}_{C,n,k,l}$ и $\widetilde{\phi}_{C',n',k',l'}$. Так как $\widehat{H}(O) = O$, то прямая $\widetilde{S}$ инвариантна также относительно гомеоморфизма $\widetilde{h}$.

Заметим, что $p_{\widehat{J}}(\widetilde{S}) = p_{\widehat{J'}}(\widetilde{S})$. Положим $S = p_{\widehat{J}}(\widetilde{S})$. Тогда S — окружность, инвариантная относительно диффеоморфизмов $\phi_{C,n,k,l}$ и $\phi_{C',n',k',l'}$. Положим $f = \phi_{C,n,k,l}|_S$, $f' = = \phi_{C',n',k',l'}|_S$ и $g = h|_S$. Тогда $f, f'\colon S \to S$ — диффеоморфизмы Морса–Смейла, неблуждающие множества которых состоят из $2n$, $2n'$ периодических орбит периода k, k' соответственно, и гомеоморфизм $g\colon S \to S$ сопрягает диффеоморфизмы f и f'. Отсюда следует, что $n = n'$, $k = k'$.

Если $k = 1$, то $l = l' = 0$. Если $k > 1$, то, из работы [16], в которой получена топологическая классификация грубых преобразований окружности, следует, что либо $l = l'$ и g сохраняет ориентацию окружности S, либо $k - l = l'$ и g меняет ориентацию окружности S.

Суммируя полученные результаты, получаем необходимые условия теоремы.

Достаточность. Пусть $k = k'$, $n = n'$ и $H \in GL(2,\mathbb{Z})$ — матрица, такая, что $CH = = HC'$. Положим $\widetilde{h}(z,r) = (\widehat{H}(z), r)$ в случае $JH = HJ'$ и $\widetilde{h}(z,r) = (\widehat{H}(z), -r)$ в случае $J^{-1}H = HJ'$. Тогда $\gamma\widetilde{h} = \widetilde{h}\gamma$ в случае $JH = HJ'$ и $\gamma^{-1}\widetilde{h} = \widetilde{h}\gamma$ в случае $J^{-1}H = HJ'$. В обоих случаях непосредственно проверяется, что диффеоморфизм $\widetilde{h}$ сопрягает диффеоморфизмы $\widetilde{\phi}_{C,n,k,l}$, $\widetilde{\phi}_{C',n',k',l'}$ и, следовательно, проектируется в гомеоморфизм $h = p_{\widehat{J}}\widetilde{h}p_{\widehat{J}}^{-1}$, сопрягающий диффеоморфизмы $\phi_{C,n,k,l}$ и $\phi_{C',n',k',l'}$.

3. Инварианты Ω-сопряженности диффеоморфизмов класса G

Этот раздел посвящен доказательству теоремы 3.

Докажем, что любой диффеоморфизм из класса G является Ω-сопряженным некоторому диффеоморфизму из класса Φ.

Доказательство. При доказательстве теоремы 1 мы построили непрерывное отображение $L_f\colon \mathbb{T}^2\times[0,1]\to M^3$, такое, что $L_f^{-1}(NW(f)) = \bigcup\limits_{i=0}^{2k_fn_f}\left(\mathbb{T}^2\times\left\{\frac{i}{2k_fn_f}\right\}\right)$ и $L_{f,0}^{-1}L_{f,1}\colon \mathbb{T}^2\to\mathbb{T}^2$ — алгебраический автоморфизм тора, заданный матрицей $J\in GL(2,\mathbb{Z})$, где $L_{f,0}\colon \mathbb{T}^2\to B$ ($L_{f,1}\colon \mathbb{T}^2\to B$) есть гомеоморфизм на базисное множество B диффеоморфизма f, такой, что $L_f(z,0)=L_{f,0}(z)$ ($L_f(z,1)=L_{f,1}(z)$) для любого $z\in\mathbb{T}^2$. При этом либо J — гиперболическая матрица, либо $J=\pm I$. Тогда, по построению, многообразие $M_{\widehat{J}}$ гомеоморфно многообразию M^3 посредством гомеоморфизма $\check{L}_f$, ставящего в соответствие классу эквивалентности $[(z,t)]$, $(z,t)\in\mathbb{T}^2\times[0,1]$, точку $L_f(z,t)$.

Положим $g=\check{L}_f^{-1}f\check{L}_f\colon M_{\widehat{J}}\to M_{\widehat{J}}$, $n_f=n$, $k_f=k$ и $\mathcal{T}=\left\{\frac{i}{2nk},\ i\in\mathbb{Z}\right\}$. Так как гомеоморфизм g топологически сопряжен с диффеоморфизмом f и $NW(g)=p_{\widehat{J}}(\mathcal{T})$, то $g(p_{\widehat{J}}(\mathcal{T}))=p_{\widehat{J}}(\mathcal{T})$. Тогда $g_*(N_J)=N_J$ (см. утверждение 4). Обозначим через C матрицу, определенную изоморфизмом $g_*|_{N_J}$. Согласно утверждению 2, C — гиперболическая матрица из множества $SL(2,\mathbb{Z})$. В силу утверждения 4, матрица J коммутирует с матрицей C и диффеоморфизм g поднимается до диффеоморфизма $\widetilde{g}\colon \mathbb{T}^2\times\mathbb{R}\to\mathbb{T}^2\times\mathbb{R}$. Поскольку гомеоморфизм $\widetilde{g}$ сохраняет ориентацию, то он коммутирует с отображением $\gamma(z,r)=(\widehat{J}(z),r-1)$. Не уменьшая общности, будем считать, что поднятие $\widetilde{g}$ выбрано таким образом, что $\widetilde{g}(z,\tau)=(\widetilde{g}_\tau(z),\tau-\frac{l}{k})$, $\tau\in\mathcal{T}$, где $l=0$ в случае $k=1$ и $l\in\{1,\ldots,k-1\}$ есть натуральное число, взаимно простое с k в случае $k>1$. Заметим, что действие изоморфизма $\widetilde{g}_{\tau*}\colon \pi_1(\mathbb{T}^2)\to\pi_1(\mathbb{T}^2)$ определяется матрицей C.

Далее разобьем доказательство на два случая: a) $k=1$, b) $k>1$.

В случае a) построим гомеоморфизм $X\colon \mathbb{T}^2\times\mathbb{R}\to\mathbb{T}^2\times\mathbb{R}$, коммутирующий с γ и такой, что гомеоморфизм $\widetilde{\phi}=X\widetilde{g}X^{-1}$ совпадает на множестве $\mathbb{T}^2\times\mathcal{T}$ с диффеоморфизмом $\widetilde{\phi}_{C,n,1,0}$, что и завершит доказательство теоремы.

Определим множество $\mathcal{T}^0\subset\mathbb{R}$ формулой $\mathcal{T}^0=\{\frac{i}{2n},\ i=0,\ldots,2n-1\}$. Поскольку для любого $\tau\in\mathcal{T}^0$ изоморфизм $\widetilde{g}_{\tau*}\colon \pi_1(\mathbb{T}^2)\to\pi_1(\mathbb{T}^2)$ определяется гиперболической матрицей C, то, в силу [6], существует единственный изотопный тождественному гомеоморфизм $h_\tau\colon \mathbb{T}^2\to\mathbb{T}^2$, такой, что $\widehat{C}=h_\tau\widetilde{g}_\tau h_\tau^{-1}$ (см., например, теорему 9.2.2 в [12]). Пусть $h_{\tau,s}$, $s\in[0,1]$ — изотопия, такая, что $h_{\tau,0}=h_\tau$ и $h_{\tau,1}=id$.

Для $t\in\left[-\frac{1}{6n},1-\frac{1}{6n}\right]$ определим гомеоморфизм $x_t\colon \mathbb{T}^2\to\mathbb{T}^2$ формулой $x_t=h_{\tau,6n|t-\tau|}$, $|t-\tau|\leqslant\frac{1}{6n}$, $\tau\in\mathcal{T}^0$, и $x_t=id$ для всех остальных t. Определим гомеоморфизм $x\colon \mathbb{T}^2\times\left[-\frac{1}{6n},1-\frac{1}{6n}\right]\to\mathbb{T}^2\times\left[-\frac{1}{6n},1-\frac{1}{6n}\right]$ формулой $x(z,t)=(x_t(z),t)$. Заметим, что $x(z,\tau)=(h_\tau(z),\tau)$. Для $r\in\mathbb{R}$ обозначим через $m(r)\in\mathbb{Z}$ целое число такое, что $(r-m(r))\in\left[-\frac{1}{6n},1-\frac{1}{6n}\right)$. Положим $X(z,r)=\gamma^{-m(r)}x\gamma^{m(r)}(z,r)$ для $(z,r)\in\mathbb{T}^2\times\mathbb{R}$.

Любая точка множества $\mathcal{T}$ имеет вид $\tau+m$, где $\tau\in\mathcal{T}^0$, $m\in\mathbb{Z}$. По построению, $\widetilde{\phi}_{C,n,1,0}(z,\tau+m)=(\widehat{C}(z),\tau+m)$. Поэтому проверка равенства $\widetilde{\phi}(z,\tau+m)=(\widehat{C}(z),\tau+m)$ завершит доказательство в случае a).

Действительно, $\widetilde{\phi}(z,\tau+m) = X\widetilde{g}X^{-1}(z,\tau+m) = \gamma^{-m}x\gamma^m\widetilde{g}\gamma^{-m}x^{-1}\gamma^m(z,\tau+m) = \gamma^{-m}x\widetilde{g}x^{-1}\gamma^m(z,\tau+m) = \gamma^{-m}x\widetilde{g}x^{-1}(\widehat{J}^m(z),\tau) = \gamma^{-m}x\widetilde{g}(h_\tau^{-1}\widehat{J}^m(z),\tau) = \gamma^{-m}x \times (g_\tau h_\tau^{-1}\widehat{J}^m(z),\tau) = \gamma^{-m}(h_\tau g_\tau h_\tau^{-1}\widehat{J}^m(z),\tau) = (\widehat{J}^{-m}h_\tau g_\tau h_\tau^{-1}\widehat{J}^m(z),\tau) = (\widehat{J}^{-m}\widehat{C}\widehat{J}^m(z),\tau + m) = (\widehat{C}(z),\tau+m)$.

В случае b), используя результаты пункта a), можно считать, что гомеоморфизм g^k совпадает с диффеоморфизмом $\phi_{C^k,nk,1,0}$ на их общем неблуждающем множестве $p_{\hat{J}}(\mathcal{T})$.

Для $j=0,\ldots,k-1$ определим множества $\mathcal{T}_j, \mathcal{T}_j^0 \subset \mathbb{R}$ формулами $\mathcal{T}_j = \left\{\frac{i}{2nk} - \frac{jl}{k} + q,\ i=0,\ldots,2n-1,\ q\in\mathbb{Z}\right\}$, $\mathcal{T}_j^0 = \left\{\frac{i}{2nk} - \frac{jl}{k},\ i=0,\ldots,2n-1\right\}$. Заметим, что $\mathcal{T} = \mathcal{T}_0 \cup \ldots \cup \mathcal{T}_{k-1}$. Положим $U(\mathcal{T}_j) = \bigcup\limits_{\tau\in\mathcal{T}_j}\left[\tau - \frac{1}{6nk}, \tau+\frac{1}{6nk}\right]$, $U(\mathcal{T}_j^0) = \bigcup\limits_{\tau\in\mathcal{T}_j^0}\left[\tau - \frac{1}{6nk}, \tau+\frac{1}{6nk}\right]$. Положим $g_0 = g$, $\widetilde{g}_0 = \widetilde{g}$ и последовательно построим гомеоморфизмы $Y_0, \widetilde{g}_1, Y_1, \widetilde{g}_2, \ldots, Y_{k-2}, \widetilde{g}_{k-1}\colon \mathbb{T}^2\times\mathbb{R}\to\mathbb{T}^2\times\mathbb{R}$ со следующими свойствами для $j=1,\ldots,k-1$:

1) $\widetilde{g}_j = Y_{j-1}\widetilde{g}_{j-1}Y_{j-1}^{-1}$, где Y_{j-1} коммутирует с γ и является тождественным вне множества $U(\mathcal{T}_j)$;

2) для любого $\tau\in\mathcal{T}$ на множестве $\mathbb{T}^2\times\{\tau\}$ гомеоморфизм $\widetilde{g}_j$ имеет вид $\widetilde{g}_j(z,\tau) = \left(\widetilde{g}_{j,\tau}(z), \tau - \frac{l}{k}\right)$, при этом $\widetilde{g}_{j,\tau} = \widehat{C}$ для $\tau\in\mathcal{T}_{j-1}$ и $\widetilde{g}_{j,\tau} = \widetilde{g}_{j-1,\tau}\widetilde{g}_{j-1,\tau+\frac{l}{k}}\widehat{C}^{-1}$ для $\tau\in\mathcal{T}_j$.

Из свойств 1), 2) следует, что $\widetilde{g}_{k-1,\tau} = \widehat{C}$ для $\tau\in(\mathcal{T}_0\cup\mathcal{T}_1\cup\ldots\cup\mathcal{T}_{k-2})$ и $\widetilde{g}_{k-1,\tau} = \widetilde{g}_{k-2,\tau}\widetilde{g}_{k-2,\tau+\frac{l}{k}}\widehat{C}^{-1} = \widetilde{g}_{0,\tau}\widetilde{g}_{k-3,\tau+\frac{l}{k}}\widetilde{g}_{k-3,\tau+\frac{2l}{k}}\widehat{C}^{-2} = \ldots = \widetilde{g}_{0,\tau}\widetilde{g}_{0,\tau+\frac{l}{k}}\cdots\widetilde{g}_{0,\tau+\frac{(k-2)l}{k}}\widetilde{g}_{0,\tau+\frac{(k-1)l}{k}} \times \widehat{C}^{-(k-1)}$ для $\tau\in\mathcal{T}_{k-1}$. Поскольку гомеоморфизм g_0^k совпадает с диффеоморфизмом $\phi_{C^k,nk,1,0}$ на их общем неблуждающем множестве $p_{\hat{J}}(\mathcal{T})$, то $\widetilde{g}_{0,\tau}\widetilde{g}_{0,\tau+\frac{l}{k}}\cdots\widetilde{g}_{0,\tau+\frac{(k-2)l}{k}} \times \widetilde{g}_{0,\tau+\frac{(k-1)l}{k}} = \widehat{C}^k$ и, следовательно, $\widetilde{g}_{k-1,\tau} = \widehat{C}$ для $\tau\in\mathcal{T}_{k-1}$. Так как $\widetilde{\phi}_{C,n,k,l}(z,\tau) = \left(\widehat{C}(z), \tau - \frac{l}{k}\right)$ для любого $\tau\in\mathcal{T}$, то построение гомеоморфизмов с описанными свойствами завершит доказательство, так как гомеоморфизм g_{k-1} совпадает с диффеоморфизмом $\phi_{C,k,n,l}$ на их общем неблуждающем множестве $p_{\hat{J}}(\mathcal{T})$ и является топологически сопряженным с диффеоморфизмом f.

Покажем, как построить гомеоморфизм Y_{j-1} для $j=1,\ldots,k-1$, в предположении, что гомеоморфизм $\widetilde{g}_{j-1}$ уже построен.

Пусть $\tau\in\mathcal{T}_{j-1}^0$. Поскольку гомеоморфизм $\widetilde{g}_{j-1,\tau}$ изотопен диффеоморфизму $\widehat{C}$, то гомеоморфизм $\widehat{C}\widetilde{g}_{j-1,\tau}^{-1}$ изотопен тождественному отображению. Пусть $h_{j-1,\tau,s}\colon\mathbb{T}^2\to\mathbb{T}^2$, $s\in[0,1]$ — изотопия, такая, что $h_{j-1,\tau,0} = \widehat{C}\widetilde{g}_{j-1,\tau}^{-1}$ и $h_{j-1,\tau,1} = id$. Для $t\in\left[-\frac{jl}{k} - \frac{1}{6nk}, 1 - \frac{jl}{k} + \frac{1}{6nk}\right]$ определим гомеоморфизм $y_{j-1,t}\colon\mathbb{T}^2\to\mathbb{T}^2$ формулой $y_{j-1,t} = h_{j-1,i,6nk\left|t+\frac{l}{k}-\tau\right|}$, $\left|t+\frac{l}{k}-\tau\right| \leqslant \frac{1}{6nk}$, и $y_{j-1,t} = id$ для всех остальных t. Определим гомеоморфизм $y_{j-1}\colon\mathbb{T}^2\times\left[-\frac{jl}{k}-\frac{1}{6nk}, 1-\frac{jl}{k}+\frac{1}{6nk}\right]\to\mathbb{T}^2\times\left[-\frac{jl}{k}-\frac{1}{6nk}, 1-\frac{jl}{k}+\frac{1}{6nk}\right]$ формулой $y_{j-1}(z,t) = (y_{j-1,t}(z),t)$. Заметим, что $y_{j-1}\left(z,\tau-\frac{l}{k}\right) = \left(\widehat{C}\widetilde{g}_{j-1,\tau}^{-1}(z), \tau - \frac{l}{k}\right)$.

Для $r \in \mathbb{R}$ обозначим через $m(r) \in \mathbb{Z}$ целое число, такое, что $(r - m(r)) \in \Big[-\dfrac{jl}{k} - -\dfrac{1}{6nk}, 1-\dfrac{jl}{k}+\dfrac{1}{6nk}\Big)$. Для $(z, r) \in \mathbb{T}^2\times\mathbb{R}$ положим $Y_{j-1}(z, r) = \gamma^{-m(r)}y_{j-1}\gamma^{m(r)}(z, r)$. Положим $\widetilde{g}_j = Y_{j-1}\widetilde{g}_{j-1}Y_{j-1}^{-1}$.

Поскольку любая точка множества $\mathcal{T}_{j-1}$ ($\mathcal{T}_j$) имеет вид $\tau + m\Big(\tau + m - \dfrac{l}{k}\Big)$, где $\tau \in \in \mathcal{T}^0_{j-1}$, $m \in \mathbb{Z}$, то проверка равенств $\widetilde{g}_j(z, \tau + m) = \Big(\widehat{C}(z), \tau + m - \dfrac{l}{k}\Big)$ и $\widetilde{g}_j\Big(z, \tau + m - \dfrac{l}{k}\Big) = = \Big(\widetilde{g}_{j-1,\tau+m-\frac{l}{k}}\widetilde{g}_{j-1,\tau+m}\widehat{C}^{-1}(z), \tau + m - \dfrac{2l}{k}\Big)$ завершит доказательство в случае b).

Действительно, $\widetilde{g}_j(z, \tau + m) = Y_{j-1}\widetilde{g}_{j-1}Y_{j-1}^{-1}(z, \tau + m) = Y_{j-1}\widetilde{g}_{j-1}(z, \tau + m) = = \gamma^{-m}y_{j-1}\gamma^m\widetilde{g}_{j-1}(z, \tau + m) = \gamma^{-m}y_{j-1}\widetilde{g}_{j-1}\gamma^m(z, \tau + m) = \gamma^{-m}y_{j-1}\widetilde{g}_{j-1}(J^m(z), \tau) = = \gamma^{-m}y_{j-1}(\widetilde{g}_{j-1,\tau}J^m(z), \tau - \dfrac{l}{k}) = \gamma^{-m}\Big(\widehat{C}\widetilde{g}_{j-1,\tau}^{-1}\widetilde{g}_{j-1,\tau}J^m(z), \tau - \dfrac{l}{k}\Big) = \Big(\widehat{J}^{-m}\widehat{C}\widehat{J}^m(z), \tau + m - -\dfrac{l}{k}\Big) = \Big(\widehat{C}(z), \tau + m - \dfrac{l}{k}\Big)$.

Далее, $\widetilde{g}_j\Big(z, \tau + m - \dfrac{l}{k}\Big) = Y_{j-1}\widetilde{g}_{j-1}Y_{j-1}^{-1}\Big(z, \tau + m - \dfrac{l}{k}\Big) = \widetilde{g}_{j-1}Y_{j-1}^{-1}\Big(z, \tau + m - \dfrac{l}{k}\Big) = = \widetilde{g}_{j-1}\gamma^{-m}y_{j-1}^{-1}\gamma^m\Big(z, \tau+m-\dfrac{l}{k}\Big) = \widetilde{g}_{j-1}\gamma^{-m}y_{j-1}^{-1}\Big(\widehat{J}^m(z), \tau-\dfrac{l}{k}\Big) = \widetilde{g}_{j-1}\gamma^{-m}\Big(\widetilde{g}_{j-1,\tau}^{-1}\widehat{C}^{-1}\widehat{J}^m(z), \tau- -\dfrac{l}{k}\Big) = \widetilde{g}_{j-1}\Big(J^{-m}\widetilde{g}_{j-1,\tau}^{-1}\widehat{C}^{-1}\widehat{J}^m(z), \tau + m - \dfrac{l}{k}\Big) = \Big(\widetilde{g}_{j-1,\tau+m-\frac{l}{k}}\widehat{J}^{-m}\widetilde{g}_{j-1,\tau}^{-1}\widehat{C}^{-1}\widehat{J}^m(z), \tau + m - -\dfrac{2l}{k}\Big) = \Big(\widetilde{g}_{j-1,\tau+m-\frac{l}{k}}\widehat{J}^{-m}\widetilde{g}_{j-1,\tau}^{-1}\widehat{J}^m\widehat{C}^{-1}(z), \tau+m-\dfrac{2l}{k}\Big) = \Big(\widetilde{g}_{j-1,\tau+m-\frac{l}{k}}\widehat{J}^{-m}\widehat{J}^m\widetilde{g}_{j-1,\tau+m}^{-1}\widehat{C}^{-1}(z), \tau+ +m - \dfrac{2l}{k}\Big) = \Big(\widetilde{g}_{j-1,\tau+m-\frac{l}{k}}\widetilde{g}_{j-1,\tau+m}\widehat{C}^{-1}(z), \tau + m - \dfrac{2l}{k}\Big)$.

4. Топологическая классификация диффеоморфизмов класса G_*

Напомним, что любой диффеоморфизм $f\colon M^3 \to M^3$ из класса G_* удовлетворяет следующему условию: для любых точек x, y, таких, что $x \in \mathcal{A}$, $y \in \mathcal{R}$, либо пересечение $W^s(x)\cap W^u(y)$ пусто, либо каждая компонента связности пересечения $W^s(x)\cap W^u(y)$ является открытой дугой, имеющей в точности две граничные точки, одна из которых принадлежит $\mathcal{A}$, другая — $\mathcal{R}$, при этом объединение замыканий всех таких дуг определяет f-инвариантное одномерное слоение на многообразии M^3. Обозначим это слоение через $\mathcal{I}_f$.

Для доказательства теоремы 4 нам понадобится следующая лемма.

Лемма 3. *Пусть V — компонента связности множества $M^3 \setminus (\mathcal{A}\cup\mathcal{R})$, такая, что $\partial V = A\cup R$, где $A \in \mathcal{A}$, $R \in \mathcal{R}$. Тогда на множестве cl V существует двумерное f^{k_f}-инвариантное слоение $\mathcal{P}_V$, каждый слой которого является тором, пересекающим каждый слой слоения $\mathcal{I}_f$ в одной точке.*

Доказательство. Обозначим через $\mathcal{I}_V$ одномерное слоение на *cl* V, каждый слой которого является замыканием компоненты связности пересечения слоя слоения $\mathcal{I}_f$ с V. Поскольку $\mathcal{I}_V$ является одномерным слоением, каждый слой которого пересекает A в одной точке, то существует двумерный тор $T \subset V$, также пересекающийся с каждым слоем слоения $\mathcal{I}_V$ в одной точке. Положим $g = f^{k_f}$ и обозначим через U замкнутое подмножество множества $cl\ V$, ограниченное торами A и T. Возможны два случая: a) $g(T) \cap T = \varnothing$, b) $g(T) \cap T \neq \varnothing$.

В случае a): $g(T) \subset \operatorname{int} U$ и множество $K = U \setminus g(U)$ является фундаментальной областью ограничения g на V, то есть $\bigcup\limits_{i \in \mathbb{Z}, t \in [0,1]} g^i(K) = V$ и $g^i(K) \cap g^j(K) = \varnothing$ для $i \neq j$. Введем параметризацию на каждом слое ℓ слоения $\mathcal{I}_V \cap cl\ K$, поставив в соответствие точке $x \in \ell$ параметр $t \in [0,1]$, равный отношению длины дуги $\ell_x \subset \ell$, ограниченной точками x и $\partial U \cap \ell$, к длине дуги ℓ. Обозначим через $\rho\colon cl\ K \to [0,1]$ построенную параметризацию. Для $t \in [0,1]$ положим $T_t = \rho^{-1}(t)$. Тогда $\bigcup\limits_{i \in \mathbb{Z}, t \in [0,1]} g^i(T_t) \cup A \cup R$ — искомое слоение $\mathcal{P}_V$.

В случае b) покажем, что существует модификация тора T до тора $\widetilde{T}$, который пересекается с каждым слоем слоения $\mathcal{I}_V$ в одной точке и обладает свойством $g(\widetilde{T}) \cap \widetilde{T} = \varnothing$.

Поскольку A — аттрактор диффеоморфизма g, то существует такое число $n > 0$, что $g^n(U) \subset \operatorname{int} U$. Пусть m — наименьшее натуральное число, для которого $g^n(T) \cap T = \varnothing$ для любых $n > m$. Построение искомого тора разобьем на шаги.

Шаг 1. Докажем лемму в случае $m = 1$, то есть в случае, когда $g(T) \cap T \neq \varnothing$, $g^n(T) \cap T = \varnothing$ для $n > 1$.

Положим $\widetilde{U} = U \cup g(U)$. Тогда $g(\widetilde{U}) \subset \widetilde{U}$, поскольку $g(U) \subset \widetilde{U}$ по построению и $g^2(U) \subset \subset \widetilde{U}$ по предположению шага 1. Откуда следует, что искомый тор $\widetilde{T}$ получается малым шевелением граничной компоненты множества $\widetilde{U}$, отличной от A, которое состоит в выдвижении точек множества $g(T)$ из множества $\widetilde{U}$ вдоль слоев слоения $\mathcal{I}_V$.

Шаг 2. Построим искомый тор в случае $m > 1$. Выберем такое натуральное число r, что $2^r \leqslant m < 2^{r+1}$. Положим $g_r = g^{2^r}$. Тогда $g_r^n(T) \cap T = \varnothing$ для всех $n > 1$. Используя технику шага 1, мы построим искомый тор для диффеоморфизма g_r. Продолжая процесс, мы построим искомый тор для диффеоморфизма g.

Доказательство теоремы 4.

Докажем, что любой диффеоморфизм из класса G_* топологически сопряжен некоторому диффеоморфизму из класса Φ.

Доказательство. Пусть $f\colon M^3 \to M^3$ — диффеоморфизм из класса G. В силу теоремы 3, f топологически сопряжен гомеоморфизму $g\colon M_{\widehat{J}} \to M_{\widehat{J}}$, совпадающему с некоторым диффеоморфизмом $\phi_{C,n,k,l}\colon M_{\widehat{J}} \to M_{\widehat{J}}$ из класса Φ на их общем неблуждающем множестве $p_{\widehat{J}}(\mathcal{T})$, $\mathcal{T} = \left\{\frac{i}{2nk},\ i \in \mathbb{Z}\right\}$. Обозначим через $\widetilde{g}\colon \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}$ поднятие гомеоморфизма g, совпадающее с $\widetilde{\phi}_{C,n,k,l}$ на множестве $\mathcal{T}$. Построим гомеоморфизм $\widetilde{h}\colon \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}$, сопрягающий отображения $\widetilde{g}$, $\widetilde{\phi}_{C,n,k,l}$ и коммутирующий с диффеоморфизмом $\gamma\colon \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}$, заданным формулой $\gamma(z,r) = (\widehat{J}(z), r-1)$, что и завершит доказательство теоремы. Проведем построение в двух различных случаях: a) $k = 1$, b) $k > 1$.

Рассмотрим случай a). В силу леммы 3, гомеоморфизм $\widetilde{g}$ обладает парой трансверсальных $\widetilde{g}$-инвариантных слоений $\mathcal{I}_{\widetilde{g}}$, $\mathcal{P}_{\widetilde{g}}$. Слоение $\mathcal{I}_{\widetilde{g}}$ является одномерным, и каждый его слой гомеоморфен прямой. Слоение $\mathcal{P}_{\widetilde{g}}$ является двумерным, каждый его слой гомеоморфен двумерному тору, и компоненты связности множества $\mathcal{T}$ являются его слоями.

Для $i \in \mathbb{Z}$ положим $\widetilde{V}_i = \mathbb{T}^2 \times \left(\frac{i}{2n}, \frac{i+1}{2n}\right)$ и $\widetilde{T}_i = \mathbb{T}^2 \times \{\frac{i}{2n}\}$. Обозначим через $\mathcal{I}_i$, $\mathcal{P}_i$ ограничение слоений $\mathcal{I}_{\widetilde{g}}$, $\mathcal{P}_{\widetilde{g}}$ на $cl\ \widetilde{V}_i$. Положим $\overline{\mathcal{I}}_i = \left\{z \times \left[\frac{i}{2n}, \frac{i+1}{2n}\right]\right\}_{z \in \mathbb{T}^2}$, $\overline{\mathcal{P}}_i = \{\mathbb{T}^2 \times$

$\times \{r\}\}_{r\in\left[\frac{i}{2n},\frac{i+1}{2n}\right]}$. Для $i \in \{0, 1 \ldots, 2n-1\}$ построим гомеоморфизм $h_i\colon cl\ \widetilde{V}_i \to cl\ \widetilde{V}_i$, сопрягающий отображения $\widetilde{g}|_{cl\ \widetilde{V}_i}$ и $\widetilde{\phi}_{C,n,k,l}|_{cl\ \widetilde{V}_i}$.

Для любой точки $z \in \widetilde{T}_i$ обозначим через ℓ_z слой слоения $\mathcal{I}_i$, такой, что $z \in cl\ \ell_z$. Зафиксируем точку $z_* \in \widetilde{T}_i$ и для любой точки $w \in cl\ \ell_{z_*}$ обозначим через Σ_w слой слоения $\mathcal{P}_i$, проходящий через точку w. Зафиксируем точку $w_* \in \ell_{z_*}$. Положим $x = \ell_{z_*} \cap \Sigma_{w_*}$ и $y = \ell_{z_*} \cap \widetilde{g}(\Sigma_{w_*})$. Обозначим через $\sigma \subset \ell_{z_*}$ замкнутую дугу, ограниченную точками x, y. Введем аналогичные обозначения с чертой для диффеоморфизма $\widetilde{\phi}_{C,n,k,l}$, выбрав $\overline{z}_* = z_*$.

Пусть $\mu_\sigma\colon \sigma \to \overline{\sigma}$ — гомеоморфизм, такой, что $\mu_\sigma(x) = \overline{x}$. Для любой точки $w \in \ell_{z_*}$ существует единственное целое число m_w, такое, что $\widetilde{g}^{m_w}(\Sigma_w) \cap (\sigma \backslash y) \neq \varnothing$. Положим $\mu(w) = \widetilde{\phi}^{-m_w}_{C,n,k,l}(\mu_\sigma(\widetilde{g}^{m_w}(w)))$ и по непрерывности продолжим построенное отображение до гомеоморфизма $\mu\colon cl\ \ell_{z_*} \to cl\ \overline{\ell}_{z_*}$. Заметим, что для любой точки $a \in cl\ \widetilde{V}_i$ существует единственная пара точек $z_a \in \widetilde{T}_i$, $w_a \in cl\ \ell_{z_*}$, такая, что $a = \ell_{z_a} \cap \Sigma_{w_a}$. Определим гомеоморфизм h_i формулой $h_i(a) = \ell_{z_a} \cap \Sigma_{\mu(w_a)}$. По построению, $h_i|_{\widetilde{T}_i} = id$. Покажем, что $h_i|_{\widetilde{T}_{i+1}} = id$.

Поскольку $h_i|_{\widetilde{T}_i} = id$ и h_i есть гомеоморфизм пространства $\mathbb{T}^2 \times \left[\dfrac{i}{2n}, \dfrac{i+1}{2n}\right]$, то гомеоморфизм $h_i|_{\widetilde{T}_{i+1}}$ изотопен тождественному. Поскольку слоения $\mathcal{I}_i$, $\overline{\mathcal{I}}_i$ являются инвариантными относительно отображений $\widetilde{g}$, $\widetilde{\phi}_{C,n,k,l}$ соответственно, и, по построению, гомеоморфизм h_i переводит слои слоения $\mathcal{I}_i$ в слои слоения $\overline{\mathcal{I}}_i$, то гомеоморфизм $h_i|_{\widetilde{T}_{i+1}}$ сопрягает отображения $\widetilde{g}|_{\widetilde{T}_{i+1}}$, $\widetilde{\phi}_{C,n,k,l}|_{\widetilde{T}_{i+1}}$. В силу [6], существует единственный изотопный тождественному гомеоморфизм, сопрягающий $\widetilde{g}|_{\widetilde{T}_{i+1}}$, $\widetilde{\phi}_{C,n,k,l}|_{\widetilde{T}_{i+1}}$. Поскольку $\widetilde{g}|_{\widetilde{T}_{i+1}} = \widetilde{\phi}_{C,n,k,l}|_{\widetilde{T}_{i+1}}$, то $h_i|_{\widetilde{T}_{i+1}} = \mathrm{id}$.

Обозначим через $h\colon \mathbb{T}^2 \times [0,1] \to \mathbb{T}^2 \times [0,1]$ гомеоморфизм, совпадающий с h_i на $cl\ \widetilde{V}_i$. Для любого $r \in \mathbb{R}$ обозначим через $m(r)$ целое число, такое, что $(r - m(r)) \in [0,1)$. Определим искомый гомеоморфизм $\widetilde{h}$ формулой $\widetilde{h}(z,r) = \gamma^{-m(r)} h \gamma^{m(r)}(z,r)$.

Рассмотрим случай b). В силу предыдущего пункта, существует гомеоморфизм $\widetilde{w}\colon \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}$, сопрягающий отображения $\widetilde{g^k}$, $\widetilde{\phi}_{C^k,nk,1,0}$ и коммутирующий с диффеоморфизмом γ. Для $j = 0, \ldots, k-1$ определим множества $\mathcal{Q}^0_j \subset (\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R})$ формулой $\mathcal{Q}^0_j = \mathbb{T}^2 \times \left[-\dfrac{jl}{k}, -\dfrac{jl}{k} + \dfrac{1}{k}\right]$. Определим гомеоморфизм $\widetilde{h}_{j,0}\colon \mathcal{Q}^0_j \to \mathcal{Q}^0_j$ формулой $\widetilde{h}_{j,0} = \widetilde{\phi}^j_{C,n,k,l} \widetilde{w} \widetilde{g}^{-j}$. Положим $\mathcal{Q}^0 = \mathcal{Q}^0_0 \cup \ldots \cup \mathcal{Q}^0_{k-1}$ и обозначим через $\widetilde{h}_0\colon \mathcal{Q}^0 \to \mathcal{Q}^0$ гомеоморфизм, совпадающий с $\widetilde{h}_{j,0}$ на $\mathcal{Q}^0_j$ для $j = 0, \ldots, k-1$.

Для любого $r \in \mathbb{R}$ обозначим через $m(r)$ целое число, такое, что $(z, r - m(r)) \in \mathcal{Q}^0$. Определим искомый гомеоморфизм $\widetilde{h}$ формулой $\widetilde{h}(z,r) = \gamma^{-m(r)} \widetilde{h}_0 \gamma^{m(r)}(z,r)$.

Список литературы

[1] Афраймович В. С., Крахнов А. Д. О надстройках над У-диффеоморфизмами тора // Методы качественной теории дифференциальных уравнений: Сб. научн. ст.: Вып. 1 / Е. А. Леонтович-Андронова (отв. ред.) и др. Горький: ГГУ, 1975. С. 34–40.

[2] Аносов Д. В. Об одном классе инвариантных множеств гладких динамических систем // Тр. Пятой международной конференции по нелинейным колебаниям: Т. 2: Качественные методы / Ин-т матем. АН УССР. Киев: АН УССР, 1970. С. 39–44.

[3] Bothe H. G. The ambient structure of expanding attractors: 2. Solenoids in 3-manifolds // Math. Nachr., 1983, vol. 112, pp. 69–102.

[4] Bowen R. Periodic points and measures for Axiom *A* diffeomorphisms // Trans. Amer. Math. Soc., 1971, vol. 154, pp. 377–397.

[5] Brown A. Nonexpanding attractors: conjugacy to algebraic models and classification in 3-manifolds // J. Mod. Dyn., 2010, vol. 4, no. 3, pp. 517–548.

[6] Franks J. Anosov diffeomorphisms // Global Analysis: Proc. Symp. in Pure Math. (Berkeley, CA, 1968). Providence, RI: AMS, 1970. Vol. 14, pp. 61–93.

[7] Ghys E., Sergiescu V. Stabilite et conjugaison differentiable pour certains feuilletages // Topology, 1980, vol. 19, no. 2, pp. 179–197.

[8] Гринес В. З., Медведев В. С., Жужома Е. В. О поверхностных аттракторах и репеллерах на 3-многообразиях // Матем. заметки, 2005, т. 78, № 6, с. 813–826.

[9] Grines V., Zhuzhoma E. On structurally stable diffeomorphisms with codimension one expanding attractors // Trans. Amer. Math. Soc., 2005, vol. 357, no. 2, pp. 617–667.

[10] Гринес В. З., Медведев В. С., Левченко Ю. А. О структуре 3-многообразия, допускающего *A*-диффеоморфизм с двумерным поверхностным неблуждающим множеством // Тр. СВМО, 2010, т. 12, № 2, с. 7–12.

[11] Гринес В. З., Жужома Е. В., Медведев В. С. Новые соотношения для систем Морса – Смейла с тривиально вложенными одномерными сепаратрисами // Матем. сб., 2003, т. 194, № 7, с. 25–56.

[12] Гринес В. З., Починка О. В. Введение в топологическую классификацию диффеоморфизмов на многообразиях размерности два и три. Москва–Ижевск: РХД, 2011. 424 с.

[13] Rodriguez Hertz F., Rodriguez Hertz M. A., Ures R. Tori with hyperbolic dynamics in 3-manifolds // J. Mod. Dyn., 2011, vol. 5, no. 1, pp. 185–202.

[14] Kaplan J. L., Mallet-Paret J., Yorke J. A. The Lyapunov dimension of a nowhere differentiable attracting torus // Ergodic Theory Dynam. Systems, 1984, vol. 4, no. 2, pp. 261–281.

[15] Ma J., Yu B. Genus two Smale – Williams solenoid attractors in 3-manifolds // J. Knot Theory Ramifications, 2011, vol. 20, no. 6, pp. 909–926.

[16] Майер А. Г. Грубое преобразование окружности в окружность // Учен. зап. ГГУ, 1939, т. 12, с. 215–229.

[17] Mañé R. A proof of the C^1 stability conjecture // Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math., 1988, No. 66, pp. 161–210.

[18] Medvedev V., Zhuzhoma E. On the existence of codimension-one nonorientable expanding attractors // J. Dyn. Control Syst., 2005, vol. 11, no. 3, pp. 405–411.

[19] Munkres J. Obstructions to the smoothing of piecewise-differentiable homeomorphisms // Ann. of Math. (2), 1960, vol. 72, no. 3, pp. 521–554.

[20] Плыкин Р. В. О топологии базисных множеств диффеоморфизмов С. Смейла // Матем. сб., 1971, т. 84, № 2, с. 301–312.

[21] Плыкин Р. В. О структуре централизаторов аносовских диффеоморфизмов тора // УМН, 1998, т. 53, № 6, с. 259–260.

[22] Robbin J. A structural stability theorem // Ann. of Math. (2), 1971, vol. 94, no. 2, pp. 447–493.

[23] Robinson C. Structural stability of C^1 diffeomorphisms // J. Differential Equations, 1976, vol. 22, no. 1, pp. 28–73.

[24] Rolfsen D. Knots and links. (Mathematics lecture series, vol. 7.) Houston, TX: Publish or Perish, 1990. 439 pp.

[25] Smale S. Differentiable dynamical systems // Bull. Amer. Math. Soc., 1967, vol. 73, no. 6, pp. 747–817. (*См. также:* Смейл С. Дифференцируемые динамические системы // УМН, 1970, т. 25, № 1, с. 113–185.)

[26] Smale S. Stability and isotopy in discrete dynamical systems // Dynamical systems: Proc. Sympos. (Univ. Bahia, Salvador, 1971) / M. M. Peixoto (Ed.). New York: Acad. Press, 1973, pp. 527–530.

[27] Williams R. Expanding attractors // Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math., 1974, No. 43, pp. 169–203.

On topological classification of diffeomorphisms on 3-manifolds with two-dimensional surface attractors and repellers

Vyacheslav Z. Grines[1], Yulia A. Levchenko[2], Olga V. Pochinka[3]

Nizhny Novgorod State University
Ul'yanova st. 10, Nizhny Novgorod, 603605, Russia
[1]vgrines@yandex.ru, [2]ulev4enko@gmail.com, [3]olga-pochinka@yandex.ru

We consider a class of diffeomorphisms on 3-manifolds which satisfy S. Smale's axiom A such that their nonwandering set consists of two-dimensional surface basic sets. Interrelation between dynamics of such diffeomorphism and topology of the ambient manifold is studied. Also we establish that each considered diffeomorphism is Ω-conjugated with a model diffeomorphism of mapping torus. Under certain assumptions on asymptotic properties of two-dimensional invariant manifolds of points from the basic sets, we obtain necessary and sufficient conditions of topological conjugacy of structurally stable diffeomorphisms from the considered class.

MSC 2010: 37E30
Keywords: diffeomorphism, basic set, topological conjugacy, attractor, repeller

Received December 30, 2013, accepted January 22, 2014
Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2014, vol. 10, no. 1, pp. 17–33 (Russian)