О.В. Баранова

Высшая математика
Элементы алгебры и геометрии

Часть 1

Ижевск
2014

Министерство образования и науки РФ
ФГБОУ ВПО
«Удмуртский государственный университет»
Математический факультет

О.В. Баранова

Математика
Элементы алгебры и геометрии
Часть 1

Учебное пособие

Ижевск
2014

УДК 512.5
ББК 22.151.5
Б24

Рекомендовано к изданию Учебно-методическим Советом УдГУ

Рецензент: доцент кафедры математики и информатики Е.В. Новикова

Баранова О.В.

Б24 Высшая математика. Элементы алгебры и геометрии: учебное пособие. Ижевск. Изд-во «Удмуртский университет». 2014. Ч.1. 132 с.

Учебное пособие предназначено студентам первого курса биолого-химического факультета (направление «Химия»), изучающим курс «Математика». Теоретическая часть пособия охватывает разделы курса, читаемые в первом семестре, содержит множество примеров. Практическая часть включает варианты для самостоятельной работы студентов.Пособие будет полезным также и для студентов бакалавриата и магистратуры естественно-научных направлений.

УДК 512.5
ББК 22.151.5

Оглавление

Предисловие

Математика играет важную роль в естественно-научных исследованиях. Она стала одним из самых эффективных средств точного исследования и позволяет четко формулировать понятия и проблемы.

Математика является не только мощным средством решения прикладных задач и универсальным языком науки, но также и элементом общей культуры. Поэтому математическое образование — важнейшая составляющая в системе фундаментальной подготовки профессионалов, отвечающих потребностям современного общества.

При написании настоящего пособия автор руководствовался принципом повышения уровня фундаментальной математической подготовки студентов с усилением ее прикладной направленности. Пособие адресовано, прежде всего, студентам первого курса, обучающимся по направлениям «химия», «прикладная химия». Для студентов этих направлений требуется солидная математическая подготовка.

Одним из методов овладения большим объемом необходимой информации является интенсификация процесса обучения. При этом требуется качественное усвоение изучаемого материала. Предлагаемое пособие представляет собой попытку решения этой задачи при изучении элементов алгебры и геометрии в объеме программы федерального государственного общеобразовательного стандарта по математике ФГОС ВПО по направлению «химия».

Курс алгебры и геометрии читается студентам в первом семестре. Это первый раздел высшей математики, с которым студенты знакомятся после школы. Для успешного овладения предметом, первокурснику необходимо воспринимать большой объем информации, уметь логически верно, аргументировано и ясно строить математические рассуждения. Как правило, именно этих навыков не хватает студентам для успешного обучения дисциплине. В учебном пособии материал подобран таким образом, чтобы развить у студента способность к обобщению, анализу, моделированию и исследованию различных задач.

В учебном пособии содержится краткое изложение теоретического материала, приведены алгоритмы решения основных типов задач, предложены упражнения для активного усвоения изучаемой теории. В пособии содержится большое количество задач для самостоятельной работы, решение которых позволяет студенту правильно оценить приобретенные знания и способствует повышению его математической культуры.

Пособие доступно широкому кругу студентов и может быть использовано ими для самостоятельного изучения предмета. Теоретическая часть пособия может быть использована студентами старших курсов и магистрами естественно-научных направлений при работе над курсовыми и дипломными проектами.

Автор выражает большую признательность Шуравиной И.Н. за помощь в подготовке этого пособия.

Глава 1

Матрицы и определители

1.1 Основные понятия и определения

Понятие матрицы и основы матричного исчисления имеют важное значение для специалистов, работающих в химической промышленности. Объясняется это тем, что многие математические модели химических процессов записываются в достаточно простой, компактной матричной форме. Дадим определение числовой матрицы.

Определение 1.1. *Матрицей* размера $m \times n$ называется прямоугольная таблица чисел, содержащая m строк и n столбцов.

Числа, составляющие матрицу, называются *элементами* матрицы.

Матрицы обозначаются прописными буквами латинского алфавита, а для обозначения элементов матрицы используются строчные буквы с двойным индексом.

Например, матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

где a_{ij}– элемент матрицы A, расположенный в i строке и j столбце.

Для матрицы A будем использовать обозначение

$$A = (a_{ij})_{i,j=1}^{m,n}.$$

Пример 1.1. а) $A = (1, 2, -3)$ — матрица размера 1×3;

б) $B = \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{smallmatrix}\right)$ — матрица размера 3×1;

в) $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 4 & 7 & 1 \end{pmatrix}$ — матрица размера 2×3.

Определение 1.2. Матрицы A и B называются *равными* $(A = B)$, если они имеют одинаковые размеры и равны *все* их соответствующие элементы, то есть $a_{ij} = b_{ij}$ для всех $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$.

Пример 1.2. Матрицы

$$A = \begin{pmatrix} \sin\frac{\pi}{2} & \sin\pi \\ \cos\frac{\pi}{2} & \cos\pi \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

равны.

Определение 1.3. Матрица $B = (b_{ij})_{i,j=1}^{n,m}$ называется *транспонированной* к матрице $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{m,n}$, если $b_{ji} = a_{ij}$ для всех $i = 1, \ldots, m$ и всех $j = 1, \ldots, n$.

Обозначение: $B = A^T$.

Пример 1.3. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, то есть столбцы матрицы A являются строками матрицы A^T.

Виды матриц

Определение 1.4. Матрица $B = (b_{ij})_{i,j=1}^{m,n}$ называется *противоположной* матрице $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{m,n}$, если $b_{ij} = -a_{ij}$ для всех $i = 1, \ldots, m$ и всех $j = 1, \ldots, n$.

Обозначение: $B = -A$.

Пример 1.4. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$, $-A = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Определение 1.5. Матрица называется *нулевой*, если *все* ее элементы равны 0.

Обозначение: O.

Пример 1.5. $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Определение 1.6. Матрица называется *квадратной* порядка n, если число строк и число столбцов равно n, то есть $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n,m}$.

Матрица A из примера 1.4 является квадратной порядка 2.

Определение 1.7. Элемент вида a_{ii} матрицы A называется *диагональным.*

Определение 1.8. Квадратная матрица, у которой все недиагональные элементы равны 0 называется диагональной.

Пример 1.6. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ — диагональная матрица третьего порядка.

Определение 1.9. Диагональная матрица, *все* диагональные элементы которой равны 1, называется *единичной.*

Обозначение: E_n — единичная матрица n-го порядка.

Пример 1.7. $E_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ — единичная матрица 4-го порядка.

Определение 1.10. Матрица A называется *верхней треугольной*, если $a_{ij} = 0$ при всех $i > j$, то есть все ее элементы ниже диагонали равны 0.

Пример 1.8. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$— верхняя треугольная матрица.

Аналогично определяется нижняя треугольная матрица.

Упражнение 1.1. Определите типы матриц:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

1.2 Действия с матрицами

На множестве всех матриц одинакового размера вводятся операции сложения и умножения матрицы на число.

Определение 2.1. Суммой двух матриц одинакового размера $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{m,n}$ и $B = (b_{ij})_{i,j=1}^{m,n}$ называется матрица $C = (c_{ij})_{i,j=1}^{m,n}$ того же размера такая, что $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ для всех $i = 1, \dots, m$ и всех $j = 1, \dots, n$.

Таким образом, при сложении двух матриц складываются их соответствующие элементы.

Пример 2.1. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$,

$$A+B=\begin{pmatrix}2-1 & -1+2 & 0+1\\ 3-1 & 1+1 & 2+0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 2 & 2\end{pmatrix}.$$

Заметим, что при сложении матриц A и O одинаковой размерности выполняются равенства:

$A+O=O+A=A$.

Определение 2.2. Произведением числа α ($\alpha\in\mathbb{R}^1$) на матрицу $A=(a_{ij})_{i,j=1}^{m,n}$ называется матрица $B=(b_{ij})_{i,j=1}^{m,n}$ того же размера, где $b_{ij}=\alpha\cdot a_{ij}$ для всех $i=1,\ldots,m$ и всех $j=1,\ldots,n$.

Таким образом, чтобы умножить матрицу на число, достаточно *каждый* ее элемент умножить на это число.

Пример 2.2. $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix}$,

$$3A=\begin{pmatrix}3\cdot 2 & 3\cdot(-1) & 3\cdot 0\\ 3\cdot 3 & 3\cdot 1 & 3\cdot 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & -3 & 0\\ 9 & 3 & 6\end{pmatrix}.$$

Основные свойства операций над матрицами

2.1. $A+B=B+A$ для любых матриц $A=(a_{ij})_{i,j=1}^{m,n}$ и $B=(b_{ij})_{i,j=1}^{m,n}$.

2.2. $(A+B)+C=A+(B+C)$ для любых матриц $A=(a_{ij})_{i,j=1}^{m,n}$, $B=(b_{ij})_{i,j=1}^{m,n}$ и $C=(c_{ij})_{i,j=1}^{m,n}$.

2.3. $A+O=O+A=A$ для любой матрицы $A=(a_{ij})_{i,j=1}^{m,n}$.

2.4. $A+(-A)=O$ для любой матрицы $A=(a_{ij})_{i,j=1}^{m,n}$.

2.5. $\alpha\cdot(\beta A)=\alpha\beta\cdot(A)=A$ для всех α, $\beta\in\mathbb{R}^1$ и всех матриц $A=(a_{ij})_{i,j=1}^{m,n}$.

2.6. $(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A$ для всех α, $\beta\in\mathbb{R}^1$ и всех матриц $A=(a_{ij})_{i,j=1}^{m,n}$.

2.7. $\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B=A$ для всех $\alpha\in\mathbb{R}^1$, всех матриц $A=(a_{ij})_{i,j=1}^{m,n}$ и $B=(b_{ij})_{i,j=1}^{m,n}$.

2.8. $1\cdot A=A$ для любой матрицы $A=(a_{ij})_{i,j=1}^{m,n}$.

2.9. $0\cdot A=O$ для любой матрицы $A=(a_{ij})_{i,j=1}^{m,n}$.

2.10. $(A+B)^T=A^T+B^T$ для всех матриц $A=(a_{ij})_{i,j=1}^{m,n}$

и $B = (b_{ij})_{i,j=1}^{m,n}$.

2.11. $(\alpha \cdot A)^T = \alpha \cdot A^T$ для любого $\alpha \in \mathbb{R}^1$ и любой матрицы $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{m,n}$.

2.12. $(A^T)^T = A$ для любой матрицы $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{m,n}$.

Упражнение 2.1. Выполните действия над матрицами:

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $2A - 3B = ?$

б) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 7 & 0 & -1 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ -3 & 3 & 4 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $A + B = ?$

в) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $2A - B^T = ?$

Умножение матриц

Прежде чем определить произведение двух матриц, рассмотрим матрицу-строку $A_i = (a_{ik})_{k=1}^{l}$ и матрицу-столбец $B_j = (b_{kj})_{k=1}^{l}$.

Определение 2.3. Произведением матрицы-строки A_i на матрицу-столбец B_j называется число $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{il}b_{lj} = \sum\limits_{k=1}^{l} a_{ik}b_{kj}$.

Таким образом, чтобы умножить строку на столбец одинаковой длины, нужно перемножить *все* их соответствующие элементы и полученные произведения сложить.

Определение 2.4. Произведением матрицы $A = (a_{ik})_{i,k=1}^{m,l}$ на матрицу $B = (b_{kj})_{k,j=1}^{l,n}$ называется матрица $C = (c_{ij})_{i,j=1}^{m,n}$, где $c_{ij} = \sum\limits_{k=1}^{l} a_{ik}b_{kj}$ для всех $i = 1, \ldots, m$ и всех $j = 1, \ldots, n$.

Пример 2.3. Перемножим матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

$$A \cdot B =$$
$$= \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 + 0 \cdot 0 + 2 \cdot 1 & 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \\ 2 \cdot 2 + 3 \cdot 0 + 1 \cdot 1 & 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что $A \cdot B \neq B \cdot A$.

Действительно, в примере 2.3 матрица A имеет размер 2×3, матрица B— 3×2, а их произведение AB— квадратная матрица второго порядка.

Произведение BA— квадратная матрица третьего порядка. Матрицы разных размеров не равны.

Упражнение 2.2. Найдите произведение матриц BA из примера 2.3.

Рассмотрим квадратную $n \times n$ матрицу A.

Определение 2.5. Степенью A^m квадратной матрицы A называется произведение m одинаковых сомножителей, каждый из которых равен матрице A.

Пример 2.4.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Упражнение 2.3. Вычислите:

а) $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & -6 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}$;

б) $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -28 & 93 \\ 38 & -126 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$;

г) $\begin{pmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ -\cos\alpha & \sin\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin\alpha & -\cos\alpha \\ \cos\alpha & \sin\alpha \end{pmatrix}$;

д) $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$;

е) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$;

ж) $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^m$, $a \in \mathbb{R}$.

1.3 Определитель матрицы

Важной числовой характеристикой квадратной матрицы является ее определитель.

Введем это понятие последовательно для матриц различных размерностей.

I. Рассмотрим квадратную матрицу второго порядка $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$.

Определение 3.1. *Определителем* матрицы A называется называется *число*, равное разности произведений элементов главной и побочной диагоналей: $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Определитель матрицы A обозначается через $|A|$, $\triangle(A)$ или $detA$.

det— сокращение от латинского слова "determinant— определитель.

Эти обозначения определителя используются для матриц любого порядка.

Пример 3.1. $det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = -2.$

Свойства определителей второго порядка

1. *При транспонировании матрицы значение определителя не меняется, то есть $det(A^T) = detA$.*

Действительно, $A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$.

Из определения 3.1 следует, что

$$detA^T = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = detA.$$

Из свойства 1 и определения транспонированной матрицы следует, что достаточно рассмотреть свойства определителей для строк матриц. Аналогичные свойства справедливы и для их столбцов.

2. *При перемене местами строк значение определителя меняется на противоположное, то есть* $\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} = -detA.$

3. *Если все элементы одной строки матрицы умножить на число k, то значение определителя изменится в k раз, то есть* $\begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = k \cdot detA.$

Таким образом мы видим, что общий множитель можно выносить за знак определителя.

4. *Если все элементы одной строки матрицы равны 0, то ее определитель равен 0.*

5. *Если строки матрицы A пропорциональны, то определитель матрицы A равен 0, то есть* $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ ka_{11} & ka_{12} \end{vmatrix} = 0$ *для любого* $k \in \mathbb{R}$.

6. *Определитель матрицы не изменится, если к элементам одной строки добавить соответствующие пропорциональные элементы другой строки, то есть*

$$\begin{vmatrix} a_{11} + ka_{21} & a_{12} + ka_{22} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = detA.$$

II. Рассмотрим квадратную матрицу третьего порядка $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$.

Определение 3.2. *Определителем* матрицы A называется число

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - \\ - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

Для запоминания этой часто употребляемой формы используется правило треугольника:

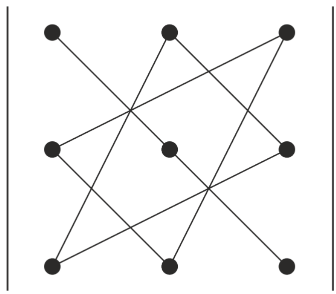


Рис. 1.1: Произведения со знаком плюс.

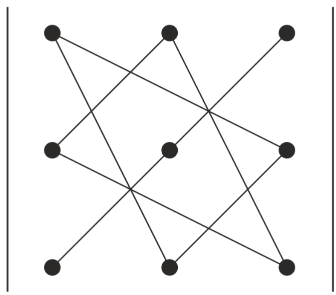


Рис. 1.2: Произведения со знаком минус.

Кроме того, удобно использовать правило Саррюса. Для этого составляется вспомогательная матрица размером 3×5: $B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$ (к матрице A добавлены справа первый и второй столбцы этой же матрицы).

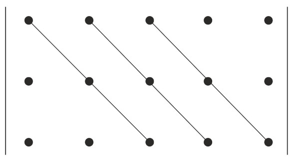


Рис. 1.3: Произведения со знаком плюс.

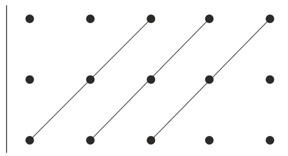


Рис. 1.4: Произведения со знаком минус.

С помощью элементов матрицы B составляются тройные произведения определителя матрицы A:

Пример 3.2.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1 \cdot 5 \cdot 9 + 3 \cdot 4 \cdot 8 + 2 \cdot 6 \cdot 7 -$$
$$-3 \cdot 5 \cdot 7 - 2 \cdot 4 \cdot 9 - 1 \cdot 6 \cdot 8 = 0.$$

Для определителей третьего порядка справедливы те же свойства, что и для определителей второго порядка.

Свойства определителей третьего порядка

1. Транспонирование матрицы не меняет ее определитель.

2. Перестановка двух строк матрицы меняет знак определителя на противоположный.

3. Определитель с одинаковыми строками равен 0.

4. Если элементы одной строки матрицы умножить на число k, то определитель матрицы умножится на число k.

5. Определитель матрицы с нулевой строкой равен 0.

6. Определитель матрицы не изменится, если к элементам одной строки прибавить соответствующие пропорциональные элементы других строк.

Упражнение 3.1. Докажите свойства 1—6.

III. Мы познакомились с определителями квадратных матриц второго и третьего порядка. Для того, чтобы дать общее определение определителя квадратной матрицы, введем следующие понятия.

Рассмотрим конечное множество, состоящее из n элементов. Для удобства занумеруем его элементы и отождествим каждый элемент множества с его номером:

$$M = \{1, 2, \ldots, n\}.$$

Назовем *перестановкой* любое упорядоченное множество, состоящее из элементов множества M. Перестановки принято обозначать через P и в круглых скобках.

Пример 3.3. $M = \{1, 2, 3\}$. Перестановки множества M:

$$P_1 = (1\ 2\ 3); P_2 = (1\ 3\ 2);$$
$$P_3 = (2\ 1\ 3); P_4 = (2\ 3\ 1);$$
$$P_5 = (3\ 1\ 2); P_6 = (3\ 2\ 1).$$

Заметим, что это - все возможные перестановки из трех элементов.

Перестановка, в которой все элементы расположены в порядке возрастания, называется *стандартной.*

Упражнение 3.2. Выпишите все перестановки из двух и четырех элементов.

Заметим, что существует ровно $n!$ перестановок множества, состоящего из n элементов.

Определение 3.3. *Подстановкой* из n элементов называется матрица размером $2 \times n$ вида

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ i_1 & i_2 & i_3 & \ldots & i_n \end{pmatrix},$$

первая строка которой есть стандартная перестановка, вторая - произвольная перестановка из n элементов множества M.

Определение 3.4. Транспозицией называется подстановка вида:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & i-1 & \boxed{\begin{matrix} i \\ j \end{matrix}} & i+1 & \dots & j-1 & \boxed{\begin{matrix} j \\ i \end{matrix}} & j+1 & \dots n \\ 1 & 2 & 3 & \dots & i-1 & & i+1 & \dots & j-1 & & j+1 & \dots n \end{pmatrix}.$$

Подстановка вида $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}$ называется тождественной и обозначается через τ_0.

Будем обозначать транспозицию через τ_{ij}.

Транспозиция τ_{ij} отличается от тождественной подстановки элементами, стоящими на i-ом и j-ом местах. Несложно видеть, что $\tau_{ij} = \tau_{ji}$.

Определение 3.5. Подстановка называется *четной*, если она получается из тождественной с помощью четного числа транспозиций.

Аналогично определяется нечетная подстановка.

Пример 3.4. Рассмотрим подстановки вида:

$$Q_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, Q_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix},$$
$$Q_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, Q_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$
$$Q_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, Q_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Подстановка $Q_1 = \tau_0$— тождественная.

Подстановки $Q_2 = \tau_{23}$, $Q_3 = \tau_{12}$, $Q_6 = \tau_{13}$ являются транспозициями.

Подстановка Q_4 получается из тождественной с помощью двух транспозиций: $Q_4 = \tau_{13} \circ \tau_{12}$.

Подстановка Q_5 получается из тождественной также с помощью двух транспозиций: $Q_5 = \tau_{12} \circ \tau_{13}$.

Из определения 3.5 следует, что среди всех перестановок из трех элементов четными являются подстановки Q_1, Q_4, Q_5, нечетными— Q_2, Q_3, Q_6.

Обозначим через $t(P)$— число транспозиций, необходимых для преобразования тождественной подстановки τ_0 в подстановку $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ j_1 & j_2 & \dots & j_n \end{pmatrix}$, где $P = (j_1, \dots, j_n)$.

Пример 3.5. $t(P_1) = 0$, $t(P_2) = 1$, $t(P_3) = 1$, $t(P_4) = 2$, $t(P_5) = 2$, $t(P_6) = 1$ (см. примеры 3.3 и 3.4)

Упражнение 3.3. Определите четность всех подстановок из двух элементов.

Рассмотрим матрицу $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$.

Определение 3.6. *Определителем* матрицы A называется число $\triangle(A)$, равное

$$\sum_P (-1)^{t(P)} a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3} \cdot \ldots \cdot a_{nj_n}.$$

Суммирование по всем перестановкам из n элементов.

Пример 3.6. Рассмотрим матрицу A третьего порядка. Ее определитель вычисляется (см. определение 3.2) с помощью шести слагаемых. Заметим, что число всех перестановок из трех элементов равно 6. Три слагаемых (а именно: $a_{11}a_{22}a_{33}$, $a_{12}a_{23}a_{31}$, $a_{13}a_{21}a_{32}$) в этой сумме идут со знаком плюс. Каждое из них определяется с помощью подстановок Q_1, Q_4, Q_5 соответственно. А это - четные подстановки.

Легко видеть, что остальные слагаемые определителя матрицы A соответствуют нечетным подстановкам и идут со знаком минус.

Таким образом, определение 3.2 есть частный случай определения 3.6.

Заметим, что для определителей произвольного порядка справедливы свойства 1—6, которые мы рассмотрели для определителей второго и третьего порядка.

Упражнение 3.4. Сформулируйте свойства 1—6 для определителя матрицы A размерности $n \times n$.

Сформулируем и докажем свойства определителей матриц размерности $n \times n$.

Свойство 3.1 При транспонировании матрицы значение определителя не меняется.

Доказательство. Обозначим через $\triangle = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$,

$\triangle' = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$ определители матриц A и A^T соответственно:

$$\triangle = \sum_j (-1)^{t(j)} a_{1j_1} \dots a_{nj_n}$$

$$\triangle' = \sum_i (-1)^{t(i)} a_{1i_1} \dots a_{ni_n}.$$

Упорядочим элементы перестановки: $j = (j_1 \dots j_n) \to (1 \dots n)$.

При этом первые индексы $(1 \dots n)$ образуют новую перестановку: $(1 \dots n) \to (i_1 \dots i_n)$ той же четности, что и перестановка j (поскольку она образована с помощью того же количества транспозиций). Разным перестановкам j соответствуют разные перестановки i.

Свойство 3.2 Если две строки определителя поменять местами, то знак определителя изменится на противоположный.

Доказательство. Пусть $\triangle = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{l1} & \dots & a_{ln} \\ \hdotsfor{3} \\ a_{k1} & \dots & a_{kn} \\ \hdotsfor{3} \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$,

$$\triangle' = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{k1} & \dots & a_{kn} \\ \hdotsfor{3} \\ a_{l1} & \dots & a_{ln} \\ \hdotsfor{3} \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Тогда

$$\triangle' = \sum_j (-1)^{t(j)} a_{1j_1} \cdot \ldots \cdot \boxed{a_{kj_l}} \cdot \ldots \cdot \boxed{a_{lj_k}} \cdot \ldots \cdot a_{nj_n} =$$

$$= \sum_j (-1)^{t(j)} a_{1j_1} \cdot \ldots \cdot \boxed{a_{lj_k}} \cdot \ldots \cdot \boxed{a_{kj_l}} \cdot \ldots \cdot a_{nj_n} =$$

$$= \sum_j (-1)^{t(j+1)} a_{1j_1} \cdot \ldots \cdot \boxed{a_{lj_l}} \cdot \ldots \cdot \boxed{a_{kj_k}} \cdot \ldots \cdot a_{nj_n} = -\triangle.$$

Свойство 3.3 Определитель матрицы, имеющей две одинаковые строки, равен нулю.

Доказательство. Пусть у матрицы A строки $a_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$ и $a_j = (a_{j1}, a_{j2}, \dots, a_{jn})$ одинаковые.

Если их поменять местами, матрица A (а значит и ее определитель) не изменится. С другой стороны, согласно свойству 2, знак определителя изменится на противоположный, то есть $detA = -detA$.

Равенство возможно только в том случае, когда $detA = 0$.

Свойство 3.4 Если элементы одной строки матрицы умножить на число λ, то определитель матрицы умножится на число λ, то есть

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ a_{l1} & \dots & a_{ln} \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \lambda \triangle(A).$$

Доказательство.

$$\triangle' = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ \lambda a_{l1} & \dots & \lambda a_{ln} \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \sum_P (-1)^{t(P)} a_{1j_1} \cdot \ldots \cdot \boxed{\lambda a_{lj_l}} \cdot \ldots \cdot a_{nj_n} = \lambda \triangle(A).$$

Свойство 3.5 Определитель матрицы с нулевой строкой равен нулю.

Доказательство.

$$l: \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ 0 & \dots & 0 \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \sum_P (-1)^{t(P)} a_{1j_1} \cdot \ldots \cdot \boxed{0} a_{l+1,j_{l+1}} \cdot \ldots \cdot a_{nj_n} = 0.$$

Сформулируем еще ряд полезных свойств определителей матриц.

Свойство 3.6 Матрицы A, B, C имеют одинаковую размерность и отличаются только одной k-ой строкой, причем $c_{kj} = a_{kj} + b_{kj}$ для всех $j = 1, \dots, n$,

$c_{ij} = a_{ij} = b_{ij}$ при всех $i \neq k$ и всех $j = 1, \ldots, n$. Тогда $detC = detA + detB$.

Доказательство.

$$detA = \sum_P (-1)^{t(P)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdot \ldots \cdot \boxed{a_{kj_k}} \cdot \ldots \cdot a_{nj_n} =$$
$$= \sum_P (-1)^{t(P)} c_{1j_1} c_{2j_2} \cdot \ldots \cdot \boxed{a_{kj_k}} \cdot \ldots \cdot c_{nj_n};$$

$$detB = \sum_P (-1)^{t(P)} b_{1j_1} b_{2j_2} \cdot \ldots \cdot \boxed{b_{kj_k}} \cdot \ldots \cdot b_{nj_n} =$$
$$= \sum_P (-1)^{t(P)} c_{1j_1} c_{2j_2} \cdot \ldots \cdot \boxed{b_{kj_k}} \cdot \ldots \cdot c_{nj_n};$$

$$detC = \sum_P (-1)^{t(P)} c_{1j_1} c_{2j_2} \cdot \ldots \cdot \boxed{c_{kj_k}} \cdot \ldots \cdot c_{nj_n} =$$
$$= \sum_P (-1)^{t(P)} c_{1j_1} c_{2j_2} \cdot \ldots \cdot \boxed{(a_{kj_k} + b_{kj_k})} \cdot \ldots \cdot c_{nj_n} =$$
$$= \sum_P (-1)^{t(P)} c_{1j_1} c_{2j_2} \cdot \ldots \cdot \boxed{a_{kj_k}} \cdot \ldots \cdot c_{nj_n} +$$
$$+ \sum_P (-1)^{t(P)} c_{1j_1} c_{2j_2} \cdot \ldots \cdot \boxed{b_{kj_k}} \cdot \ldots \cdot c_{nj_n} =$$
$$= detA + detB.$$

Следствие 3.1 Определитель матрицы не изменится, если одну из ее строк заменить на ее сумму с другой строкой.

Следствие 3.2 Определитель матрицы не изменится, если одну из его строк заменить на ее сумму с пропорциональной другой строкой.

Обозначим через $a_k = (a_{k1}, a_{k2}, \ldots, a_{kn})$— k-ую строку матрицы A.

Определение 3.7. *Линейной комбинацией* строк $\{a_k\}_{k\in J}$ матрицы A называется выражение вида $\sum\limits_{k\in J}\alpha_k a_k$, где $\alpha_k \in \mathbb{R}$.

Следствие 3.3 Определитель матрицы не изменится, если к какой-либо ее строке прибавить линейную комбинацию других ее строк.

Упражнение 3.5. Сформулируйте и докажите свойства 1—6 для столбцов. Свойства 1—6 часто используются при вычислении определителей.

Свойство 3.7 Определитель *треугольной* матрицы равен произведению ее диагональных элементов.

Доказательство.

Пусть A— верхняя треугольная матрица, то есть $a_{ij} = 0$ при $i > j$.

$$detA = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \sum_P (-1)^{t(P)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdot \ldots \cdot a_{nj_n} =$$

$$= a_{11}a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn} + \sum_{P: j_k \neq k} (-1)^{t(P)} a_{1j_1} \cdot \ldots \cdot a_{nj_n} =$$

$$= a_{11}a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn} + 0 = a_{11}a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn}.$$

В дальнейшем будем использовать следующие обозначения. Все действия над строками будем обозначать в круглых скобках, а над столбцами - в квадратных.

Пример 3.7. Вычислим определитель:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \underset{\text{(сл-е 3.1)}}{\overset{(3)-(2)}{=}} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} \underset{\text{(сл-е 3.1)}}{\overset{(2)-(1)}{=}} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} \overset{\text{(св-во 3.3)}}{=} 0.$$

Пример 3.8. Вычислим определитель:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 5 & -5 & 30 & 10 \\ 1 & 1 & -3 & 3 \\ 1 & 1 & 6 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 5\cdot 1 & 5\cdot(-1) & 5\cdot 6 & 5\cdot 2 \\ 1 & 1 & -3 & 3 \\ 1 & 1 & 6 & -1 \end{vmatrix} \overset{\text{(св-во 3.4)}}{=}$$

$$= 5\cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3\cdot 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3\cdot 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3\cdot(-1) & 3 \\ 1 & 1 & 3\cdot 2 & -1 \end{vmatrix} \overset{\text{[св-во 3.4]}}{=}$$

$$= 5\cdot 3 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} \underset{\substack{(4)-(1) \\ \text{(св-во 3.1)}}}{\overset{\substack{(2)-(1) \\ (3)-(1)}}{=}}$$

$$= 15\cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} \overset{\text{(св-во 3.2)}}{=}$$

$$= -15\cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{vmatrix} \overset{\text{(св-во 3.4)}}{=}$$

$$= -30\cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} \underset{\text{(св-во 3.1)}}{\overset{(4)+(1)}{=}}$$

$$= -30\cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \overset{\text{(св-во 3.7)}}{=}$$

$$= -30\cdot 1\cdot(-2)\cdot(1)\cdot(-1) = -60.$$

Упражнение 3.6. Вычислите определитель:

$$\begin{vmatrix} 5 & 25 & 0 & 5 \\ 1 & -12 & 30 & 4 \\ 7 & 15 & 240 & 19 \\ 4 & 3 & 30 & 7 \end{vmatrix}.$$

Рассмотрим квадратные матрицы A и B одинаковой размерности.

Свойство 3.8 Определитель AB произведения матриц A и B равен произведению их определителей, то есть $detAB = detA \cdot detB$.

Доказательство. Докажем это свойство для матриц второго порядка: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{22} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{22} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$.

Обозначим через $\triangle_1 = detA$, $\triangle_2 = detB$, определитель произведения матриц $AB = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$ через $\triangle = detAB$. Тогда

$$\triangle = \begin{vmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{vmatrix} \overset{\text{(св-во 3.6)}}{=}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{vmatrix} \overset{\text{(св-во 3.6)}}{=}$$

$$= b_{11} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{11}b_{12} \\ a_{21} & a_{21}b_{12} \end{vmatrix} + b_{11} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}b_{22} \\ a_{21} & a_{22}b_{22} \end{vmatrix} + b_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{11}b_{12} \\ a_{22} & a_{21}b_{12} \end{vmatrix} +$$

$$+ b_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{12}b_{22} \\ a_{22} & a_{22}b_{22} \end{vmatrix} = b_{11} \cdot b_{12} \cdot 0 + b_{11} \cdot b_{22} \cdot \triangle_1 +$$

$$+ b_{21} \cdot b_{12} \cdot (-\triangle_1) + b_{21} \cdot b_{22} \cdot 0 = \triangle_1 \cdot \triangle_2$$

1.4 Разложение определителя по строке (столбцу)

В предыдущем параграфе мы рассмотрели на примерах (3.7 и 3.8), как применяя свойства определителей, вычислять их сведением к более простым: треугольным, с нулевой или пропорциональными строками (столбцами).

Еще один удобный способ нахождения определителей состоит в понижении порядков определителей. Чтобы изложить этот метод вычислений, введем понятия минора и алгебраического дополнения.

Рассмотрим матрицу $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{m,n}$ размерности $m \times n$.

Определение 4.1. *Минором матрицы* A *порядка* k называется всякий определитель матрицы порядка k, полученный из матрицы A вычеркиванием $m-k$ строк и $n-k$ столбцов.

Пример 4.1. $A = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 8 & 1 \\ -5 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$. Примеры миноров второго порядка матрицы A:

$$M_1 = \begin{vmatrix} 3 & 8 \\ -5 & 0 \end{vmatrix} = 40, \; M_2 = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 10.$$

Определение 4.2. *Минором* элемента a_{ij} *квадратной* матрицы $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n,n}$ называется минор порядка $n-1$, полученный вычеркиванием i-ой строки и j-го столбца матрицы A.

Обозначается минор к элементу a_{ij} через M_{ij}.

Определение 4.3. *Алгебраическим дополнением* элемента a_{ij} называется число $(-1)^{i,j} M_{ij}$.

Обозначается алгебраическое дополнение через $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

Пример 4.2. Вычислим миноры и алгебраические дополнения элементов матрицы A:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$A_{11} = M_{11} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -4; A_{12} = -M_{12} = -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -7;$$

$$A_{13} = M_{13} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 6; A_{21} = -M_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -13;$$

$$A_{22} = M_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 9; A_{23} = -M_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 6;$$

$$A_{31} = M_{31} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4; A_{32} = -M_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -5;$$

$$A_{33} = M_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -6.$$

Упражнение 4.1. Вычислите значение выражений:

$$a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13};$$
$$a_{21}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23};$$
$$a_{11}A_{31} + a_{12}A_{32} + a_{13}A_{33};$$
$$a_{13}A_{13} + a_{23}A_{23} + a_{33}A_{33}.$$

Упражнение 4.2. Вычислите определитель матрицы A (пример 4.2).

Для дальнейших рассуждений нам понадобится лемма.

Лемма 4.1. Если все элементы n-ой строки квадратной матрицы A размера $n \times n$, кроме, быть может, последнего, равны 0, то $detA = a_{nn}A_{nn}$.

Доказательство. Рассмотрим матрицу

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

$$detA \overset{\text{(опр. 3.6)}}{=} \sum_P (-1)^{t(P)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdot \ldots \cdot a_{nj_n}.$$

Разобьем слагаемые на две группы: в первую отнесем все те из них, которые имеют подстановки индексов вида:

$$Q_{n-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n-1 & n \\ j_1 & j_2 & \dots & j_{n-1} & n \end{pmatrix},$$

а во вторую — все остальные. Тогда

$$detA = \sum_{P_{n-1}} (-1)^{t(P_{n-1})} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdot \ldots \cdot a_{n-1,j_{n-1}} a_{nn} + 0 =$$
$$= a_{nn} \cdot \sum_{(P_{n-1})} (-1)^{t(P_{n-1})} a_{1j_1} \cdot \ldots \cdot a_{n-1,j_{n-1}} =$$
$$= a_{nn} M_{nn} = a_{nn} A_{nn}.$$

Следствие 4.1. Если все элементы i-ой строки квадратной матрицы A равны нулю, кроме, быть может, a_{in}, то $detA = a_{in} A_{in}$.

Доказательство. Чтобы можно было воспользоваться леммой 4.1, надо преобразовать матрицу A к виду $\begin{pmatrix} * & * & * & * \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & a_{in} \end{pmatrix}$, то есть передвинуть i-ую строку на последнее место. Если переставить сразу эти строки, то порядок строк после этого будет существенно отличаться от их порядка в миноре. Поэтому переставлять будем соседние строки. Тогда

$$detA = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \dots & a_{i+1,n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \overset{(\text{св. } 3.2)}{=}$$

$$= - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \dots & a_{i+1,n} \\ 0 & \dots & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^2 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \dots & a_{i+1,n} \\ a_{i+2,1} & a_{i+2,2} & \dots & a_{i+2,n} \\ 0 & \dots & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \dots =$$

$$= (-1)^{n-i} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \dots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \dots & a_{i+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \\ 0 & \dots & \dots & a_{in} \end{vmatrix} \overset{(\text{лемма } 4.1)}{=}$$

$$= (-1)^{n-i} \cdot a_{in}A'_{nn} = (-1)^{n-i} \cdot (-1)^{2n} a_{in}M_{in} =$$
$$= (-1)^{n+i} a_{in}M_{in} = a_{in}A_{in}.$$

Следствие 4.2. Если все элементы j-го столбца матрицы A равны нулю, кроме, быть может, a_{jn}, то $detA = a_{jn}A_{in}$.

Для доказательства этого следствия достаточно транспонировать матрицу A и воспользоваться следствием 4.1.

Следствие 4.3. Если все элементы i-ой строки матрицы A равны нулю, кроме, быть может, a_{ij}, то $detA = a_{ij}A_{ij}$.

Упражнение 4.3. Воспользуйтесь следствиями 4.1 и 4.2 и докажите следствие 4.3.

Теорема 4.1. (о разложении определителя по строке). *Определитель матрицы равен сумме произведений всех элементов ее строки на их алгебраические дополнения*, то есть для любого $i = 1, \ldots, n$ справедливо равенство $detA = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik}$.

Доказательство. Для доказательства теоремы строку $a_i = (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in})$ матрицы A представим в виде:

$$a_i = (a_{i1}, 0, 0, \ldots, 0) + (0, a_{i2}, 0, \ldots, 0) + \ldots + (0, 0, \ldots, 0, a_{in}).$$

Определитель матрицы A (по свойству 3.6) равен сумме n определителей:

$$detA = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i1} & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & a_{i2} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} + \ldots +$$

$$+ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & a_{in} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \overset{\text{(сл. 4.3)}}{=} a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in}.$$

Замечание. Справедлива теорема о разложении определителя матрицы по столбцу:

$$detA = \sum_{k=1}^{n} a_{ki} A_{ki}.$$

Теорема 4.2. Для любых различных i и j, $i, j = 1, \ldots, n$, $i \neq j$ справедливо равенство:

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{jk} = 0.$$

Доказательство. Рассмотрим матрицу

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \ldots & a_{i-1,n} \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{in} \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \ldots & a_{i+1,n} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a_{j-1,1} & a_{j-1,2} & \ldots & a_{j-1,n} \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{in} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

j-ая строка этой матрицы совпадает с i-ой строкой. Определитель такой матрицы (свойство 3.3) равен нулю.

С другой стороны, $B_{jk} = Ajk$ для любого $k = 1, \ldots, n$.

$$0 = detB \overset{(\text{Т. } 4.1)}{=} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} B_{jk} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{jk}.$$

Пример 4.3. Вычислить определитель матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -3 \\ 4 & 2 & 1 & -7 \\ -3 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Вычислим этот определитель с помощью разложения по третьей строке (теорема 4.1).

$$detA = (-3)\cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & -1 & -3\\ 2 & 1 & -7\\ 3 & -4 & 2\end{vmatrix}}_{\triangle_1} - 1\cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1\\ 4 & 2 & 1\\ 2 & 3 & -4\end{vmatrix}}_{\triangle_2}.$$

$$\triangle_1 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -3\\ 2 & 1 & -7\\ 3 & -4 & 2\end{vmatrix} \overset{\substack{[2]+[1]\\ [3]+3[1]}}{\underset{\text{сл. } 3.1}{=}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0\\ 2 & 3 & -1\\ 3 & -1 & 11\end{vmatrix} \overset{\text{т. } 4.1}{=} \begin{vmatrix} 3 & -1\\ -1 & 11\end{vmatrix} = 32;$$

$$\triangle_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1\\ 4 & 2 & 1\\ 2 & 3 & -4\end{vmatrix} \overset{\text{св. } 3.4}{=} 2\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1\\ 2 & 2 & 1\\ 1 & 3 & -4\end{vmatrix} \overset{\substack{(2)-2(1)\\ (3)-(1)}}{\underset{\text{сл. } 3.1}{=}}$$

$$= 2\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 3\\ 0 & 2 & -3\end{vmatrix} \overset{\text{т. } 4.1}{=} -2\cdot 3\begin{vmatrix} 1 & 1\\ 0 & 2\end{vmatrix} = -12.$$

$$detA = -3\cdot\triangle_1 - \triangle_2 = -96 + 12 = -84.$$

Упражнение 4.4. Вычислите определитель матрицы A (пример 4.3) приведением ее к треугольному виду.

1.5 Обратная матрица

Определение 5.1. *Квадратная матрица* A называется *обратимой*, если существует матрица B такая, что произведения AB и BA равны единичной матрице E: $AB = BA = E$.

Матрицу B называют *обратной к* A и обозначают через A^{-1}.

Утверждение 5.1. Если квадратная матрица A обратима, то ее определитель отличен от нуля, то есть $detA \neq 0$.

Доказательство. Пусть матрица A обратима, то есть существует матрица A^{-1} такая, что $AA^{-1} = E$.

Вычислим $detAA^{-1} \overset{\text{св. 3.8}}{=} detA \cdot detA^{-1}$.

С другой стороны, $detE \underset{\text{опр. 1-9}}{\overset{\text{св. 3.7}}{=}} = 1$.

Таким образом, $detA \cdot detA^{-1} = 1$, следовательно $detA \neq 0$.

Следствие 5.1. Если матрица A обратима, то $detA^{-1} = \frac{1}{detA}$.

Замечание 5.1 Матрицу с ненулевым определителем называют *невырожденной*.

Определение 5.2. *Присоединенной* к невырожденной матрице A называется матрица, составленная из алгебраических дополнений ее элементов.

Обозначается присоединенная матрица через A^V.

$$A^V = (A_{ij})_{i,j=1}^{n}.$$

Пример 5.1. Вычислим матрицу, присоединенную к матрице $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$.

Из определения 4.3 следует, что $A_{11} = 4$, $A_{12} = -(-3) = 3$, $A_{21} = -2$, $A_{22} = 1$.

Тогда $A^V = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Утверждение 5.2. Если матрица A невырождена, то она обратима и $A^{-1} = \frac{1}{detA}(A^V)^T$.

Доказательство. Вычислим произведение

$$A\cdot\frac{1}{detA}(A^V)^T=\frac{1}{detA}A(A^V)^T=$$

$$=\frac{1}{detA}\begin{pmatrix}a_{11}&\dots&a_{1n}\\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill}\\ a_{n1}&\dots&a_{nn}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}&\dots&A_{n1}\\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill}\\ A_{1n}&A_{2n}&\dots&A_{nn}\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{detA}\begin{pmatrix}\sum\limits_{i=1}^{n}a_{1i}A_{1i}&\sum\limits_{i=1}^{n}a_{1i}A_{2i}&\dots&\sum\limits_{i=1}^{n}a_{1i}A_{ni}\\ \sum\limits_{i=1}^{n}a_{2i}A_{1i}&\sum\limits_{i=1}^{n}a_{2i}A_{2i}&\dots&\sum\limits_{i=1}^{n}a_{2i}A_{ni}\\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill}\\ \sum\limits_{i=1}^{n}a_{ni}A_{1i}&\sum\limits_{i=1}^{n}a_{ni}A_{2i}&\dots&\sum\limits_{i=1}^{n}a_{ni}A_{ni}\end{pmatrix}\overset{\text{Т. 4.1}}{\underset{\text{Т. 4.2}}{=}}$$

$$=\frac{1}{detA}\begin{pmatrix}detA&0&0&\dots&0&0\\ 0&detA&0&\dots&0&0\\ \multicolumn{6}{c}{\dotfill}\\ 0&0&0&\dots&0&detA\end{pmatrix}=E.$$

Рассмотрим произведение $\frac{1}{detA}(A^V)^T\cdot A$.

Аналогично доказывается, что $\frac{1}{detA}(A^V)^TA=E$.

Значит матрица $\frac{1}{detA}(A^V)^T$ есть обратная к матрице A (определение 5.1).

Таким образом, мы доказали, что *матрица A обратима тогда и только тогда, когда она невырождена.*

Определение 5.3. Найдем матрицу, обратную к матрице $A=\begin{pmatrix}1&2&-1\\3&0&2\\4&-2&5\end{pmatrix}$, используя присоединенную матрицу.

Заметим, что $detA=-4$ (вычислите его самостоятельно), следовательно, матрица A обратима.

Вычислим алгебраические дополнения ко всем элементам матрицы:

$$A_{11} = 4,\ A_{12} = (-1) \cdot 7 = -7,\ A_{13} = -6,$$

$$A_{21} = -8,\ A_{22} = 9,\ A_{23} = 10,$$

$$A_{31} = 4,\ A_{32} = -5,\ A_{33} = -6.$$

Присоединенная матрица имеет вид:

$$A^V = \begin{pmatrix} 4 & -7 & -6 \\ -8 & 9 & 10 \\ 4 & -5 & -6 \end{pmatrix}.$$

Обратная матрица образуется транспонированием матрицы A^V и делением всех ее членов на определитель матрицы A:

$$A^{-1} = -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 4 & -8 & 4 \\ -7 & 9 & -5 \\ -6 & 10 & -6 \end{pmatrix}.$$

1.6 Ранг матрицы

Для решения и исследования ряда математических и прикладных задач важное значение имеет понятие ранга матрицы.

Рассмотрим матрицу $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{m,n}$ размера $m \times n$.

Выберем в матрице A k строк и k столбцов ($k \leqslant \min(m,n)$). Элементы, стоящие на пересечении выбранных строк и столбцов образуют квадратную матрицу, которая порождает определитель k-го порядка.

Его будем называть определителем k-го порядка, порожденным матрицей A.

Определение 6.1. *Рангом* матрицы A называется наибольшее неотрицательное число k, для которого существует не равный нулю определитель $\triangle$ k-го порядка, порожденный матрицей A.

Ранг матрицы обозначается через $r(A)$.

Пример 6.1. Вычислить ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Матрица A имеет размер 2×3, поэтому ее ранг $r(A) \leqslant 2$. Рассмотрим 1 и 2 столбцы матрицы A. Они образуют определитель $\triangle_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$. Таким образом, $r(A) = 2$.

В общем случае определение ранга матрицы перебором всех миноров достаточно трудоемко. Для облегчения этой задачи используются преобразования, сохраняющие ранг матрицы.

Назовем *элементарными преобразованиями* матрицы следующие: 1) Отбрасывание нулевой строки (столбца).

2) Умножение всех элементов строки (столбца) матрицы на число, не равное нулю.

3) Изменение порядка строк (столбцов) матрицы.

4) Прибавление к каждому элементу одной строки (столбца) соответствующих элементов другой строки (столбца), умноженных на любое число.

5) Транспонирование матрицы.

Теорема 6.1. Ранг матрицы не изменится при элементарных преобразованиях матрицы.

Доказательство. При изучении свойств определителей (смотрите свойства 3.1-3.7) было показано, что при преобразованиях квадратных матриц их определители либо сохраняются, либо умножаются на число, не равное нулю. В результате сохраняется наивысший порядок отличных от нуля миноров исходной матрицы, то есть ее ранг не изменяется.

С помощью элементарных преобразований можно привести матрицу к ступенчатому виду, когда вычисление ее ранга не представляет труда.

Определение 6.2. Матрица A называется ступенчатой, если она имеет вид:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2r} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{rr} & \dots & a_{rn} \end{pmatrix},$$

где $a_{ij} \neq 0$, $i = 1, \dots, r$; $r \leqslant n$.

Легко видеть, что ранг ступенчатой матрицы равен r, так как имеется минор порядка r, не равный нулю:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{rr} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{12} \cdot \ldots \cdot a_{1r} \neq 0.$$

Пример 6.2. Найти ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 5 \\ 9 & 1 & 4 & -5 \\ 2 & 2 & 3 & 4 \\ 7 & 1 & 6 & -1 \end{pmatrix}.$$

Для удобства вычислений добьемся того, чтобы $a_{11} = 1$.

Для этого вычтем из элементов первой строки соответствующие элементы второй:

$$A \overset{(1)-(2)}{\Longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -3 \\ 2 & 3 & 2 & 5 \\ 9 & 1 & 4 & -5 \\ 2 & 2 & 3 & 4 \\ 7 & 1 & 6 & -1 \end{pmatrix}.$$

Вычтем из элементов второй строки удвоенные соответствующие элементы первой строки.

Умножая элементы первой строки на 9, вычтем полученные числа из соответствующих элементов третьей строки.

Аналогичным образом преобразуя элементы четвертой и пятой строк, добьемся того, чтобы все элементы первого столбца (кроме a_{11}) равнялись нулю:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -3 \\ 2 & 3 & 2 & 5 \\ 9 & 1 & 4 & -5 \\ 2 & 2 & 3 & 4 \\ 7 & 1 & 6 & -1 \end{pmatrix} \underset{\substack{(4)-2(1)\\(5)-7(1)}}{\overset{\substack{(2)-2(1)\\(3)-9(1)}}{\Longrightarrow}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 5 & 2 & 11 \\ 0 & 10 & 4 & 22 \\ 0 & 4 & 3 & 10 \\ 0 & 8 & 6 & 20 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что если из элементов третьей строки вычесть соответствующие удвоенные элементы второй строки, то получим нулевую строку, которую можно отбросить.

Почему можно отбросить пятую строку?

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 5 & 2 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 5 & 2 & 11 \\ 0 & 4 & 3 & 10 \end{pmatrix}.$$

С помощью элементарных преобразований добьемся того, чтобы $a_{32} = 0$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 5 & 2 & 11 \\ 0 & 4 & 3 & 10 \end{pmatrix} \xRightarrow{(2)-(3)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 10 \end{pmatrix} \xRightarrow{(3)-4(1)}$$
$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 7 & 6 \end{pmatrix}.$$

Последняя матрица имеет ступенчатый вид и содержит миноры третьего порядка, не равные нулю, например $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 7 \end{vmatrix} = 7 \neq 0.$

Следовательно, ранг полученной, а значит и данной матрицы A равен 3.

Упражнение 6.1. Вычислите определители:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 6 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 3 & -1 & 4 & 2 \\ 5 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -3 \\ 6 & -2 & 9 & 8 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & -a & -b & -d \\ a & 0 & -c & -e \\ b & c & 0 & 0 \\ d & e & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Упражнение 6.2. Вычислить:

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 8 & -4 \\ 6 & 9 & -5 \\ 4 & 7 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & -1 & 3 \\ 9 & 6 & 5 \end{pmatrix}.$$

Упражнение 6.3. Методом элементарных преобразований найти обратные для следующих матриц:

$$\begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 3 & -4 & -3 \\ 0 & 6 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Упражнение 6.4. Найти ранг матрицы методом окаймляющих миноров:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}.$$

Упражнение 6.5. Чему равен ранг матрицы A при различных значениях λ?

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ \lambda & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

1.7 Системы линейных уравнений

Система m линейных уравнений с n неизвестными имеет вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{7.1}$$

где a_{ij} $(i = 1, \ldots, m,\ j - 1, \ldots, n)$— произвольные числа, называемые коэффициентами при неизвестных, b_i $(i = 1, \ldots, m)$— свободные члены уравнений.

Определение 7.1. *Решением системы* 7.1 называется такая совокупность n чисел $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$, при подстановке которых каждое уравнение системы обращается в верное равенство.

Система уравнений называется *совместной*, если она имеет хотя бы одно решение, и *несовместной*, если она не имеет решений.

Совместная система называется *определенной*, если она имеет единственное решение,и *неопределенной*, если она имеет более одного решения.

Запишем систему 7.1 в матричной форме.

Рассмотрим матрицу коэффициентов

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

матрицу-столбец неизвестных $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, матрицу-столбец свободных членов $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$.

Систему 7.1 можно записать в виде:

$$AX = B. \tag{7.2}$$

Сформулируем, при каких условиях система 7.2 совместна. Для этого рассмотрим *расширенную* матрицу D системы 7.2:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}, \ D = (A, B).$$

Теорема 7.1. *(Кронекера-Капелли)* Для того, чтобы система 7.2 была совместной, необходимо и достаточно, чтобы $r(A) = r(D)$.

Замечание 7.1 Теорема Кронекера-Капелли доказывается приведением матрицы D к ступенчатому виду.

Рассмотрим способы решений линейных систем.

Пример 7.1. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 2. \end{cases}$$

Найдем ранг расширенной матрицы D данной системы:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Для этого приведем ее с помощью элементарных преобразований к ступенчатому виду:

$$D \overset{(2)-(1)}{\underset{(3)-(1)}{\Longrightarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \overset{(3)-2(2)}{\Longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим минор третьего порядка $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$, образованный 2, 3 и 4 столбцами матрицы D.

Таким образом, $r(D) = 3$.

Первые три столбца матрицы D образуют матрицу A. Легко видеть, что $r(A) = 2$.

Так как $r(A) \neq r(D)$, система несовместна.

Системы с квадратной матрицей

Рассмотрим систему 7.2 при условии, что $m = n$.

Предположим, что *квадратная* матрица A $(n \times n)$ системы 7.2 невырожденная, то есть $detA \neq 0$.

В этом случае существует обратная матрица A^{-1}.

Умножив слева обе части матричной системы 7.2 на матрицу A^{-1}, получим равенство:

$$A^{-1}(AX) = A^{-1}B.$$

Так как $A^{-1}(AX) = (A^{-1}A)X = EX = X$, то решением системы 7.2 будет матрица-столбец

$$X = A^{-1}B \tag{7.3}$$

Этот способ решения системы называется *метод обратной матрицы.*

Заметим, что система 7.2 имеет решение для любой матрицы B при условии, что $detA \neq 0$.

Рассмотрим матрицы

$$A_i = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,i-1} & b_1 & a_{1,i+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,i-1} & b_2 & a_{2,i+1} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n,i-1} & b_n & a_{n,i+1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Обозначим их определители через $detA_i = \triangle_i$, $i = 1, \dots, n$.

Теорема 7.2. *(Крамера)* Пусть определитель матрицы A системы 7.2 отличен от нуля ($detA \neq 0$). Тогда для любой матрицы B система 7.2 имеет единственное решение:

$$x_i = \frac{\triangle_i}{\triangle} \ (i = 1, \dots, n) \tag{7.4}$$

Равенства (7.4) называются формулами Крамера.

Доказательство. Обратная матрица A^{-1} имеет вид: $A^{-1} = \frac{1}{\triangle}(A^V)^T$ (см. утв. 5.2).

Так как элементы присоединенной матрицы A^V есть алгебраические дополнения элементов матрицы A, то запишем равенство (7.3) в виде:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\triangle}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\triangle}\begin{pmatrix} b_1A_{11} + b_2A_{21} + \ldots + b_nA_{n1} \\ b_1A_{12} + b_2A_{22} + \ldots + b_nA_{n2} \\ \dots \\ b_1A_{1n} + b_2A_{2n} + \ldots + b_nA_{nn} \end{pmatrix},$$

откуда следует, что для любого i $(i = 1, \ldots, n)$

$$x_i = \frac{1}{\triangle}\sum_{k=1}^{n} b_k A_{ki}.$$

Из теоремы о разложении определителя по строке (теорема 4.1) следует, что $\sum\limits_{k=1}^{n} b_k A_{ki} = \triangle_i$. Следовательно, $x_i = \frac{\triangle_i}{\triangle}$.

Пример 7.2. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 = 1. \end{cases}$$

$$\triangle = detA = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Система совместна.

а) Решим систему методом обратной матрицы.

Найдем $A^{-1} = \frac{1}{\triangle}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ (см. утв. 5.2)

Теперь по формуле (7.3) получим:

$$X = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

б) Решим систему по формулам Крамера.

$$\triangle_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1,\ \triangle_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\triangle_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Таким образом:

$$x_1 = \frac{\triangle_1}{\triangle} = 1,\ x_2 = \frac{\triangle_2}{\triangle} = 0,\ x_1 = \frac{\triangle_3}{\triangle} = 0.$$

Метод последовательных исключений Гаусса

Метод Гаусса заключается в том, что с помощью элементарных преобразований система уравнений приводится к равносильной системе ступенчатого вида (к системе с матрицей ступенчатого вида).

Рассмотрим систему 7.1.

Если мы умножим какое-либо уравнение системы 7.1 на постоянное число и прибавим его к другому уравнению системы, то мы получим новую систему, равносильную данной.

При этом матрица коэффициентов системы изменится:

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} & b_i \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix} \overset{(i)+\lambda(j)}{\Longrightarrow} D' =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1}+\lambda a_{j1} & a_{i2}+\lambda a_{j2} & \dots & a_{in}+\lambda a_{jn} & b_i+\lambda b_j \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}.$$

С помощью элементарных операций над *строками* мы приведем матрицу коэффициентов системы к ступенчатому виду, что позволит последовательно найти неизвестные системы.

Система со ступенчатой матрицей имеет вид:

$$\begin{cases} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \ldots + c_{1n}x_n = d_1 \\ c_{22}x_2 + \ldots + c_{1n}x_n = d_2 \\ \dots \\ c_{rr}x_r + c_{r,r+1}x_{r+1} + \ldots + c_{rn}x_n = d_r \\ 0 = d_{r+1} \\ \dots \\ 0 = d_m \end{cases} \tag{7.5}$$

Если хотя бы одно из чисел $d_{r+1}, \ldots, d_m$ не равно нулю, то соответствующее равенство противоречиво $(r(D) > r(A))$ и система 7.1 несовместна.

Таким образом, для любой совместной системы $d_{r+1} = d_{r+2} = \ldots = d_m = 0$. В этом случае последние $(m-r)$ уравнений системы (7.5) являются тождествами и их можно не принимать во внимание при решении системы 7.1.

После отбрасывания $(m-r)$ уравнений возможны два случая: а) число уравнений системы (7.5) равно числу переменных $(n = r)$; б) $r < n$.

При этом $r(D) = rA) = r$.

Пусть $r < n$.

Определение 7.2. Переменные $x_1, \ldots, x_r$ называются *главными*, если определитель матрицы из коэффициентов при них (базисный минор) отличен от нуля. Остальные $(n-r)$ переменных называются *свободными*.

Пример 7.3. Решить систему:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 3 \\ 9x_1 + x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5 \\ 7x_1 + x_2 + 6x_3 - x_4 = 7 \end{cases}$$

Решим систему методом Гаусса. Для этого составим расширенную матрицу коэффициентов и приведем ее к ступенчатому виду.

$$D=\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 2 & 2 & 2\\ 2 & 3 & 2 & 5 & 3\\ 9 & 1 & 4 & -5 & 1\\ 2 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 7 & 1 & 6 & -1 & 7 \end{array}\right) \xRightarrow{(1)-(2)}$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & -3 & -1\\ 2 & 3 & 2 & 5 & 3\\ 9 & 1 & 4 & -5 & 1\\ 2 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 7 & 1 & 6 & -1 & 7 \end{array}\right) \xRightarrow[\substack{(4)-2(1)\\(5)-7(1)}]{\substack{(2)-(1)\\(3)-9(1)}}$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & -3 & -1\\ 0 & 5 & 2 & 11 & 5\\ 0 & 10 & 4 & 22 & 10\\ 0 & 4 & 3 & 10 & 7\\ 0 & 8 & 6 & 20 & 14 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & -3 & -1\\ 0 & 5 & 2 & 11 & 5\\ 0 & 5 & 2 & 11 & 5\\ 0 & 4 & 3 & 10 & 7\\ 0 & 4 & 3 & 10 & 7 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & -3 & -1\\ 0 & 5 & 2 & 11 & 5\\ 0 & 4 & 3 & 10 & 7 \end{array}\right) \xRightarrow{(2)-(3)}$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & -3 & -1\\ 0 & 1 & -1 & 1 & -2\\ 0 & 4 & 3 & 10 & 7 \end{array}\right) \xRightarrow{(3)-4(2)}$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & -3 & -1\\ 0 & 1 & -1 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 7 & 6 & 15 \end{array}\right),$$

то есть $r(D)=r(A)=3$. Система совместна, имеет три главных неизвестных x_1, x_2, x_3. Ступенчатая система имеет вид:

$$\begin{cases} x_1-x_2-3x_4=-1,\\ x_2-x_3+x_4=-2,\\ 7x_3+6x_4=15. \end{cases}$$

Перенесем свободное неизвестное в правую часть:

$$\begin{cases} x_3 = \frac{15-6x_4}{7}, \\ x_2 - x_3 = -2 - x_4, \\ x_1 - x_2 = 3x_4 - 1. \end{cases}$$

Задавая свободной переменной x_4 произвольные значения, найдем бесконечное множество решений системы:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{8C-6}{7}, \\ x_2 = \frac{1-13C}{7}, \\ x_3 = \frac{15-6C}{7}. \end{cases}$$

Однородные системы

Система m линейных уравнений с n неизвестными называется *системой линейных однородных* уравнений, если все их свободные члены равны нулю.

Такая система имеет вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0, \end{cases} \tag{7.6}$$

или в матричном виде:

$$AX = 0. \tag{7.7}$$

Утверждение 7.1. Система (7.7) линейных однородных уравнений всегда совместна.

Доказательство. Система (7.7) всегда имеет, по крайней мере, нулевое (тривиальное) решение $X = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

Утверждение 7.2. Если $P = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \vdots \\ p_n \end{pmatrix}$ и $Q = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \vdots \\ q_n \end{pmatrix}$— решения системы (7.7), то при любых α и β линейная комбинация $X = \alpha P + \beta Q$— также решение данной системы.

Упражнение 7.1. Докажите утверждение 7.2.

Определение 7.3. Система матриц-столбцов $\{Y_1, Y_2, \ldots, Y_k\}$ называется *линейно независимой*, если из равенства $\lambda_1 Y_1 + \lambda_2 Y_2 + \ldots + \lambda_k Y_k = 0$ следует, что $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_k = 0$.

Определение 7.4. Система линейно независимых решений $\{Y_1, Y_2, \ldots, Y_k\}$ называется *фундаментальной*, если каждое решение системы (7.7) является линейной комбинацией решений $Y_1, Y_2, \ldots, Y_k$.

Пусть $r = r(A)$— ранг матрицы A.

Без ограничения общности можно считать, что $x_1, x_2, \ldots, x_r$— главные неизвестные, $x_{r+1}, \ldots, x_n$— свободные.

Всякая матрица $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{n-r} \end{pmatrix}$— решение системы 7.7, если укороченная матрица $X_r = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix}$— решение укороченной системы:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1r}x_r = \\ = -a_{1,r+1}c_1 - a_{1,r+2}c_2 - \ldots - a_{1n}c_{n-r}, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2r}x_r = \\ = -a_{2,r+1}c_1 - a_{2,r+2}c_2 - \ldots - a_{2n}c_{n-r}, \\ \ldots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \ldots + a_{rr}x_r = \\ = -a_{r,r+1}c_1 - a_{r,r+2}c_2 - \ldots - a_{rn}c_{n-r}. \end{cases}$$

Рассмотрим следующие матрицы:

$$Y_1 = \begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ \vdots \\ x_r^{(1)} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ Y_2 = \begin{pmatrix} x_1^{(2)} \\ \vdots \\ x_r^{(2)} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \ Y_{n-r} = \begin{pmatrix} x_1^{(n-r)} \\ \vdots \\ x_r^{(n-r)} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

— решения системы (7.7).

Утверждение 7.3. Решения $Y_1, Y_2, \ldots, Y_{n-r}$— линейно независимы.

Упражнение 7.2. Докажите утверждение 7.3.

Утверждение 7.4. Пусть $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$— решения системы (7.7). Тогда существуют такие $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-r}$, что

$$X = \lambda_1 Y_1 + \lambda_2 Y_2 + \ldots + \lambda_{n-r} Y_{n-r}.$$

Доказательство. Рассмотрим матрицу

$$Y = X - x_{r+1}Y_1 - x_{r+2}Y_2 - \ldots - x_nY_{n-r} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Из утверждения 7.2 следует, что Y— решение системы (7.7):

$$AY = 0.$$

Эта система равносильна укороченной системе:

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1r}y_r = 0, \\ \ldots \\ a_{r1}y_1 + a_{r2}y_2 + \ldots + a_{rr}y_r = 0 \end{cases} \tag{7.8}$$

с матрицей $A_r = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1r} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{r1} & \ldots & a_{rr} \end{pmatrix}$.

Но $det A_r \neq 0$, следовательно система (7.8) имеет единственное тривиальное решение $Y_r = 0$, то есть $Y = 0$. Следовательно, $X = x_{r+1}Y_1 + \ldots + x_nY_{n-r}$, $\lambda_1 = x_{r+1}$, $\lambda_2 = x_{r+2}$, …, $\lambda_{n-r} = x_n$.

Замечание 7.2. Решения $Y_1, Y_2, \ldots, Y_{n-r}$ образуют фундаментальную систему решений.

Общее решение системы (7.7) имеет вид:

$$X = c_1Y_1 + c_2Y_2 + \ldots + c_{n-r}Y_{n-r},$$

где $Y_1, Y_2, \ldots, Y_{n-r}$— фундаментальная система решений, $c_1, c_2, \ldots, c_{n-r}$— произвольные числа.

Пример 7.4. Найти общее решение системы:

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 0. \end{cases}$$

Матрица коэффициентов этой системы имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 3 & -3 \\ 3 & -2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Приведем ее к ступенчатому виду:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -3 & -18 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Легко видеть, что $r(A) = 3$. Первые три столбца образуют базисные минор, неизвестные x_1, x_2, x_3— главные. Обозначим свободное неизвестное x_4 через C. Тогда

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = -5C, \\ x_2 - 3x_3 = 18C, \\ x_3 = C. \end{cases}$$

Решения системы имеют вид: $x_1 = 14C$, $x_2 = 21C$, $x_3 = x_4 = C$. Фундаментальная система решений состоит из одной матрицы $Y = \begin{pmatrix} 14 \\ 21 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Общее решение системы имеет вид: $X = C \cdot \begin{pmatrix} 14 \\ 21 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Глава 2

Векторное пространство

2.1 Векторы на плоскости и в пространстве

Понятие вектора одно из основных в геометрии и алгебре. Слово вектор латинского происхождения и означает "несущий".

Определение 1.1. Вектором $\bar{a}$ называется множество всех направленных отрезков, имеющих одинаковую длину и направление.

О всяком векторе $\overrightarrow{AB}$ из этого множества говорят, что он представляет вектор $\bar{a}$ (получен приложением вектора $\bar{a}$ к точке A).

Определение 1.2. *Длиной* $|\overrightarrow{AB}| = |\bar{a}|$ вектора $\bar{a}$ называется число, равное длине отрезка AB.

Если точки A и B совпадают, то вектор $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AA} = 0$ называется *нулевым* вектором.

Определение 1.3. Векторы, лежащие на одной прямой или на параллельных прямых, называются *коллинеарными.*

В геометрии рассматривают сложение и вычитание векторов и умножение их на действительные числа.

Определение 1.4. Произведение вектора $\bar{a}$ на действительное число λ называется вектор $\lambda\bar{a}$ такой, что

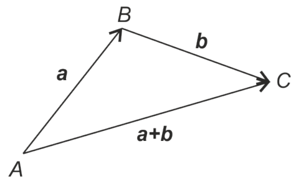
1) $|\lambda\bar{a}| = |\lambda| \cdot |\bar{a}|$;

2) векторы $\bar{a}$ и $\lambda\bar{a}$ коллинеарны.

Пусть направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$ представляет вектор $\bar{a}$. Приложим к точке B вектор $\bar{b}$.

Получим направленный отрезок $\overrightarrow{BC}$.

Определение 1.5. Вектор, представленный направленным отрезком $\overrightarrow{AC}$, называется *суммой* векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ и обозначается $\overline{a+b}$.



Упражнение 1.1. Докажите, что операция сложения векторов обладает следующими свойствами:

а) $\bar{a} + 0 = \bar{a}$;

б) $\bar{a} + \bar{b} = \overline{b+a}$ (коммутативность);

в) $\bar{a} + (\overline{b+c}) = (\overline{a+b}) + \bar{c}$ (ассоциативность);

г) для любого вектора $\bar{a}$ существует единственный вектор $\bar{b}$ такой, что $\bar{a} + \bar{b} = 0$ (вектор $\bar{b}$ называется вектором, противоположным вектору $\bar{a}$ и обозначается через $-\bar{a}$).

Упражнение 1.2. Докажите, что

а) операция умножения вектора на число обладает следующими свойствами:

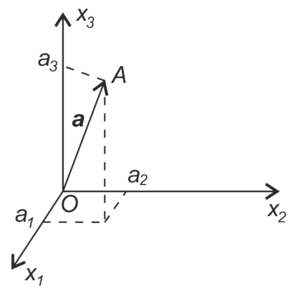
$$0 \cdot \bar{a} = \lambda \cdot 0 = 0, \ (\lambda_1\lambda_2)\bar{a} = \lambda_1(\lambda_2\bar{a});$$

б) $\lambda(\bar{a}+\bar{b}) = \lambda\bar{a} + \lambda\bar{b}$ и $(\lambda_1+\lambda_2)\bar{a} = \lambda_1\bar{a} + \lambda_2\bar{a}$.

Определение 1.6. *Проекцией* вектора $\bar{a}$ на вектор $\bar{b}$ называется число $\text{пр}_l\bar{a} = |\bar{a}|\cos\varphi$, где φ— угол между векторами $\bar{a}$ и $\bar{l}$ $(0 \leqslant \varphi \leqslant \pi)$.

Рассмотрим аналитическое описание векторов.

Для этого введем в пространство *прямоугольную систему координат* O_{x_1,x_2,x_3}, то есть три взаимно перпендикулярные направленные прямые, проходящую через точку O. Точка O называется *началом координат*, прямые O_{x_1}, O_{x_2}, O_{x_3}— *осями координат*.



Зададим произвольную точку A трехмерного пространства.

Направленный отрезок $\overrightarrow{OA}$ называется радиус-вектором точки A.

Радиус-вектор в свою очередь определяет вектор $\bar{a}$ $(\bar{a} = \overrightarrow{OA})$, который можно переносить в пространстве параллельно самому себе.

Числовые проекции радиус-вектора a на оси O_{x_1}, O_{x_2}, O_{x_3} обозначим соответственно a_1, a_2, a_3. Это— координаты точки A.

Между точками A пространства и их радиус-векторами $\overrightarrow{OA}$ имеется взаимно однозначное соответствие.

Из определений 8.4, 8.5 и 8.6 следует, что

$$\bar{a}+\bar{b}=(a_1,a_2,a_3)+(b_1,b_2,b_3)=(a_1+b_1,a_2+b_2,a_3+b_3);$$

$$\lambda\bar{a}=(\lambda a_1,\lambda a_2,\lambda a_3).$$

Обозначим через $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ единичные (имеющие длину, равную 1) векторы, имеющие то же направление, что и оси O_{x_1}, O_{x_2}, O_{x_3}.

Векторы $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ называют *ортами* координатных осей.

Произвольный вектор может быть записан в виде $\bar{a}=a_1\bar{i}+a_2\bar{j}+a_3\bar{k}$.

Упражнение 1.3. Докажите, что векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ коллинеарны тогда и только тогда, когда существует такое λ, что $\bar{b}=\lambda\bar{a}$.

Утверждение 1.1. Длина вектора $\bar{a}$ равна

$$|\bar{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}. \qquad (8.1)$$

Это равенство следует из теоремы Пифагора.

Определение 1.7. *Скалярным произведением* $(\bar{a},\bar{b})$ двух векторов $\bar{a}=(a_1,a_2,a_3)$ и $\bar{b}=(b_1,b_2,b_3)$ называется число

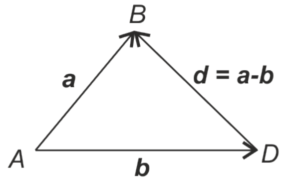
$$(\bar{a},\bar{b})=|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cdot\cos\varphi,$$

где φ— угол между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

Утверждение 1.2. Справедливо равенство:

$$(\bar{a},\bar{b})=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3,$$

то есть скалярное произведение двух векторов равно сумме произведений соответствующих координат этих векторов.



Доказательство. Рассмотрим треугольник ABD, сторонами которого являются векторы $\bar{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\bar{b} = (b_1, b_2, b_3)$ и $\bar{d} = \bar{a} - \bar{b} = (a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3)$.

Из теоремы косинусов следует, что

$$|\bar{d}|^2 = |\bar{a}|^2 + |\bar{b}|^2 - 2|\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \cos\varphi,$$

откуда

$$|\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \cos\varphi = \frac{1}{2}(|\bar{a}|^2 + |\bar{b}|^2 - |\bar{d}|^2). \tag{8.2}$$

Из равенства (8.1) следует

$$|\bar{a}|^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2, \; |\bar{b}|^2 = b_1^2 + b_2^2 + b_3^2,$$

$$|\bar{d}|^2 = (a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + (a_3 - b_3)^2.$$

Преобразуя выражение (8.2), получим

$$(\bar{a}, \bar{b}) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3.$$

Упражнение 1.4. Докажите свойства скалярного произведения:

1) $(\bar{a}, \bar{b}) = (\bar{b}, \bar{a})$;
2) $(\lambda\bar{a}, \bar{b}) = \lambda(\bar{a}, \bar{b})$;
3) $(\bar{a}, \bar{b} + \bar{c}) = (\bar{a}, \bar{b}) + (\bar{a}, \bar{c})$.

Пример 1.1. Даны векторы $\bar{a} = (2; -1; -2)$ и $\bar{b} = (8; -4; 0)$.

Найти
а) векторы $\bar{c} = 2\bar{a}$ и $\bar{d} = \bar{b} - \bar{a}$;
б) длины векторов $\bar{c}$ и $\bar{d}$;
в) скалярное произведение $(\bar{c}, \bar{d})$;
г) угол между векторами $\bar{c}$ и $\bar{d}$.
Решение. а) Из определения следует, что

$$\bar{c} = 2\bar{a} = (4; -2; -4);\ \ \bar{d} = \bar{b} - \bar{a} = (6; -3; 2).$$

б) Из формулы (8.1) следует, что

$$|\bar{c}| = \sqrt{4^2 + (-2)^2 + (-4)^2} = 6,$$
$$|\bar{d}| = \sqrt{6^2 + (-3)^2 + 2^2} = 7.$$

в) $(\bar{c}, \bar{d}) = 4 \cdot 6 + (-2) \cdot (-3) + (-4) \cdot 2 = 22$ (см. утв. 8.2).

г) Из определения скалярного произведения следует, что $\cos\varphi = \frac{(\bar{c},\bar{d})}{|\bar{c}|\cdot|\bar{d}|} = \frac{22}{6\cdot 7} = \frac{11}{21}$, откуда $\varphi = \arccos\frac{11}{21}$.

Определение 1.8. *Векторным произведением* $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется вектор

$$\bar{c} = \bar{a} \times \bar{b} = [\bar{a}, \bar{b}] = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right) \quad (8.3)$$

Утверждение 1.3. Справедливы свойства векторного произведения:

1) $\bar{a} \times \bar{b} = \bar{b} \times \bar{a}$ (антикоммутативность);

2) векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ коллинеарны тогда и только тогда, когда $\bar{a} \times \bar{b} = 0$;

3) пусть $\bar{a}$ и $\bar{b}$— неколлинеарные векторы. Тогда вектор $\bar{c} = \bar{a} \times \bar{b}$ ортогонален каждому из векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$;

4) $|\bar{c}| = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \sin\varphi$, где φ— угол между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$, то есть длина вектора $\bar{c}$ равна площади параллелограмма, натянутого на векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$;

5) $[\bar{a}, \alpha\bar{b}] = \alpha[\bar{a}, \bar{b}]$;

6) $[\bar{a}, \bar{b} + \bar{c}] = [\bar{a}, \bar{b}] + [\bar{a}, \bar{c}]$.

Доказательство. Докажем свойство 3), используя свойства скалярного произведения:

$$(\bar{c}, \bar{a}) = a_1 \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} + a_2 \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} =$$
$$= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Следовательно, угол между векторами $\bar{c}$ и $\bar{a}$ равен 90°. Аналогично доказывается ортогональность векторов $\bar{c}$ и $\bar{b}$.

Упражнение 1.5. Используя свойства определителей и векторов, докажите утверждение 8.3 (свойства 1, 2, 4, 5, 6).

Пример 1.2. Определить угол A треугольника ABC с вершинами $A = (1; 2; 3)$, $B = (2; 2; 2)$, $C = (1; 2; 4)$.

Решение. Обозначим искомый угол через φ.

Таким образом, φ— это угол между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$. Из свойства 4 (утв. 8.3) следует, что

$$\sin\varphi = \frac{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|},$$

где $\overrightarrow{AB} = (1; 0; -1)$, $\overrightarrow{AC} = (0; 0; 1)$, $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{2}$, $\overrightarrow{AC} = 1$,

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \left(\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \right) = (0, -1, 0).$$

Отсюда $\sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\varphi = \frac{\pi}{4}$ или $\varphi = \frac{3}{4}\pi$.

Легко видеть ($|\overrightarrow{BC}|^2 = 5 > |\overrightarrow{AC}|^2 + |\overrightarrow{AB}|^2 = 3$), что φ— тупой угол, поэтому $\varphi = \frac{3}{4}\pi$.

Определение 1.9. Смешанным произведением векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ называется число, равное скалярному произведению вектора $\bar{a} \times \bar{b}$ на $\bar{c}$:

$$(\bar{a} \times \bar{b}, \bar{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

.

Утверждение 1.4. Справедливы свойства смешанного произведения:

1) $|(\bar{a} \times \bar{b}, \bar{c})| = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot |\sin\varphi| \cdot \text{пр}_{\bar{a}\times\bar{b}}\bar{c}$, где φ— угол между $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

Таким образом модуль векторного произведения равен объему параллелепипеда, построенного на векторах $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$.

2) $(\bar{a} \times \bar{b}, \bar{c}) = (\bar{c} \times \bar{a}, \bar{b}) = (\bar{b} \times \bar{c}, \bar{a})$.

3) Векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ лежат в одной плоскости (компланарны) тогда и только тогда, когда $(\bar{a} \times \bar{b}, \bar{c}) = 0$.

4) Точки A, B, C, D лежат в одной плоскости тогда и только тогда, когда $(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = 0$, то есть

$$\begin{vmatrix} b_1 - a_1 & b_2 - a_2 & b_3 - a_3 \\ c_1 - a_1 & c_2 - a_2 & c_3 - a_3 \\ d_1 - a_1 & d_2 - a_2 & d_3 - a_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Доказательство. Докажем свойство 3.

Если векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ лежат в одной плоскости, то $(\bar{a} \times \bar{b}, \bar{c}) = 0$, так как вектор $\bar{a} \times \bar{b}$ ортогонален вектору $\bar{c}$.

Если $(\bar{a} \times \bar{b}, \bar{c}) = 0$, то вектор $\bar{c}$ ортогонален вектору $\bar{a} \times \bar{b}$ и, следовательно, лежит в плоскости векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ или в плоскости, параллельной этой плоскости.

Упражнение 1.6. Докажите утверждение 8.4 (свойства 1,2,4).

Пример 1.3. Докажите, что точки $A(1;2;-1)$, $B(0;1;5)$, $C(-1;2;1)$ и $D(2;1;3)$ лежат в одной плоскости.

Решение. Воспользуемся свойством 4 (утв. 8.4).

Вычислим

$$\triangle = \begin{vmatrix} 0-1 & 1-2 & 5+1 \\ -1-1 & 2-2 & 1+1 \\ 2-1 & 1-2 & 3+1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} -1 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} \overset{(3)-(1)}{=} \begin{vmatrix} -1 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 0.$$

Таким образом, точки A, B, C, D лежат в одной плоскости.

Упражнение 1.7. 1. Вычислить синус угла, образованного векторами: $\bar{a} = (-2, 2, 1)$, $\bar{b} = (6, 3, 2)$.

2. Найти площадь S параллелограмма, построенного на векторах

а) $\bar{a} = (1, 2)$, $\bar{b} = (3, 4)$;

б) $\bar{a} = (1, -2)$, $\bar{b} = (4, 3)$.

3. Доказать, что точки $A(1, 2, -1)$, $B(0, 1, 5)$, $C(-1, 2, 1)$, $D(2, 1, 3)$ лежат в одной плоскости.

2.2 n-мерный вектор и векторное пространство. Скалярное произведение

Множество всех плоских или пространственных векторов, в которых определены операции сложения и умножения вектора на число, являются простейшими примерами векторных пространств.

Обобщим понятие вектора.

Определение 2.1. *n-мерным вектором* называется матрица $\bar{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ размера $1 \times n$. Элементы матрицы называются *координатами* вектора $\bar{a}$.

Понятие n-мерного вектора широко используется в различных прикладных задачах. Например, некоторый набор веществ, участвующих в химической реакции, можно охарактеризовать вектором $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, а соответствующие массы — вектором $\bar{m} = (m_1, \ldots, m_n)$.

Определение 2.2. Два вектора $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ и $\bar{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ одинаковой размерности называются равными тогда и только тогда, когда равны их соответствующие координаты, то есть $x_i = y_i$ для всех $i = 1, \ldots, n$.

Определение 2.3. *Суммой* двух векторов $\bar{x}$ и $\bar{y}$ одинаковой размерности n называется вектор $\bar{z} = \bar{x} + \bar{y}$, каждая координата которого равна сумме соответствующих координат слагаемых, то есть $z_i = x_i + y_i$ для всех $i = 1, \ldots, n$.

Определение 2.4. *Произведением вектора* $\bar{x}$ на число λ называется вектор $\bar{y} = \lambda\bar{x}$, координаты которого равны произведению λ на соответствующие координаты вектора $\bar{x}$, то есть $y_i = \lambda_i x_i$ для всех $i = 1, \ldots, n$.

Линейные операции над любыми векторами удовлетворяют следующим свойствам:

1. $\bar{x} + \bar{y} = \bar{y} + \bar{x}$— коммутативное свойство суммы;

2. $(\bar{x} + \bar{y}) + \bar{z} = \bar{x} + (\bar{y} + \bar{z})$— ассоциативное свойство суммы;

3. $\alpha(\beta\bar{x}) = (\alpha\beta)\bar{x}$— ассоциативное относительно числового множителя свойство;

4. $\alpha(\bar{x}+\bar{y}) = \alpha\bar{x}+\alpha\bar{y}$— дистрибутивное свойство группы;

5. $(\alpha + \beta)\bar{x} = \alpha\bar{x} + \beta\bar{x}$— дистрибутивное относительно числовых множителей свойство;

6. Существует нулевой вектор $\bar{0} = (0, \ldots, 0)$ такой, что $\bar{x} + \bar{0} = \bar{x}$ для любого вектора $\bar{x}$;

7. Для любого вектора $\bar{x}$ существует противоположный вектор $(-\bar{x})$ такой, что $\bar{x} + (-\bar{x}) = \bar{0}$;

8. $1 \cdot \bar{x} = \bar{x}$.

Упражнение 2.1. Докажите свойства 1-8.

Определение 2.5. Множество векторов с действительными компонентами, в котором определены операции сложения векторов и умножения вектора на число, удовлетворяющие свойствам 1-8, называется *векторным пространством.*

Обозначается через $\mathbb{R}_n$.

Замечание 9.1. Заметим, что элементами пространства могут быть не только векторы, но и элементы любой природы. В этом случае соответствующее множество элементов называется *линейным пространством*, а свойства 1-8 рассматриваются как аксиомы.

Линейным пространством является, например, множество всех алгебраических многочленов степени, не превышающей натурального числа n.

Определение 2.6. Вектор вида $\sum\limits_{k=1}^{m} \lambda_k \bar{a_k}$ называется *линейной комбинацией* векторов $\bar{a_1}$, $\bar{a_2}, \ldots, \bar{a_m}$ векторного пространства $\mathbb{R}_n$, где $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$— числовые множители.

Определение 2.7. Векторы $\bar{a_1}$, $\bar{a_2}, \ldots, \bar{a_m}$ пространства $\mathbb{R}_n$ называются *линейно зависимыми*, если существуют такие числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$, не равные одновременно нулю, что

$$\lambda_1 \bar{a_1} + \lambda_2 \bar{a_2} + \ldots + \lambda_m \bar{a_m} = 0 \tag{9.1}$$

В противном случае векторы $\bar{a_1}$, $\bar{a_2}, \ldots, \bar{a_m}$ называются *линейно независимыми.*

Пример 2.1. Выяснить, являются ли векторы $\bar{x} = (1;3;1;3)$, $\bar{b} = (2;1;1;2)$, $\bar{c} = (3;-1;1;1)$ линейно зависимыми.

Решение. Составим линейную комбинацию векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ и запишем равенство:

$$\lambda_1\bar{a} + \lambda_2\bar{b} + \lambda_3\bar{c} = 0.$$

Найдем, при каких λ_1, λ_2, λ_3 это равенство будет верным. Задача сводится к решению системы:

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0, \\ 3\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 = 0, \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0, \\ 3\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0. \end{cases}$$

приведем эту систему к ступенчатому виду:

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 - 2\lambda_3 = 0, \\ \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0, \end{cases}$$

откуда найдем бесконечное множество ее решений $\lambda_1 = C$, $\lambda_2 = -2C$, $\lambda_3 = C$, где C— произвольное число.

Выберем нетривиальное решение системы, например, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = 1$. Следовательно, эти векторы линейно зависимые.

Определение 2.8. Линейное пространство $\mathbb{R}$ называется n-мерным, если в нем существует n линейно независимых векторов, а любые $(n+1)$ векторов — линейно зависимые.

Замечание 9.2. Размерность пространства — это максимальное число содержащихся в нем линейно независимых векторов.

Пример 2.2. Множество всех векторов $\bar{x} = (x_1, x_2)$ на плоскости с вещественными координатами образует двумерное векторное пространство.

Действительно, в нем существует два линейно независимых вектора. Например, $\bar{e_1} = (1, 0)$ и $\bar{e_2} = (0, 1)$ (проверьте самостоятельно).

С другой стороны, любые три вектора $\bar{a} = (a_1, a_2)$, $\bar{b} = (b_1, b_2)$ и $\bar{c} = (c_1, c_2)$— линейно зависимы. Система $\lambda_1\bar{a} + \lambda_2\bar{b} + \lambda_3\bar{c} = 0$ имеет бесконечно много решений, так как ранг матрицы коэффициентов $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix}$ удовлетворяет неравенству $r(A) \leqslant 2$. Следовательно, хотя бы одно неизвестное свободно. Любое нетривиальное решение этой системы позволяет записать требуемую линейную комбинацию.

Определение 2.9. Совокупность n линейно независимых векторов $\bar{a_1}, \ldots, \bar{a_n}$ n-мерного пространства $\mathbb{R}_n$ называется *базисом.*

Теорема 2.1. Каждый вектор $\bar{x}$ линейного пространства $\mathbb{R}_n$ можно представить и притом единственным способом в виде линейной комбинации векторов базиса:

$$\bar{x} = \lambda_1\bar{a_1} + \lambda_2\bar{a_2} + \ldots + \lambda_n\bar{a_n} \tag{9.2}$$

Равенство (9.2) называется разложением вектора по базису $\{\bar{a_1}, \ldots, \bar{a_n}\}$, а числа $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$— координатами вектора $\bar{x}$ в этом базисе.

Упражнение 2.2. Докажите теорему 9.1.

Пример 2.3. Совокупность векторов

$$\bar{e_1} = (1, 0, 0, \ldots, 0),\ \bar{e_2} = (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots,$$
$$\bar{e_k} = (0, 0, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, \bar{e_n} = (0, 0, \ldots, 0, 1)$$

n-мерного пространства $\mathbb{R}_n$ образует базис.

Определение 2.10. Скалярным произведением двух векторов $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ и $\bar{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ называется число

$$(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \tag{9.3}$$

Свойства скалярного произведения:

1. $(\bar{x}, \bar{y}) = (\bar{y}, \bar{x})$— коммутативное свойство;

2. $(\bar{x}, \bar{y}+\bar{z}) = (\bar{x}, \bar{y}) + (\bar{x}, \bar{z})$— дистрибутивное свойство:

3. $(\alpha\bar{x}, \bar{y}) = \alpha(\bar{x}, \bar{y})$— для любого действительного числа α;

4. $(\bar{x}, \bar{x}) \geqslant 0$— для любого вектора $\bar{x}$, причем $(\bar{x}, \bar{x}) = 0$ тогда и только тогда, когда $\bar{x} = \bar{0}$.

Упражнение 2.3. Докажите свойства 1-4.

Определение 2.11. *Длиной (нормой)* вектора $\bar{x}$ называется число $\|\bar{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$.

Замечание 9.3. $\|\bar{x}\| = \sqrt{(\bar{x}, \bar{x})}$.

Утверждение 2.1. *Неравенство Коши-Буняковского* Для любых векторов $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, $\bar{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ справедливо неравенство:

$$\|(\bar{x}, \bar{y})\| \leqslant \|\bar{x}\| \cdot \|\bar{y}\| \tag{9.4}$$

Доказательство. Рассмотрим вектор $(\bar{x} + \lambda\bar{y})$, где λ— произвольное действительное число. Согласно свойству 4, для любого λ справедливо неравенство: $(\bar{x} + \lambda\bar{y}, \bar{x} + \lambda\bar{y}) \geqslant 0$.

С другой стороны,

$$(\bar{x} + \lambda\bar{y}, \bar{x} + \lambda\bar{y}) = (\bar{x}, \bar{x}) + 2\lambda(\bar{x}, \bar{y}) + \lambda^2(\bar{y}, \bar{y})$$

— квадратный трехчлен относительно λ, неотрицателен для любого действительного λ.

Следовательно, его дискриминант

$$D = 4((\bar{x}, \bar{y})^2 - (\bar{x}, \bar{x}) \cdot (\bar{y}, \bar{y})) \leqslant 0,$$

то есть $(\bar{x},\bar{y})^2 \leqslant \|\bar{x}\|^2 \cdot \|\bar{y}\|^2$, откуда следует неравенство (9.4).

Угол φ между векторами $\bar{x}$ и $\bar{y}$ определяется равенством

$$\cos\varphi = \frac{(\bar{x},\bar{y})}{\|\bar{x}\|\cdot\|\bar{y}\|}, \tag{9.5}$$

где $0 \leqslant \varphi\pi$.

2.3 Собственные векторы и собственные значения линейного оператора

Рассмотрим произвольную квадратную матрицу

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}. \tag{10.1}$$

Матрицу A можно рассматривать как оператор, приводящий в соответствие каждому вектору $\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_n$ вектор $\bar{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_n$, координаты которого удовлетворяют равенству

$$\bar{y} = A\bar{x},\ (\bar{x},\bar{y} \in \mathbb{R}_n) \tag{10.2}$$

Замечание 10.1. Оператор A *линейный*, то есть он удовлетворяет условию

$$A(\alpha\bar{x} + \beta\bar{y}) = \alpha A\bar{x} + \beta A\bar{y}$$

для любых векторов $\bar{x},\bar{y} \in \mathbb{R}_n$ и чисел $\alpha,\ \beta$.

Оператор A можно рассматривать и на множестве векторов с комплексными координатами.

Определение 3.1. Вектор $\bar{h} \neq 0$ называется *собственным вектором* линейного оператора A (матрицы A), если найдется такое число λ, что

$$A\bar{h} = \lambda\bar{h} \tag{10.3}$$

Число λ называется *собственным значением* матрицы A, соответствующим вектору $\bar{h}$.

Из определения следует, что собственный вектор под действием линейного оператора A переходит в вектор, коллинеарный самому себе.

Равенство (10.3) можно написать в виде

$$(A - \lambda E)\bar{h} = \bar{0} \tag{10.4}$$

Полученная однородная система всегда имеет нулевое решение. Для существования нетривиального решения (см. раздел 7) необходимо и достаточно, чтобы определитель матрицы системы

$$|A - \lambda E| = 0 \tag{10.5}$$

Определитель $|A - \lambda E|$ называется *характеристическим многочленом матрицы* A, а уравнение (10.5)— *характеристическим уравнением матрицы* A.

Замечание 10.2. Характеристический многочлен оператора A не зависит от выбора базиса.

Пример 3.1. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение. Составим характеристическое уравнение $|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 8 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$ или $\lambda^2 - 2\lambda - 15 = 0$, откуда собственные значения матрицы A равны $\lambda_1 = -3$ и $\lambda_2 = 5$.

Найдем собственный вектор $\bar{h} = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$, соответствующий собственному значению $\lambda_1 = -3$. Для этого решим систему $(A - \lambda_1 E)\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ или $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$,

откуда находим $h_2 = -2h_1$, h_1— свободное неизвестное.

Общее решение системы имеет вид $h = \begin{pmatrix} C \\ -2C \end{pmatrix}$.

При любом $C \neq 0$ векторы $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} C$ являются собственными векторами матрицы A.

Упражнение 3.1. Найдите собственные векторы, соответствующие собственному значению $\lambda_2 = 5$ (пр. 10.1).

Утверждение 3.1. Если $\bar{h}$ и $\bar{g}$— собственные векторы, соответствующие собственному значению матрицы A, тогда для любых чисел α, β вектор $\bar{p} = \alpha\bar{h} + \beta\bar{g}$— собственный вектор, соответствующий собственному значению λ.

Упражнение 3.2. Докажите утверждение 10.1.

Утверждение 3.2. Если $\bar{h}$— собственный вектор, соответствующий собственному значению λ матрицы A, g— собственный вектор, соответствующий собственному значению μ матрицы A, причем $\lambda \neq \mu$, то векторы $\bar{h}$ и $\bar{g}$— линейно независимые.

Доказательство. Предположим противное.

Пусть векторы $\bar{h}$ и $\bar{g}$— линейно зависимы, то есть существует такое число α $(\alpha \neq 0)$, что справедливо равенство: $\bar{h} = \alpha\bar{g}$. Тогда $A\bar{h} = \lambda\bar{h} = \lambda\alpha\bar{g}$.

С другой стороны: $A\bar{h} = A \cdot \alpha\bar{g} = \alpha \cdot A\bar{g} = \alpha \cdot \mu \cdot \bar{g}$, то есть $\lambda\alpha\bar{g} = \alpha\mu\bar{g}$, откуда следует, что $\lambda = \mu$, а это противоречит условию. Следовательно, векторы $\bar{h}$ и $\bar{g}$ линейно независимы.

Теорема 3.1. Если матрица A имеет n попарно различных собственных значений, то отвечающие им собственные векторы линейно независимы, и матрица A в базисе из собственных векторов имеет диагональный вид.

2.4 Квадратичные формы

При решении различных прикладных задач часто приходится исследовать квадратичные формы.

Определение 4.1. *Квадратичной формой* $L(x_1, \ldots, x_n)$ от n переменных называется выражение вида

$$L(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j \tag{11.1}$$

Будем предполагать, что коэффициенты квадратичной формы a_{ij}— действительные числа. Заметим, что $a_{ij} = a_{ji}$.

Матрица $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n}$, составленная из этих коэффициентов, называется *матрицей квадратичной* формы.

Матрица, у которой все элементы $a_{ij} = a_{ji}$ называется *симметричной.*

Замечание 11.1. В матричной записи квадратичная форма имеет вид:

$$L = x^T A x,$$

где $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Пример 4.1. Дана квадратичная форма

$$L(x_1, x_2, x_3) = 4x_1^2 - 12x_1x_2 - 10x_1x_3 + x_2^2 + 3x_3^2.$$

Записать ее в матричном виде.

Решение. Найдем матрицу квадратичной формы:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -6 & -5 \\ -6 & 1 & 0 \\ -5 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Тогда квадратичная форма имеет вид:

$$L = (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 4 & -6 & -5 \\ -6 & 1 & 0 \\ -5 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Выясним, как изменяется квадратичная форма при невырожденном линейном преобразовании переменных.

Пусть матрицы-столбцы переменных x и y связаны линейным соотношением $x = Cy$, где $C = (c_{ij})_{i,j=1}^{n}$ — невырожденная матрица n-го порядка.

Тогда квадратичную форму L можно записать в новых переменных:

$$L = x^T Ax = (Cy)^T A(Cy) = y^T (C^T AC)y.$$

Утверждение 4.1. При невырожденном линейном преобразовании $x = Cy$ матрица квадратичной формы принимает вид:

$$B = C^T AC \tag{11.2}$$

Пример 4.2. Дана квадратичная форма $L(x_1, x_2) = 2x_1^2 + 4x_1x_2 - 3x_2^2$. Найти квадратичную форму $L(y_1, y_2)$, полученную из данной линейным преобразованием

$$\begin{cases} x_1 = 2y_1 - 3y_2, \\ x_2 = y_1 + y_2. \end{cases}$$

Решение. Матрица данной квадратичной формы имеет вид $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$, а матрица линейного преобразования $C = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Следовательно (см. 11.2), матрица искомой квадратичной формы

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & -17 \\ -17 & 3 \end{pmatrix}$$

Определение 4.2. Квадратичная форма L называется *канонической*, если все ее коэффициенты $a_{ij} = 0$ при $i \neq j$.

Замечание 11.2. В выражении (11.1) канонической квадратичной формы отсутствуют смешанные произведения, а ее матрица является диагональной.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 4.1. Любая квадратичная форма с помощью невырожденного линейного преобразования может быть приведена к каноническому виду.

Замечание 11.2. Пусть C— линейное преобразование, приводящее квадратичную форму L к каноническому виду. Тогда координаты собственных векторов матрицы A являются столбцами матрицы C.

Утверждение 4.2. Если A — симметрическая матрица, то корни ее характеристического уравнения — действительные числа.

Упражнение 4.1. Докажите утверждение 11.2 для квадратичной формы от двух переменных.

Пример 4.3. Привести квадратичную форму $L(x_1, x_2) = 9x_1^2 - 4x_1x_2 + 6x_2^2$ к каноническому виду.

Решение. Матрица квадратичной формы имеет вид: $A = \begin{pmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$. Ее характеристический многочлен $|A - \lambda E| = \lambda^2 - 15\lambda + 50$ имеет корни $\lambda_1 = 5$ и $\lambda_2 = 50$.

Найдем собственные векторы, соответствующие собственным значениям:

$$(A-\lambda_1 E)h = 0,\ h = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$(A-\lambda_2 E)h = 0,\ g = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

Собственные векторы $\bar{h}$ и $\bar{g}$ линейно независимы, образуют базис, в котором квадратичная форма имеет канонический вид. $C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$— матрица линейного преобразования, приводящая квадратичную форму L к каноническому виду:

$$B = C^T AC = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 50 \end{pmatrix}$$

(см. 11.2). Таким образом, квадратичная форма с помощью преобразования C приводится к виду:

$$L(y_1, y_2) = 25y_1^2 + 50y_2^2.$$

Замечание 11.3. Если базис — нормированный (собственные векторы $\bar{h}$ и $\bar{g}$ имеют единичную длину), то коэффициенты квадратичной формы равны собственным значениям матрицы А.

Упражнение 4.2. Проверить замечание 11.3 для примера 11.3.

2.5 Задачи для самостоятельной работы

Упражнение 5.1. Решите матричные уравнения:

1) $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 16 \\ 9 & 10 \end{pmatrix};$

2) $X \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 6 \end{pmatrix};$

3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 10 & 2 & 7 \\ 10 & 7 & 8 \end{pmatrix}.$

Упражнение 5.2. Решите неравенства:

1) $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & x & -2 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} < 0;$

2) $\begin{vmatrix} 2 & x+2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 5 & -3 & x \end{vmatrix} > 0.$

Упражнение 5.3. Вычислите определители:

1) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 6 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -5 \end{vmatrix};$

2) $\begin{vmatrix} 0 & b & c & d \\ b & 0 & d & c \\ c & d & 0 & b \\ d & c & b & 0 \end{vmatrix}.$

Упражнение 5.4. Решите системы уравнений:

а) $\begin{cases} 3x - 4y = -6, \\ 3x + 4y = 18; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2ax - 3by = 0, \\ 3ax - 6by = ab; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x + y - 2z = 6, \\ 2x + 3y - 7z = 16, \\ 5x + 2y + z = 16; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x + 3z = 16, \\ 5y - z = 10, \\ 2x + y = 5; \end{cases}$

д) $\begin{cases} 4x + 4y + 5z + 5u = 0, \\ 2x + 3z - u = 10, \\ x + y - 5z = -10, \\ 3y + 2z = 1; \end{cases}$

е) $\begin{cases} 3x - y - z - 2u = 6, \\ 3x - y + 3z - u = 6, \\ 3x + 3y + 3z + 2u = 6, \\ 2x - y + 3z + 2u = 4; \end{cases}$

ж) $\begin{cases} 3x - 2y - 5z + u = 3, \\ 2x - 3y + z + 5u = -3, \\ x + 2y - 4u = -3, \\ x - y - 4z + 9u = 22; \end{cases}$

з) $\begin{cases} 3x - 5y + 2z + 4u = 2, \\ 7x - 4y + z + 3u = 5, \\ 5x + 7y - 4z - 6u = 3. \end{cases}$

Упражнение 5.5. На оси ординат найти точку M, равноудаленную от точек $A(1, -4, 7)$ и $B(5, 6, -5)$.

Упражнение 5.6. Даны вершины треугольника $A(3, -1, 5)$, $B(4, 2, -5)$ и $C(-4, 0, 3)$. Найти длину медианы, проведенной из вершины A.

Упражнение 5.7. $|a_1| = 3$, $|a_2| = 4$, $(\widehat{a_1, a_2}) = \frac{2\pi}{3}$. Вычислить:

а) $a_1^2 = a_1 a_1$; б) $(3a_1 - 2a_2)(a_1 + 2a_2)$;

в) $(a_1 + a_2)^2$.

Упражнение 5.8. Найти угол, образованный единичными векторами e_1 и e_2, если известно, что векторы $a = e_1 + 2e_2$ и $b = 5e_1 - 4e_2$ перпендикулярны.

Упражнение 5.9. Даны векторы $a_1(4, -2, -4)$ и $a_2(6, -3, 2)$. Вычислить:

а) $a_1 a_2$; б) $(2a_1 - 3a_2)(a_1 + 2a_2)$; в) $(a_1 - a_2)^2$;

г) $|2a_1 - a_2|$; д) $\text{пр}_{a_1} a_2$; е) $\text{пр}_{a_2} a_1$.

Упражнение 5.10. Найти длины сторон и величины углов треугольника с вершинами $A(-1, -2, 4)$, $B(-4, -2, 0)$ и $C(3, -2, 1)$.

Упражнение 5.11. Доказать, что четырехугольник с вершинами $A(-3, 5, 6)$, $B(1, -5, 7)$, $C(8, -3, -1)$ и $D(4, 7, -2)$— квадрат.

Упражнение 5.12. $|a_1| = 1$, $|a_2| = 2$ и $\widehat{(a_1, a_2)}\frac{2\pi}{3}$. Вычислить:

а) $|[a_1, a_2]|$; б) $|[2a_1 + a_2, a_1 + 2a_2]|$;

в) $|[a_1 + 3a_2, 3a_1 - a_2]|$.

Упражнение 5.13. Какому условию должны удовлетворять векторы a_1 и a_2, чтобы векторы $a_1 + a_2$ и $a_1 - a_2$ были коллинеарны?

Упражнение 5.14. Упростить выражения:

а) $[i, j + k] - [j, i + k] + [k, i + j + k]$,

б) $[a + b + c, c] + [a + b + c, b] + [b - c, a]$,

в) $[2a + b, c - a] + [b + c, a + b]$,

г) $2i[j, k] + 3j[i, k] + 4k[i, j]$.

Упражнение 5.15. Доказать, что $[a-b, a+b] = 2[a, b]$ и выяснить геометрический смысл этого тождества.

Упражнение 5.16. $|a| = |b| = 5$, $\widehat{(a, b)} = \frac{\pi}{4}$. Вычислить площадь треугольника, построенного на векторах $a - 2b$ и $3a + 2b$.

Упражнение 5.17. Вычислить площадь треугольника с вершинами $A(1, 1, 1)$, $B(2, 3, 4)$ и $C(4, 3, 2)$.

Упражнение 5.18. Три ненулевых вектора a, b и c связаны соотношениями $a = [b, c]$, $b = [c, a]$, $c = [a, b]$. Найти длины этих векторов и углы между ними.

Упражнение 5.19. Вычислить площадь параллелограмма, диагоналями которого служат векторы $2e_1 - e_2$ и $4e_1 - 5e_2$, где e_1, e_2— единичные векторы и $\widehat{(e_1, e_2)} = \frac{\pi}{4}$.

Упражнение 5.20. Заданы арифметические векторы: $a_1 = (4,1,3,-2)$, $a_2 = (1,2,-3,2)$, $a_3 = (16,9,1,-3)$, $a_4 = (0,1,2,3)$, $a_5 = (1,-1,15,0)$. Найти следующие линейные комбинации:

а) $3a_1 + 5a_2 - a_3$; б) $a_1 + 2a_2 - a_4 - 2a_5$;

в) $2a_1 + 4a_3 - 2a_3$; г) $\frac{1}{2}a_1 + 3a_2 - \frac{1}{2}a_4 + a_5$.

Упражнение 5.21. Выяснить, являются ли следующие системы арифметических векторов линейно зависимыми или линейно независимыми:

а) $x_1 = (1,2,3,0)$, $x_2 = (2,4,6,0)$; б) $x_1 = (2,-3,1)$, $x_2 = (3,-1,5)$, $x_3 = (1,-4,3)$.

Упражнение 5.22. Заданы векторы $a_1(1,-1,3)$, $a_2(-2,2,1)$ и $a_3(3,-2,5)$. Вычислить $a_1a_2a_3$, $(3a_1 - a_3)(a_2 - a_3)a_3$.

Упражнение 5.23. Установить, являются ли векторы a_1, a_2 и a_3 компланарными, если:

а) $a_1(2,3,-1)$, $a_2(1,-1,3)$, $a_3(1,9,-11)$;

б) $a_1(3,-2,1)$, $a_2(2,1,2)$, $a_3(3,-1,-2)$.

Упражнение 5.24. Вычислить объем тетраэдра $OABC$, если $\overrightarrow{OA} = 3i + 4j$; $\overrightarrow{OB} = -3j + k$; $\overrightarrow{OC} = 2j + 5k$.

Упражнение 5.25. В тетраэдре с вершинами в точках $A(1,1,1)$, $B(2,0,2)$, $C(2,2,2)$ и $D(3,4,-3)$ вычислить высоту $h = |\overrightarrow{DE}|$.

Упражнение 5.26. Найдите собственные векторы матрицы:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix},$$

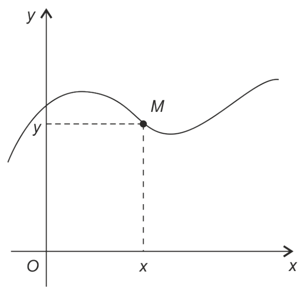
$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & 4 & -2 \\ 1 & 5 & -3 \end{pmatrix}.$$

Глава 3

Уравнение линии и поверхности

3.1 Уравнение линии на плоскости

Рассмотрим прямоугольную систему координат Oxy на плоскости. В этой системе координат задана некоторая



линия (кривая). Координаты x и y точки M, лежащей на этой линии, связаны между собой некоторым соотношением. Такая связь аналитически записывается в виде некоторого уравнения.

Определение 1.1. Равенство $F(x, y) = 0$ называется *уравнением линии* γ в заданной системе координат, если оно выполнено для всех точек линии (кривой) γ и не выполнено для координат точек, не лежащих на γ.

Замечание. В некоторых случаях уравнение кривой может быть задано равенством $y = f(x)$.

Пример 1.1. Найти уравнение множества точек, равноудаленных от точек $A(2, -4)$ и $B(-4, -2)$.

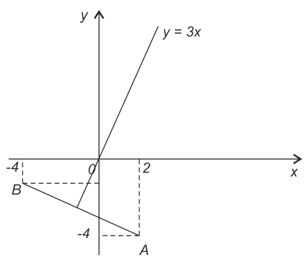
Решение. Напомним, что расстояние между точками $P_1(x_1, y_1)$ и $P_2(x_2, y_2)$ определяется равенством

$$\rho(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \qquad (1.1)$$

Если точка $M(x, y)$— произвольная точка искомой линии, то справедливо равенство $\rho(A, M) = \rho(B, M)$ или, учитывая равенство (1.1),

$$\sqrt{(x-2)^2 + (y+4)^2} = \sqrt{(x+4)^2 + (y+2)^2}.$$

После возведения в квадрат обеих частей этого равенства и приведения подобных, получим уравнение вида $y = 3x$. Очевидно, это уравнение серединного перпенди-



куляра, проведенного к отрезку AB.

Любую линию можно выразить соответствующим уравнением (хотя это не всегда просто сделать). Однако не всякое уравнение определяет на плоскости некоторую линию. Например, равенство $x^2 + 2y^2 = 0$ определяет только одну точку плоскости, а уравнение $\sin^2 x + \sin^2 y = 4$ не определяет никакого множества точек.

Чтобы убедиться, лежит ли точка $M(x_0, y_0)$ на данной линии $F(x, y) = 0$, надо проверить, удовлетворяют ли координаты этой точки уравнению $F(x_0, y_0) = 0$.

3.2 Уравнение прямой на плоскости

Понятие прямой является первичным в геометрии. Из аксиом геометрии мы знаем, что через две точки проходит единственная прямая и через точку, лежащую на данной прямой, можно провести единственную прямую, перпендикулярную данной.

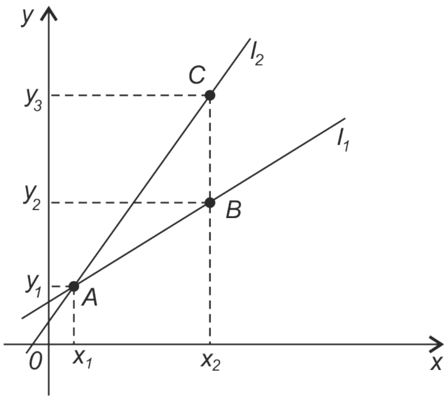
Определение 2.1. Равенство

$$y = kx + b \tag{2.1}$$

называется уравнением прямой с угловым коэффициентом.

Равенство (2.1) действительно определяет множество точек плоскости, лежащих на одной прямой. Рассмотрим три точки $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ и $C(x_2, y_3)$, координаты которых удовлетворяют равенству (2.1).

Предположим, что эти три точки не лежат на одной прямой. Тогда через точки A и B проходит (согласно аксиоме) единственная прямая l_1, а через точки A и C— единственная прямая l_2 ($l_1 \neq l_2$). Но координаты точек B



и C удовлетворяют равенствам: $y_2 = kx_2 + b$ и $y_3 = kx_2 + b$. Получаем, что $y_2 = y_3$ (из равенства 2.1), а согласно предположению: $y_2 \neq y_3$. Получим противоречие. Следовательно, точки A, B и C лежат на одной прямой.

Упражнение 2.1. Докажите, что $k = \operatorname{tg} \alpha$, где α— угол между прямой l, заданной равенством $y = kx + b$ и положительным направлением оси Ox.

Определение 2.2. Равенство

$$Ax + By + C = 0, \text{ где} A^2 + B^2 \neq 0 \tag{2.2}$$

называется уравнением прямой в общем виде.

Заметим, что если $B \neq 0$, то уравнение (2.2) можно переписать в виде (2.1):

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}, \tag{2.3}$$

где $k = -\frac{A}{B}$, $b = -\frac{C}{B}$.

Уравнения (2.2) и (2.3) эквивалентны.

При $B = 0$ уравнение (2.2) принимает вид

$$Ax + C = 0 \ (A \neq 0),$$

или

$$x = a \ (a = -\frac{C}{A}).$$

Это тоже уравнение прямой, но только параллельной оси Oy. Именно это и есть геометрическое место точек (x, y), абсциссы которых равны одному и тому же числу a.

Уравнение прямой, проходящей через заданную точку

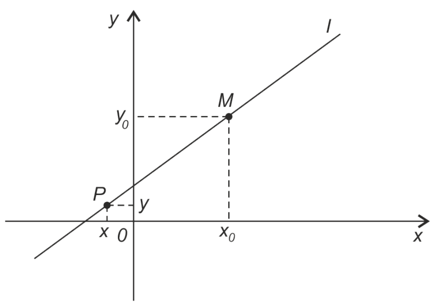
Рассмотрим прямую l, заданную равенством (2.2).

Пусть заданная точка M имеет координаты (x_0, y_0). Так как точка M принадлежит прямой l, то справедливо равенство

$$Ax_0 + By_0 + C = 0. \tag{2.4}$$

Вычтем из равенства (2.2) равенство (2.4). Получим уравнение прямой l:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0. \tag{2.5}$$



Запишем равенство (1.6) с помощью векторов.

Для этого рассмотрим вектор $\bar{n} = (A, B)$ и вектор $\overrightarrow{MP} = (x - x_0, y - y_0)$, где P— произвольная точка прямой l.

Так как точки P, M принадлежат прямой l, вектор $\overrightarrow{PM}$ направлен вдоль прямой l (в дальнейшем такой вектор будем называть *направляющим* вектором прямой l).

В левой части равенства (2.5) записана сумма произведений одноименных координат векторов $\bar{n}$ и $\overrightarrow{PM}$, то есть скалярное произведение этих векторов. Таким образом, равенство (2.5) имеет вид:

$$(\bar{n}, \overrightarrow{PM}) = 0, \tag{2.6}$$

а это есть условие ортогональности векторов. Следовательно, вектор $\bar{n}$ ортогонален прямой l.

Определение 2.3. Вектор $\bar{n} = (A, B)$ называется вектором *нормали* к прямой l.

Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки

Пусть заданы точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$, лежащие на искомой прямой l.

Воспользуемся уравнением (2.5) прямой, проходящей через точку M_1:

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) = 0. \tag{2.7}$$

Найдем коэффициенты A и B.

Так как точка M_2 тоже принадлежит прямой l, то справедливо равенство:

$$A(x_2 - x_1) + B(y_2 - y_1) = 0. \tag{2.8}$$

Рассмотрим случаи:

1) $x_1 \neq x_2$, $y_1 \neq y_2$.

Тогда из равенства (2.8) следует, что коэффициенты A и B отличны от нуля, и имеет место равенство: $\frac{A}{B} = -\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

Подставим это значение в равенство (2.7). Теперь уравнение прямой l имеет вид:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \tag{2.9}$$

2) $x_1 \neq x_2$, $y_1 = y_2$.

Тогда равенство (2.8) имеет вид:

$$A(x_2 - x_1) = 0, \text{ то есть} A = 0.$$

Тогда уравнение прямой l имеет вид: $y = y_1$ (см. равенство 2.7).

3) $x_1 = x_2$, $y_1 \neq y_2$.

Легко видеть, что в этом случае уравнение прямой l имеет вид $x = x_1$.

Замечание. Рассмотрим уравнение (2.9). Вектор $\bar{l} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$— направляющий вектор прямой l.

В случае 2) направляющий вектор прямой l имеет координаты $\bar{l} = (1, 0)$. Тогда формально равенство (2.9) примет вид:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{0}.$$

Несмотря на бессмысленность этого равенства, такая запись удобна: в знаменателях записаны координаты направляющего вектора.

В случае 3) уравнение прямой l имеет вид:

$$\frac{x - x_1}{0} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

Таким образом, равенство (2.9) — уравнение прямой l, проходящей через две заданные точки (независимо от взаимного положения этих точек на плоскости).

Пример 2.1. Составить уравнение прямой, проходящей через точки $A(-4;-1)$ и $B(2;3)$.

Решение. Подставим координаты точек A и B в равенство (2.9):

$$\frac{x+4}{2+4}=\frac{y+1}{3+1},$$

Откуда после преобразований получим:

$$2x-3y+5=0.$$

Уравнение прямой в отрезках

Рассмотрим прямую l, заданную равенством (2.2), не проходящую через начало координат (то есть $C\neq 0$):

$$Ax+By+C\neq 0.$$

Так как $C\neq 0$, это равенство можно переписать в виде

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1\ \left(a=-\frac{C}{A},\ b=-\frac{C}{B},\ A\neq 0, B\neq 0\right) \qquad (2.10)$$

Если $A=0$, то уравнение прямой l имеет вид $\frac{y}{b}=1$, а если $B=0$, то уравнение прямой l имеет вид $\frac{x}{a}=1$.

Равенство (2.10) называют *уравнением прямой в отрезках.* Эта прямая пересекает ось Ox в точке $(a,0)$ и ось Oy в точке $(0,b)$.

Пример 2.2. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(4;-1)$, если эта прямая отсекает от положительной полуоси Ox отрезок, втрое больший, чем на положительной полуоси Oy.

Решение. Из условия следует, что $a>0$, $b>0$, $a=3b$. Подставим это выражение в равенство (1.11): $\frac{x}{3b}+\frac{y}{b}=1$.

Так как точка $A(4;-1)$ лежит на прямой, то ее координаты удовлетворяют этому уравнению, то есть $\frac{4}{3b}-\frac{1}{b}=1$, откуда $b=\frac{1}{3}$, а уравнение прямой имеет вид $x+3y-1=0$.

Уравнение прямой в нормальном виде

Рассмотрим уравнение прямой l в общем виде:

$$Ax+By+C=0.$$

Так как $A^2+B^2\neq 0$, то равенство можно преобразовать:

$$\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}x+\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}y=-\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Напомним, что $\bar{n}=(A,B)$— вектор нормали к прямой l. Вектор $\bar{n}_0=\left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}},\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\right)$— также вектор нормали, кроме того $\|\bar{n}_0\|=1$.

Обозначим через $\cos\alpha=\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}sgnC$, $\cos\beta=-\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}sgnC$, $p=-\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}sgnC$, где $sgnC=1$, если $C>0$, $sgnC=-1$, если $C<0$.

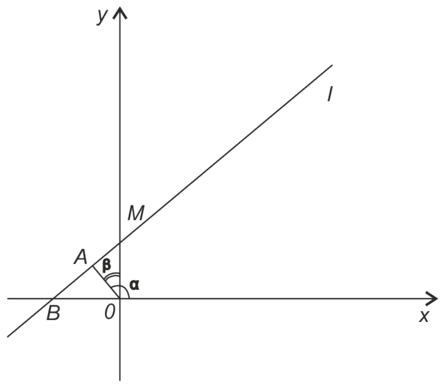
Тогда уравнение прямой l имеет вид

$$x\cos\alpha+y\cos\beta=p\ (p\geqslant 0) \qquad (2.11)$$

Уравнение (2.11) называется уравнением прямой в нормальном виде.

Выясним геометрический смысл коэффициентов p, $\cos\alpha$, $\cos\beta$. Пусть A— основание перпендикуляра, опущенного из начала координат O на прямую l, B— точка пересечения прямой l с осью Ox, M— точка пересечения прямой l с осью Oy.

1) $\cos\alpha\neq 0$, $\cos\beta\neq 0$.



В этом случае координаты точек пересечения координат равны соответственно $B\left(-\frac{p}{\cos\alpha}, 0\right)$, $M\left(0, -\frac{p}{\cos\beta}\right)$.

Рассмотрим треугольник MOB. Его площадь S можно вычислить двумя способами:

$$S_{MOB} = \frac{1}{2}OA \cdot BM = \frac{1}{2}OB \cdot OM,$$

где

$$BM = \sqrt{\left(0 + \frac{p}{\cos\alpha}\right)^2 + \left(-\frac{p}{\cos\beta} - 0\right)^2} =$$

$$= \frac{p}{|\cos\alpha| \cdot |\cos\beta|},$$

$$OB = \frac{p}{|\cos\alpha|},\ OM = \frac{p}{|\cos\beta|}.$$

Тогда

$$OA = \frac{OB \cdot OM}{BM} = \frac{\frac{p}{|\cos\alpha|} \cdot \frac{p}{|\cos\beta|}}{\frac{p}{|\cos\alpha| \cdot |\cos\beta|}} = p.$$

2) $\cos\alpha = 0$. В этом случае уравнение прямой l имеет вид $y = p$, так как $\cos\beta = 1$.

3) Легко видеть, если $\cos\beta = 0$, то уравнение прямой записывается в виде: $x = p$.

Таким образом, независимо от значений $\cos\alpha$ и $\cos\beta$, p— *расстояние от начала координат до прямой* l, α и β— углы, образованные вектором нормали $\bar{n}$ с положительными направляющими осей координат Ox и Oy соответственно.

Замечание. Используя равенство (2.11), можно вычислить расстояние d от точки $M(x_0, y_0)$ до прямой l:

$$d = |x_0\cos\alpha + y_0\cos\beta - p|. \tag{2.12}$$

Упражнение 2.2. Используя геометрический смысл коэффициентов уравнения (2.11) и свойства скалярного произведения, докажите равенство (2.12).

Замечание. На языке коэффициентов A, B, C равенство (2.12) выглядит так:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \tag{2.13}$$

Пример 2.3. Найти расстояние от точки $A(1, -1)$ до прямой $3x - 4y - 5 = 0$.

Решение. Воспользуемся равенством (2.13):

$$d = \frac{|3 + 4 - 5|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{2}{5}.$$

Взаимное расположение двух прямых на плоскости

Рассмотрим две прямые

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0 \qquad (l_1)$$

и

$$A_2x + B_2y + C_2 = 0 \qquad (l_2)$$

Так как векторы $\bar{n}_1 = (A_1, B_1)$ и $\bar{n}_2 = (A_2, B_2)$ перпендикулярны к прямым l_1 и l_2 соответственно, то угол φ между прямыми равен углу между их нормалями $\bar{n}_1$ и $\bar{n}_2$.

Угол φ можно вычислить по формуле

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}} \tag{2.14}$$

Из этого равенства получаем условие *перпендикулярности* прямых:

$$A_1A_2 + B_1B_2 = 0 \tag{2.15}$$

Если прямые параллельны, то векторы $\bar{n}_1$ и $\bar{n}_2$ коллинеарны. Отсюда условие *параллельности* прямых выражается равенством

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \tag{2.16}$$

Пример 2.4. Стороны треугольника ABC заданы уравнениями: $3x - 4y + 24 = 0$ (AB), $4x + 3y + 32 = 0$ (BC), $2x - y - 4 = 0$ (AC).

Составить уравнение высоты, медианы и биссектрисы, проведенных из вершины B.

Решение. а) Найдем координаты вершин данного треугольника. Вершина A— точка пересечения прямых AB и AC. Ее координаты являются решением системы, составленной из уравнений этих прямых:

$$\begin{cases} 3x - 4y = -24, \\ 2x - y = 4. \end{cases} \tag{2.17}$$

Система (2.17) имеет единственное решение $\begin{cases} x = 8, \\ y = 12, \end{cases}$ то есть $A(8; 12)$.

Аналогично находим координаты вершин B и C: $B(-8; 0)$; $C(-2; 8)$.

б) Найдем коэффициенты уравнения $Px + Qy + R = 0$ высоты BH. Прямая BH ортогональна прямой AC. Из условия (1.17) ортогональности прямых AC и BH следует равенство:

$$2P - Q = 0, \text{то есть} Q = 2P, \text{причем} P \neq 0.$$

Кроме того, прямая BH проходит через точку $B(-8; 0)$. Воспользуемся равенством (2.5):

$$P(x + 8) + 2P(y - 0) = 0,$$

получим уравнение высоты BH:

$$x + 2y + 8 = 0.$$

в) Найдем уравнение медианы BM. Точка M— середина отрезка AC. Каждая ее координата есть среднее арифметическое концов отрезка:

$$M = \left(\frac{8 - 2}{2}; \frac{12 - 8}{2} \right) = (3; 2).$$

Подставим координаты точек B и M в уравнение (2.9) прямой, проходящей через две данные точки:

$$\frac{x + 8}{3 + 8} = \frac{y - 0}{2 - 0}.$$

Таким образом, уравнение медианы BM имеет вид: $2x - 11y + 16 = 0$.

г) Заметим, что треугольник ABC— прямоугольный. Прямые AB и BC ортогональны (см. условие 2.15). Поэтому биссектриса BL образует с каждой из этих сторон угол $\frac{\pi}{4}$. Угол между нормалями к этим прямым также составляет $\frac{\pi}{4}$. Пусть нормаль $\bar{n}$ к биссектрисе BL имеет координаты $(\bar{n} = (1, b))$.

Воспользуемся равенством (2.14) для прямых BL и AB. Угол $\varphi = \frac{\pi}{4}$ между ними удовлетворяет равенству:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{3 - 4b}{5\sqrt{1 + b^2}}.$$

Решая это уравнение, найдем его корни: $b_1 = 7$, $b_2 = -\frac{1}{7}$. Условию задачи удовлетворяет первый корень, а уравнение биссектрисы имеет вид: $x + 7y + 8 = 0$.

Упражнение 2.3. Постройте треугольник ABC и прямые BH, BM, BL.

Задания для самостоятельной работы

Упражнение 2.4. Найти уравнение множества точек, равноудаленных от оси Oy и точки $F(4; 0)$.

Упражнение 2.5. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(2; 3)$: а) параллельно оси Ox; б) параллельно оси Oy; в) составляющей с осью Ox угол 45^{circ}.

Упражнение 2.6. Составить уравнение прямой, проходящей через точки: а) $A(3; 1)$ и $B(5; 4)$; б) $A(3; 1)$ и $C(3; 5)$; в) $A(3; 1)$ и $D(-4; 1)$.

Упражнение 2.7. Стороны AB, BC и AC треугольника ABC заданы соответственно уравнениями $4x + 3y - 5 = 0$, $x - 3y + 10 = 0$, $x - 2 = 0$. Определить координаты его вершин.

Упражнение 2.8. Составить уравнения прямых, проходящих через точку пересечения прямых

$2x - 3y + 1 = 0$ и $3x - y - 2 = 0$ параллельно и перпендикулярно прямой $y = x + 1$.

Упражнение 2.9. Найти длину и уравнение высоты BD в треугольнике с вершинами $A(-3;0)$, $B(2;5)$, $C(3;2)$.

Упражнение 2.10. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $A(4;3)$ и отсекающей от координатного угла треугольник площадью 3 кв.ед.

Упражнение 2.11. Дан треугольник с вершинами $A(-2;0)$, $B(2;4)$ и $C(4;0)$. Найти уравнения сторон треугольника, медианы AE, высоты AD и длину медианы AE.

Упражнение 2.12. В треугольнике ABC даны уравнения: стороны AB $3x + 2y - 12 = 0$, высоты BM $x + 2y - 4 = 0$, высоты AM $4x + y - 6 = 0$, где M— точка пересечения высот. Найти уравнения сторон AC, BC и высоты CM.

Упражнение 2.13. Две стороны параллелограмма заданы уравнениями $y = x - 2$ и $x - 5y + 6 = 0$. Диагонали его пересекаются в начале координат. Найти уравнения двух других сторон параллелограмма и его диагоналей.

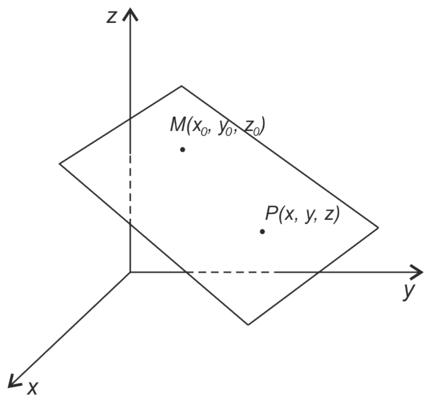
3.3 Плоскость и прямая в пространстве

Рассмотрим прямоугольную систему координат $Oxyz$ в пространстве.

Определение 3.1. Равенство $F(x, y, z) = 0$ называется уравнением поверхности S в заданной системе координат, если координаты всех точек поверхности S удовлетворяют этому равенству, а координаты точек, не лежащих на S, ему не удовлетворяют.

Одним из примеров поверхности служит плоскость.

Ее часть называют поверхностью первого порядка.



Определение 3.2. Равенство вида

$$Ax + By + Cz + D = 0, \tag{3.1}$$

где $A^2 + B^2 + C^2 = 0$ называется *уравнением плоскости общего вида.*

Обозначим эту плоскость через α. Пусть плоскость α проходит через точку $M(x_0, y_0, z_0)$. Тогда ее координаты удовлетворяют равенству (3.1):

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0 \tag{3.2}$$

Вычтем равенство (3.2) из равенства (3.1):

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \tag{3.3}$$

Равенство (3.3) называется уравнением плоскости, проходящим через заданную точку M.

Рассмотрим произвольную точку плоскости $P(x, y, z)$.

Вектор $\overrightarrow{MP}$ лежит в плоскости α (почему?).

Обозначим через $\bar{n}$ вектор $\bar{n} = (A, B, C)$. В векторной форме равенство (3.3) имеет вид:

$$(\bar{n}, \overrightarrow{PM}) = 0,$$

то есть скалярное произведение этих векторов равно нулю. Таким образом, векторы $\bar{n}$ и $\overrightarrow{PM}$ ортогональны. Поскольку точка P— произвольная точка плоскости, то вектор $\bar{n}$ ортогонален любому вектору, лежащему в плоскости α.

Определение 3.3. Вектор $\bar{n} = (A, B, C)$ называется *нормальным* вектором (нормалью) плоскости α.

Утверждение 3.1. Всякое уравнение вида (3.1) есть уравнение плоскости.

Упражнение 3.1. Докажите утверждение 3.1.

Уравнение плоскости в отрезках

Если $D \neq 0$, то уравнение (3.1) можно записать так:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \qquad (3.4)$$

где $a = -\frac{D}{A}$ (если $A \neq 0$), $b = -\frac{D}{B}$ (если $B \neq 0$), $C = -\frac{D}{C}$ (если $C \neq 0$).

Заметим, что если хотя бы один из коэффициентов A, B и C равен нулю, то уравнение (3.1), а следовательно, и (3.4) будет неполным.

Плоскость α пересекает ось Ox в точке $(a, 0, 0)$, ось Oy— в точке $(0, b, 0)$, ось Oz в точке $(0, 0, c)$.

Неполное уравнение означает, что плоскость α соответствующую ось не пересекает.

Нормальное уравнение плоскости

Умножим обе части равенства (3.1) на число $\mu = -\frac{sgn D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.

Тогда число $p = -\mu D$ будет неотрицательным, а уравнение (3.1) равносильно равенству:

$$\mu Ax + \mu By + \mu Cz = p \ (p \geqslant 0) \tag{3.5}$$

Заметим, что $\mu^2(A^2 + B^2 + C^2) = 1$. Это означает, что вектор $\bar{n}_0 = \mu\bar{n} = (\mu A, \mu B, \mu C)$— единичный вектор нормали плоскости α. Его проекции на оси координат $\mu A = \cos\alpha$, $\mu B = \cos\beta$,$\mu C = \cos\gamma$, где α, β, γ— углы, образованные вектором $\bar{n}_0$ с положительными направлениями осей Ox, Oy, Oz.

Равенство (3.5) перепишем в виде:

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = p \tag{3.6}$$

Равенство (3.6) называется *уравнением плоскости в нормальном виде.*

Упражнение 3.2. Докажите, что p— расстояние от начала координат до плоскости α.

Утверждение 3.2. Расстояние d от точки $M(x_0, y_0, z_0)$ до плоскости α, заданной равенством (3.1), равно:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Указание. Используйте нормальное уравнение плоскости (3.6).

Пример 3.1. Найти расстояние от точки $M(1, 2, -1)$ до плоскости α $2x - 2y + z = 3$.

Решение.

$$d = \frac{|2 \cdot 1 - 2 \cdot 2 - 1 \cdot 1 - 3|}{\sqrt{4+4+1}} = \frac{6}{3} = 2.$$

Уравнение плоскости, проходящей через три точки

Даны три точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$, не лежащие на одной прямой. Найдем уравнение плоскости, проходящей через эти три точки. Из геометрии известно, что такая плоскость существует и единственная.

Воспользуемся равенством (3.3) для точки M_1:

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0 \tag{3.7}$$

где $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$. Найдем коэффициенты A, B, C.

Так точки M_2 и M_3 также принадлежат искомой плоскости, то выполняются равенства:

$$A(x_2 - x_1) + B(y_2 - y_1) + C(z_2 - z_1) = 0 \tag{3.8}$$

$$A(x_3 - x_1) + B(y_3 - y_1) + C(z_3 - z_1) = 0 \tag{3.9}$$

Для любой точки плоскости $P(x, y, z)$ справедливо равенство (3.7). Рассмотрим однородную систему уравнений (3.7-3.9) относительно неизвестных A, B, C. Эта система имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда справедливо равенство:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0 \tag{3.10}$$

(определитель системы равен нулю).

Равенство (3.10) называется *уравнением плоскости, проходящей через три точки.*

Замечание. Сравните уравнение (3.10) с условием принадлежности четырех точек одной плоскости.

Пример 3.2. Напишите уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(1;0;0)$, $M_2(1;1;0)$, $M_3(1;1;1)$.

Решение. Воспользуемся равенством (3.10):

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-0 & z-0 \\ 1-1 & 1-0 & 0-0 \\ 1-1 & 1-0 & 1-0 \end{vmatrix} = 0.$$

Вычисление определителя приводит к равенству: $x = 1$.

Взаимное расположение плоскостей

Рассмотрим две плоскости:

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \qquad (\alpha_1)$$

и

$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \qquad (\alpha_2)$$

Угол φ между нормалями $\bar{n}_1$ и $\bar{n}_2$ к плоскостям α_1 и α_2 равен углу (двугранному) между данными плоскостями, поэтому

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}},$$

где $0 \leqslant \varphi < \pi$.

Плоскости α_1 и α_2 *перпендикулярны* тогда и только тогда, когда $(\bar{n}_1, \bar{n}_2) = 0$, то есть

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0. \qquad (3.11)$$

Плоскости α_1 и α_2 *параллельны* тогда и только тогда, когда векторы $\bar{n}_1$ и $\bar{n}_2$ коллинеарны, то есть

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \tag{3.12}$$

Если

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}, \tag{3.13}$$

то плоскости α_1 и α_2 совпадают.

Пример 3.3. Уравнения

$$x - y + z + 1 = 0$$

и

$$2x - 2y + 2z + 3 = 0$$

определяют пару параллельных плоскостей, а уравнения

$$x - y + z + 1 = 0$$

и

$$2x - 2y + 2z + 2 = 0$$

— пару совпадающих плоскостей.

Прямая в пространстве

Прямая l в пространстве может быть задана как линия пересечения двух плоскостей, то есть как множество точек, удовлетворяющих системе:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} \tag{3.14}$$

Если прямая l параллельна вектору $\bar{l} = (m, n, p)$ и проходит через точку $M(x_0, y_0, z_0)$, то ее уравнения могут быть получены из условия коллинеарности векторов

$\overrightarrow{MP} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$, где $P(x, y, z)$— произвольная точка прямой, и $\bar{l} = (m, n, p)$:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}. \tag{3.15}$$

Эти уравнения называются *каноническими уравнениями прямой линии в пространстве.*

Пример 3.4. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $(1, -2, 0)$ перпендикулярно к плоскости $3x + 2y - z = 16$.

Решение. Вектор нормали $\bar{n} = (3, 2, -1)$ к плоскости служит направляющим вектором прямой l. Воспользуемся равенством (3.15):

$$\frac{x - 1}{3} = \frac{y + z}{2} = \frac{z}{-1}.$$

Это и есть искомые уравнения прямой.

Задачи для самостоятельного решения

Упражнение 3.3. Прямая L задана общими уравнениями. Написать для этой прямой канонические уравнения и уравнения в проекциях, если:

а)

$$L : \begin{cases} 2x - y + 2z - 3 = 0, \\ x + 2y - z - 1 = 0; \end{cases}$$

б)

$$L : \begin{cases} x + 2y - 3z - 5 = 0, \\ 2x - y + z + 2 = 0. \end{cases}$$

Упражнение 3.4. Написать канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(2, 0, -3)$ параллельно:

а) вектору $\bar{q}(2,-3,5)$;

б) прямой $\frac{x-1}{5}=\frac{y+2}{2}=\frac{z+1}{-1}$;

в) оси Ox; г) оси Oz;

д) прямой $\begin{cases} 3x-y+2z-7=0, \\ x+3y-2z-3=0; \end{cases}$

е) прямой $x=-2+t$, $y=2t$, $z=1-\frac{1}{2}t$.

Упражнение 3.5. Написать уравнения прямой, проходящей через две заданные точки M_1 и M_2, если:

а) $M_1(1,-2,1)$, $M_2(3,1,-1)$;

б) $M_1(3,-1,0)$, $M_2(1,0,-3)$.

Упражнение 3.6. Заданы прямая $L:\ \frac{x-1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z+1}{0}$ и точка $M(0,1,2)\notin L$ (проверить!). Требуется:

а) написать уравнение плоскости, проходящей через прямую L и точку M;

б) написать уравнение плоскости, проходящей через точку M перпендикулярно прямой L;

в) написать уравнение перпендикуляра, опущенного из точки M на прямую L;

г) вычислить расстояние $p(M,L)$.

Упражнение 3.7. Заданы плоскость P и точка M. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку M параллельно плоскости P. Вычислить расстояние от точки M до плоскости P, если $P:\ x-y-1=0$, $M(1,1,2)$.

Упражнение 3.8. Написать уравнение плоскости P', проходящей через заданные точки M_1 и M_2 перпендикулярно заданной плоскости P, если:

а) $P:\ -x+y-1=0$, $M_1(1,2,0)$, $M_2(2,1,1)$;

б) $P:\ 2x-y+z+1=0$, $M_1(0,1,1)$, $M_2(2,0,1)$.

Упражнение 3.9. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку M параллельно векторам $\bar{a}_1$ и $\bar{a}_2$, если:

а) $M(1,1,1)$, $\bar{a}_1(0,1,2)$, $\bar{a}_2(-1,0,1)$;

б) $M(0,1,2)$, $\bar{a}_1(2,0,1)$, $\bar{a}_2(1,1,0)$.

Упражнение 3.10. Написать уравнение плоскости, проходящей через точки M_1 и M_2 параллельно вектору $\bar{a}$, если:

а) $M_1(1, 2, 0)$, $M_2(2, 1, 1)$, $\bar{a}(3, 0, 1)$;

б) $M_1(1, 1, 1)$, $M_2(2, 3, -1)$, $\bar{a}(0, -1, 2)$.

Упражнение 3.11. Написать уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки M_1, M_2 и M_3, если:

а) $M_1(1, 2, 0)$, $M_2(2, 1, 1)$, $M_3(3, 0, 1)$;

б) $M_1(1, 1, 1)$, $M_2(0, -1, 2)$, $M_3(2, 3, -1)$.

3.4 Уравнение линии второго порядка

В этом параграфе изучаются геометрические свойства кривых второго порядка. Эти кривые часто встречаются в различных вопросах естествознания. Например, траектория движения материальной точки под воздействием центрального поля силы тяжести является кривой второго порядка.

Рассмотрим прямоугольную систему координат Oxy на плоскости.

Определение 4.1. Множество точек плоскости, удовлетворяющих равенству:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \tag{4.1}$$

где A, B, C, D, E, F— заданные действительные числа, при этом $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$, называется *кривой второго порядка.*

Обозначим эту кривую через γ.

Заметим, что равенство (4.1) можно переписать в виде $L(x, y) + l(x, y) = 0$, где

$L(x, y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$— квадратичная форма (см. параграф 2.3), $l(x, y) = Dx + Ey + F$— линейная форма.

Тип кривой второго порядка определяется коэффициентами квадратичной формы L.

Классификация кривых второго порядка

Рассмотрим определитель матриц квадратичной формы $\triangle = \begin{vmatrix} A & B \\ D & C \end{vmatrix}$.

Определение 4.2. Кривая γ называется кривой *эллиптического* типа, если $\triangle > 0$.

Определение 4.3. Кривая γ называется кривой *гиперболического* типа, если $\triangle < 0$.

Определение 4.4. Кривая γ называется кривой *параболического* типа, если $\triangle = 0$.

Напомним, что с помощью невырожденного преобразования (см. параграф 2.3) квадратичную форму можно привести к каноническому виду: $L = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 y_1^2$, где λ_1, λ_2— собственные значения матрицы квадратичной формы.

Рассмотрим систему координат Ox_2y_2, полученную параллельным переносом системы Ox_1y_1 вдоль вектора $\overrightarrow{OO_2}$. Старые и новые координаты связаны соотношениями:

$$\begin{cases} x_2 = x_1 - x_0, \\ y_2 = y_1 - y_0; \end{cases} \tag{4.2}$$

Используя параллельный перенос, можно добиться того, что хотя бы один из коэффициентов D и E был равен нулю. Это приводит к упрощению вида кривой γ.

Таким образом, приведя квадратичную форму L к каноническому виду, используя параллельный перенос, любую кривую γ второго порядка можно привести к каноническому виду.

Систему координат, в которой кривая γ имеет канонический вид, называют *канонической*.

Определение 4.5. Кривая вида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a, b > 0)$$

называется *эллипсом*.

Определение 4.6. Кривая вида

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a \geqslant b > 0)$$

называется *гиперболой*.

Определение 4.7. Кривая вида

$$y^2 = 2px \quad (p > 0)$$

называется *параболой*.

Определение 4.8. Кривая вида

$$a^2x^2 - b^2y^2 = 0 \quad (a, b > 0)$$

называется *парой пересекающихся прямых*.

Определение 4.9. Кривая вида

$$x^2 - a^2 = 0 \quad (a \geqslant 0)$$

называется *парой параллельных* или *совпадающих* прямых.

Определение 4.10. Уравнение

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$$

определяет *точку*.

Теорема 4.1. Пусть в системе координат Oxy задана кривая γ равенством (4.1). Тогда существует такая декартова прямоугольная система координат, в которой это уравнение принимает один из следующих девяти канонических видов:

1) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$; 2) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$; 3) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$;
4) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$; 5) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$; 6) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$;
7) $y^2=2px$; 8) $y^2+a^2=0$; 9) $y^2-a^2=0$.

Замечание. Уравнению 2 (мнимый эллипс) и 8 (пара мнимых пересекающихся прямых) не удовлетворяет ни одна точка плоскости.

Пример 4.1. Написать каноническое уравнение кривой γ второго порядка:

$$3x^2+10xy+3y^2-2x-14y-13=0.$$

Решение. Матрица квадратичной формы кривой γ равна $\begin{pmatrix}3&5\\5&3\end{pmatrix}$. Ее собственные значения равны $\lambda_1=8$ и $\lambda_2=-2$ (кривая гиперболического типа).

Единичный собственный вектор h для значения λ_1 имеет координаты $h=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, единичный собственный вектор g для значения λ_2 имеет координаты $g=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$.

Рассмотрим матрицу H преобразования координат, составленную из координат собственных векторов: $H=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}$.

Матрица H определяет поворот плоскости вокруг точки O на 45°.

Выполним преобразование:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 + y_1) \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 - y_1) \end{cases}.$$

Заметим, что координатные орты $l_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ и $l_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ при таком преобразовании перейдут в направления h и g соответственно.

В новых координатах получим уравнение кривой:

$$8x_1^2 - 2y_1^2 - 8\sqrt{2}x_1 + 6\sqrt{2}y_1 - 13 = 0.$$

Так как λ_1 и λ_2 отличны от нуля, то по каждой из новых переменных x_1 и y_1 можно выделить полный квадрат:

$$8x_1^2 - 8\sqrt{2}x_1 = \left(x_1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - 4,$$

$$-2y_1^2 + 8\sqrt{2}y = -(y_1 - 2)^2 + 9.$$

Заменой переменных

$$\begin{cases} x_2 = x_1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ y_2 = y_1 - \frac{3\sqrt{2}}{2}, \end{cases}$$

соответствующей параллельному переносу координатных осей, получим равенство

$$8x_2^2 - 2y_2^2 - 8 = 0$$

или

$$x_2^2 - \frac{y_2^2}{4} = 1.$$

Это — каноническое уравнение гиперболы.

Рассмотрим подробнее свойства кривых второго порядка.

Эллипс

Каноническое уравнение эллипса имеет вид

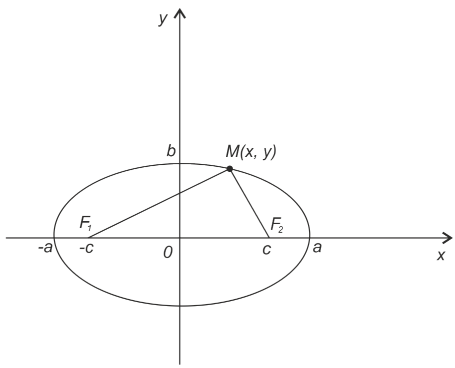
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{4.3}$$

Пусть $a > b > 0$.

Эллипс можно определить как *геометрическое место точек, сумма расстояний* которых до двух заданных точек F_1 и F_2 (*фокусов*) *есть постоянная величина, равная* $2a$.

Покажем это. Рассмотрим прямоугольную систему координат Oxy, в которой точка O— середина отрезка F_1F_2, ось Ox проходит через точки F_1 и F_2.

Пусть $M(x, y)$— произвольная точка эллипса, $F_1(c, 0)$, $F_2(-c, 0)$— его фокусы. Заметим, что $a > c$.



Тогда справедливо равенство:

$$\rho(M, F_1) + \rho(M, F_2) = 2a,$$

$$\rho(M, F_1) = \sqrt{(x + c)^2 + y^2},$$

$$\rho(M, F_2) = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

Тогда

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a.$$

Преобразуем это равенство:

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

и

$$(x-c)^2 + y^2 = 4a^2 + (x+c)^2 + y^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2},$$

$$4a^2 + 4cx = 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2},$$

$$a^2(a^2 - c^2) = (a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2.$$

Обозначим через $b^2 = a^2 - c^2$. Тогда $a^2b^2 = b^2x^2 + a^2y^2$.

Поделив обе части этого равенства на a^2b^2, получим каноническое уравнение эллипса (4.3).

Заметим, что если точка $M(x, y)$— принадлежит эллипсу, то ее координаты удовлетворяют неравенствам: $|x| \leqslant a$, $|y| \leqslant b$. То есть эллипс — ограниченная кривая, он находится внутри прямоугольника $[-a; a] \times [-b; b]$. Кроме того, если в уравнении (4.3) заменить x на $-x$, или y на $-y$, то оно не изменится. Это показывает, что эллипс — кривая, симметричная относительно координатных осей. Но тогда достаточно изучить его уравнение в первой четверти (системы координат). Часть эллипса, находящегося в первой четверти, определяется уравнением:

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} \ (0 \leqslant x \leqslant a).$$

Легко видеть, что эллипс проходит через точки $(0, b)$ и $(a, 0)$. При этом его ордината y при непрерывном возрастании x на отрезке $[0, a]$ непрерывно убывает (см. рис.)

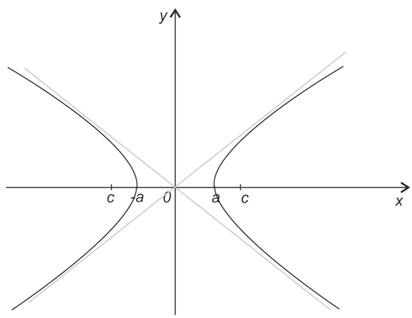
Параметры a и b называются *полуосями* эллипса, $c = \sqrt{a^2 - b^2}$, а отношение $\varepsilon = \frac{c}{a}$ его эксцентриситетом. Начало координат — центр эллипса, а точки пересечения с осями координат — его вершины.

Гипербола

Каноническое уравнение гиперболы имеет вид:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{4.4}$$

Гиперболу можно определить *как геометрическое место точек, разность расстояний которых до двух данных точек F_1 и F_2 (фокусов)* есть *величина постоянная, равная $2a$.*



Упражнение 4.1. Получите уравнения гиперболы, пользуясь ее определением как геометрического места точек.

Фокусы гиперболы — точки $F_1(c;0)$ и $F_2(-c;0)$, где $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, а ее эксцентриситет $\varepsilon = \frac{c}{a}$.

Гипербола имеет центр симметрии $O(0;0)$, оси симметрии Ox и Oy, асимптоты $y = \pm\frac{b}{a}x$, точки $(a,0)$ и $(-a,0)$ — вершины гиперболы.

Пример 4.2. В примере 4.1 мы определили тип кривой

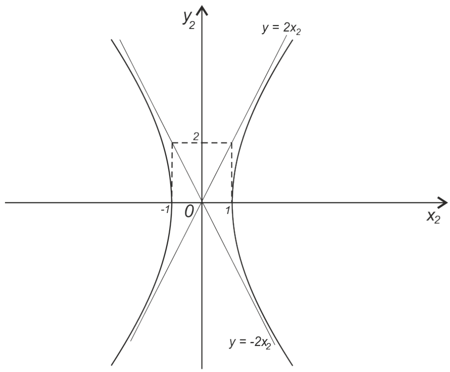
$$3x^2 + 10xy + 3y^2 - 2x - 14y - 13 = 0 \qquad (4.5)$$

и привели ее к каноническому виду:

$$x_2^2 - \frac{y_2^2}{4} = 1 \qquad (4.6)$$

Построим эту кривую.

В системе координат $O_2x_2y_2$ параметры гиперболы равны $a_2 = 1$, $b_2 = 2$, асимптоты заданы уравнениями $y_2 = \pm 2x_2$, вершины расположены в точках $(1, 0)$ и $(-1, 0)$.

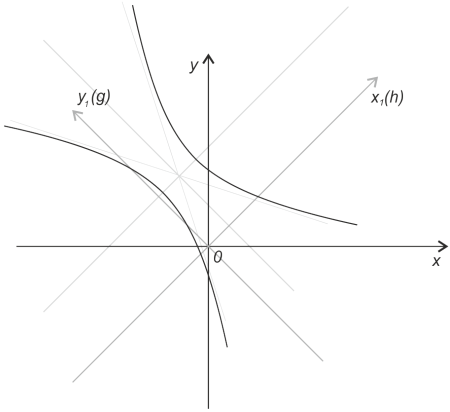


Используя преобразование координат, построим кривую в координатах Oxy.

Парабола

Каноническое уравнение параболы имеет вид:

$$y^2 = 2px \qquad (4.5)$$

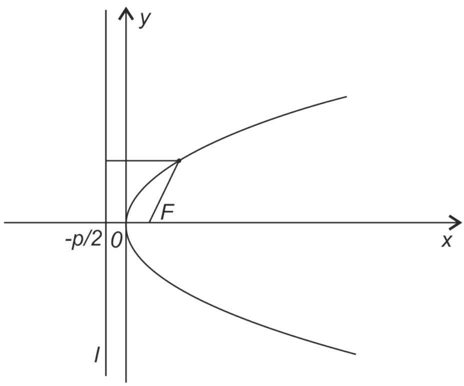


Определим параболу как геометрическое место точек, равноудаленных от заданной точки F (фокуса) и прямой l (директриса).

Упражнение 4.2. Используя геометрическое определение параболы, получите уравнение (4.5).

Директриса параболы задается уравнением $x = -\frac{p}{2}$, фокус F имеет координаты $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$.

Ось Ox — ось симметрии параболы.



Задачи для самостоятельного решения

Упражнение 4.3. Составить уравнение прямой, проходящей через центры окружностей $x^2 + y^2 = 5$ и $x^2 + y^2 + 2x + 4y - 31 = 0$. Найти отношение радиусов окружностей.

Упражнение 4.4. Ординаты всех точек окружности $x^2 + y^2 = 36$ сокращены втрое. Написать уравнение полученной новой кривой.

Упражнение 4.5. Эллипс, симметричный относительно осей координат, проходит через точки $M_1(4; 4\sqrt{5}/3)$ и $M_2(0; 4)$. Найти полуоси, координаты фокусов и эксцентриситет эллипса.

Упражнение 4.6. Для гиперболы $3x^2 - 4y^2 = 12$ найти действительную и мнимую полуоси; координаты фокусов; эксцентриситет; уравнения асимптот.

Упражнение 4.7. Написать уравнение гиперболы, имеющей вершины в фокусах, а фокусы — в вершинах эллипса $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$.

Упражнение 4.8. Найти координаты центра, вершин и уравнения асимптот гиперболы $y = \frac{4-5x}{x-1}$.

Упражнение 4.9. Составить уравнение параболы, проходящей через точки: а) $(0; 0)$ и $(-1; -3)$ симметрично относительно оси Ox; б) $(0; 0)$ и $(2; -4)$ симметрично относительно оси Oy.

Упражнение 4.10. Найти уравнения параболы и ее директрисы, если известно, что парабола имеет вершину в начале координат и симметрична относительно оси Ox и что точка пересечения прямых $y = x$ и $x + y - 2 = 0$ лежит на параболе.

Упражнение 4.11. Найти расстояние от начала координат до прямой, проходящей через центр гиперболы $y = \frac{x+1}{x-1}$, и вершину параболы $y = -2x^2 + 5x - 2$.

3.5 Поверхности второго порядка

Подобно тому как в параграфе 3.4 были описаны все наиболее интересные линии второго порядка, в этом параграфе мы опишем важнейшие поверхности второго порядка.

Определение 5.1. Равенство

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz+$$

$$+2a_{23}yz + b_1x + b_2y + b_3z + c = 0, \qquad (5.1)$$

где a_{kl}, b_l, c $(k, l = 1, \ldots, 3)$— заданные действительные числа, $\sum\limits_{k=1}^{3}\sum\limits_{l=1}^{3} a_{kl}^2 \neq 0$.

Равенство (5.1) будем называть *общим* уравнением поверхности второго порядка.

Теорема 5.1. Пусть в системе координат $Oxyz$ задана поверхность S равенства (5.1). Тогда существует такая декартова прямоугольная система координат, в которой это уравнение принимает один из следующих канонических видов:

1) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,\ (a, b, c > 0)$— эллипсоид;

2) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,\ (a, b, c > 0)$— однополостный гиперболоид;

3) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,\ (a, b, c > 0)$— двуполостный гиперболоид;

4) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z,\ (a, b > 0)$— эллиптический параболоид;

5) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z,\ (a, b > 0)$— гиперболический параболоид;

6) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0,\ (a, b, c > 0)$— конус второго порядка;

7) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0,\ (a, b, c > 0)$— точка;

8) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,\ (a, b > 0)$— эллиптический цилиндр;

9) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,\ (a, b > 0)$— гиперболический цилиндр;

10) $y^2 = 2px$, $(p > 0)$ — параболический цилиндр;

11) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0,\ (a,b>0)$— пара пересекающихся плоскостей;

12) $x^2-a^2=0$, $a\geqslant 0$— пара параллельных или совпадающих плоскостей;

13) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0,\ (a,b>0)$— прямая.

Замечание 5.1. Если уравнение (5.1) не выполняется ни для какой точки пространства $M(x,y,z)$, то говорят, что оно определяет мнимую поверхность.

Например, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1$—мнимый эллипсоид.

Замечание 5.2. Преобразование уравнения (5.1) к каноническому виду производится так же, как и уравнение (4.1) кривой второго порядка.

Вид поверхности зависит от собственных значений λ_1, λ_2, λ_3 матрицы

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{12} & a_{22} & a_{23}\\ a_{13} & a_{23} & a_{33}\end{pmatrix}$$

квадратичной формы

$$L(x,y,z)=a_{11}x^2a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz.$$

Нахождение собственных значений сводится к решению кубического уравнения.

Если все собственные значения матрицы A одного знака, то поверхность S называется *эллиптической* (эллипсоид, мнимый эллипсоид, точка). Если собственные значения разных знаков, при этом $\lambda_1\cdot\lambda_2\cdot\lambda_3\neq 0$, то поверхность S называется *гиперболической* (однополостный и двуполостный гиперболоиды, конус). Если хотя бы одно из собственных значений матрицы A равно нулю, то поверхность S называется *параболической* (эллиптический и гиперболический параболоиды, все цилиндрические поверхности 8-13).

Исследуем формы поверхностей.

Эллипсоид

Каноническое уравнение эллипсоида имеет вид:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, \quad (a,b,c>0) \tag{5.2}$$

Величины a, b, c называются полуосями эллипсоида.

Если в уравнении (5.2) заменить x на $-x$ или y на $-y$, или z на $-z$ (одновременно или порознь), то оно не изменится.

Это означает, что эллипсоид (5.2) есть поверхность, симметричная относительно координатных плоскостей $x=0$, $y=0$, $z=0$ и начала координат O. Поэтому достаточно изучить в полупространстве $z \geqslant 0$. Часть эллипсоида, находящаяся в верхнем полупространстве, определяется равенством:

$$z=c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}, \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1.$$

Эллипсоид — ограниченная поверхность, находится внутри параллелепипеда

$$\{(x,y,z):|x|\leqslant a,\ |y|\leqslant b,\ |z|\leqslant c\}.$$

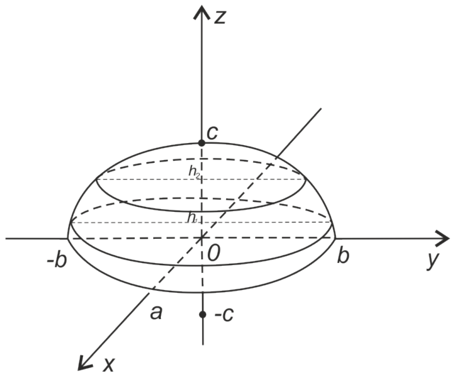
Построим эллипсоид методом сечений. Произведем сечения плоскостями $z=h$ $(0\leqslant h\leqslant c)$:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{h^2}{c^2} \tag{5.3}$$

В сечении получим эллипсы с полуосями $a\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}$, $b\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}$.

С ростом h полуоси уменьшаются.

Отсюда видно, что самые большие полуоси получаются в сечении эллипсоида плоскостью $z = 0$. При $z = c$ сечением служит точка $P(0, 0, c)$.



Строим эллипс (5.3) в плоскости $z = h$ (см. рисунок), $o \leqslant h \leqslant c$, при различных значениях h.

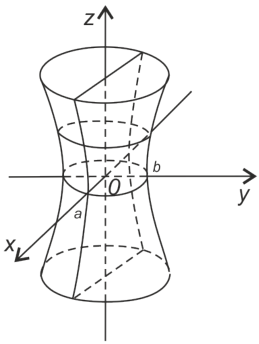
Полученную часть эллипсоида отражаем симметрично относительно плоскости $z = 0$ в нижнюю часть пространства.

Точки $(\pm a, 0, 0)$, $(0, \pm b, 0)$, $(0, 0, \pm c)$ называются вершинами эллипсоида.

Используя метод сечений можно получить графики всех поверхностей, приведенных к каноническому виду.

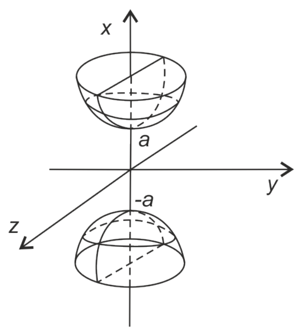
Однополостный гиперболоид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad (a, b, c > 0) \tag{5.4}$$



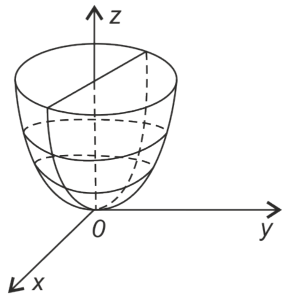
Двуполостный гиперболоид

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad (a, b, c > 0) \tag{5.5}$$



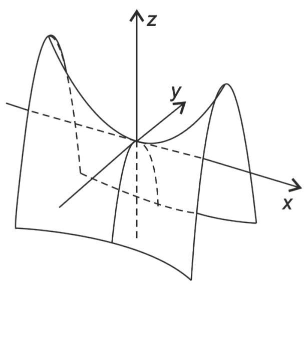
Эллиптический параболоид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z, \quad (a, b > 0) \tag{5.6}$$



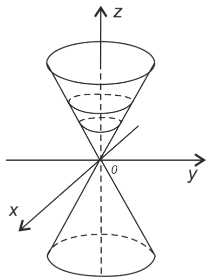
Гиперболический параболоид

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z, \quad (a, b > 0) \tag{5.7}$$



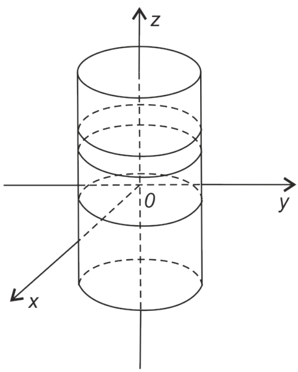
Конус второго порядка

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0,\quad (a,b,c>0) \tag{5.8}$$



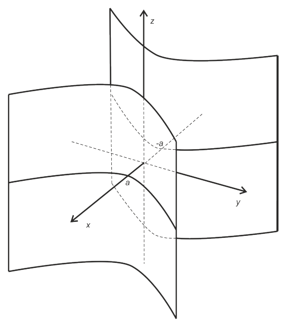
Эллиптический цилиндр

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\quad (a,b>0) \tag{5.9}$$



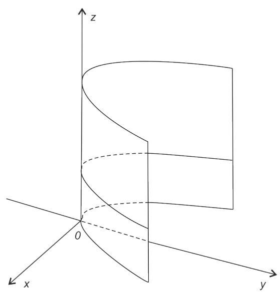
Гиперболический цилиндр

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (a, b > 0) \tag{5.10}$$



Параболический цилиндр

$$y^2 = 2px, \quad (p > 0) \tag{5.11}$$



Задания для самостоятельной работы

Ниже приведены задания на тему "Кривые и поверхности второго порядка"по вариантам.

В каждом варианте четыре задачи.

Задача 5.1. Построить тело, ограниченное заданными поверхностями.

Задача 5.2 и 5.3. С помощью сечений построить и определить вид заданной поверхности.

Задача 5.4. Привести к каноническому виду и построить график кривой.

Данные к задачам 5.1—5.4.

Вариант 1.

1. $2z = y^2,\ x^2 + y^2 = z^2,\ z = 0.$
2. $z = 6 - x^2 - y^2.$
3. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} + z^2 = -1.$
4. $-x^2 - y^2 + 4xy + 2x - 4y + 1 = 0.$

Вариант 2.

1. $y = \sqrt{x},\ y = 2\sqrt{x},\ x + z = 6,\ z = 0.$
2. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{16} = 1.$
3. $y^2 + z^2 = 4x.$
4. $2x^2 + 2y^2 - 2xy - 2x - 2y + 1 = 0.$

Вариант 3.

1. $z = x^2 + y^2,\ y = x^2,\ y = 1,\ z = 0.$
2. $2(x^2 + y^2) - z^2 = 0.$
3. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - z^2 = 1.$
4. $4xy + 4x - 4y = 0.$

Вариант 4.

1. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, $y = \frac{b}{a}x$, $y = 0$, $z = 0$.
2. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 2\frac{x}{a}$.
3. $2az = a^2 - x^2 - y^2$.
4. $-2x^2 - 2y^2 + 2xy - 6x + 6y + 3 = 0$.

Вариант 5.

1. $x^2 + y^2 = 6x$, $z = 3x$, $z = 2x$.
2. $-\frac{x^2}{9} + \frac{y^2+z^2}{16} = 0$.
3. $\frac{x^2}{4} - y^2 + \frac{z^2}{9} + 4 = 0$.
4. $-3x^2 - 3y^2 + 4xy - 6x + 4y + 2 = 0$.

Вариант 6.

1. $x^2 + y^2 = a^2$, $x^2 + y^2 - z^2 = -a^2$.
2. $x^2 + y^2 + z^2 = 2az$.
3. $z = 2 + x^2 + y^2$.
4. $-2xy - 2x - 2y + 1 = 0$.

Вариант 7.

1. $2(x^2 + y^2) - z^2 = 0$, $x^2 + y^2 - z^2 = -a^2$.
2. $x^2 + y^2 = 2ax$.
3. $x^2 - y^2 = 2az$.
4. $-x^2 - y^2 - 4xy - 4x - 2y + 2 = 0$.

Вариант 8.

1. $x^2 + y^2 = 2ax$, $x^2 + y^2 = z^2$, $z = 0$.
2. $x = 2 + y^2 + z^2$.
3. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{36} = 1$.
4. $-4x^2 - 4y^2 + 2xy + 10x - 10y + 1 = 0$.

Вариант 9.

1. $z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2\frac{x}{a}$, $z = 0$.
2. $x^2 = 2(y^2 - z^2)$.
3. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{4} = 1$.
4. $4xy + 4x - 4y - 2 = 0$.

Вариант 10.

1. $y = x^2$, $z = x^2 + y^2$, $y = 1$, $z = 0$.
2. $x^2 - \frac{y^2}{4} + z^2 = -1$.
3. $4z = y^2 - 4x^2$.
4. $x^2 + y^2 + 2xy - 8x - 8y + 1 = 0$.

Вариант 11.

1. $y^2 = 4a^2 - 3ax$, $y^2 = ax$, $z = h$ $z = -h$.
2. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 2z$.
3. $\frac{x^2}{4} + y^2 - \frac{z^2}{9} = -1$.
4. $x^2 + y^2 + 4xy - 8x - 4y + 1 = 0$.

Вариант 12.

1. $x^2 + y^2 = 2ax$, $x^2 + y^2 = 2az$, $z = 0$.
2. $\frac{x^2}{4} - y^2 + \frac{z^2}{4} = 0$.
3. $x^2 + y^2 - z^2 = 9$.
4. $x^2 + y^2 - 2xy + 2y - 7 = 0$.

Вариант 13.

1. $y^2 + z^2 = 4ax$, $y^2 = ax$, $z = 3a$.
2. $4z = x^2 - 4y^2$.
3. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{25} = 1$.
4. $2xy - 2x + 2y - 3 = 0$.

Вариант 14.

1. $4z = 16 - x^2 - y^2,\ x^2 + y^2 = 4,\ z = 0.$
2. $x^2 + z^2 = 2az.$
3. $x^2 - y^2 = 2az.$
4. $4x^2 + 4y^2 + 2xy + 12x + 12y + 1 = 0.$

Вариант 15.

1. $x^2 + y^2 = 4,\ 2z = y^2,\ z = 0.$
2. $x = 6 - y^2 - z^2.$
3. $\frac{x^2}{16} + y^2 - \frac{z^2}{9} = -1.$
4. $3x^2 + 3y^2 + 4xy + 8x + 12y + 1 = 0.$

Вариант 16.

1. $x + z = 6,\ y = \sqrt{x},\ y = 2\sqrt{x}\ z = 0.$
2. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{4} = 1.$
3. $x^2 + z^2 = 4ay.$
4. $x^2 + y^2 - 8xy - 20x + 20y + 1 = 0.$

Вариант 17.

1. $z = x^2 + y^2,\ y = x^2,\ z = 0,\ y = 1.$
2. $2(x^2 + z^2) - y^2 = 0.$
3. $-x^2 + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1.$
4. $3x^2 + 3y^2 - 2xy - 6x + 2y + 1 = 0.$

Вариант 18.

1. $y = 2x,\ y = 0,\ \frac{x^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1,\ z = 0.$
2. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 2\frac{y}{b}.$
3. $x^2 + y^2 = a^2 - 2az.$
4. $4xy + 4x + 4y + 1 = 0.$

Вариант 19.

1. $z^2 + y^2 = 6z$, $x = 3z$, $x = 2z$.
2. $\frac{x^2+z^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 0$.
3. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - z^2 + 4 = 0$.
4. $3x^2 + 3y^2 - 4xy + 6x - 4y - 7 = 0$.

Вариант 20.

1. $y^2 + z^2 = a^2$, $x^2 - y^2 - z^2 = a^2$.
2. $x^2 + y^2 + z^2 = 2ay$.
3. $x = 2 + y^2 + z^2$.
4. $-4xy - 4x + 4y + 6 = 0$.

Вариант 21.

1. $x^2 + y^2 - z^2 = -a^2$, $2(x^2 + y^2) - z^2 = 0$.
2. $x^2 + y^2 = 2ay$.
3. $x^2 - z^2 = 2ay$.
4. $5x^2 + 5y^2 - 2xy + 10x - 2y + 1 = 0$.

Вариант 22.

1. $y^2 + z^2 = 2az$, $z^2 + y^2 = x^2$, $x = 0$.
2. $y = 2 + x^2 + z^2$.
3. $-\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{16} = 1$.
4. $2x^2 + 2y^2 + 4xy + 8x + 8y + 1 = 0$.

Вариант 23.

1. $y = \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2}$, $y = 0$, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 2\frac{x}{a}$.
2. $y^2 = x^2 - z^2$.
3. $-\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1$.
4. $-x^2 - y^2 + 2xy + 2x - 2y + 1 = 0$.

Вариант 24.

1. $y = z$, $y = 2z$, $x = 0$, $x = y + z$, $x = 10$.
2. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} + \frac{z^2}{169} = 1$.
3. $y^2 - z^2 = x^2$.
4. $2x^2 + 2y^2 - 4xy - 8x + 8y + 1 = 0$.

Вариант 25.

1. $y^2 = 4a^2 - 3ax$, $y^2 = ax$, $z = 2$, $z = -2$.
2. $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 2z$.
3. $\frac{x^2}{9} - y - \frac{z^2}{4} = 1$.
4. $3x^2 + 3y^2 + 2xy - 12x - 4y + 1 = 0$.

Вариант 26.

1. $x^2 + y^2 = 2ay$, $x^2 + y^2 = 2az$, $z = 0$.
2. $x^2 - \frac{y^2+z^2}{4} = 0$.
3. $x^2 - y^2 + z^2 = -9$.
4. $-4xy + 8x + 8y + 1 = 0$.

Вариант 27.

1. $x^2 + z^2 = 4ay$, $x^2 = ay^2$, $y = 3a$.
2. $4z = 4x^2 - y^2$.
3. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{25} + \frac{z^2}{9} = 1$.
4. $2x^2 + 2y^2 - 2xy + 6x - 6y - 6 = 0$.

Вариант 28.

1. $2z = y^2$, $x^2 + y^2 = a^2$, $z = 0$.
2. $z = 4 - x^2 - y^2$.
3. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{9} = -1$.
4. $x^2 + y^2 + 4xy + 4x + 2y - 5 = 0$.

Вариант 29.

1. $x^2 + z^2 = 4$, $2y = z^2$, $y = 0$.
2. $x = 8 - y^2 - 2z^2$.
3. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} + z^2 = -1$.
4. $x^2 + y^2 - 2xy + 2x - 7 = 0$.

Вариант 30.

1. $x = y^2 + z^2$, $y = z^2$, $x = 0$, $y = 1$.
2. $\frac{x^2+y^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 0$.
3. $x^2 + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{9} + 4 = 0$.
4. $3x^2 + 3y^2 - 4xy - 4x + 6y - 7 = 0$.

Вариант 31.

1. $z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2\frac{x}{a}$, $z = 0$.
2. $y^2 = x^2 - z^2$.
3. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - z^2 = 1$.
4. $2x^2 + 2y^2 - 2xy + 6x - 6y - 6 = 0$.

Вариант 32.

1. $y = x^2$, $z = x^2 + y^2$, $y = 1$, $z = 0$.
2. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} + \frac{z^2}{169} = 1$.
3. $2az = a^2 - x^2 - y^2$.
4. $x^2 + y^2 + 4xy + 4x + 2y - 5 = 0$.

3.6 Кривая в полярной системе координат

Напомним, как на плоскости можно ввести полярную систему координат.

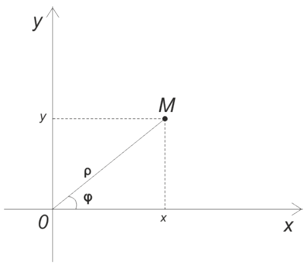
Рассмотрим на плоскости точку O и луч Ox, выходящий из точки O. Точку O назовем *полюсом*, луч Ox— *полярной осью.*

Полярными координатами точки M $M \neq 0$ называются два числа: *полярный радиус* $\rho = |\overrightarrow{OM}| > 0$ и полярный угол φ— угол, на который нужно повернуть полярную ось для того, чтобы ее направление совпало с направлением вектора $\overrightarrow{OM}$. Положительным направлением считается поворот против часовой стрелки.

Полярный угол φ имеет бесконечно много возможных значений (отличающихся друг от друга на величину $2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$). Значение угла φ, удовлетворяющее условию $0 \leqslant \varphi < 2\pi$, называется *главным.*

Пусть на плоскости введена правая декартова прямоугольная система координат Oxy и полярная система (O, Ox). Полярная ось совпадает с положительной полуосью абсцисс. Тогда связь между декартовыми и полярными координатами произвольной точки M задается равенствами:

$$x = \rho \cos \varphi,\ y = \rho \sin \varphi, \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2},\ tg\varphi = \frac{y}{x}.$$



Уравнение кривой в полярных координатах имеет вид: $F(\rho, \varphi) = 0$.

Оно может быть получено либо непосредственно, исходя из геометрических свойств кривой, либо переходом к полярным координатам в уравнении этой кривой в декартовых прямоугольных координатах.

Пример 6.1. Построить кривую, заданную уравнением

$$\rho = 6\cos\varphi \tag{6.1}$$

Решение. Заметим, что $\cos\varphi \geqslant 0$, следовательно, вся кривая расположена в секторе $\frac{\pi}{2} \leqslant \varphi\frac{\pi}{2}$.

Перейдем в уравнении кривой к декартовым координатам. Для этого домножим обе части уравнения (6.1) на ρ: $\rho^2 = 6\rho\cos\varphi$. Так как $\rho^2 = x^2+y^2$, $\rho\cos\varphi = x$, получим равенство $x^2+y^2 = 6x$ или $(x-3)^2+y^2 = 9$.

Таким образом, заданная кривая — окружность с центром в точке $(3, 0)$, радиус которой равен 3.

Пример 6.2. Вывести уравнение прямой в полярной системе координат.

Решение. Если прямая l проходит через полюс и ее угловой коэффициент по отношению к полярной оси равен k, то уравнение этой прямой имеет вид

$$tg\varphi = k.$$

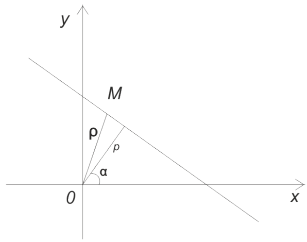
Пусть теперь прямая l не проходит через полюс. Воспользуемся нормальным уравнением (2.11) прямой в декартовых координатах:

$$x\cos\alpha + y\cos\beta - p = 0$$

и перейдем в этом уравнении к полярным координатам. Учитывая, что $\cos\beta = \sin\alpha$ $\left(\alpha+\beta = \frac{\pi}{2}\right)$, получим равенство:

$$\rho\cos\varphi\cos\alpha + \rho\sin\varphi\sin\alpha - p = 0,$$

$$\rho\cos(\varphi-\alpha)=p,$$
$$\rho=\frac{p}{\cos(\varphi-\alpha)} \tag{6.2}$$



Уравнение (6.2) и есть уравнение прямой в полярной системе координат.

Задачи для самостоятельного решения

6.1. Написать уравнения заданных кривых в полярных координатах:

а) $y=x$; б) $y=1$; в) $x+y-1=0$;

г) $x^2+y^2=a^2$; д) $x^2-y^2=a^2$; е) $x^2+y^2=2x$.

6.2. Построить кривые:

а) $\rho\sin\varphi=1$; б) $\rho=5$; в) $tg\varphi=-1$;

г) $\rho\cos\varphi=2$; д) $\rho=\frac{1}{\sqrt{2}\cos\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)}$; е) $\sin\rho=\frac{1}{2}$.

6.3. Определить полярные координаты центра и радиус каждой из этих окружностей:

а) $\rho=4\cos\varphi$; б) $\rho=3\sin\varphi$; в) $\rho=-5\sin\varphi$;

г) $\rho=6\cos\left(\frac{\pi}{3}-\varphi\right)$; д) $\rho=8\sin\left(\varphi-\frac{\pi}{3}\right)$;

е) $\rho=8\sin\left(\frac{\pi}{3}-\varphi\right)$.

6.4. Вывести полярное уравнение эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ при условии, что полярная ось совпадает с положительным направлением оси Ox, а полюс находится в центре эллипса.

6.5. Вывести полярное уравнение гиперболы $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ при условии, что полярная ось совпадает с положительным направлением оси Ox, а полюс находится в центре гиперболы.

Литература

[1] З. И. Боревич. Определители и матрицы. — СПб.: Лань, 2009.

[2] Я. С. Бугров, С. М. Никольский. Сборник задач по высшей математике. — М.:Физматлит, 2001.

[3] П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова. Высшая математика в упражнениях и задачах. Часть 1. — М.: Оникс 21 век, Мир и образование, 2007.

[4] Б. П. Демидович, В. А. Кудрявцев. Краткий курс высшей математики. — Астрель, АСТ, 2004.

[5] А. Г. Курош. Курс высшей алгебры. — СПб.: Лань, 2006.

[6] И. П. Натансон. Краткий курс высшей математики. — СПб.: Лань, 2009.

[7] В. С. Шипачев. Основы высшей математики. — М.:Высшая школа, 2004.

[8] http://benran.ru — библиотека по естественным наукам Российской Академии Наук.

[9] http://mathnet.ru — общероссийский математический портал.

[10] http://lib.mexmat.ru — электронная библиотека механико-математического факультета МГУ.

Учебное издание

Баранова Ольга Викторовна

Высшая математика
Элементы алгебры и геометрии
Часть 1

Учебное пособие

Подписано в печать 17.06.14. Формат 60×84 1/16.
Печать офсетная. Усл.печ.л. 8,75. Уч.-изд.л. 8.06.
Заказ № Тираж экз.
Издательство «Удмуртский университет»
426034, Ижевск, ул. Университетская, 1, корп. 4