



УДК: 517.938, 533.1

MSC 2010: 37A60, 65P20

## Динамика тонких труб под воздействием потока жидкости

В. П. Березовой, А. В. Тур, В. В. Яновский

Предложена простая модель описания движений тонких труб под воздействием потока жидкости. Получено нелинейное уравнение для струны с потоком. Показана возможность возникновения вибрации труб под воздействием потока жидкости, и найден критерий линейной неустойчивости при постоянной скорости течения. В области, где условия линейной неустойчивости не выполняются, обнаружена возможность возникновения колебаний труб при наличии малых периодических осцилляций потока жидкости.

Ключевые слова: струна, течение жидкости, уравнение движения, неустойчивость, параметрический резонанс

### 1. Введение

Исследование динамики труб служит источником сложных и интересных физических задач, важных для технических применений. Так, колебания труб и стержней исследовались в пионерских работах Тимошенко [1, 2], ставших классическими в этой области, и про-

---

Получено 20 марта 2014 года

После доработки 31 марта 2014 года

---

Березовой Виктор Пантелеймонович

[berezovoj@kipt.kharkov.ua](mailto:berezovoj@kipt.kharkov.ua)

Институт теоретической физики им. А. И. Ахиезера Национального научного центра «Харьковский физико-технический институт»

61108, Украина, г. Харьков, ул. Академическая, д. 1

Тур Анатолий Валентинович

[Anatoly.Tour@irap.omp.eu](mailto:Anatoly.Tour@irap.omp.eu)

Université de Toulouse [UPS], CNRS, Institut de Recherche en Astrophysique et Planétologie

9 avenue du Colonel Roche, BP 44346, 31028 Toulouse Cedex 4, France

Яновский Владимир Владимирович

[yarovskiy@isc.kharkov.ua](mailto:yarovskiy@isc.kharkov.ua)

Институт монокристаллов НАН Украины

61001, Украина, г. Харьков, пр. Ленина, д. 60

Харьковский национальный университет им. В. Н. Каразина

61000, Украина, г. Харьков, пл. Свободы, д. 4

должаются во многих исследованиях [3, 4]. Однако довольно часто в реальных условиях необходимо исследовать более сложный случай динамики труб под воздействием движения жидкости в нем. В определенном смысле как колебания труб в отсутствие жидкости, так и характер течения жидкости по трубам при отсутствии их движений изучены достаточно подробно, хотя и относятся к различным областям физики. В последнее время интенсивно развивается еще одно направление, связанное с биофизикой, — динамика сосудов при движении крови по ним. В [5, 6] было предложено и исследовано несколько интересных простых моделей. Обзор этого направления и литературы см. в [7]. В этой области интерес вызывают моды колебаний, связанные с изменением диаметра сосудов (локально при протекании жидкости по ним). Даже корректная постановка задачи о динамике сосуда под воздействием течения жидкости (с рядом упрощенных предположений: малости амплитуд колебаний поверхности по сравнению с радиусом и достаточно низкие скорости течений) требует сложных математических исследований (см., например, [8]). Причина этого кроется в сложном характере возможных течений жидкости при деформации сосудов. С физической точки зрения, интересно сформулировать наиболее простую и наглядную модель, которая описывает общие черты влияния течения жидкости на динамику трубы. В основу такой модели удобно ввести естественный малый параметр — малость отношения радиуса трубы к ее длине. Этот случай часто реализуется на практике. По сути, в нулевом приближении по этому параметру при отсутствии течения жидкости мы получим хорошо известную модель струны. Эта модель не только используется как простейшая модель для описания спектра колебаний труб и стержней [1, 2], но и является одной из наиболее популярных моделей физики. Это приближение использовалось и ранее при корректном выводе широко известной модели Лоренца [9], которая получена в этом приближении для описания конвективного теплообмена. Однако в ней пренебрегалось возможностью колебаний бесконечно тонкой трубки, по которой движется жидкость. Другое важное преимущество, достигаемое в этом приближении, — это возможность отказа от учета внутренней структуры течения жидкости по трубе. При этом сохраняется наиболее важное свойство: труба является носителем массы, движущейся с определенной скоростью. Именно это свойство определяет главные черты влияния течения жидкости на динамику трубы. Такая модель, дополненная учетом несжимаемости текущей по трубе жидкости, введена в этой работе. Последнее предположение выполняется при скоростях течений меньше скорости звука и реализуется в подавляющем большинстве случаев природных и технических систем.

В первом разделе работы на основе вариационного принципа Лагранжа получены нелинейные уравнения, описывающие динамику трубы под воздействием потока несжимаемой жидкости. Во втором разделе получен критерий линейной неустойчивости, приводящий к возбуждению и росту колебаний трубы. В третьем разделе анализируется возможность возникновения вибраций трубы вдалеке от условий линейной неустойчивости под воздействием осциллирующей скорости потока жидкости по трубе. Используя метод многих масштабов [10], мы докажем возможность возникновения параметрической неустойчивости и найдем критерии ее возникновения.

## 2. Уравнение динамики струны с заданным потоком жидкости

Целью этого раздела является получение динамических уравнений для тонких труб под воздействием потока жидкости на основе модели струны. Адекватность рассматриваемой

мой модели обусловливается тем, что, как правило, отношение поперечных размеров труб к продольным мало во многих технологических и природных системах. Это обстоятельство позволяет уменьшить число степеней свободы, необходимых для эволюции труб под воздействием потока жидкости, и описывать их как одномерный протяженный объект. Рассмотрение струны как одномерного, протяженного объекта неразрывно связано с вопросом ее параметризации. Для простоты используем обычную параметризацию струны в виде  $X(t, x)$ , где  $x$  пробегает значения вдоль прямой, соединяющей точки закрепления трубы ( $x_1, x_2$  — координаты точек закрепления), а  $X$  — поперечное отклонение от нее. Такая параметризация естественна для натянутой струны без самопересечений и кручений. Следует отметить, что учет более общих конфигураций достаточно прост и приводит только к загромождению вычислительными деталями особенностей динамики струны. Для вывода динамических уравнений, описывающих эволюцию струны под воздействием заданного потока жидкости, используем лагранжев формализм. Ограничения, связанного с заданным потоком жидкости, можно избежать, используя уравнение движения жидкости. Однако в этой работе мы предпочитаем его использовать и уделить основное внимание динамике собственно тонкой трубы под воздействием потока жидкости. Напомним простейший вид лагранжиана обычной струны. Лагранжиан струны с однородной плотностью  $\rho_s$  хорошо известен и при простейшем виде потенциальной энергии, определяемой ее жесткостью (то есть при пренебрежении ангармоническими добавками), имеет вид

$$L_s = \frac{\rho_s}{2} (\dot{X})^2 - \frac{\beta}{2} (X')^2, \quad (2.1)$$

где  $\dot{X} = \frac{\partial X(x, t)}{\partial t}$  и  $X' = \frac{\partial X(x, t)}{\partial x}$ . Далее ограничимся случаем одной поперечной координаты  $X$ ; при наличии двух поперечных координат вид уравнения легко восстанавливается с учетом суммирования по индексам этих координат. Уравнение движения, соответствующее лагранжиану (2.1), хорошо изучено и описывает колебания струны.

Перейдем теперь к формулировке лагранжиана для тонкой трубы с потоком жидкости. Наиболее общая формулировка достигается при рассмотрении такой системы со связями 1-го рода [11, 12], что позволяет учесть и возможные более общие конфигурации (см. выше). Роль связи играет струна, по которой и движется жидкость. Однако, в рамках описанных выше предположений, лагранжиан рассматриваемой системы легко записать в виде лагранжиана струны (2.1) с аддитивной добавкой, связанной с плотностью кинетической энергии жидкости. Для определения явного вида кинетической энергии жидкости надо учесть, что жидкость течет только по струне, определяемой  $X = X(x, t)$ , и, следовательно, как скорость, так и погонная плотность жидкости по переменной  $x$  зависит от  $\dot{X}$  и  $X'$ .

Действительно, скорость жидкости по струне складывается из компоненты скорости вдоль струны  $V_l$  и из скорости движения, связанной с движениями струны:

$$\vec{V}(x, t) = \frac{\partial x}{\partial t} \left( \vec{\ell}_1 + \frac{\partial X}{\partial x} \vec{\ell}_2 \right) + \frac{\partial X}{\partial t} \vec{\ell}_2, \quad (2.2)$$

где  $\vec{\ell}_1 \perp \vec{\ell}_2$  — орты, соответственно, вдоль оси  $x$  и в поперечном направлении к ней. Это соотношение легко получить, используя лагранжевы координаты для жидких частиц, движущихся вдоль подвижной линии  $X(x, t)$ . В соотношении (2.2)  $\frac{\partial x}{\partial t}$  — соответствующая компонента скорости лагранжевой частицы, которая априори неизвестна. Учтем, однако, тот факт, что поток (или скорость) жидкости определяется внешними условиями, например,

разностью давлений на концах струны. Кроме этого используем условие несжимаемости жидкости. Последнее означает, что компонента скорости вдоль струны  $V_l$  одинакова по величине в каждой точке струны и является функцией только времени. Следует подчеркнуть, что это утверждение основано не только на несжимаемости, но и на естественном предположении об отсутствии локального изменения диаметра тонкой трубы, по которой движется жидкость. Разумеется, для биологических систем (например, кровеносных сосудов), это предположение неверно [7]. Однако для большинства материалов, используемых в технике, это достаточно надежное утверждение. Обоснование этого можно найти в рамках линейной упругости [13], которая подтверждает, что деформации тонких труб носят в основном продольный характер при сравнительно малых поперечных деформациях. С физической точки зрения, это предположение удобно еще и вследствие своей простоты. Так как  $V_l$  есть функция только времени, то именно ее удобно считать заданной внешними условиями. Другими словами, она будет играть роль, аналогичную роли внешнего поля. Связь  $V_l$  со скоростью лагранжевых частиц  $\frac{\partial x}{\partial t}$  и кривизной струны легко получить, выделяя из соотношения (2.2) компоненту скорости, касательную к струне:

$$V_l(t)^2 = \left( \frac{\partial x}{\partial t} \right)^2 \left( 1 + (X')^2 \right). \quad (2.3)$$

Это соотношение позволяет исключить неопределенную функцию  $\frac{\partial x}{\partial t}$  из плотности кинетической энергии жидкости и получить лагранжиан рассматриваемой системы в виде

$$L = L_s + \frac{\rho_l(x)}{2} \left\{ V_l^2 + (\dot{X})^2 + 2 \frac{\dot{X} X' V_l}{\sqrt{1 + (X')^2}} \right\}. \quad (2.4)$$

Здесь  $L_s$  — плотность лагранжиана упругой трубы или струны (2.1),  $\rho_l(x)$  — погонная плотность жидкости вдоль оси  $x$ , которую необходимо выражать через обычную плотность жидкости и характеристики струны. Это легко сделать в рамках используемого ранее предположения о незначительности изменения радиуса поперечного сечения тонкой трубы. Действительно, изменение объема такой трубки при ее деформациях пропорционально изменению длины струны. Это позволяет легко оценить погонную плотность как  $\rho_l = \frac{\Delta m}{\Delta x}$  ( $\Delta m$  — масса жидкости в элементе трубы, проекция которого на ось  $X$  имеет длину  $\Delta x$ ). Учитывая, что  $\Delta m = \rho_0 S \cdot \Delta l$  ( $S$  — площадь поперечного сечения трубы,  $\rho_0$  — плотность жидкости), и используя выражение для элемента длины через  $\Delta x$ , получим

$$\rho_l = \rho_0 \sqrt{1 + (X')^2}. \quad (2.5)$$

Физический смысл изменения погонной плотности (2.5) очевиден. При изменении длины струны (при неизменном поперечном сечении) масса жидкости внутри струны меняется пропорционально ее длине за счет притока или оттока жидкости. Поэтому, в силу выбранной параметризации, плотность жидкости на единицу длины меняется согласно (2.5).

Возвращаясь теперь к лагранжиану (2.4) и рассматривая  $X$  как обобщенные координаты, а  $\dot{X}$ ,  $X'$  — как обобщенные скорости, легко получить из вариационного принципа

уравнение движения струны под воздействием потока жидкости как уравнение Лагранжа:

$$\left(\frac{\rho_s}{\rho_0} + \sqrt{1 + (X')^2}\right) \ddot{X} - \left\{ \frac{\beta}{\rho_0} - \frac{1}{2} \frac{(V_l^2 + \dot{X}^2)}{\sqrt{(1 + (X')^2)^3}} \right\} X'' +$$

$$+ 2X' \left( V_l + \frac{\dot{X} X'}{\sqrt{1 + (X')^2}} \right) + \rho_0 X' \dot{V}_l = 0. \quad (2.6)$$

Слагаемые, входящие в уравнение (2.6), содержат скорость потока и ее производные и имеют простой физический смысл в терминах сил, возникающих в неинерциальных системах отсчета, а именно:  $\rho_0 X' \dot{V}_l$  — сила, связанная с неравномерностью вращения,  $2\dot{X}' V_l$  — сила Кориолиса,  $V_l^2 X''$  — центробежная сила (см., например, [14]). Полученное нелинейное уравнение (2.6) динамики струны с потоком указывает на существенное влияние потока на эволюцию струны. Так, центробежная сила частично компенсирует жесткость струны, что, несомненно, изменяет спектр колебаний даже в линейном приближении. Более детально влияние потока жидкости на динамику струны рассмотрим в следующих разделах. Начнем с исследования свойств уравнения (2.6) в линейном приближении.

### 3. Спектр колебаний струны с потоком жидкости: линейное приближение

Рассмотрим влияние потока жидкости на спектр линейных колебаний «тонкой» трубы. В линейном приближении уравнение (2.6) принимает следующий вид:

$$(\rho_s + \rho_0) \ddot{X} - \left( \beta - \frac{\rho_0}{2} V_l^2 \right) X'' + 2\dot{X}' V_l(t) + X' \dot{V}_l(t) = 0. \quad (3.1)$$

Легко заметить, что при отсутствии течения ( $V_l = 0$ ) влияние жидкости на спектр линейных колебаний тривиально. За счет наполнения трубы жидкостью просто перенормируется плотность струны, и спектр колебаний струны смещается в более низкочастотную область.

Влияние постоянного потока жидкости ( $V_l = \text{const}$ ) приводит уже к нетривиальному эффекту даже в линейном приближении. Действительно, в этом случае центробежная сила понижает жесткость струны. Рассматривая для простоты бесконечно протяженную струну и подставляя в уравнение (3.1) (при  $V_l = \text{const}$ ) решение в виде

$$X = a e^{i\omega t - ikx}, \quad (3.2)$$

легко найти дисперсионное соотношение

$$\omega = \frac{k V_1}{\gamma + 1} \left\{ 1 \pm \sqrt{\frac{\beta(\gamma + 1)}{\rho_0 V_1^2} - \frac{(\gamma - 1)}{2}} \right\}, \quad (3.3)$$

где  $\gamma = \frac{\rho_s}{\rho_0}$ . В случае отсутствия потока ( $V_1 = 0$  и  $\rho_0 = 0$ ) дисперсионное уравнение (3.3) переходит в известное дисперсионное уравнение для собственных колебаний струны  $\omega = k \sqrt{\frac{\beta}{\rho_s}}$ .

При наличии потока дисперсионное уравнение (3.3) определяет две моды колебаний (быструю и медленную). Выписывая дисперсионное соотношение при малых  $V_l$

$$\omega \approx \pm k \sqrt{\frac{\beta}{\rho_s + \rho_0}} + k V_l \frac{\rho_0}{\rho_s + \rho_0}.$$

Легко видеть, что это модифицированные моды струны, бегущие в противоположных направлениях. Влияние потока проявляется в увеличении фазовой скорости волны, бегущей в направлении потока, и замедлении волн, бегущих в обратном направлении. Однако с увеличением скорости потока возникает мнимая добавка к частоте при условии

$$\frac{\rho_0 V_l^2}{2} > \frac{\beta(\gamma + 1)}{(\gamma - 1)}. \quad (3.4)$$

Это означает, что моды, бегущие по направлению потока жидкости, становятся неустойчивыми и нарастают с инкрементом

$$\Gamma = k \sqrt{\frac{\beta}{\rho_0(\gamma + 1)} + \frac{V_0^2(\gamma - 1)}{2(\gamma + 1)}}.$$

Таким образом, при выполнении условия (3.4) в рассматриваемой системе колебания труб экспоненциально нарастают. В этом и состоит важный эффект влияния постоянного потока жидкости на динамику тонких труб.

Естественно, эти результаты легко перенести на случай струны, закрепленной в точках  $x_1 = 0$  и  $x_2 = L$ . В этом случае волновой вектор  $k$  принимает дискретные значения  $k = Ln/2\pi$  ( $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ), а дисперсионное соотношение (3.3) сохраняется. Разумеется, описанная выше неустойчивость не может развиваться до больших амплитуд, так как с ростом амплитуды колебаний нелинейные слагаемые приводят к их стабилизации. Следует отметить, что автомодельные решения  $X(x - ct) = X(\xi)$  нелинейного уравнения (2.6) не позволяют определить амплитуды, при которых стабилизируется нарастание линейных волн. Причина этого связана с тем, что уравнение приводит к тривиальным автомодельным решениям

$$\left(\frac{\partial X}{\partial \xi}\right)^2 = \text{const}. \quad (3.5)$$

На первый взгляд, это уравнение не допускает нелинейных волновых решений. Возможно, это является следствием упрощенного предположения о колебаниях струны в двумерном пространстве. В более высокой размерности вышеприведенное уравнение допускает спиральные волновые движения. Однако если отказаться от всюду дифференцируемых решений, то можно обнаружить даже в этом случае волновое пилообразное решение, показанное на рисунке 1. Амплитуда колебаний такого обобщенного решения равна  $\frac{l\sqrt{\text{const}}}{2}$ , где  $l$  — пространственный период бегущей нелинейной волны.

Доказательство возможности выхода на такое автомодельное решение остается открытым из-за сложности нелинейного уравнения (2.6). Возможно, это подтверждается численно.

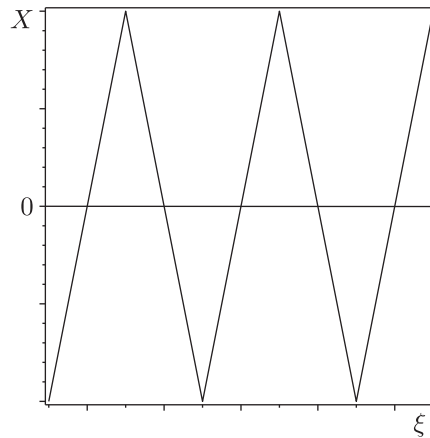


Рис. 1. Автомоделное решение уравнения (3.5) в виде пилообразной волны.

#### 4. Параметрический резонанс

Выше мы показали, что постоянный поток жидкости по тонкой трубе может приводить к возбуждению колебаний трубы при превышении некоторого критического значения скорости потока (см. соотношение (3.4)). Возникает естественный вопрос о возможности возбуждения вибраций трубы, если критерий неустойчивости не выполняется. В качестве одного из механизмов рассмотрим возможность возбуждения вибрации труб за счет периодических малых осцилляций потока жидкости. Такие осцилляции могут возникать при периодическом изменении граничных условий (например, градиента давления). Еще одним источником осцилляций может служить турбулентный режим течения жидкости, для которого характерен широкий спектр частот колебаний.

Выберем поле скорости жидкости для моделирования малых шумов следующим образом:

$$V_l(t) = V_0 (1 + \varepsilon \cos 2\omega t), \quad (4.1)$$

где  $\varepsilon$  — безразмерный малый параметр,  $V_0 = \text{const}$  — средняя скорость потока жидкости,  $2\omega$  — частота осцилляций скорости. При моделировании шумов в системе можно рассмотреть и более общий случай наличия многих частот (или широкого спектра волн). Как будет показано ниже, характер поведения при этом качественно не меняется, а наличие многих частот приведет лишь к некоторым достаточно ясным видоизменениям. Возвращаясь к общему линейному уравнению (3.1) и по-прежнему предполагая струну бесконечно длинной, представим его решение в виде

$$X(t, x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikx} X(k, t) dk. \quad (4.2)$$

Условие вещественности  $X(t, x)$  приводит к следующему ограничению на Фурье-компоненты  $X(k, t)$ :

$$X^*(k, t) = X(-k, t). \quad (4.3)$$

Подставляя решение (4.2) в исходное уравнение (3.1), получим для определения  $X(k, t)$

обыкновенное дифференциальное уравнение с зависящими от времени коэффициентами:

$$\ddot{X}(k, t) + \frac{1}{\gamma + 1} \left\{ k^2 \left( \frac{\beta}{\rho_0} - \frac{1}{2} V_l^2(t) \right) - ik \dot{V}_l(t) \right\} X(k, t) - \frac{2ik V_l(t)}{\gamma + 1} \dot{X}(k, t) = 0, \quad (4.4)$$

где  $\gamma = \frac{\rho_c}{\rho_0}$ . Как известно из общей теории обыкновенных линейных дифференциальных уравнений, следующий стандартный переход к новой зависимой переменной позволяет исключить слагаемое с первой производной, а именно: полагая

$$X(k, t) = Y(k, t) e^{\frac{ik}{\gamma+1} \int_0^t dt' V_l(t')}, \quad (4.5)$$

получим уравнение для  $Y(k, t)$  в виде

$$\ddot{Y}(k, t) + \frac{k^2}{\gamma + 1} \left\{ \frac{\beta}{\rho_0} - \frac{1}{2} \frac{(\gamma - 1)}{(\gamma + 1)} V_l^2(t) \right\} Y(k, t) = 0. \quad (4.6)$$

Необходимо заметить, что волновое число  $k$  входит в уравнение (4.6) в четной степени и более явно нигде не присутствует. Это означает, что условие (4.3) удовлетворяется для вещественных решений (4.6). Преобразуем уравнение (4.6) к более удобному виду, переходя к переменным

$$\tau = \omega t, \quad Y = \frac{V_0}{\omega} Z, \quad k = \frac{\omega}{V_0} k. \quad (4.7)$$

В этих переменных уравнение (4.6) принимает вид

$$\frac{d^2 Z}{d\tau^2} + \frac{k^2}{(\gamma + 1)} \left\{ \delta - \frac{1}{2} \left( \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \right) (1 + \varepsilon \cos 2\tau)^2 \right\} Z = 0, \quad (4.8)$$

где  $\delta = \beta/\rho_0 V_0^2$ . При исследовании свойств решений уравнения (4.8) используем метод многих масштабов [10]. В нашем случае применение этого метода основано на естественном разделении масштабов. Исходные осцилляции скорости потока предполагаются быстрыми, а нас интересует поведение системы на временах  $\approx \frac{1}{\varepsilon}, \frac{1}{\varepsilon^2}$ , намного превышающих характерные времена осцилляций скорости. Согласно этому методу введем медленные времена

$$T_n = \varepsilon^n \tau.$$

Решения уравнения (4.8) зависят как от быстрого времени  $\tau \equiv T_0$ , так и от медленных времен  $T_1, T_2, \dots$ . Разложим решение и его производные по степеням малого параметра  $\varepsilon$  следующим образом:

$$Z = Z_0 + \varepsilon Z_1 + \varepsilon^2 Z_2 + \dots, \quad (4.9)$$

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial T_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial T_1} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial T_2} + \dots$$

После подстановки в уравнение (4.8) и выделения слагаемых при одинаковых степенях  $\varepsilon$ , получим цепочку уравнений, описывающих эволюцию решений на различных временных масштабах:

$$\text{для } \varepsilon: \quad \frac{\partial^2 Z_0}{\partial T_0^2} + \omega_0^2 = 0, \quad \omega_0^2 = \frac{k^2}{\gamma + 1} \left\{ \delta - \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{1 + \gamma} \right) \right\}, \quad (4.10)$$



$$\text{для } \varepsilon^1: \frac{\partial^2 Z_1}{\partial T_0^2} + \omega_0^2 Z_1 = -2 \frac{\partial^2 Z_0}{\partial T_0 \partial T_1} + Z_0 \frac{(\gamma - 1)}{(\gamma + 1)} k^2 \cos 2T_0, \quad (4.11)$$

$$\text{для } \varepsilon^2: \frac{\partial^2 Z_2}{\partial T_0^2} + \omega_0^2 Z_2 = -2 \frac{\partial^2 Z_0}{\partial T_0 \partial T_2} - \frac{\partial^2 Z_0}{\partial T_1^2} - 2 \frac{\partial^2 Z_1}{\partial T_0 \partial T_1} + \frac{(\gamma - 1)}{(\gamma + 1)} k^2 Z_1 \cos 2T_0. \quad (4.12)$$

При получении решений необходимо рассмотреть два принципиально различных случая: (а) нерезонансный (собственные частоты линейного уравнения  $\omega_0$  (при  $\varepsilon = 0$ ) не кратны целым числам), (б) резонансный (собственные частоты кратны целому числу). Сначала рассмотрим случай, когда частота  $\omega_0$ , входящая в уравнение (4.10), не кратна целому числу. Решение уравнения (4.10) легко найти в виде

$$Z_0 = A(T_1, T_2, \dots) e^{i\omega_0 T_0} + c. c. \quad (4.13)$$

Амплитуда  $A$  зависит только от медленных времен. Для определения этой зависимости рассмотрим уравнение (4.11) и выделим секулярные условия, определяющие зависимость  $A$  от  $T_1$ . Для того чтобы асимптотическое разложение уравнения (4.9) было непротиворечивым, необходимо, чтобы  $Z_1$  не нарастало со временем. Это означает, что в правую часть уравнения (4.11) не должны входить слагаемые, осциллирующие с частотой  $\omega_0$ , и, следовательно, секулярное условие имеет вид

$$\frac{\partial^2 Z_0}{\partial T_1 \partial T_0} \equiv i\omega \frac{\partial A}{\partial T_1} + c. c. = 0. \quad (4.14)$$

Таким образом, амплитуда  $A$  не зависит от  $T_1$ , то есть  $A = A(T_2, \dots)$ . При выполнении этого условия решение уравнения (4.11) легко получить:

$$Z_1 = \frac{(y - 1)}{8(y + 1)} \left\{ \frac{e^{i(\omega_0 - 2)T_0}}{(\omega_0 - 1)} - \frac{e^{(\omega_0 + 2)T_0}}{\omega_0 + 1} \right\} A(T_2). \quad (4.15)$$

Из решения (4.15) ясно видна причина, по которой необходимо рассматривать два случая (резонансный и нерезонансный), как отмечалось выше. Это связано с резонансными знаменателями, входящими в решение (4.15) и приводящими при  $\omega_0 = \pm 1$  к расходимостям. Получим теперь секулярное условие из уравнения (4.12), определяющее зависимость амплитуды  $A$  от медленного времени  $T_2$ . Это условие получается вполне аналогично условию (4.14) и имеет вид

$$\frac{\partial A}{\partial T_2} = \frac{i(y - 1)^2 k^4}{16(y + 1)^4 \omega_0} \cdot \frac{A}{(\omega_0^2 - 1)}. \quad (4.16)$$

Решение этого уравнения удобно привести в виде  $A = |A|e^{i\varphi}$ , где

$$|A| = \text{const}, \quad \varphi = \frac{1}{16\omega_0} \frac{(y - 1)^2 k^4}{(y + 1)^4 \omega_0^2 - 1} T_2 + \varphi_0. \quad (4.17)$$

Таким образом, зависимость (4.17) определяет поведение решения  $Z_0$  на временах порядка  $\frac{1}{\varepsilon^2}$ . Эволюция этого решения на медленных временах определяется смещением исходной частоты  $\omega_0$  в сторону уменьшения частот

$$\omega_0 \rightarrow \omega_0 - \frac{\varepsilon^2}{16\omega_0} \frac{(y - 1)^2}{(\omega_0^2 - 1)(y + 1)^2} k^2 \quad (4.18)$$

и появлению дисперсии  $\sim k^2$ . Следовательно, основным эффектом влияния осцилляций потока жидкости в случае, когда безразмерная частота  $\omega_0$  не кратна целому числу, сводится к смещению собственных частот в более низкочастотную область и появлению дисперсии.

Более интересный эффект появляется в резонансном случае, когда величина  $\omega_0$  близка к целому числу. Для простоты рассмотрим случай  $\omega_0 \approx 1$ . Используя представление  $\omega_0$  в виде ряда по параметру  $\varepsilon$  вида

$$\omega_0 = 1 + \varepsilon\delta_1 + \varepsilon^2\delta_2 + \dots, \quad (4.19)$$

получим снова модифицированную цепочку уравнений в разных порядках по  $\varepsilon$ :

$$\text{для } \varepsilon^0: \quad \frac{\partial^2 Z_0}{\partial T_0^2} + Z_0 = 0, \quad (4.20)$$

$$\text{для } \varepsilon^1: \quad \frac{\partial^2 Z_1}{\partial T_0^2} + Z_1 = -2 \frac{\partial^2 Z_0}{\partial T_0 \partial T_1} + \frac{(y-1)}{(y+1)^2} k^2 Z_0 \cos 2T_0 - \delta_1 Z_0, \quad (4.21)$$

$$\text{для } \varepsilon^2: \quad \frac{\partial^2 Z_2}{\partial T_0^2} + Z_2 = -2 \left[ \frac{\partial^2 Z_1}{\partial T_0 \partial T_1} + \frac{\partial^2 Z_0}{\partial T_0 \partial T_2} \right] - \frac{\partial^2 Z_0}{\partial T_1^2} - \delta_1 Z_1 - \delta_2 Y_0 + \frac{(y-1)}{(y+1)} k^2 Z_1 \cos 2T_1. \quad (4.22)$$

Решение уравнения (4.20), совпадающее с решением уравнения (4.10), не меняется и совпадает с решением (4.13). Однако зависимость амплитуды  $A$  от медленного времени в этом решении другая, так как секулярное условие, получаемое из (4.11), имеет вид

$$\frac{\partial A}{\partial T_1} + \frac{i(y-1)}{4(y+1)^2} k^2 A^* - i\delta_1 A = 0, \quad (4.23)$$

где  $*$  — комплексное сопряжение. Уравнение для  $A^*$  получается комплексным сопряжением уравнения (4.23). Представляя амплитуду в виде  $A(T_1) = A_R + iA_I$ , после несложных преобразований получаем уравнение для вещественной и мнимой частей амплитуды  $A$ :

$$\frac{dA_{R,I}}{dT_1^2} = \frac{1}{4} \left\{ \frac{1}{4} \left( \frac{(y-1)k^2}{(y+1)^2} \right)^2 - \delta_1^2 \right\} A_{R,I}. \quad (4.24)$$

В области значений параметров  $(\delta, \gamma)$ , при которых коэффициент в правой части строго отрицательный, решение (4.24) носит колебательный характер. В противном случае амплитуда  $A$  является растущей функцией времени. Физический механизм этой неустойчивости определяется параметрическим резонансом собственных колебаний трубы и частотой осцилляций потока жидкости. Область существования неустойчивости определяется условием

$$|\delta_1| \leq \frac{1}{2} (\gamma - 1) \frac{1}{\left(\delta - \frac{1}{2}\right) (\gamma + 1) + 1}. \quad (4.25)$$

Как видно из (4.25), условие параметрического резонанса существенным образом зависит от двух характерных параметров. В частности, от параметра  $\Delta = \left(\delta - \frac{1}{2}\right) (\gamma + 1)$ , значение которого является определяющим для критерия линейной неустойчивости. Необходимо отметить, что параметрический резонанс возможен в области параметров, при которых

линейная неустойчивость отсутствует. При приближении к области линейной неустойчивости (то есть  $\Delta \rightarrow 0$ ) величина  $|\delta_1|$  может принимать достаточно большие значения. Но в этом случае нарушается условие малости  $\delta_1$ , и, кроме того, область существования линейной неустойчивости отличается от параметрического резонанса исходными состояниями. Первый проявляется при стационарном потоке жидкости, а второй — в случае его временных осцилляций. Другим параметром, входящим в уравнение (4.25), является параметр  $(\gamma - 1) = \left(\frac{\rho_s}{\rho_0} - 1\right)$ , уменьшение которого сужает область параметрического резонанса. Решение уравнений (4.24) для вещественной и мнимой частей амплитуды  $A(T_1)$  в случае выполнения критерия (4.25) содержат решения, растущие по времени  $T_1$  с инкрементом

$$\Gamma = \frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{1}{2} \frac{\gamma - 1}{\left(\delta - \frac{1}{2}\right)(\gamma + 1) + 1} \right)^2 - \delta_1^2 \right\}^{1/2}. \quad (4.26)$$

Одним из источников периодических колебаний скорости потока может служить турбулентное течение жидкости, в котором присутствует широкий спектр частот. В частности, в нем представлены частоты, для которых выполняется соотношение  $\frac{\omega_0}{\omega} = n$  ( $n$  — произвольное целое число). В этом случае параметрический резонанс также имеет место, однако ширина резонансных областей с увеличением  $n$  быстро уменьшается. Также уменьшаются и значения показателя усиления колебаний в них.

## 5. Выводы

В работе предложена простая нелинейная модель, описывающая влияние потока жидкости на динамику труб, по которым она течет. Обнаружены важные эффекты, возникающие под действием потока. Получен режим линейной неустойчивости осцилляции труб и найден критерий такой неустойчивости под воздействием стационарного потока жидкости. Показано, что в области, где этот критерий не выполнен, могут нарастать колебания труб под воздействием малых периодических осцилляций стационарного потока жидкости. Физический механизм такой неустойчивости определяется параметрическим резонансом, критерий реализации которого получен в работе. Эти механизмы нарастания осцилляции труб и смещения их собственных частот существенны для многих технических установок. Особенно важно, что при нарастании таких осцилляций могут возникать критические нагрузки в местах крепления труб и приводить к их разрушению. Более детальный анализ величин таких нагрузок, возникающих при отражении волн, предполагается выполнить в последующей работе. Важно отметить, что в модели учтены наиболее общие свойства влияния потока жидкости. Эти свойства неизбежно должны учитываться в любой модели, описывающей влияние потока. Поэтому описанные выше эффекты качественно сохраняются при усложнении модели учетом многих других факторов. В частности, при выборе различных форм труб параметры значительно отличаются от анализируемого в работе случая прямолинейных труб, особенно при учете влияния диссипативных факторов, деформаций труб под воздействием внешних полей (например, сил тяготения). Учет всех этих факторов легко осуществить в рамках предложенной в работе модели, используя вариационный принцип Лагранжа.

## Список литературы

- [1] Тимошенко С. П. Колебания в инженерном деле. Москва: Наука, 1975. 575 с.
- [2] Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. Москва: Физматлит, 1963. 635 с.
- [3] Гринченко В. Т., Мелешко В. В. Гармонические колебания и волны в упругих телах. Киев: Наук. думка, 1981. 104 с.
- [4] Кольский Г. Волны напряжения в твердых телах. Москва: ИЛ, 1955. 192 с.
- [5] Mindlin R. D., McNiven H. D. Axially symmetric waves in elastic rods // J. Appl. Mech., 1960, vol. 27, pp. 145–151.
- [6] Пао У.-Н. Elastic waves in solids // J. Appl. Mech., 1983, vol. 50, no. 4b, pp. 1152–1164.
- [7] Волобуев А. Н. Течение жидкости в трубках с эластичными стенками // УФН, 1995, т. 165, № 2, с. 177–186.
- [8] Litvinov W. G. A problem of nonsteady flow of a nonlinear viscous fluid in a deformable pipe // Methods Funct. Anal. Topology, 1996, vol. 2, nos. 3–4, pp. 85–113.
- [9] Welander P. On the oscillatory instability of a differentially heated fluid loop // J. Fluid Mech., 1967, vol. 29, no. 1, pp. 17–30.
- [10] Найфе А. Методы возмущений. Москва: Мир, 1997. 455 с.
- [11] Ольховский И. И. Курс теоретической механики для физиков. Москва: Наука, 1970. 441 с.
- [12] Неголономные динамические системы: Интегрируемость, хаос, странные аттракторы: Сб. ст. / А. В. Борисов, И. С. Мамаев. Москва–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002. 328 с.
- [13] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика: В 10 тт.: Т. 7: Теория упругости. Изд. 5-е, стереотипное. Москва: Физматлит, 2003. 264 с.
- [14] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика: В 10 тт.: Т. 1: Механика. Изд. 5-е, стереотипное. Москва: Физматлит, 2004. 224 с.

## Dynamics of thin tubes under the influence of fluid flow

Victor P. Berezovoj<sup>1</sup>, Anatoly V. Tur<sup>2</sup>, Vladimir V. Yanovsky<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Akhiezer Institute for Theoretical Physics, National Science Center “Kharkov Institute of Physics and Technology”

Akademicheskay 1, Kharkov, 61108, Ukraine

<sup>2</sup>Université de Toulouse [UPS], CNRS, Institut de Recherche en Astrophysique et Planétologie  
9 avenue du Colonel Roche, BP 44346, 31028 Toulouse Cedex 4, France

<sup>3</sup>Institute for Single Crystals of NAS of Ukraine

Lenin Ave. 60, Kharkov, 61001, Ukraine

<sup>3</sup>V. N. Karazin Kharkov National University

Svobody Sq. 4, Kharkov, 61022, Ukraine

<sup>1</sup>berezovoj@kipt.kharkov.ua, <sup>2</sup>Anatoly.Tour@irap.omp.eu, <sup>3</sup>yanovsky@isc.kharkov.ua

Proposed simple model movements thin tubes under the influence of fluid flow. Was obtained a nonlinear equation for the string with the flow. Demonstrated the possibility of tube vibrations under the influence of fluid flow and criterion was found linear instability at a constant flow rate. In the condition where the linear instability conditions are violated the possibility of oscillations detected during the presence of small periodic oscillation of flow.

MSC 2010: 37A60, 65P20

Keywords: string, fluid flow, the equation of motion, instability, parametric resonance

Received March 20, 2014, accepted March 31, 2014

Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2014, vol. 10, no. 2, pp. 183–194 (Russian)

