Нелинейная динамика. 2014. Т. 10. № 2. С. 209–212.
Полнотекстовая версия в свободном доступе
http://nd.ics.org.ru

УДК: 517.925
MSC 2010: 37J35, 70H06

Об одном обобщении систем типа Калоджеро

И. А. Бизяев

В работе рассмотрена система трех тел на прямой в потенциальном поле, предложенном Цыгановым. Показана интегрируемость этой системы по Лиувиллю, выполнена редукция и разделение переменных.

Ключевые слова: системы Калоджеро, редукция, интегрируемые системы, задача Якоби

Возросший интерес к системам Калоджеро [6] и их обобщениям в последнее время связан с проблемами интегрируемости и суперинтегрируемости [7–9]. В этих работах, как правило, рассмотрены потенциалы достаточно частного вида. Здесь же рассмотрен более общий вид потенциала, при котором сохраняется интегрируемость системы трех тел на прямой.

Уравнения движения и первые интегралы

Рассмотрим задачу о движении трех тел в $\mathbb{R}$ (на прямой) в потенциальном поле вида

$$U = \frac{1}{(q_1-q_2)^2}u_{12}\left(\frac{q_2-q_3}{q_2-q_1}\right) + \frac{1}{(q_1-q_3)^2}u_{13}\left(\frac{q_3-q_1}{q_3-q_1}\right) + \frac{1}{(q_2-q_3)^2}u_{23}\left(\frac{q_3-q_1}{q_3-q_2}\right), \qquad (1)$$

здесь и далее q_i, p_i, m_i — положение, импульс и масса i-го тела ($i = 1, 2, 3$). Как видим, потенциал U является однородной функцией степени однородности (-2) и зависит только

Получено 3 апреля 2014 года
После доработки 12 мая 2014 года

Работа выполнена при при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 13-01-12462-офи_м.

Бизяев Иван Алексеевич
bizaev_90@mail.ru
Удмуртский государственный университет
426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, д. 1

от взаимных расстояний между телами. Уравнения движения имеют вид

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad i = 1, 2, 3,$$
$$H = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\frac{p_i^2}{m_i} + U. \tag{2}$$

В случае если u_{12}, u_{13}, u_{12} являются константами, мы получаем известную систему Якоби [4]. Другие частные случаи (2) рассмотрены в работах [2, 10].

Уравнения (2) кроме энергии сохраняют полный импульс всей системы

$$F_1 = \sum_{i=1}^{3} p_i$$

и сохраняют еще один дополнительный интеграл

$$F_2 = \left(\sum_{i=1}^{3} q_i p_i\right)^2 - 2H\sum_{i=1}^{3} m_i q_i^2.$$

Следует отметить, что интеграл F_2 сохраняется и в более общем случае, когда потенциальное поле зависит не только от взаимных расстояний [3]. Вычислив коммутатор F_1 и F_2, получаем третий дополнительный интеграл:

$$F_3 = 2\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{p_i^2}{m_i}\sum_{j\neq i}^{3} m_j q_j - q_i p_i \sum_{j\neq i}^{3} p_j\right) + 4\sum_{i=1}^{3} m_i q_i U.$$

Скобка Пуассона интегралов в этом случае имеет вид

$$\{F_1, F_2\} = F_3, \quad \{F_2, F_3\} = 2F_1^2 - 4\sum_{i=1}^{3} m_i H, \quad \{F_2, F_3\} = -4F_1F_2$$

(приведены только ненулевые). Как видим, получившаяся алгебра интегралов является квадратичной. Ранг получившейся пуассоновой структуры равен 2, и, следовательно, данная алгебра обладает двумя центральными элементами:

$$C_1 = H, \quad C_2 = F_3^2 - 4F_2\left(F_1^2 - 2H\sum_{i=1}^{3} m_i\right). \tag{3}$$

Таким образом, приходим к следующему результату:

Теорема 1. *Система уравнений (2) допускает три интеграла движения, находящихся в инволюции, и, следовательно, интегрируема по Лиувиллю.*

Отметим, что система (2), хоть и обладает избыточным набором интегралов, но в общем случае не является максимально суперинтегрируемой. Поэтому открытым остается вопрос о том, при каких функциях u_{12}, u_{13}, u_{12} все траектории замкнуты.

Редукция к сфере S^2

Далее. выполнив редукцию системы (2), предложенную в работе [1], можно получить интегрируемую систему на сфере. Для этого в уравнения (2) введем новые переменные $\boldsymbol{M}, \boldsymbol{\gamma}$:

$$\gamma_i = \sqrt{\frac{m_i}{I}} q_i, \quad M_i = \varepsilon_{ijk} \sqrt{m_j} q_j \frac{p_k}{\sqrt{m_k}}, \quad I = \sum_{i=1}^{3} m_i q_i^2.$$

После замены времени

$$dt = I d\tau$$

получим уравнения, описывающие движение материальной точки по двумерной сфере S^2, с гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2}\boldsymbol{M}^2 + V,$$

$$V = \frac{1}{(s_2 - s_1)^2} u_1 \left(\frac{s_3 - s_2}{s_2 - s_1}\right) + \frac{1}{(s_3 - s_2)^2} u_2 \left(\frac{s_1 - s_3}{s_2 - s_3}\right), \quad s_i = \frac{\gamma_i}{\sqrt{m_i}}, \quad i = 1, 2, 3,$$

и скобкой Ли–Пуассона

$$\{M_i, M_j\} = -\varepsilon_{ijk} M_k, \quad \{M_i, \gamma_j\} = -\varepsilon_{ijk} \gamma_k, \quad \{\gamma_i, \gamma_j\} = 0,$$

являющейся вырожденной и обладающей двумя функциями Казимира, которые в нашем случае имеют вид $(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{\gamma}) = 0$, $\boldsymbol{\gamma}^2 = 1$. Дополнительный интеграл представляется в форме:

$$F = \left(\sum_{i=1}^{3} \sqrt{m_i} M_i\right)^2 + \left(\left(\sum_{i=1}^{3} \sqrt{m_i} \gamma_i\right)^2 - \sum_{i=1}^{3} m_i \sum_{i=1}^{3} \gamma_i^2\right) V.$$

Разделение переменных

Функция Лагранжа для рассматриваемой системы имеет вид

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3} m_i \dot{q}_i^2 - U.$$

Далее перейдем к координатам Якоби [5]:

$$R = \frac{m_1 q_1 + m_2 q_2 + m_3 q_3}{m_1 + m_2 + m_3},$$
$$x_1 = q_1 - \frac{m_2 q_2 + m_3 q_3}{m_2 + m_3},$$
$$x_2 = q_2 - q_3.$$

Кинетическая энергия в новых переменных примет вид

$$T = \frac{1}{2} M \dot{R}^2 + \frac{1}{2} M_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} M_2 \dot{x}_2^2,$$

$$M = m_1 + m_2 + m_3, \quad M_1 = \frac{m_1(m_2 + m_3)}{m_1 + m_2 + m_3}, \quad M_2 = \frac{m_2 m_3}{m_2 + m_3},$$

между тем потенциальная энергия не зависит от R. Введем далее полярные координаты r, φ на плоскости (x_1, x_2):

$$x_1 = \sqrt{M_1} r \cos\varphi, \quad x_2 = \sqrt{M_2} r \sin\varphi,$$

а затем перейдем к каноническим переменным в системе центра масс ($\dot{R} = 0$)

$$H = \frac{1}{2}p_r^2 + \frac{1}{2}\frac{p_\varphi^2}{r^2} + \frac{V(\varphi)}{r^2}, \tag{4}$$

где $V(\varphi)$ вследствие громоздкости не приведена. Как видим, в системе (4) переменные разделяются.

Список литературы

[1] Borisov A. V., Kilin A. A., Mamaev I. S. Multiparticle systems: The algebra of integrals and integrable cases // Regul. Chaotic Dyn., 2009, vol. 14, no. 1, pp. 18–41. (*См. также:* Борисов А. В., Килин А. А., Мамаев И. С. Многочастичные системы: Алгебра интегралов и интегрируемые случаи // Нелинейная динамика, 2009, т. 5, № 1, с. 53–82.)

[2] Tsiganov A. V. On a trivial family of noncommutative integrable systems // SIGMA Symmetry Integrability Geom. Methods Appl., 2013, vol. 9, 015, 13 pp.

[3] Albouy A., Chenciner A. Le problème des n corps et les distances mutuelles // Invent. Math., 1998, vol. 131, no. 1, pp. 151–184.

[4] Якоби К. Лекции по динамике. Москва – Ленинград: ОНТИ, 1936. 272 с.

[5] Борисов А. В., Мамаев И. С. Пуассоновы структуры и алгебры Ли в гамильтоновой механике. Ижевск: УдГУ, 1999. 464 с.

[6] Calogero F. Solution of the one-dimensional N-body problems with quadratic and/or inversely quadratic pair potentials // J. Math. Phys., 1971, vol. 12, pp. 419–436.

[7] Bizyaev I. A., Borisov A. V., Mamaev I. S. Superintegrable generalizations of the Kepler and Hook problems // Regul. Chaotic Dyn., 2014, vol. 19, no. 3, pp. 415–434.

[8] Gonera C. On the superintegrability of Calogero – Moser – Sutherland model // J. Phys. A, 1998, vol. 31, no. 19, pp. 4465–4472.

[9] Ranada M. F. Superintegrability of the Calogero – Moser system: Constants of motion, master symmetries and time-dependent symmetries // J. Math. Phys., 1999, vol. 40, pp. 236–247.

[10] Grigorev Yu. A., Tsiganov A. V. Deformations of the Poisson brackets and the Kowalevski top. arXiv:1310.8032 (2013).

On a generalization of systems of Calogero type

Ivan A. Bizyaev

Udmurt State University
Universitetskaya 1, Izhevsk, 426034, Russia
bizaev_90@mail.ru

This paper is concerned with a three-body system on a straight line in a potential field proposed by Tsiganov. The Liouville integrability of this system is shown. Reduction and separation of variables are performed.

MSC 2010: 37J35, 70H06
Keywords: Calogero systems, reduction, integrable systems, Jacobi problem

Received April 3, 2014, accepted May 12, 2014
Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2014, vol. 10, no. 2, pp. 209–212 (Russian)