



УДК: 517.9

MSC 2010: 37L30,37E99

Квазипериодическая динамика трех связанных логистических отображений

И. С. Дементьева, А. П. Кузнецов, А. В. Савин, Ю. В. Седова

Рассмотрена система трех линейно связанных логистических отображений. Обсуждается устройство плоскости параметров (величина связи — параметр удвоений периода). Подобрана конфигурация связи и значения параметров, для которых оказываются возможными режимы трехчастотной квазипериодичности. Обсуждаются бифуркации, связанные с такими режимами.

Ключевые слова: квазипериодические колебания, инвариантные торы, бифуркации

Получено 26 марта 2014 года

После доработки 31 марта 2014 года

Работа поддержана грантом Президента РФ поддержки ведущих научных школ (НШ-1726.2014.2) и РФФИ (проект 14-02-31064).

Дементьева Ирина Сергеевна

irina-demen@mail.ru

Савин Алексей Владимирович

savina@info.sgu.ru

Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского

410012, Россия, г. Саратов, ул. Астраханская, д. 83

Кузнецов Александр Петрович

alkuz@rambler.ru

Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского

410012, Россия, г. Саратов, ул. Астраханская, д. 83

Саратовский филиал Института радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН

410019, Россия, г. Саратов, ул. Зеленая, д. 38

Седова Юлия Викторовна

sedovayv@rambler.ru

Саратовский филиал Института радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН

410019, Россия, г. Саратов, ул. Зеленая, д. 38

1. Введение

Связанные логистические отображения представляют собой популярную модель нелинейной динамики, демонстрирующую широкий спектр сложных колебательных режимов [1, 2]. Ее значение обусловлено тем, что логистическое отображение иллюстрирует классический сценарий перехода к хаосу через удвоения периода [1–6]. Благодаря универсальности Фейгенбаума, многие результаты распространяются на широкий класс как модельных систем, так и реалистичных физических, биофизических, химических и других примеров.

Для двух взаимодействующих элементов устройство пространства параметров обсуждается в [7–9]. Обоснование свойств универсальности двух связанных систем основано на ренормгрупповом анализе и представлено в [7, 8, 10–12]. Один из важных результатов состоит в возможности двух существенно разных типов связи: диссипативного и инерционного. При построении эмпирических моделей первый случай может быть представлен квадратичной связью, а второй — линейной.¹ Проблема классификации типов колебаний и мультистабильности различных режимов обсуждается в [13]. В [14, 15] анализируется устройство бассейнов притяжения аттракторов в системе. Система связанных логистических отображений также является одной из популярных моделей в теории хаотической синхронизации [1, 2, 16–18].

В связанных системах наряду с удвоениями периода и хаосом оказывается возможной и квазипериодическая динамика². Проблема квазипериодических колебаний и механизмы их возникновения обсуждаются в [19, 20]. Случай неидентичных по управляющему параметру и параметру связи систем рассмотрен в [21]. Бифуркация Неймарка–Сакера, ассоциирующаяся с возникновением квазипериодичности, обсуждается в [9, 22, 23].

Весьма привлекательной является идея использовать модель связанных логистических отображений для продвижения в направлении увеличения размерности квазипериодических колебаний, то есть размерности наблюдаемого инвариантного тора. Интересной в этом плане является работа [24]. Рассмотрены два отображения с линейной связью с внешним квазипериодическим воздействием. Благодаря этому становится возможной не только двух-, но и трехчастотная квазипериодичность. Авторы обсуждают возможные варианты разрушения трехчастотных торов, однако рассмотрение ограничивается классом неавтономных систем.

Логичным шагом является переход к системе из трех (и более) логистических отображений. Задача о трех связанных логистических отображениях исследована гораздо меньше, хотя она представляется достаточно естественным развитием модели по пути увеличения числа взаимодействующих мод. Мультистабильность в системе из трех отображений обсуждается в [25] (авторы ограничились случаем диссипативной связи). Система с квадратичной связью исследована в [18], а с линейной — в [28], однако авторов интересовали проблемы хаотической синхронизации. В современном контексте задач о «циклическом хаосе» система трех логистических отображений появляется в работе [27]. Можно отметить работу [28], посвященную трем отображениям с квадратичной связью, но она содержит очень мало результатов и лишь однопараметрический анализ.

Наиболее полно проблема устройства пространства параметров в системе с линейной связью была поставлена и обсуждена в [29]. Однако авторы, в основном, рассматривают переход от хаоса к гиперхаосу. Область квазипериодических колебаний они выделяют как единую, не выявляя двух- и трехчастотную квазипериодичность.

¹Хотя на самом деле при этом имеется некоторая комбинация диссипативной и инерционной связи.

²Наиболее характерной квазипериодичность оказывается для систем с линейной связью.

В настоящей работе мы обсудим систему из трех связанных в кольцо логистических отображений, продемонстрируем возможность трехчастотной квазипериодичности и обсудим бифуркации инвариантных торов. Оказывается, что области трехчастотных торов очень малы и реализуются в узких диапазонах изменения параметров. В этом наблюдается заметное отличие от случая двух элементов, для которых двухчастотная квазипериодичность достаточно типична.

2. Результаты

Рассмотрим систему трех замкнутых в кольцо логистических отображений с однонаправленной связью

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= 1 - \lambda x_n^2 + \varepsilon(x_n - y_n), \\ y_{n+1} &= 1 - \lambda y_n^2 + \varepsilon(y_n - z_n), \\ z_{n+1} &= 1 - \lambda z_n^2 + \varepsilon(z_n - x_n). \end{aligned} \tag{2.1}$$

Для визуализации различных типов режимов используем метод карт ляпуновских показателей [30–34]. В этом случае в каждой точке плоскости параметров вычисляется спектр ляпуновских показателей, а затем плоскость окрашивается в разные цвета³ в соответствии с сигнатурой спектра. Такая карта для системы (2.1) показана на рисунке 1. Разными цветами обозначены: периодические режимы P (все показатели отрицательные), двухчастотные квазипериодические режимы T₂ (один нулевой показатель), трехчастотные квазипериодические режимы T₃ (два нулевых показателя), режимы хаоса C (один положительный показатель) и гиперхаоса HC (два положительных показателя). Цифрами на карте указаны области существования циклов различных периодов.

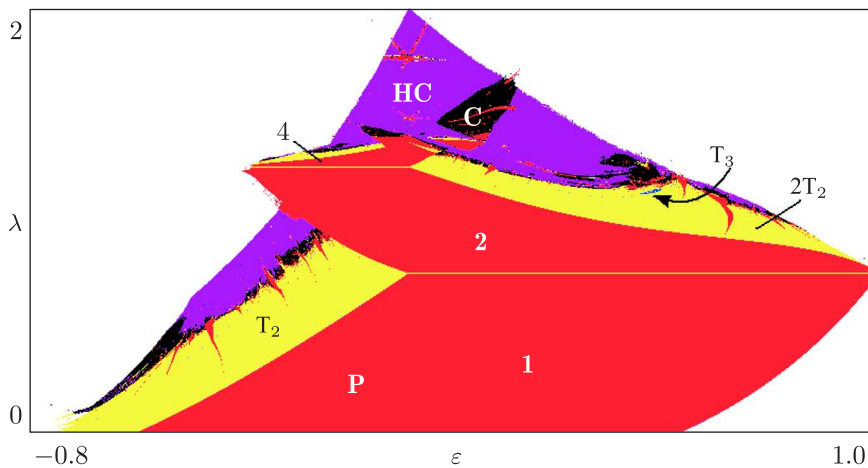


Рис. 1. Карта ляпуновских показателей системы (2.1).

Общий вид плоскости параметров (ε, λ) на рисунке 1 с точки зрения наличия периодических и квазипериодических режимов в качественном плане близок к случаю двух подсистем. Можно видеть классический фейгенбаумовский каскад удвоений вдоль линии нулевой связи $\varepsilon = 0$, накапливающийся к критической точке $\lambda_c = 1.4011552\dots$

³Для читателя печатной версии: здесь и далее полноцветные версии рисунков см. в эл. версии статьи — <http://nd.ics.org.ru/doc/r/pdf/2470/0>

Рассмотрим область периодических режимов периода 2. Она ограничена сверху линией удвоения периода, а снизу — линией предыдущего удвоения. Правую границу образует линия бифуркации Неймарка – Сакера возникновения двухчастотной квазипериодичности $2T_2$ на базе цикла периода 2. Однако (и это даже может показаться отчасти парадоксальным) области трехчастотной квазипериодичности на рисунке 1 почти не заметны⁴. Тем не менее, имеется остров таких режимов, показанный стрелкой и обозначенный как T_3 .

На рисунке 2 показана карта ляпуновских показателей этой области и ее окрестности в достаточно крупном масштабе. Она выявляет области периодических режимов P , имеющие сложную форму и не образующие характерных структур в форме языков Арнольда. Наблюдается область $2T_2$, внутри которой система демонстрирует двухкомпонентную инвариантную кривую (тор). В левой части карты при увеличении параметра λ и переходе в область $4T_2$ наблюдается бифуркация удвоения этого тора (линия DT). Линию DT бифуркации удвоения тора можно видеть на ляпуновской карте в виде «пробивающихся» синих точек. Причина состоит в том, что точно на этой линии один из ляпуновских показателей обращается в нуль [35].

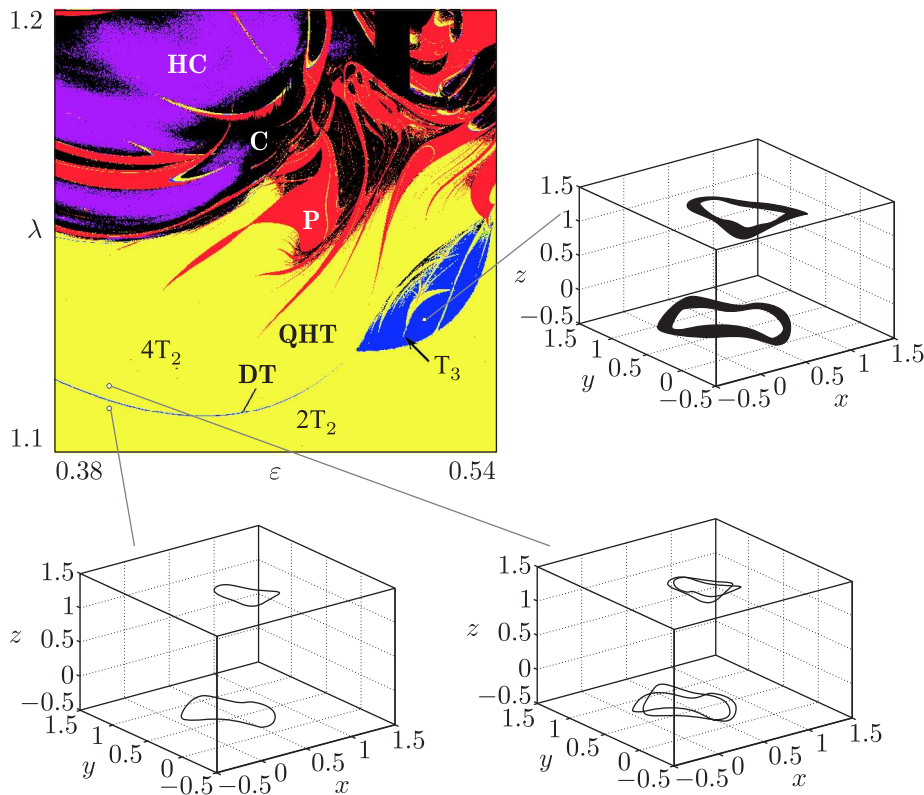


Рис. 2. Увеличенный фрагмент карты ляпуновских показателей (рис. 1) и примеры фазовых портретов.

В правой части карты области $2T_2$ и $4T_2$ разделены островом трехчастотной квазипериодичности T_3 . Обсудим вопрос о типе бифуркации, отвечающей за возникновение трехчастотной квазипериодичности с ростом параметра удвоений λ . Для этого обратимся к ри-

⁴Отметим, что для двусторонней связи как в цепочке, так и в кольце трехчастотная квазипериодичность не обнаруживается. Таким образом, чтобы получить динамику такого типа, приходится подбирать не только значения параметров, но и геометрию системы.

сунку 3, на котором показаны графики ляпуновских показателей вдоль линии $\varepsilon = \text{const}$. Графики иллюстрируют механизмы перехода между торами разной размерности. При малом значении управляющего параметра реализуется двухчастотный тор $2T_2$. В точке QH возникает трехчастотный тор T_3 . В этом случае первый показатель все время остается равным нулю ($\Lambda_1 = 0$). Два других показателя до порога бифуркации совпадают ($\Lambda_2 = \Lambda_3$). В точке бифуркации оба они становятся нулевыми. После бифуркации один показатель остается нулевым ($\Lambda_2 = 0$), а второй становится отрицательным ($\Lambda_3 < 0$). Такое поведение позволяет идентифицировать данную бифуркацию как квазипериодическую бифуркацию Хопфа [35]. Подчеркнем, что это мягкая бифуркация рождения трехчастотного тора.

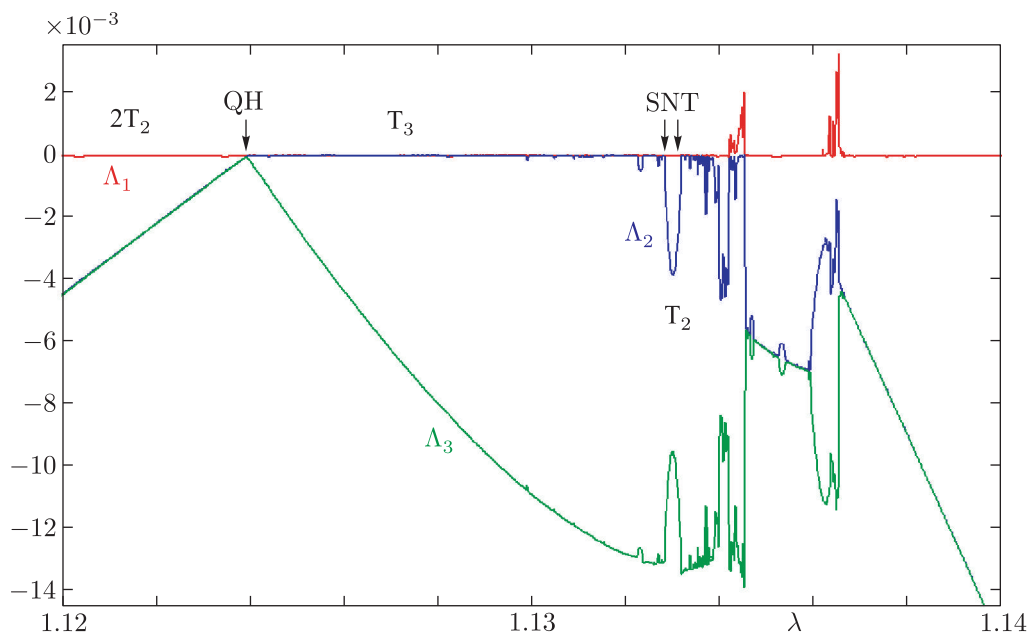


Рис. 3. Зависимости ляпуновских показателей от управляющего параметра λ ($\varepsilon = 0.503$). QH — квазипериодическая бифуркация Хопфа, SNT — седло-узловая бифуркация торов.

Следует отметить возможность резонансных двухчастотных режимов, которым отвечает система узких интервалов внутри трехчастотной области. Самое широкое резонансное окно такого типа отмечено на рисунке 3 двумя стрелками. Можно сказать, что эти двухчастотные режимы возникают на «поверхности» трехчастотного тора. Их границы отвечают другим, седло-узловым бифуркациям двухчастотных торов SNT [35]. При этом график одного из показателей демонстрирует характерную «яму» (рис. 3). Таких окон очень много, и их количество возрастает при увеличении управляющего параметра λ . С ростом величины λ также возникает и хаос с положительным показателем Ляпунова ($\Lambda_1 > 0$).

При двухпараметрическом анализе квазипериодическая бифуркация QH отвечает нижней границе области трехчастотных режимов на рисунке 2, а резонансные области двухчастотных режимов образуют характерные языки. С учетом проведенного обсуждения можно сделать вывод о возможности новой квазипериодической бифуркации коразмерности два QHT. В этой точке сходятся линии удвоения торов DT и квазипериодической бифуркации Хопфа QH.

Модифицируем модель так, чтобы области трехчастотной квазипериодичности стали более значительными, а также введем дополнительный параметр, который позволит проил-

люстрировать изменение их внутреннего устройства. Один из возможных вариантов состоит в выборе системы в виде кольца из трех элементов, когда связь содержит как взаимную, так и одностороннюю компоненты:

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= 1 - \lambda x_n^2 + \varepsilon(2x_n - y_n - z_n) - \delta(x_n - y_n), \\y_{n+1} &= 1 - \lambda y_n^2 + \varepsilon(2y_n - x_n - z_n) - \delta(y_n - z_n), \\z_{n+1} &= 1 - \lambda z_n^2 + \varepsilon(2z_n - x_n - y_n) - \delta(z_n - x_n).\end{aligned}\tag{2.2}$$

Здесь ε — регулируемый параметр двусторонней связи, δ — постоянная компонента односторонней связи. Общий вид плоскости (ε, λ) для $\delta = 0.1$ показан на рисунке 4.

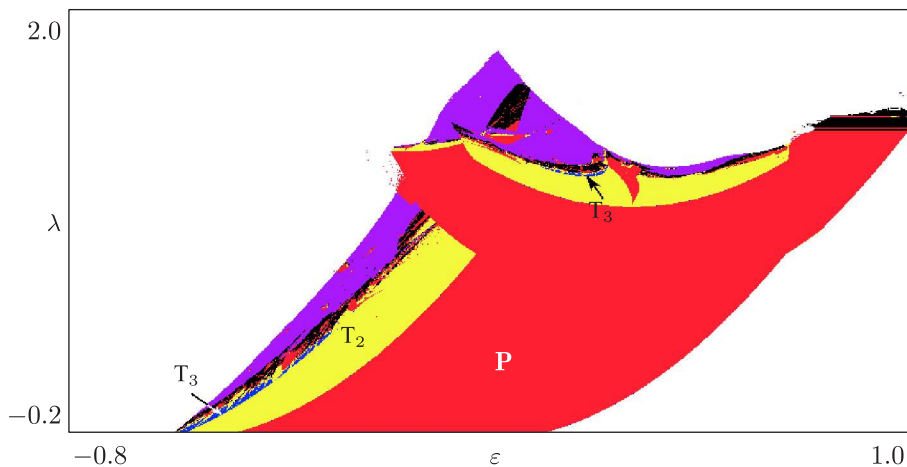


Рис. 4. Карта ляпуновских показателей системы (2.2), $\delta = 0.1$.

Теперь трехчастотные режимы достаточно заметны. Они возникают на базе каждой области двухчастотной квазипериодичности при увеличении параметра удвоений λ .

Увеличенный фрагмент карты для $\delta = 0.1$ показан на рисунке 5а. Можно видеть характерную систему языков резонансных двухчастотных торов, погруженных в область трехчастотных режимов. При этом увеличение параметра удвоений λ приводит к расширению языков и к возможности хаоса. На рисунке 5б показан случай $\delta = 0.2$. Теперь в левой части рисунка визуализируется характерная резонансная паутина Арнольда [30, 36]: система тонких двухчастотных полос, погруженных в трехчастотную область. На пересечении этих полос наблюдаются периодические режимы — точные резонансы. При увеличении параметра до значения $\delta = 0.3$ картина также модифицируется (рис. 5с).

Отметим, что серия рисунков 5 в определенной мере иллюстрирует важное свойство квазипериодической бифуркации Хопфа рождения трехчастотного тора: характерная картина режимов зависит не от двух параметров, как для бифуркации Неймарка – Сакера, а от трех.

На рисунке 6 приведены фазовые портреты торов для двух языков двухчастотных режимов рисунка 5а. Можно видеть, что это сложные инвариантные кривые разной формы, возникшие на базе двухкомпонентной инвариантной кривой. При этом рисунок 6а состоит из множества изолированных замкнутых кривых, лежащих на поверхности тора. Рисунок 6б отвечает двум замкнутым линиям сложной формы, также лежащим на поверхности тора.

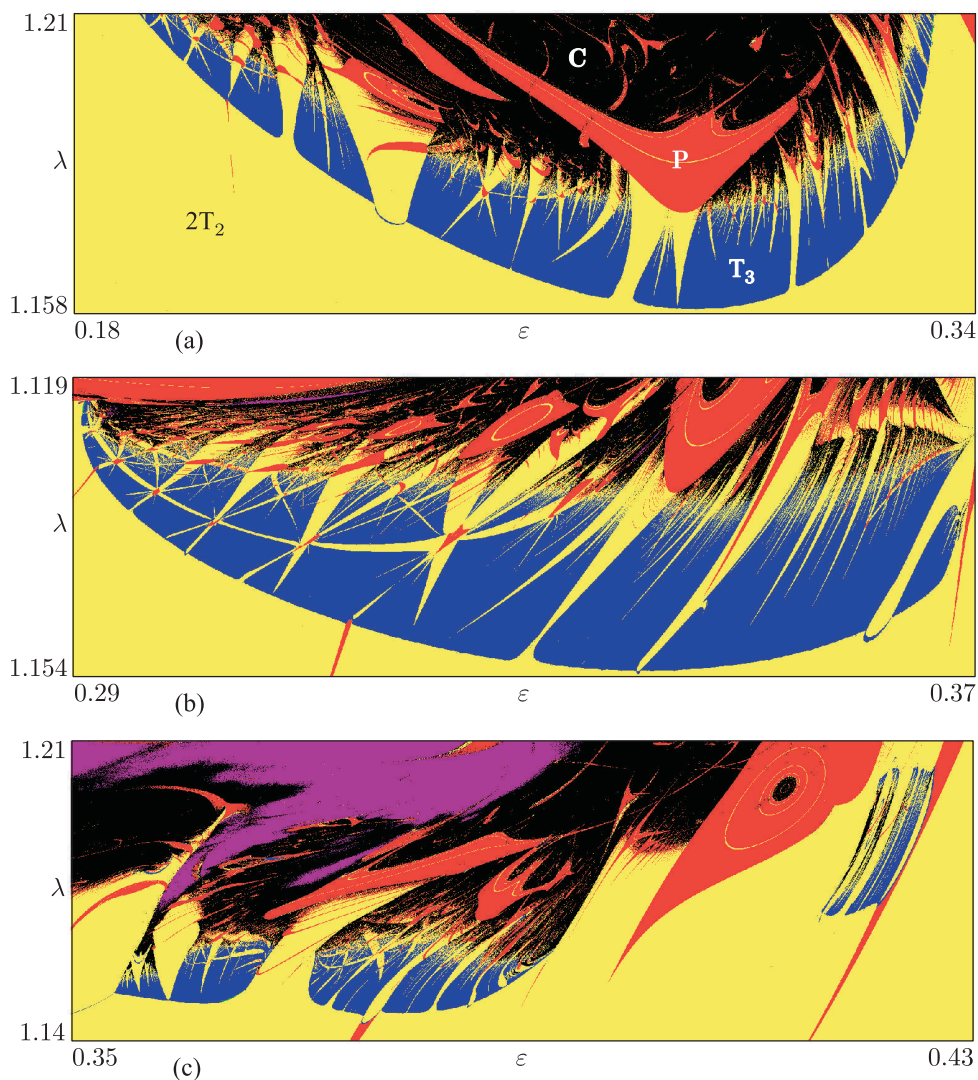


Рис. 5. Увеличенные фрагменты карты ляпуновских показателей системы (2.2): (a) $\delta = 0.1$, (b) $\delta = 0.2$, (c) $\delta = 0.3$.

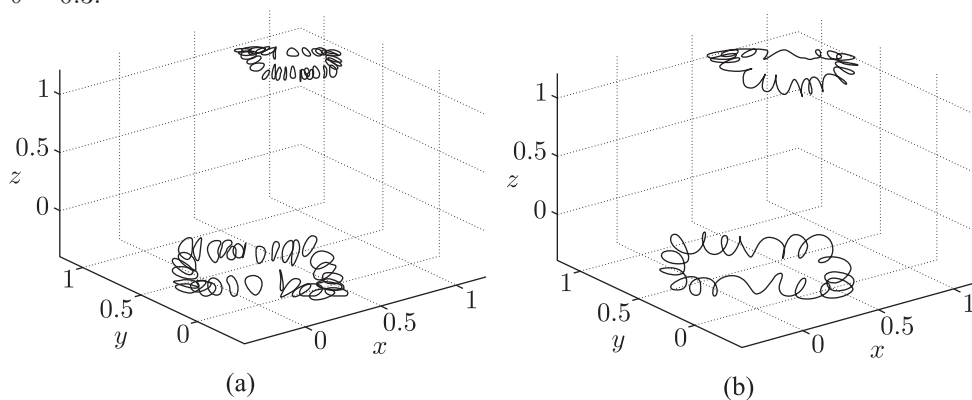


Рис. 6. Фазовые портреты резонансных двухчастотных торов системы (2.2) для $\delta = 0.1$: (a) $\varepsilon = 0.209$, $\lambda = 1.2$, (b) $\varepsilon = 0.279$, $\lambda = 1.165$.

3. Заключение

В системе трех линейно связанных логистических отображений трехчастотная квазипериодичность возможна, но реализуется в узких областях изменения параметров. Ее можно реализовать подбором конфигурации связи, которая не должна быть только взаимной. Нижней границей трехчастотной области по параметру удвоений служит мягкая квазипериодическая бифуркация Хопфа. Внутри области трехчастотной квазипериодичности могут наблюдаться структуры типа резонансной паутины Арнольда. Вблизи верхней границы наблюдается перекрытие языков резонансных двухчастотных торов и возникновение хаоса. Возможна новая ситуация квазипериодической бифуркации коразмерности два, для которой характерно слияние линии квазипериодической бифуркации Хопфа и линии удвоения торов.

Список литературы

- [1] Anishchenko V. S., Astakhov V. V., Neiman A. B., Vadivasova T. E., Schimansky-Geier L. Nonlinear dynamics of chaotic and stochastic systems: Tutorial and modern developments. 2nd ed. (Springer Series in Synergetics.) Berlin: Springer, 2007. 446 pp.
- [2] Mosekilde E., Maistrenko Yu., Postnov D. Chaotic synchronization: Applications to living systems. (World Sci. Ser. Nonlinear Sci. Ser. A Monogr. Treatises, vol. 42.) River Edge, N.J.: World Sci. Publ., 2002. 428 pp.
- [3] Шустер Г. Детерминированный хаос. Москва: Мир, 1988. 240 с.
- [4] Берже П., Помо И., Видаль К. Порядок в хаосе: О детерминистском подходе к турбулентности. Москва: Мир, 1991. 368 с.
- [5] Кузнецов С. П. Динамический хаос. Москва: Физматлит, 2001. 296 с.
- [6] Кузнецов А. П., Кузнецов С. П. Критическая динамика одномерных отображений: Ч. 1: Сценарий Фейгенбаума // Изв. вузов. ПНД, 1993, т. 1, № 1, с. 15–32.
- [7] Кузнецов С. П. Универсальность и подобие в поведении связанных систем Фейгенбаума // Изв. вузов. Радиофизика, 1985, т. 28, № 8, с. 991–1007.
- [8] Kook H., Ling F. H., Schmidt G. Universal behavior of coupled nonlinear systems // Phys. Rev. A, 1991, vol. 43, no. 6, pp. 2700–2708.
- [9] Кузнецов А. П., Седова Ю. В., Сатаев И. Р. Устройство пространства управляющих параметров неидентичных связанных систем с удвоениями периода // Изв. вузов. ПНД, 2004, т. 12, № 5, с. 46–57.
- [10] Kim S.-Y., Kook H. Critical behavior in coupled nonlinear systems // Phys. Rev. A, 1992, vol. 46, no. 8, pp. 4467–4470.
- [11] Kim S.-Y., Kook H. Period doubling in coupled maps // Phys. Rev. E, 1993, vol. 48, no. 2, pp. 785–799.
- [12] Кузнецов А. П., Кузнецов С. П., Седова Ю. В. О свойствах скейлинга идентичных связанных логистических отображений с двумя типами связи без шума и под воздействием шума // Изв. вузов. ПНД, 2006, т. 14, № 5, с. 94–109.
- [13] Астахов В. В., Безручко Б. П., Ерастова Е. Н., Селезнев Е. П. Виды колебаний и их эволюция в диссипативно связанных фейгенбаумовских системах // ЖТФ, 1990, т. 60, № 10, с. 19–26.
- [14] Безручко Б. П., Смирнов Д. В., Селезнев Е. П. Эволюция бассейнов притяжения аттракторов симметрично связанных систем с удвоением периода // Письма в ЖТФ, 1995, т. 21, № 8, с. 12–17.
- [15] Безручко Б. П., Селезнев Е. П. Бассейны притяжения хаотических аттракторов в связанных системах с удвоением периода // Письма в ЖТФ, 1997, т. 23, № 4, с. 40–46.

- [16] Astakhov V., Shabunin A., Kapitaniak T., Anishchenko V. Loss of chaos synchronization through the sequence of bifurcations of saddle periodic orbits // *Phys. Rev. Lett.*, 1997, vol. 79, no. 6, pp. 1014–1017.
- [17] Beims M. W., Rech P. C., Gallas J. A. C. Fractal and riddled basins: Arithmetic signatures in the parameter space of two coupled quadratic maps // *Phys. A*, 2001, vol. 295, nos. 1–2, pp. 276–279.
- [18] Reick C., Mosekilde E. Emergence of quasiperiodicity in symmetrically coupled, identical period-doubling systems // *Phys. Rev. E*, 1995, vol. 52, no. 2, pp. 1418–1435.
- [19] Ерастова Е. Н., Кузнецов С. П. О механизме возникновения квазипериодических колебаний в связанных системах Фейгенбаума // *ЖТФ*, 1991, т. 61, № 2, с. 13–20.
- [20] Satoii K., Aihara T. Numerical study on a coupled-logistic map as a simple model for a predator-prey system // *J. Phys. Soc. Japan*, 1990, vol. 59, no. 4, pp. 1184–1198.
- [21] Rech P. C., Beims M. W., Gallas J. A. C. Naimark–Sacker bifurcations in linearly coupled quadratic maps // *Phys. A*, 2004, vol. 342, no. 1, pp. 351–355.
- [22] Rech P. C., Beims M. W., Gallas J. A. C. Generation of quasiperiodic oscillations in pairs of coupled maps // *Chaos Solitons Fractals*, 2007, vol. 33, no. 4, pp. 1394–1410.
- [23] Anishchenko V. S., Safonova M. A., Feudel U., Kurths J. Bifurcations and transition to chaos through three-dimensional tori // *Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg.*, 1994, vol. 4, no. 3, pp. 595–607.
- [24] Nikolaev S. M., Shabunin A. V., Astakhov V. V. Multistability of partially synchronous regimes in a system of three coupled logistic maps // *Proc. Internat. Conf. «Physics and Control» (St. Petersburg, Russia, Aug 20–22)*, pp. 169–173.
- [25] Taborov A. V., Maistrenko Yu. L., Mosekilde E. Partial synchronization in a system of coupled logistic maps // *Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg.*, 2000, vol. 10, no. 5, pp. 1051–1066.
- [26] Tsuruda H., Shirahama H., Fukushima K., Nagadome M., Inoue M. Chaotic transition in a three-coupled phase-locked loop system // *Chaos*, 2001, vol. 11, no. 2, pp. 410–416.
- [27] Levanova T. A., Osipov G. V., Pikovsky A. Coherence properties of cycling chaos // *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, 2014, vol. 19, no. 8, pp. 2734–2739.
- [28] Rech P. C. A coupling of three quadratic maps // *Chaos Solitons Fractals*, 2009, vol. 41, no. 4, pp. 1949–1952.
- [29] Xavier J., Rech P. Chaos and hyperchaos in a symmetric coupling of three quadratic maps // *J. Comp. Int. Sci.*, 2010, vol. 1, no. 3, pp. 225–231.
- [30] Baesens C., Guckenheimer J., Kim S., MacKay R. S. Three coupled oscillators: Mode locking, global bifurcations and toroidal chaos // *Phys. D*, 1991, vol. 49, no. 3, pp. 387–475.
- [31] Кузнецов А. П., Поздняков М. В., Седова Ю. В. Связанные универсальные отображения с бифуркацией Неймарка–Сакера // *Нелинейная динамика*, 2012, т. 8, № 3, с. 473–482.
- [32] Emelianova Yu. P., Kuznetsov A. P., Sataev I. R., Turukina L. V. Synchronization and multi-frequency oscillations in the low-dimensional chain of the self-oscillators // *Phys. D*, 2013, vol. 244, no. 1, pp. 36–49.
- [33] Kuznetsov A. P., Kuznetsov S. P., Sataev I. R., Turukina L. V. About Landau–Hopf scenario in a system of coupled self-oscillators // *Phys. Lett. A*, 2013, vol. 377, nos. 45–48, pp. 3291–3295.
- [34] Emelianova Yu. P., Kuznetsov A. P., Turukina L. V., Sataev I. R., Chernyshov N. Yu. A structure of the oscillation frequencies parameter space for the system of dissipatively coupled oscillators // *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, 2014, vol. 19, no. 4, pp. 1203–1212.
- [35] Broer H., Simó C., Vitolo R. Quasi-periodic bifurcations of invariant circles in low-dimensional dissipative dynamical systems // *Regul. Chaotic Dyn.*, 2011, vol. 16, nos. 1–2, pp. 154–184.
- [36] Broer H., Simó C., Vitolo R. The Hopf-saddle-node bifurcation for fixed points of 3D-diffeomorphisms: The Arnol’d resonance web // *Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin*, 2008, vol. 15, no. 5, pp. 769–787.

Quasiperiodic dynamics of three coupled logistic maps

Irina S. Dementyeva¹, Alexander P. Kuznetsov², Alexey V. Savin³, Yuliya V. Sedova⁴

^{1,2,3}Saratov State University

Astrahanskaya 83, Saratov, 410012, Russia

^{2,4}Kotel'nikov's Institute of Radio-Engineering and Electronics of RAS, Saratov Branch

Zelenaya 38, Saratov, 410019 Russia

¹irina-demen@mail.ru, ²alkuz@rambler.ru, ³savina@info.sgu.ru, ⁴sedovayv@rambler.ru

The model of three linear-coupled logistic maps is examined. The structure of parameter plane (coupling value–period-doubling parameter) is discussed. We select configuration of coupling and parameters so, that regimes of three-frequency quasiperiodicity become possible. Also we consider bifurcations associated with such states.

MSC 2010: 37L30,37E99

Keywords: quasiperiodic oscillations, invariant tori, bifurcations

Received March 26, 2014, accepted March 31, 2014

Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2014, vol. 10, no. 2, pp. 139–148 (Russian)