



УДК: 532.5; 532.73-21

MSC 2010: 76Dxx; 76Exx; 76Rxx

О конвективной неустойчивости встречных потоков двух взаиморастворимых жидкостей

В. А. Демин, К. Г. Костарев, А. И. Мизев, Е. А. Мошева, Е. А. Попов

Проведено численное трехмерное моделирование процесса замещения легкой жидкости тяжелой в тонком изотермическом горизонтальном слое конечных размеров. Процесс взаимного вытеснения жидкостей порождается начальным неравновесным ступенчатым распределением по плотности и описывается с учетом эффекта взаимной растворимости сред. Проанализированы условия возникновения концентрационной конвекции, возникающей в областях с неустойчивой стратификацией вблизи границы раздела между встречными потоками. Приведены результаты расчета скорости движения фронтов вытеснения в зависимости от разности плотностей жидкостей в отсутствие и при наличии в течении вторичных спиральных валов. Выполнен детальный расчет вторичных конвективных структур на разных стадиях процесса. Выявлено согласие результатов численного моделирования с полученными ранее экспериментальными данными.

Ключевые слова: взаиморастворимые жидкости, неустойчивая стратификация, концентрационная конвекция, прямое трехмерное численное моделирование

Получено 18 февраля 2014 года

После доработки 22 мая 2014 года

Работа поддержана грантом РФФИ «Конвективные процессы в зоне смешивания встречных потоков реагирующих жидкостей», код проекта 13-01-00508а.

Демин Виталий Анатольевич

demin@psu.ru

Попов Евгений Андреевич

evjeniy.p@gmail.com

Пермский государственный национальный исследовательский университет

614990, Россия, г. Пермь, ул. Букирева, д. 15

Костарев Константин Геннадьевич

kostarev@icmm.ru

Мизев Алексей Иванович

mizev@icmm.ru

Мошева Елена Александровна

Институт механики сплошных сред УрО РАН

614013, Россия, г. Пермь, ул. Акад. Королева, д. 1

1. Введение

Известно, что в вертикальном слое при подогреве сбоку течение, характеризующееся кубическим профилем скорости, в отличие от течения Пуазейля (с параболическим профилем), становится неустойчивым при значительно меньших скоростях. Данное свойство для небольших и умеренных значений числа Прандтля вытекает из невязкой природы неустойчивости, связанной с наличием точки перегиба в профиле скорости. В этом случае кризис течения обусловлен неустойчивостью границы раздела между встречными конвективными потоками, что демонстрируется видом критических возмущений [1, 2]. В результате развития неустойчивости относительно монотонных возмущений устанавливается движение, представляющее собой своеобразную суперпозицию плоскопараллельного течения и возмущений, периодических вдоль вертикали. В литературе это надкритическое течение характеризуется как система неподвижных вихрей на границе встречных потоков [3].

Имея в виду, что плоскопараллельное течение в вертикальном слое вызвано разностью температур на боковых границах, для больших чисел Прандтля ($Pr > 12.45$) наиболее опасными оказываются колебательные возмущения, связанные с нарастанием во встречных потоках температурных волн [4].

В случае горизонтального слоя жидкости, на границах которого создан продольный градиент температуры, в полости опять возникает течение, характеризующееся наличием встречных потоков. Традиционно оно называется адвективным течением. Теперь в каждый момент времени элементы жидкости движутся перпендикулярно вектору силы тяжести. Нетривиальным является то, что адвективное течение, как и подогреваемый сбоку вертикальный слой жидкости, описывается кубическим профилем скорости. Тем не менее, имеется и существенное отличие: поле температуры адвективного течения имеет z -образный профиль и описывается полиномом пятой степени, тогда как стационарное плоскопараллельное движение в вертикальном слое характеризуется линейным распределением температуры. В результате в пограничных слоях вблизи верхней и нижней горизонтальных границ за счет эффекта прилипания жидкости образуются области с неустойчивой стратификацией. В верхней части полости «носик» теплой (и вследствие этого более легкой) жидкости оказывается под тонким пристеночным более холодным слоем жидкости. В это же время в нижней части полости «носик» холодной (и тем самым более плотной) жидкости оказывается над тонким пристеночным более нагретым слоем жидкости. Наличие областей с неустойчивой стратификацией в горизонтальном слое с адвективным течением приводит к возникновению специфической рэлеевской моды неустойчивости, не характерной для подогреваемого сбоку вертикального слоя.

В работе [5] рассматривался бесконечный горизонтальный слой однородной по составу жидкости с твердыми высокотеплопроводными границами при наличии на них продольного градиента температуры. Как уже указывалось, подобный нагрев создает в жидкости неустойчивое распределение по плотности вдоль градиента температуры и приводит к возникновению стационарного плоскопараллельного конвективного течения вдоль широких граней полости, характерной чертой которого является наличие встречных потоков жидкости. Таким образом, система постоянно стремится перейти в состояние с устойчивой стратификацией, в результате чего более нагретый верхний слой жидкости перемещается к торцу с более низкой температурой, а холодные участки тянутся вдоль нижней границы к горячему торцу. В работе [5] методом Галёркина была исследована линейная устойчивость этого течения относительно нормальных плоских возмущений. Показано, что горизонтальное плоскопараллельное течение оказывается неустойчивым относительно возмущений двух

типов. При малых числах Прандтля неустойчивость имеет гидродинамическую природу и связана с развитием вихрей на границе встречных потоков. При умеренных и больших числах Прандтля неустойчивость имеет рэлеевскую природу и обусловлена температурной стратификацией в стационарном течении. Неожиданным оказалось продолжение этого исследования. В работе [6] была изучена устойчивость данного адвективного течения относительно трехмерных возмущений специального вида — спиральных мод. Показано, что в широкой области значений чисел Прандтля ($Pr > 0.24$) кризис течения вызван спиральными возмущениями, которые развиваются в неустойчиво стратифицированных слоях жидкости, прилегающих к верхней и нижней границам слоя. Оказалось, что спиральная неустойчивость, как и неустойчивость относительно плоских возмущений, обусловлена кризисом равновесия подогреваемой снизу жидкости и имеет рэлеевскую природу. При этом, как показывают расчеты, спиральные возмущения всегда более опасны, чем плоские.

Удивительно, но эти результаты оказались востребованными при анализе экспериментальных данных по взаимному вытеснению и частично конвективному смешению двух взаиморастворимых жидкостей с разными плотностями в изотермическом горизонтальном слое конечных размеров [7, 8]. В этих экспериментах бралась вертикальная изотермическая ячейка Хеле–Шоу, целиком заполненная двумя взаиморастворимыми жидкостями. Тяжелая жидкость заливалась в нижнюю часть, а легкая — в верхнюю часть полости (рис. 1). В этом случае два слоя жидкости, лежащие один на другом, представляют собой устойчиво стратифицированную конвективную систему. Вслед за этим прямоугольную полость быстро кладут горизонтально на широкие грани, и ситуация кардинально меняется. Система становится неустойчивой в конвективном смысле, так как появляется ступенчатое распределение по плотности в горизонтальной плоскости. Если полость достаточно тонкая, то, на первый взгляд, стоит ожидать, что переход в устойчивое состояние будет происходить ординарно, через встречное плоскопараллельное движение слоев с разными плотностями. Более легкая жидкость стремится заполнить пространство у верхней границы, а более тяжелая должна опуститься в нижнюю часть полости. Описанный простой сценарий кажется еще более ожидаемым, так как система изотермична.

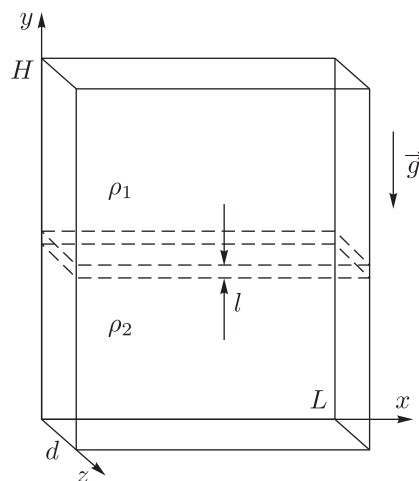


Рис. 1. Геометрия задачи. Система координат.

Однако эксперименты показывают, что даже в отсутствие химической реакции между рабочими жидкостями процесс установления устойчивой стратификации происходит весьма нетривиальным образом. В тонких приграничных слоях в окрестности границы раздела

встречных потоков вследствие возникновения областей конвективной неустойчивости возникают спиральные концентрационные структуры, вытянутые вдоль направления движения фронтов вытеснения (рис. 2). Образование концентрационных спиральных валов существенно изменяет скорость движения фронтов и интенсифицирует перемешивание в пограничных слоях. Таким образом, в данной задаче требуется полноценное трехмерное численное моделирование нестационарного процесса взаимного вытеснения взаиморастворимых жидкостей с учетом разрешения приграничных зон с неустойчивой стратификацией.

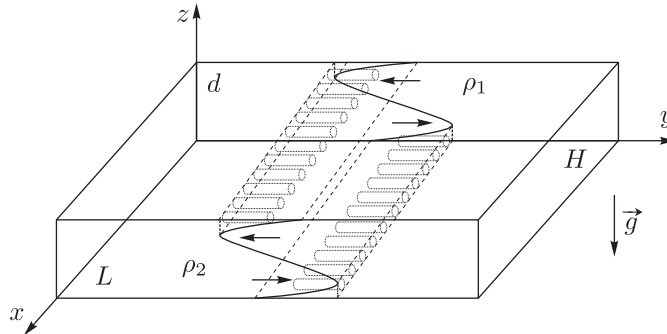


Рис. 2. Конвективная система в процессе установления устойчивой стратификации.

2. Постановка задачи и основные уравнения

Итак, рассмотрим тонкую полость с твердыми гранями в форме прямоугольного параллелепипеда, вытянутую вдоль вертикальной оси (рис. 1). Полость изотермична и находится в статическом поле тяжести. Введем обозначения: высота ячейки — H , длина — L , толщина — d . Сначала в полость помещают жидкость с плотностью ρ_2 . Поверх нее аккуратно без перемешивания наливается жидкость с меньшей плотностью ρ_1 . В результате создается двухслойная система с устойчивой начальной стратификацией. Граница раздела размывается с течением времени в диффузионный слой толщиной l , но не деформируется. В качестве рабочих всегда выбираются взаиморастворимые жидкости с близкими значениями плотностей.

Для систематического изучения конвективно-диффузионных процессов, происходящих вблизи границы раздела, жидкости требуется подобрать так, чтобы разность плотностей $\Delta\rho = \rho_2 - \rho_1$ была плавно регулируемым параметром. В ходе численного моделирования это достигалось тем, что в качестве одной среды принималась однородная жидкость, а роль второй играла та же жидкость с небольшим добавлением в нее хорошо растворимой примеси. В экспериментах также могла использоваться одна и та же несущая жидкость, но с разным процентным содержанием примесей [7, 8]. В качестве рабочих жидкостей выступали дистиллированная вода, водные растворы этилового и изопропилового спиртов, уксусной кислоты и двух солей — хлористого натрия NaCl и хлористого калия KCl. Если примесь тяжелая, как в случае водно-солевых растворов, то нижняя часть слоя заполнялась бинарной жидкостью, а поверх наливалась чистая жидкость-носитель. Если примесь легкая (этиловый спирт в воде), то в нижнюю часть полости заливалась чистая жидкость-носитель, а поверх наливалась бинарная смесь жидкости-носителя с легким компонентом. Важным свойством подобной двухслойной системы является очевидное отсутствие на границе раздела поверхностного натяжения. В силу специфики эксперимента двухслойная си-

стема выдерживается некоторое время в вертикальном положении, в результате чего за счет диффузии на границе раздела формируется тонкий переходный слой толщиной l . Время выдержки в вертикальном положении по возможности минимизировалось, поэтому $H, L, d > l$. Затем слой кладется на широкие грани, и в двухслойной системе начинает происходить процесс установления устойчивой стратификации путем вытеснения легкой жидкости тяжелой (рис. 2).

Ввиду малости коэффициента диффузии у вышеперечисленных растворов линии концентрации оказываются «вмороженными» в движущийся объем жидкости. В результате с помощью интерферометрической техники удалось не только исследовать распределение концентрации в системе жидкостей, но и определить структуру течений, а также проследить их эволюцию в режиме реального времени [7, 8].

Как уже отмечалось, данную полость принято называть ячейкой Хеле–Шоу, если выполняются условия $H, L \gg d$, и движение происходит только в плоскости широких граней. С высокой степенью точности двумерными являются конвективные течения в вертикальной ячейке Хеле–Шоу при равномерном нагреве снизу [9]. Если полость изотермична, то, когда полость лежит на широкой грани, должен обязательно начаться процесс вытеснения легкой жидкости тяжелой. На первый взгляд кажется, что этот процесс должен быть двумерным и происходить исключительно в плоскости широких граней. Однако в экспериментах было показано, что при определенных условиях вблизи широких граней генерируются концентрационно-конвективные структуры, которые определенно трехмерны. Наличие зон неустойчивой стратификации по плотности приводит к тому, что даже в достаточно узких полостях третьей компонентой скорости при моделировании движения жидкостей пренебрегать нельзя. По этой причине для описания динамики подобной двухжидкостной системы полное трехмерное численное моделирование представляется наиболее приемлемым.

Для расчета изотермического движения жидкостей в горизонтальном слое и одновременно медленного процесса их взаимного растворения будем использовать стандартную систему уравнений концентрационной конвекции, аналогичную приближению Буссинеска [10]:

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \nabla) \mathbf{V} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{V} - g \beta_c C \boldsymbol{\gamma}, \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial C}{\partial t} + (\mathbf{V} \nabla) C = D \Delta C, \quad \operatorname{div} \mathbf{V} = 0. \quad (2.2)$$

Здесь \mathbf{V} , p и C — размерные поля скорости, давления и концентрации тяжелой примеси, ν и D — коэффициенты кинематической вязкости и диффузии, β_c — коэффициент зависимости плотности от концентрации, g — ускорение силы тяжести, $\boldsymbol{\gamma}$ — единичный вектор, направленный вертикально вверх, ρ — средняя плотность жидкости-носителя. В рамках рассматриваемого приближения предполагается, что приращения плотности среды при изменении концентрации примеси невелики. Связь между уравнением Навье–Стокса (2.1) и уравнением переноса примеси в системе (2.2) заложена в пакете и осуществляется автоматически, так как концентрация содержится в подъемной силе в первом уравнении. Что касается уравнения несжимаемости, то оно входит в численную схему не напрямую, а опосредованно, и используется для уточнения скорости на каждом шаге по времени.

В расчетах разность плотностей в начальный момент времени $t = 0$ обеспечивается зависимостью концентрации тяжелой примеси в жидкости-носителе от продольной координаты y , описываемой гладкой функцией $C = C_0 [\operatorname{erf}((H/2 - y)/l) + 1]/2$. Здесь C_0 имеет смысл задаваемой разности концентраций, l — характерная ширина переходного слоя. В результате в начальный момент времени, когда полость уже лежит на широкой грани,

имеет место неравновесное состояние. В ходе расчетов все стенки полости предполагаются твердыми и непроницаемыми для вещества, поэтому для примеси должно выполняться граничное условие $\partial C / \partial \mathbf{n}|_{\Gamma} = 0$. Что касается компонент вектора скорости, то для них на твердых гранях справедливо условие прилипания $\mathbf{V}|_{\Gamma} = 0$.

Система уравнений (2.1)–(2.2) решалась посредством прямого численного моделирования в размерном виде с использованием программного пакета OpenFOAM на суперкомпьютере «ПГУ–Тесла» Научно-образовательного центра «Параллельные и распределенные вычисления» Пермского государственного национального исследовательского университета. Пакет OpenFOAM — это перспективное динамично развивающееся открытое программное обеспечение для моделирования задач механики сплошных сред, основным языком которого является C++. Программное обеспечение OpenFOAM устанавливается под Unix-подобные операционные системы. В пакете есть готовые решатели для различных физических систем. Дифференциальные уравнения в частных производных записываются в терминах математических операторов и решаются методом конечных объемов на произвольной расчетной сетке с многогранными ячейками. Процедура дискретизации градиентов и производных по времени осуществляется с помощью известных схем и методов, которые заранее указываются в интерфейсном файле. В нашем случае для производных по времени использовалась неявная схема Эйлера первого порядка точности, а для пространственных производных применялись схемы второго порядка точности. При нахождении значений искомых полей в точках, отличных от центров контрольных объемов, применялась линейная интерполяция.

Архитектура OpenFOAM позволяет вносить изменения в решатель, например, добавлять новые слагаемые в уравнения, что значительно расширяет возможности пакета. Для связывания скорости и давления разработчиками пакета реализованы неявные численные методы SIMPLE, PISO и PIMPLE [11]. В нашем случае использовался алгоритм PISO (Pressure Implicit with Splitting of Operators), что заранее указывалось в интерфейсном файле. Платформа OpenFOAM работает с программным интерфейсом MPI, что позволяет разбивать расчетную область на части и проводить вычисления параллельно, используя одновременно до 2000 ядер. Работать можно как со структурированными, так и с неструктурированными сетками. В OpenFOAM используются размерные единицы системы СИ.

Решение задачи состоит из трех этапов и включает в себя создание расчетной сетки, саму вычислительную процедуру и визуализацию полученных данных. В OpenFOAM входят встроенные утилиты для создания сетки, но кроме них можно использовать и другие программы. Условие устойчивости вычислительной схемы является малость числа Куранта $Co = \tau|U|/h$, где τ и h — шаги по времени и координате, U — значение скорости. Физически условие Куранта означает, что частица жидкости за один шаг по времени не должна продвинуться больше, чем на один пространственный шаг. Число Куранта вычисляется для всех ячеек расчетной области на каждом шаге по времени. Если оно больше единицы, то метод расходится. Для визуализации результатов используется приложение ParaView, которое устанавливается вместе с OpenFOAM. Процедуру визуализации можно выполнять с помощью других программ. Для этого необходимо конвертировать соответствующие файлы в нужный формат с помощью утилит OpenFOAM. Система уравнений (2.1)–(2.2) формируется путем выбора среди заложенных в пакете OpenFOAM типичных уравнений из области механики сплошных сред. Пакетом предусмотрены разные модификации гидродинамических уравнений, в частности, имеется возможность расчета движения сжимаемых сред и турбулентных течений. Тестирование возможностей платформы OpenFOAM на конвективных задачах показывает, что имеются большие перспективы ее применения для решения серьезных научных задач в области механики сплошных сред [9, 12].

Расчеты проводились для полости с геометрическими размерами $L = 24$ мм, $H = 80$ мм, $d = 4$ мм, при этом характерная ширина начального переходного диффузионного слоя, заложённая в функции ошибок, полагалась равной $l \approx 2$ мм, что приблизительно соответствовало наблюдениям [7, 8]. Для полноты результатов в дополнительной серии численных экспериментов начальное распределение плотности моделировалось ступенчатой функцией. Выбранное соотношение сторон позволило качественно и количественно сравнить результаты компьютерного моделирования с экспериментальными данными. В расчетной сетке вдоль осей x , y , z использовалось рабочее количество ячеек $103 : 159 : 47$. Параллельные вычисления, как правило, проводились на 12 ядрах, что технически обеспечивалось делением расчетной области на соответствующее число частей. Для лучшего разрешения пограничных слоев вблизи широких горизонтальных граней, в которых вследствие неустойчивой стратификации возникают трехмерные конвективные структуры, производилось ступенчатое сгущение сетки. По координате z (рис. 2) осуществлялось разбиение расчетной области на три неравные части: по 1 мм сверху и снизу и 2 мм посередине. На первый и третий участки вблизи широких граней выделялось по 17 ячеек, на слой посередине — 13. Определение положения фронтов вытеснения с учетом ширины пограничных слоев и вычисление некоторых вторичных характеристик проводились путем обработки массивов данных с помощью программы аналитических вычислений Maple-11. Физические параметры конвективной среды во всех сериях расчетов выбирались так, чтобы соответствовать реальным жидким смесям, в роли которых выступали водные соли KCl , $NaCl$ и Na_2SO_4 ($\nu \approx 10^{-6}$ м²/с, $D \approx 10^{-9}$ м²/с, [13]).

Предварительно, с целью контроля получаемых результатов, были выполнены расчеты сначала на грубых, а затем на более мелких сетках. В таблице 1 приведены значения максимумов всех трех компонент и модуля скорости для нескольких выборочных вариантов разбиения расчетной области в фиксированный момент времени $t = 10$ с, когда концентрационный фронт от середины полости проходит расстояние, приблизительно равное $H/3$.

Таблица 1. Максимальные значения всех компонент и модуля скорости для разных разбиений расчетной области и наибольшая разница (в процентах) для вертикальной компоненты скорости

Количество ячеек в расчетной сетке (x, y, z)	$ \mathbf{V} $, см/с	$ \mathbf{V}_x $, см/с	$ \mathbf{V}_y $, см/с	$ \mathbf{V}_z $, см/с	Разница для $ \mathbf{V}_z $, %
1 97 : 151 : 47 = 688 409	0.1982	0.05251	0.1972	0.06867	1.28
2 103 : 159 : 53 = 867 981	0.1983	0.05232	0.1976	0.06955	
3 109 : 167 : 55 = 1 001 165	0.1990	0.05236	0.1975	0.07014	0.84

Представленные в качестве примера табличные данные для $\Delta\rho = 0.02$ г/см³ ($C_0 = 0.2$, $\beta_c = 0.1$) демонстрируют малое отличие по всем трем значениям отдельных компонент и модулю скорости. В частности, наибольший разброс имеется у максимума z -компоненты скорости и составляет в 1-м и 2-м вычислительных экспериментах 1.28 %, а отличие этой же характеристики для 2-го и 3-го разбиений расчетной области уже равно 0.84 %.

В таблице 2 представлена полная кинетическая энергия обеих жидкостей в зависимости от времени для трех упомянутых вариантов разбиения расчетной области. Видно, что только на начальном этапе имеется заметное различие у данной характеристики, посчитанной на трех разных сетках (максимальная разница 0.7 %). С ростом времени ошибка вычислений становится меньше. Как и полагается для диссипативного процесса, зависимость кинетической энергии от времени является только убывающей функцией времени.

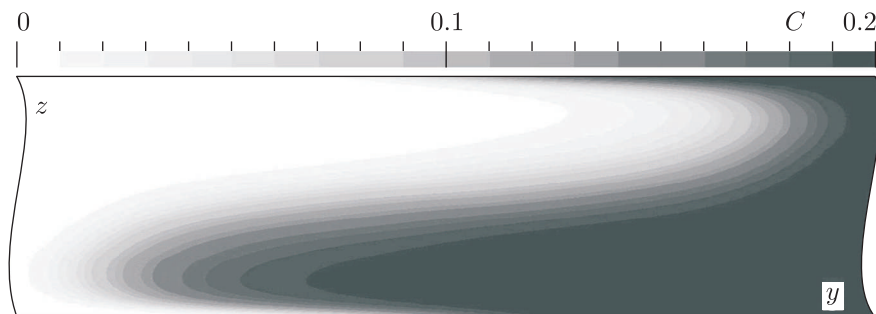
Таблица 2. Полная кинетическая энергия обеих жидкостей в зависимости от времени для разных вариантов разбиения расчетной области

Количество ячеек	Полная кинетическая энергия, $\text{г} \cdot \text{см}^2/\text{с}^2$						
	$t = 1 \text{ с}$	$t = 6 \text{ с}$	$t = 11 \text{ с}$	$t = 16 \text{ с}$	$t = 21 \text{ с}$	$t = 26 \text{ с}$	
1	688 409	0.158329	0.0555675	0.0402167	0.0310474	0.0179438	0.00958455
2	867 981	0.159438	0.0554612	0.0401515	0.0310430	0.0177878	0.00946505
3	1 001 165	0.159498	0.0550438	0.0397889	0.0307212	0.0175777	0.00933976

3. Обсуждение результатов расчетов

В начальный момент времени две жидкости с разными плотностями разделены тонким плоским вертикальным диффузионным слоем, сформированным в процессе приготовления двухслойной системы. Вследствие переворота кюветы в горизонтальное положение конвективная система становится неустойчивой, в результате чего сразу начинается движение. Как в эксперименте, так и при расчетах тяжелая жидкость начинает подтекать под легкую вдоль широких граней. В то же время жидкость с меньшей плотностью замещает тяжелую. На фоне вытеснения одной жидкости другой вдоль всей деформируемой границы раздела одновременно идет процесс диффузии, который делает диффузионный слой в области «носиков» слегка толще. Тем не менее, это явление протекает достаточно медленно, и площадь поверхности диффузионного фронта в ходе взаимного вытеснения жидкостей растягивается быстрее, чем растет толщина диффузионного слоя. Эффект небольшого утолщения «носиков» диффузионных фронтов с течением времени подтверждается экспериментально [7, 8]. На рисунке 3 изображено вертикальное продольное сечение поля концентрации примеси в окрестности растягивающегося диффузионного слоя на начальном этапе эволюции до момента зарождения спиральных структур ($t = 1 \text{ с}$, $\Delta\rho = 0.02 \text{ г/см}^3$). Это распределение качественно согласуется с экспериментальными интерферограммами [7, 8], изображенными на рисунке 4. Разность плотностей невелика, поэтому процесс может длиться десятки секунд (см. табл. 2). В опытах фронт вытеснения (в зависимости от смеси и разности плотностей) достигал торца полости в течение 10–50 с. В частности, для смеси этилового спирта и воды при $\Delta\rho = 0.0169 \text{ г/см}^3$ это время равно 15 с. В расчете, начальный этап которого представлен на рисунке 3, время движения фронта вытеснения при $\Delta\rho = 0.02 \text{ г/см}^3$ составляет 17 с.

Так как на твердых стенках имеет место условие прилипания, вблизи верхней границы тонкий клин тяжелой жидкости всегда находится над носиком легкой, а у нижней

Рис. 3. Расчетное поле концентрации примеси в вертикальном сечении на расстоянии $x = 0.5 \text{ мм}$ от боковой грани до момента зарождения спиральной неустойчивости.

границы, наоборот, носик тяжелой жидкости натекает сверху на легкую. В результате возникает неустойчивая стратификация в обоих пограничных слоях на горизонтальных широких гранях полости. Из рисунка 3 видно, что расстояние от твердых горизонтальных границ полости до «носиков» фронтов чуть меньше $\frac{1}{4}$ толщины полости. Именно в этих неустойчиво стратифицированных приграничных областях образуются спиральные валы, требующие более детального разрешения. Таким образом, рисунок 3 обосновывает необходимость сгущения сетки в пограничных слоях толщиной порядка 1 мм.

Эксперименты показали (и расчеты это подтвердили), что, несмотря на заметное различие вязкостей жидкостей, положение обоих фронтов вытеснения изменяется со временем с одинаковой скоростью, что говорит об их симметричности относительно первоначального расположения переходной зоны.

Напрямую сечение, изображенное на рисунке 3, не могло быть получено экспериментально. У полости прозрачными были только широкие грани. Чтобы проверить правильность понимания процесса вытеснения и подтвердить z -образную форму профиля концентрации, полость в опытах переворачивали набок, на узкую продольную грань (рис. 4).

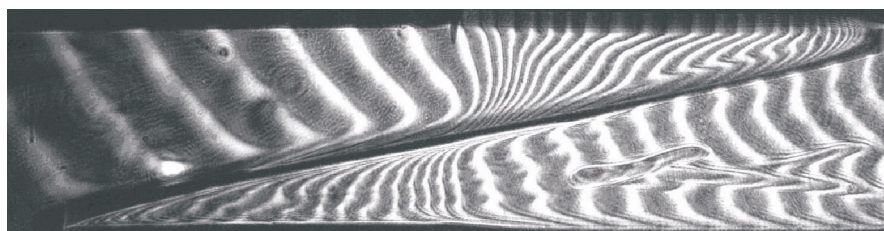


Рис. 4. Экспериментальная интерферограмма для водно-спиртового раствора. Полость поставлена на узкую боковую грань; в результате имеет место процесс вытеснения в приближении Хеле – Шоу, толщина полости в поперечном сечении 1.2 мм [8].

Спиральные валы, ось которых продольна направлению движения жидкостей, начинают образовываться, когда фронты проходят от середины полости расстояние, приблизительно равное $H/4$ (при отношении толщины слоя к длине $d/H = 0.05$).

Тяжелая жидкость в пограничных слоях проваливается в глубь легкой, образуя локализованные вблизи границ типичные концентрационные плюмы (рис. 5). Вид сверху свидетельствует о том, что валы начинают образовываться в пограничных слоях вдали от боковых границ в середине полости, что свидетельствует о проявлении объемного «рэле-

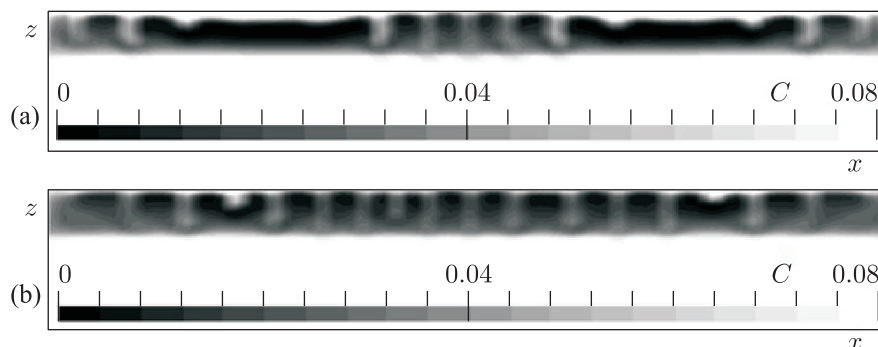


Рис. 5. Разрез поля спиральных валов вблизи верхней грани в поперечном сечении (x, z) при $y = 6$ см в моменты времени $t = 13$ с (a) и $t = 16$ с (b), $\Delta\rho = 0.02$ г/см³.

евского» механизма неустойчивости. Время зарождения вторичного течения, то есть промежуток времени между началом формирования основного течения (перевод кюветы в горизонтальное положение) и появлением неустойчивости, сильно зависит от разности плотностей. Эксперименты и расчеты хорошо согласуются по этому параметру. В частности, чем больше $\Delta\rho$, тем скорее формируется вторичное течение. Горизонтальное сечение поля концентрации на высоте движения верхнего «носика» концентрационного фронта, моделирующее интерферометрическую экспериментальную картину течения [7, 8], приведено на рисунке 6 (вид сверху).

Поле концентрации приведено в момент времени, когда развитые спиральные валы практически коснулись бокового торца полости. Распределение концентрации в плоскости (x, y) показывает, что длина волны по координате x слегка меняется по мере продвижения фронта вдоль координаты y . Неустойчиво стратифицированный пограничный слой в фиксированном поперечном разрезе плоскостью (x, z) становится тоньше по мере удаления концентрационного фронта; соответственно, волновое число критических возмущений плавно уменьшается с ростом координаты y за счет раздвижения валов к краям. В полости конечных размеров изменение длины волны наиболее опасных возмущений приводит в определенном месте к скачкообразному исчезновению пары валов. На рисунке 6 это событие выглядит как некая дислокация. Наличие в расчетах таких тонких эффектов, как дислокации, подтверждает справедливость модели, выбранной для описания рассматриваемых конвективно-концентрационных явлений. Длина волны λ по оси x для одинаковых значений разности плотностей хорошо согласуется с экспериментом. В области фронта на рисунке 6 при одинаковой ширине полости в расчетах имеем 23, а в опыте — 25 валов.

Возникновение в областях с неустойчивой стратификацией валов, ось которых продольна по отношению к направлению движения фронтов, приводит к интенсификации процесса перемешивания в пограничных слоях, что должно определенным образом повлиять на скорости движения фронтов. По мере развития трехмерных конвективных структур увеличиваются затраты энергии на их поддержание, что существенно снижает скорость процесса взаимного вытеснения жидкостей. Семейство графиков зависимостей координаты верхнего «носика» фронта для нескольких значений разности плотностей приведено на рисунке 7. Излом на графиках соответствует моменту зарождения спиральных валов. Штриховые линии являются продолжениями степенных законов зависимостей $y(t)$ в отсутствие спиральной неустойчивости. Обработка данных численного моделирования дает набор для степенных законов t^n в отсутствие (n_1) и при наличии (n_2) спиральных валов. Значения показателей степенных законов приведены в таблице 3 ($n_1 > n_2$). Графики обрываются в тот момент, когда гидродинамические возмущения, неизбежно вносимые в среду движущимися фронтами, достигают торцов полости. По мере увеличения $\Delta\rho$ скорость движения фронтов вытеснения закономерно растет, что подтверждается в экспериментах. С другой стороны, в экспериментах не было возможности проведения измерений координаты фронта с достаточно малым интервалом по времени, как это имело место в ходе численного моделирования (до 35 точек, как показано на графиках на рис. 7). Из-за определенной погрешности в измерениях не удалось достоверно подтвердить наличие изломов на графиках (рис. 7).

Как уже отмечалось, анализ литературы позволяет провести глубокую аналогию между исследуемым процессом установления устойчивой стратификации в двухслойной системе и классическим адвективным течением в горизонтальном слое. В рассматриваемой задаче архимедова сила в уравнении Навье–Стокса имеет концентрационную природу, но формально выглядит так же, как подъемное слагаемое, описываемое температурными неоднородностями. Учитывая, что уравнение переноса тепла с точностью до обозначений выглядит

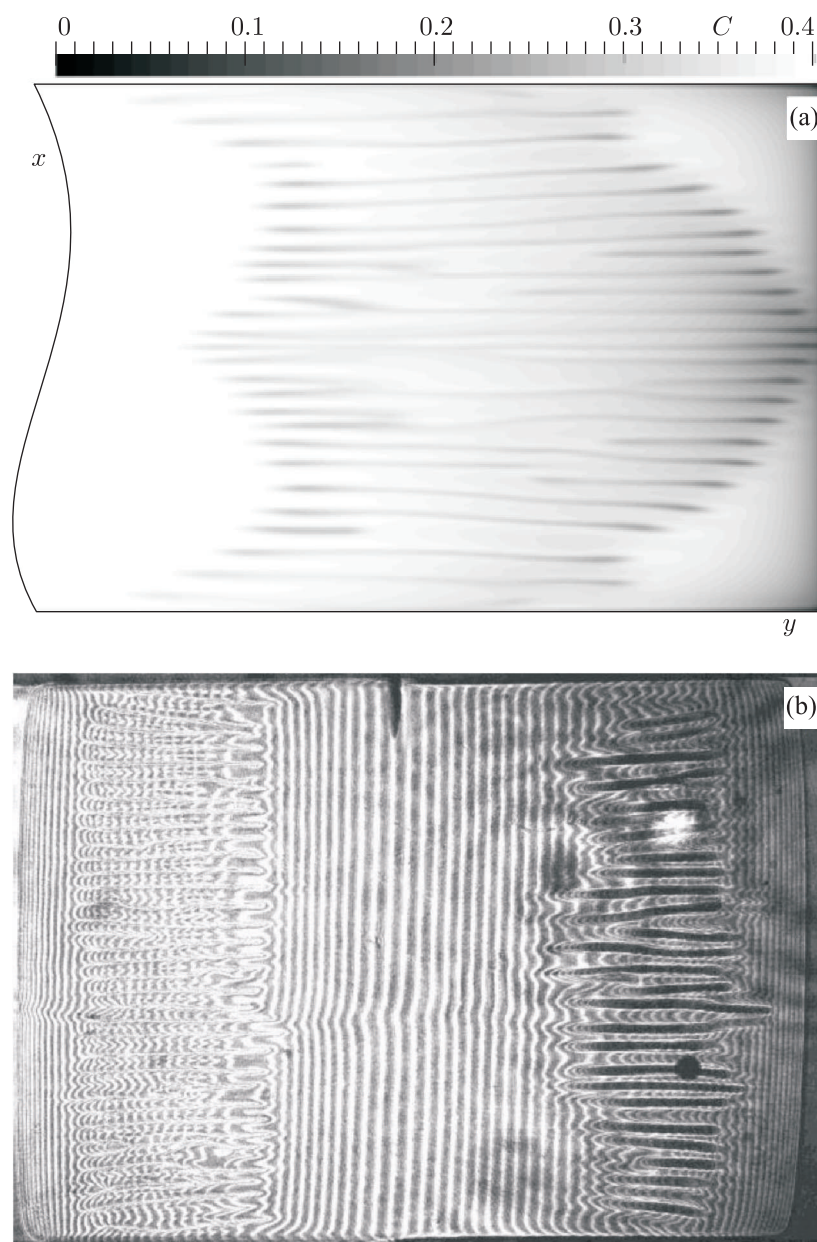


Рис. 6. Вид поля концентрации сверху: (а) расчет при $t = 9$ с, $\Delta\rho = 0.04$ г/см³ (представлена только правая часть полости), (б) интерферограмма, полученная в ходе эксперимента, с учетом осреднения по толщине слоя: черная вертикальная клиновидная метка указывает положение середины полости (масштаб по координате y изменен).

идентично уравнению для концентрации примеси, получаем нелинейную задачу (2.1)–(2.2), математически эквивалентную адвективной. Естественно, аналогия касается только системы уравнений, но не граничных условий. Следует отметить, что в цитируемых классических работах [5, 6] решены только линейные задачи устойчивости основного плоскопараллельного течения относительно малых возмущений разных типов. Однако главное отличие изучаемого процесса от классического адвективного течения все же заключается в наличии эволюционирующего локализованного концентрационного фронта вытеснения, тогда

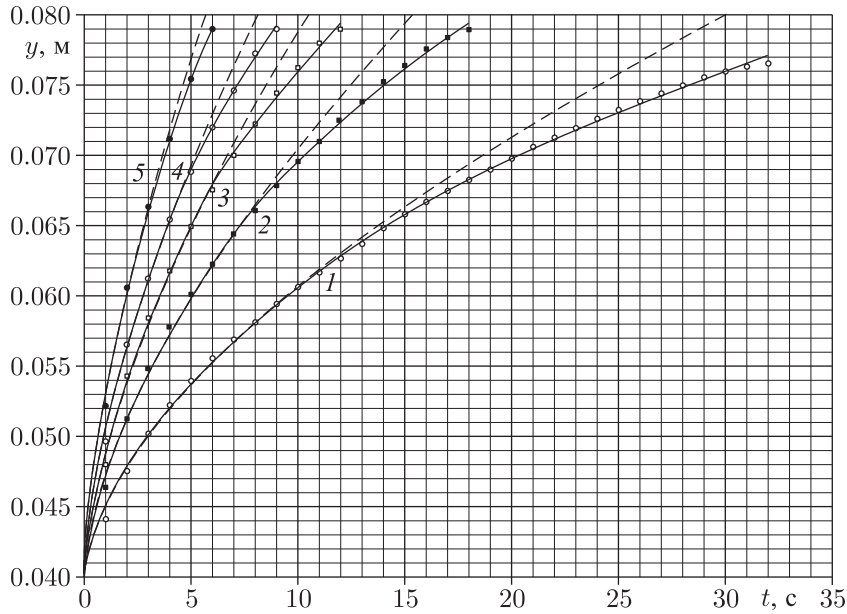


Рис. 7. Графики зависимости координаты «носа» легкой жидкости от времени для нескольких значений разности плотностей; номера кривых соответствуют 1–5 — 0.01, 0.02, 0.03, 0.04, 0.06 г/см³.

Таблица 3. Значения степеней для зависимостей координат фронтов вытеснения от времени

Показатель степени	Разность концентраций				
	$\Delta C = 0.1$	$\Delta C = 0.2$	$\Delta C = 0.3$	$\Delta C = 0.4$	$\Delta C = 0.6$
n_1	0.610	0.630	0.644	0.653	0.661
n_2	0.484	0.491	0.500	0.506	0.520

как стационарное адвективное течение характеризуется одинаковым вдоль слоя профилем скорости и температуры, не меняющимся с течением времени. Также в рассматриваемой задаче отсутствует аналог постоянной разности температур, которая подпитывает энергией в течение сколь угодно длительного времени стационарное адвективное движение. В представленной концентрационной задаче скорость процесса вытеснения только замедляется с течением времени. С динамической точки зрения, установление устойчивой стратификации вследствие начального горизонтального ступенчатого распределения по плотности является затухающим процессом. Кроме того, полость конечна, то есть ограничивается со всех сторон твердыми гранями, поэтому на торцах должны накладываться другие крайние условия, и через уравнения уже не проходят простые стационарные полиномиальные решения для полей концентрации и скорости основного течения. Таким образом, с одной стороны, неудивительно, что в задаче о концентрационном перемешивании жидкостей в горизонтальном изотермическом слое в результате неустойчивости вблизи границы встречных потоков зарождаются валы, ось которых ориентирована вдоль направления движения фронтов. С другой стороны, как показывают рисунки 3–6, эволюция генерируемого течения весьма нетривиальна и его описание отнюдь не сводится к результатам известных работ.

4. Заключение

Проведено численное трехмерное моделирование нестационарного конвективного процесса перехода к устойчивой стратификации в тонкой горизонтальной полости, заполненной двумя взаиморастворимыми жидкостями с близкими значениями плотностей. Результаты расчетов согласуются с экспериментальными данными и известными классическими результатами, полученными в рамках линейной теории устойчивости. Изучена динамика переходного диффузионного слоя и структура спиральных концентрационно-конвективных валов, возникающих в неустойчиво стратифицированных областях. Расчеты на основе полных нелинейных уравнений позволили определить измеряемую в эксперименте скорость распространения фронта вытеснения для разных значений соотношения плотностей жидкостей. Показано, что в результате развития спиральных валов степенной закон для зависимостей координаты фронта от времени скачком меняется.

Список литературы

- [1] Рудаков Р. Н. О малых возмущениях конвективного движения между вертикальными плоскостями // ПММ, 1966, т. 30, № 2, с. 362–368.
- [2] Рудаков Р. Н. Спектр возмущений и устойчивость конвективного движения между вертикальными плоскостями // ПММ, 1967, т. 31, № 2, с. 349–355.
- [3] Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М., Непомнящий А. А. Устойчивость конвективных течений. Москва: Наука, 1989. 320 с.
- [4] Бирих Р. В., Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М., Рудаков Р. Н. О колебательной неустойчивости плоскопараллельного конвективного движения в вертикальном канале // ПММ, 1972, т. 36, № 4, с. 745–748.
- [5] Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М., Мызников В. М. Об устойчивости плоскопараллельного конвективного течения в горизонтальном слое жидкости // ПМТФ, 1974, № 1, с. 95–100.
- [6] Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М., Мызников В. М. Устойчивость плоскопараллельного конвективного течения жидкости в горизонтальном слое относительно пространственных возмущений // ПМТФ, 1974, № 5, с. 145–147.
- [7] Брацун Д. А., Мошева Е. А. Экспериментальное исследование неустойчивости зоны смешивания, образованной встречными потоками двух взаиморастворимых жидкостей // Современная наука: идеи, исследования, результаты, технологии: Сб. научн. ст. / под общ. ред. А. В. Кузьмина. Киев: НПВК Триакон, 2012. Вып. 2, с. 113–117.
- [8] Костарев К. Г., Мизев А. И., Мошева Е. А. Формирование вторичных течений при взаимном вытеснении смешивающихся жидкостей // Конвективные течения: Сб. научн. ст. / под общ. ред. В. Г. Козлова. Пермь: ПГПУ, 2013. Вып. 6, с. 203–215.
- [9] Гаврилов К. А., Демин В. А., Попов Е. А. Моделирование трехмерных конвективных течений с помощью пакета OpenFOAM // Вестн. Пермск. ун-та. Сер. Матем., Механ., Информ., 2012, № 3, с. 23–28.
- [10] Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. Москва: Наука, 1972. 392 с.
- [11] Ferziger J. H., Perić M. Computational methods for fluid dynamics. 3rd ed. New York: Springer, 2002. 423 pp.
- [12] Гаврилов К. А., Демин В. А., Попов Е. А. Режимы всплытия тепловых плюмов в вертикальном слое // Вычислительная механика сплошных сред, 2013, т. 6, № 3, с. 261–268.
- [13] Справочник химика: В 7 тт.: Т. 3 / под ред. Б. П. Никольского. Москва: Химия, 1965. 1008 с.

On convective instability of the counter propagating fluxes of inter-soluble liquids

Vitaly A. Demin¹, Konstantin G. Kostarev², Alexey I. Mizev³, Elena A. Mosheva⁴,
Eugenii A. Popov⁵

^{1,5}Perm State National Research University

Bukirev's str. 15, Perm, 614990, Russia

^{2,3,4}Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS

Akadem. Korolev's str. 1, Perm, 614013, Russia

¹demin@psu.ru, ²kostarev@icmm.ru, ³mizev@icmm.ru, ⁵evjeniy.p@gmail.com

Direct 3D numerical modeling of the displacement process of a light liquid by a heavy one in a thin isothermal horizontal layer of finite length has been carried out. Initial non-equilibrium step distribution of liquids density generates convective process in this inhomogeneous system. The effect of liquids miscibility is taken into account over the calculation. The conditions of convection excitation in the regions with unstable stratification near the interface between counter propagating fluxes of liquids have been analyzed. The calculation results of concentration fronts velocity in dependence on densities difference are received in the presence and in the absence of the secondary spiral rollers in a flow. The evolution of secondary convective structures has been simulated in details at various stages of the process. The results of numerical modeling confirm previous experimental data.

MSC 2010: 76Dxx; 76Exx; 76Rxx

Keywords: inter-soluble liquids, unstable stratification, convective miscibility, direct 3D numerical modeling

Received February 18, 2014, accepted May 22, 2014

Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2014, vol. 10, no. 2, pp. 195–208 (Russian)