



УДК: 530.182

MSC 2010: 37B20

## Возвраты Пуанкаре в стробоскопическом сечении неавтономного генератора ван дер Поля

Н. И. Семенова, В. С. Анищенко

В работе анализируется статистика множества, получаемого путем расчета стробоскопического сечения фазовых траекторий в генераторе ван дер Поля с внешней гармонической силой. Показано, что полученное указанным способом множество эквивалентно линейному сдвигу на окружности с числом вращения, определяемым отношением внешней и собственной частот. Для золотого сечения экспериментально построена зависимость минимальных времен возврата от величины интервала  $\varepsilon$  и определена величина размерности Афраймовича–Песина  $\alpha_c = 1$ .

Ключевые слова: возвраты Пуанкаре, размерность Афраймовича–Песина, лестница Фибоначчи, отображение окружности, генератор ван дер Поля

### 1. Введение

Классическая проблема возвратов Пуанкаре в устойчивых по Пуассону системах [1–3] в последние годы обогатилась новым подходом. Это связано с постановкой и решением задачи о закономерностях статистики возвратов не в локальную окрестность выбранного начального состояния (классическая теория), а в рассматриваемое множество в целом (глобальная теория) [4, 5]. В рамках настоящей работы нас будут интересовать результаты глобальной теории применительно к сдвигам на окружности при иррациональном числе вращения  $\rho$ :

$$x_{n+1} = x_n + \Delta, \quad \text{mod } 2\pi, \quad \Delta = 2\pi\rho. \quad (1.1)$$

---

Получено 18 апреля 2014 года

После доработки 15 мая 2014 года

---

Работа выполнена при поддержке РФФИ (№ 13-02-0021а). Н. И. Семенова выражает благодарность фонду «Династия».

---

Семенова Надежда Игоревна

harbour2006@mail.ru

Анищенко Вадим Семёнович

wadim@info.sgu.ru

Международный НИИ нелинейной динамики

Саратовского государственного университета

410026, Россия, г. Саратов, ул. Астраханская, д. 83

Порождаемое отображением (1.1) множество  $\{x_n, \text{mod } 2\pi\}$  является пример простейшего минимального множества при иррациональном значении числа вращения  $\rho$ , для которого разработана теория возвратов [5]. Основные результаты теории, которые используются в настоящей работе, следующие: иррациональное число  $\rho$  в (1.1) аппроксимируется отношением пар натуральных чисел  $m_i$  и  $n_i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ), при этом скорость сходимости при  $i \rightarrow \infty$  определяется мерой иррациональности  $\mu$  и может быть различной, то есть

$$\left| \rho - \frac{m}{n} \right| < \frac{C}{n^\mu}. \quad (1.2)$$

Для диофантовых иррациональных чисел  $\mu = 2$ .

В [5] доказано, что для отображения окружности (1.1)

$$\langle \tau_{\text{inf}}(\varepsilon) \rangle \sim \varepsilon^{-\frac{d}{\nu(\rho)}} \quad \text{или} \quad \ln \langle \tau_{\text{inf}}(\varepsilon) \rangle \sim -\frac{d}{\nu(\rho)} \ln \varepsilon, \quad \varepsilon \ll 1, \quad d = 1. \quad (1.3)$$

Здесь  $\langle \tau_{\text{inf}}(\varepsilon) \rangle$  — среднее минимальное время возврата, вычисляемое путем покрытия множества (1.1) отрезками величиной  $\varepsilon$ ,  $\nu(\rho)$  — максимальная скорость диофантовых приближений иррационального числа  $\rho$  по всем возможным парам чисел  $m$  и  $n$  в (1.2),  $d$  — фрактальная размерность множества, которая для (1.1) равна единице. В общем случае для эргодических множеств с нулевой топологической энтропией доказано [4, 5], что

$$\ln \langle \tau_{\text{inf}}(\varepsilon) \rangle \sim -\frac{d}{\alpha_c} \ln \varepsilon, \quad \varepsilon \ll 1, \quad (1.4)$$

где  $\alpha_c$  — размерность Афраймовича–Песина. Сравнивая (1.3) и (1.4), получаем, что для сдвигов на окружности (1.1)  $\alpha_c = \nu(\rho)$ . АП-размерность в этом случае строго совпадает со скоростью диофантовых приближений  $\nu(\rho)$ . Учитывая, что для диофантовых иррациональных чисел  $\nu(\rho) = \mu - 1$ , получаем, что  $\alpha_c = 1$  [4].

Результаты теории для отображения окружности (1.1) были подтверждены численным экспериментом в нашей работе [6]. При этом была установлена универсальная зависимость  $\tau_{\text{inf}}(\varepsilon)$ , названная «лестницей Фибоначчи». Эта зависимость представлена на рисунке 1 и отвечает значению  $\rho = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$ , которое часто называют золотым сечением. Лестница Фибоначчи удовлетворяет следующим свойствам:

1. последовательность значений  $\tau_{\text{inf}}(\varepsilon)$  с уменьшением величины  $\varepsilon$  строго совпадает с последовательностью чисел основного ряда Фибоначчи (указано на рис. 1),
2. при изменении величины  $\varepsilon$  в пределах любой из ступенек лестницы регистрируются три времени возврата:  $\tau_1 < \tau_2 < \tau_3$ , причем  $\tau_3 = \tau_1 + \tau_2$  и  $\tau_1 = \tau_{\text{inf}}$ ,
3. ширина каждой ступеньки и ее высота на графике (рис. 1) определяются числом вращения:  $\Delta = -\ln \rho$ .

Интересно рассмотреть реальную динамическую систему, которая позволила бы получить эргодическое множество типа (1.1) и проверить экспериментально закономерности, установленные для отображения окружности. В настоящей работе рассматривается неавтономный генератор ван дер Поля. Множество типа отображения окружности (1.1) в данной системе можно реализовать путем расчета стробоскопического сечения фазовых траекторий системы через период внешней силы.

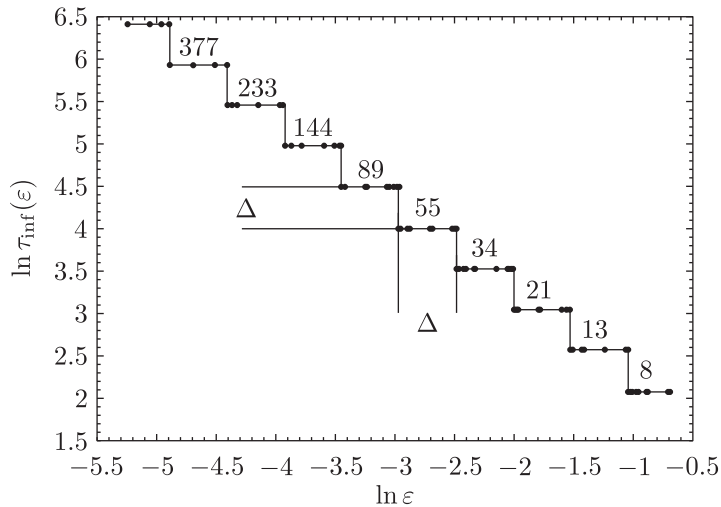


Рис. 1. «Лестница Фибоначчи»: зависимость минимального времени возврата Пуанкаре от размера окрестности отображения окружности (1.1) при  $\rho = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$  [6].

## 2. Рассматриваемая модель и результаты численного анализа

Рассмотрим динамическую систему в виде неавтономного генератора ван дер Поля, заданную уравнениями

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = \alpha(1 - x^2)y - \omega_0^2 x + A \sin \Omega t, \end{cases} \quad (2.1)$$

где  $\alpha > 0$  — параметр возбуждения,  $\omega_0$  — собственная частота автоколебаний,  $A$  и  $\Omega$  — амплитуда и частота внешнего сигнала.

С целью формирования интересующего нас множества типа отображения окружности (1.1) произведем замену переменных в (2.1) следующим образом:

$$\begin{aligned} \Theta &= \Omega t, \\ x &= a \cos(\Omega t + \varphi) = a \cos \psi, \\ y &= -a\Omega \sin(\Omega t + \varphi) = -a\Omega \sin \psi, \end{aligned} \quad (2.2)$$

где  $a$  и  $\psi$  — амплитуда и фаза колебаний осциллятора ван дер Поля (2.1) в полярной системе координат,  $\Theta$  — фаза сигнала внешнего воздействия. Произведя замену переменных (2.2), из (2.1) получим систему уравнений для амплитуды и фазы колебаний в виде

$$\begin{aligned} \dot{a} &= (1 - a^2 \cos^2 \psi)\alpha a \sin^2 \psi - \frac{\Omega^2 - \omega_0^2}{2\Omega} a \sin 2\psi - \frac{A}{\Omega} \sin \psi \sin \Theta, \\ \dot{\psi} &= \Omega + (1 - a^2 \cos^2 \psi) \frac{\alpha \sin 2\psi}{2} - \frac{\Omega^2 - \omega_0^2}{2\Omega} (\cos 2\psi - 1) - \frac{A}{a\Omega} \cos \psi \sin \Theta, \\ \dot{\Theta} &= \Omega. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Система (2.3) имеет размерность  $N = 3$  и описывает движение фазовых траекторий на двумерном торе.

Рассмотрим стробоскопическое сечение путем вычислений амплитуды  $a$  и фазы  $\psi$  через период внешней силы  $T = 2\pi/\Omega$ . Мы получим двумерное дискретное множество на плоскости координат  $(a, \psi)$ .

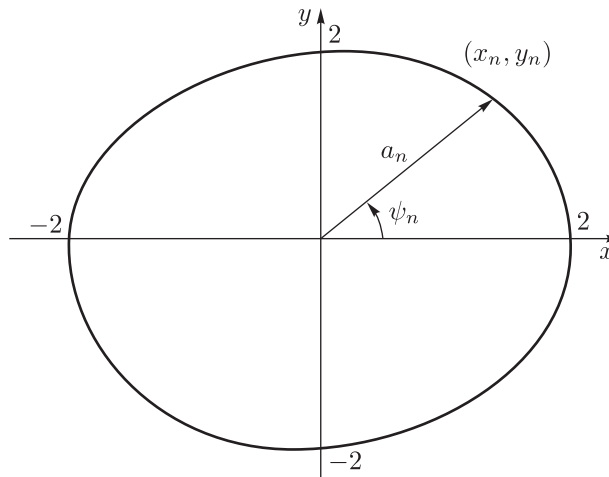


Рис. 2. Множество точек  $\{x_n, y_n\}$  в стробоскопическом сечении при  $\alpha = 0.1$ ,  $\omega_0 = 1$ ,  $A = 0.1$ ,  $\Omega = 1.533$ .

Как видно из рисунка 2, полученное множество лежит практически на окружности, то есть амплитуда  $a \approx 2.0$  и дискретные точки всюду плотно ее покрывают в силу того, что при  $\Omega = 1.533$  число вращения иррационально. Фаза каждой последующей точки меняется по закону

$$\psi_{n+1} = \psi_n + \Delta, \quad \Delta = 2\pi\rho \pmod{2\pi}. \quad (2.4)$$

Таким образом, множество точек в стробоскопическом отображении системы (2.3) близко к отображению окружности, если считать, что  $a = 2 = \text{const}$ .

Относительно числа вращения на окружности (2.4), порождаемой стробоскопическим сечением, заметим следующее. Число вращения  $\rho$  определяется как среднее приращение угла  $\psi$  за одну итерацию отображения по отношению к полному углу:

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\psi_n - \psi_0}{2\pi n}. \quad (2.5)$$

Несложно показать, что поворот фазы  $\Delta$  в (2.4) связан с числом вращения ( $\Delta = 2\pi\rho$ ) и зависит как от собственной частоты осциллятора ван дер Поля  $\omega$ , так и от частоты внешнего воздействия  $\Omega$ . Зависимость числа вращения от частоты  $\Omega$  при фиксированных параметрах  $\alpha = 0.1$ ,  $\omega_0 = 1$ ,  $A = 0.1$  приведена на рисунке 3. Как видно из рисунка, график соответствует зависимости

$$\rho = \omega_0/\Omega \quad (2.6)$$

с погрешностью  $\approx 0.0015$ .

На графике виден резонанс  $1 : 1$ , когда  $\omega_0 = \Omega = 1$ . Теоретически график должен содержать бесконечное множество «полочек», отвечающих резонансам  $\omega_0/\Omega = l/k$ , где  $l, k = 1, 2, \dots$ . Этот график называют «дьявольской лестницей» [7]. Однако резонансы высоких порядков ( $k > 1$ ) в представленном масштабе не проявляются в силу их малости по переменной  $\Omega$  и малости амплитуды внешнего сигнала по отношению к амплитуде генератора ван дер Поля.

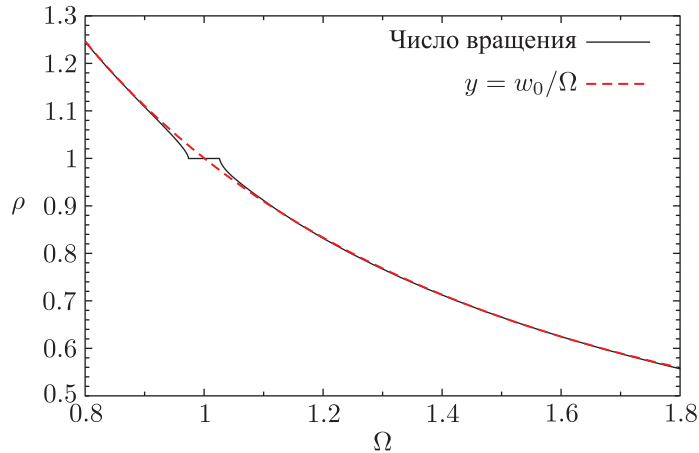


Рис. 3. Зависимость числа вращения от частоты внешнего воздействия. Значения параметров:  $\omega_0 = 1$ ,  $\alpha = 0.1$ ,  $A = 0.1$ .

Нас будет интересовать случай золотого сечения, когда  $\rho = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$ . Экспериментально было получено, что золотому сечению отвечает частота внешнего воздействия  $\Omega = 1.61637276$ .

Обсудим еще одно свойство, позволяющее считать множество точек в стробоскопическом сечении аналогом отображения окружности. Для классической модели (1.1) известно, что распределение вероятностей для точек на окружности является равномерным. Были проведены соответствующие расчеты, результаты которых представлены на рисунке 4.

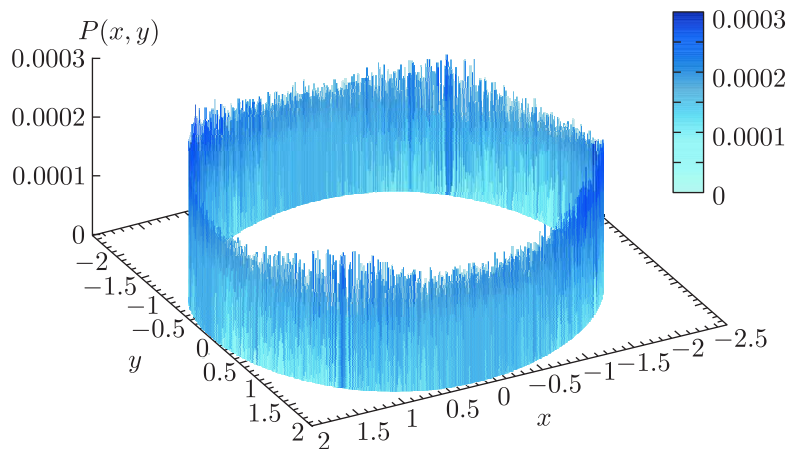


Рис. 4. Распределение вероятностей для множества точек в стробоскопическом сечении. Значения параметров:  $\omega_0 = 1$ ,  $\alpha = 0.1$ ,  $A = 0.1$ ,  $\Omega = 1.61637276$ .

Как видно из рисунка 4, распределение вероятностей для точек на окружности практически является равномерным, а значит, можно рассчитывать статистику возвратов на полученном множестве и сравнивать результаты с теорией.

Вычислим зависимость  $\langle \tau_{\text{inf}}(\varepsilon) \rangle$  на множестве точек стробоскопического сечения  $\psi_n$  системы (2.3) для  $\omega_0 = 1$  и числа вращения  $\rho$ , соответствующего золотому сечению, то есть для  $\rho = 0.5(\sqrt{5} - 1)$ . Золотому сечению отвечает значение  $\Omega = 1.61637276$ . В силу рав-

номерности распределения проведем расчеты возвратов в  $\varepsilon$ -окрестности одной заданной точки множества. Результаты представлены на рисунке 5.

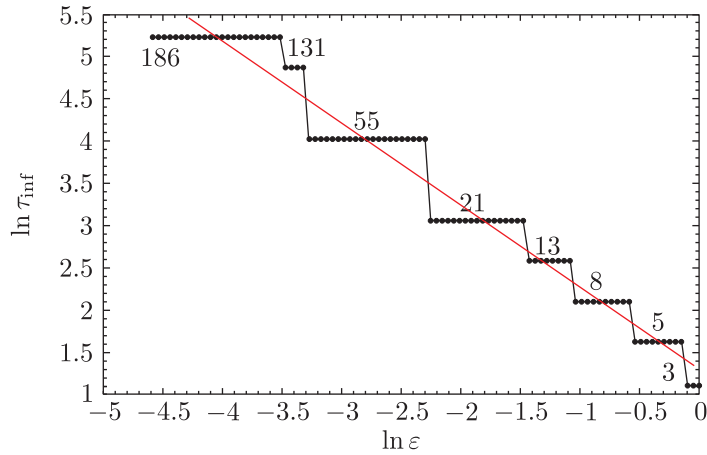


Рис. 5. «Лестница Фибоначчи»: зависимость минимального времени возврата Пуанкаре от размера окрестности точки  $x_0 = 0$ ,  $y_0 = -1.17472$  системы (2.3) при  $\omega_0 = 1$ ,  $\alpha = 0.1$ ,  $A = 0.1$ ,  $\Omega = 1.61637276$ .

Из сравнения экспериментальных данных (рис. 5) с данными по отображению окружности (1.1) (рис. 1) можно сделать следующие выводы. В области относительно больших значений  $-2.5 \leq \ln \varepsilon < 0$  имеет место достаточно хорошее соответствие:

- возрастающая с уменьшением величины  $\ln \varepsilon$  последовательность значений  $\tau_{\text{inf}}(\varepsilon)$  отвечает последовательности чисел основного ряда Фибоначчи (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21),
- при изменении величины  $\varepsilon$  в пределах любой из ступенек лестницы регистрируются три времени возврата:  $\tau_1 < \tau_2 < \tau_3$ , причем  $\tau_3 = \tau_1 + \tau_2$  и  $\tau_1 = \tau_{\text{inf}}$ ,
- длины и высоты ступенек приблизительно удовлетворяют универсальным свойствам:

$$\begin{aligned} \Delta \varepsilon_i &= \ln \varepsilon_i - \ln \varepsilon_{i+1} = \text{const} = \ln \rho, \\ \Delta \tau_i &= \ln \tau_{\text{inf}}(\varepsilon_{i+1}) - \ln \tau_{\text{inf}}(\varepsilon_i) = \text{const} = \ln \rho. \end{aligned} \quad (2.7)$$

В области малых значений  $\ln \varepsilon < -2.5$  универсальность лестницы Фибоначчи в эксперименте (рис. 5) нарушается. Расчеты показали, что с уменьшением величины  $\varepsilon$  ошибка в вычислении значения  $\tau_{\text{inf}}$  увеличивается. Это связано с тем, что в дифференциальной системе (2.3) сложно подобрать параметры так, чтобы число вращения  $\rho$  соответствовало точно золотому сечению. Расчеты показали, что, используя уравнение (2.3), число вращения можно определить с точностью максимум до восьмого знака после запятой (то есть до  $10^{-8}$ ). Однако этой относительно высокой степени точности расчетов недостаточно для получения универсальных свойств лестницы Фибоначчи при малых  $\ln \varepsilon < -2.5$ . Отметим, что при расчетах лестницы Фибоначчи с использованием отображения окружности (1.1) число вращения задавалось с точностью до пятнадцатого знака после запятой.

Влияние точности задания числа вращения можно оценить численно, если рассмотреть отображение (1.1) в условиях воздействия шума:

$$x_{n+1} = x_n + \Delta + \sqrt{2D}\xi(n), \quad (2.8)$$

где  $\xi(n)$  — источник гауссова шума,  $D$  — интенсивность шума. Учитывая, что при расчетах (рис. 5) точность задания числа вращения была  $\approx 10^{-8}$ , интенсивность шума в (2.8) зададим как  $D = 5 \cdot 10^{-7}$ . Результаты расчетов представлены на рисунке 6.

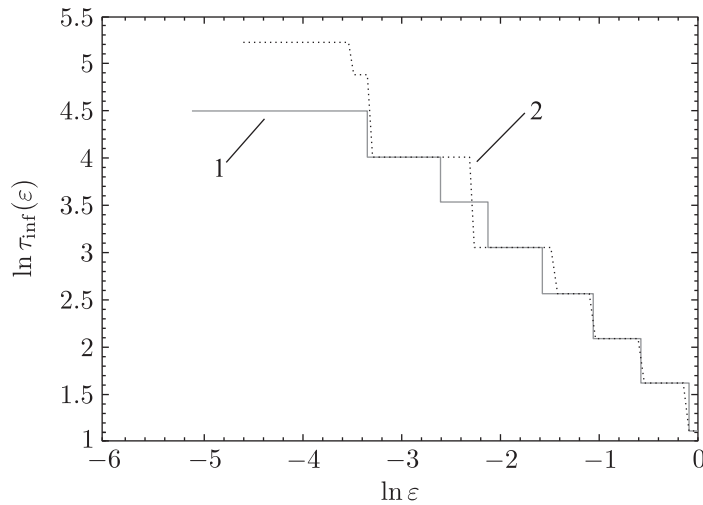


Рис. 6. Расчет зависимости  $\ln \tau_{\text{inf}}(\varepsilon)$  для зашумленной системы (2.8) (график 1) и в стробоскопическом сечении (график 2).

Сопоставление результатов графиков 1 и 2 на рисунке 6 качественно объясняет расхождение данных экспериментов с стробоскопическим сечением (рис. 5) и с отображением (1.1) (рис. 1). Видно, что в зашумленной системе наблюдается сходство с графиком на рисунке 1 только для  $\ln \varepsilon > -2.5$ , а при  $\ln \varepsilon < -2.5$  появляются различия. Можно сделать вывод, что при задании интенсивности  $D \approx 10^{-7}$  точность в определении числа вращения не может превышать этот уровень ( $\sim 10^{-7}$ ).

Используя теоретическую закономерность (1.4), по экспериментальным данным (рис. 5) можно определить величину АП-размерности, вычисляя средний наклон графика зависимости  $\langle \tau_{\text{inf}}(\varepsilon) \rangle = |k| = \frac{1}{\alpha_c}$ . Если провести усреднение по интервалу изменения значения  $\varepsilon$  ( $-2.5 \leq \ln \varepsilon < 0$ ), то получаем  $|k| = 1.02$ . Отсюда следует, что  $\alpha_c = \nu(\rho) \approx 1$  и имеет место полное соответствие теории и эксперимента. Если проводить усреднение по всему интервалу изменения значения  $\varepsilon$  ( $-5 \leq \ln \varepsilon < 0$ ), то получаем  $\alpha_c = \nu(\rho) = 0.954338$ , что с ошибкой 4.57% отличается от теории, но тем не менее дает результат, близкий к теоретическому. Результат усреднения  $\langle \tau_{\text{inf}}(\varepsilon) \rangle$  показан на рисунке 5 пунктирной линией.

### 3. Выводы

В работе представлены результаты статистического анализа множества, полученного путем расчета стробоскопического сечения через период внешней силы в генераторе ван дер Поля с внешним гармоническим возбуждением. Установлено, что рассматриваемое множество имеет свойства отображения окружности с иррациональным числом вращения  $\rho$ . Число вращения задается отношением частот  $\omega_0/\Omega$ . Исследование статистики времен возврата в рассматриваемое множество показало хорошее соответствие с теоретическими данными: построена лестница Фибоначчи и показано, что АП-размерность множества равна единице.

## Список литературы

- [1] Немыцкий В. В., Степанов В. В. Качественная теория дифференциальных уравнений. Москва: ОГИЗ, 1947. 456 с.
- [2] Пуанкаре А. Избранные труды: В 3-х тт.: Т. 2: Новые методы небесной механики. Топология. Теория чисел. Москва: Наука, 1972. 360 с.
- [3] Hirata M., Saussol B., Vaienti S. Statistics of return times: A general framework and new applications // *Comm. Math. Phys.*, 1999, vol. 206, no. 1, pp. 33–55.
- [4] Афраймович В., Угальде Э., Уриас Х. Фрактальные размерности для времен возвращения Пуанкаре. Москва–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2011. 290 с.
- [5] Afraimovich V. Pesin's dimension for Poincaré recurrences // *Chaos*, 1997, vol. 7, no. 1, pp. 12–20.
- [6] Semenova N. I., Vadivasova T. E., Anishchenko V. S. Statistical properties of Poincaré recurrences and Afraimovich–Pesin dimension for the circle map // *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, 2014 (принята в печать).
- [7] Кузнецов С. П. Динамический хаос. Москва: Физматлит, 2001. 266 с.

## Poincaré recurrences in a stroboscopic section of a nonautonomous van der Pol oscillator

Nadezhda I. Semenova<sup>1</sup>, Vadim S. Anishchenko<sup>2</sup>

<sup>1,2</sup>International Research Institute of Nonlinear Dynamics Saratov State University Astrakhanskaya 83, Saratov, 410026, Russia

<sup>1</sup>harbour2006@mail.ru, <sup>2</sup>wadim@info.sgu.ru

In the present work we analyze the statistics of a set that is obtained by calculating a stroboscopic section of phase trajectories in a harmonically driven van der Pol oscillator. It is shown that this set is similar to a linear shift on a circle with an irrational rotation number, which is defined as the detuning between the external and natural frequencies. The dependence of minimal return times on the size  $\varepsilon$  of the return interval is studied experimentally for the golden ratio. Furthermore, it is also found that in this case, the value of the Afraimovich–Pesin dimension is  $\alpha_c = 1$ .

MSC 2010: 37B20

Keywords: Poincaré recurrence, Afraimovich–Pesin dimension, Fibonacci stairs, circle map, van der Pol oscillator

Received April 18, 2014, accepted May 15, 2014

Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2014, vol. 10, no. 2, pp. 149–156 (Russian)