



УДК: 532.51

MSC 2010: 76F02, 76F45, 76M45, 76R05, 76U05

Волны Стокса в завихренной жидкости

С. Н. Аристов, Е. Ю. Просвиряков

Приведено решение второй задачи Стокса для завихренной вязкой несжимаемой жидкости. Найденные решения представляют собой эллиптические поляризованные поперечные волны. Показана возможность усиления волн Стокса на верхней границе по сравнению с заданными вибрациями на нижней жесткой плоскости.

Ключевые слова: вторая задача Стокса, слоистые течения, завихренная жидкость, точное решение, усиление волн, эллиптическая поляризация

Введение

Колебательное движение вязкой несжимаемой жидкости в полупространстве впервые было рассмотрено Стоксом [1]. Это движение индуцировалось колебанием нижней границы относительно координатной оси Oy , при этом верхняя граница оставалась свободной: касательное напряжение на поверхности слоя жидкости было равным нулю. Характерной особенностью второй задачи Стокса является наличие поперечных волн, а также их быстрое затухание при удалении от твердой поверхности, вызывающей колебание жидкости [1–3].

Полученное решение второй задачи Стокса для ньютоновских несжимаемых жидкостей было обобщено на слабовязкую жидкость [4] и жидкости с выраженными реологическими

Получено 09 июня 2014 года

После доработки 24 августа 2014 года

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 12-01-00023-а), ФСР МФП НТС (программа СТАРТ) и ИВФ РТ (программа СТАРТ).

Аристов Сергей Николаевич

asn@icmm.ru

Институт механики сплошных сред УрО РАН

614013, Россия, г. Пермь, ул. Ак. Королёва, д. 1

Просвиряков Евгений Юрьевич

evgen_pros@mail.ru

Казанский государственный национальный исследовательский университет

им. А. Н. Туполева (КАИ)

420111, Россия, г. Казань, ул. Карла Маркса, д. 10

Институт машиноведения УрО РАН

620049, Россия, г. Екатеринбург, ул. Комсомольская, д. 34

свойствами [5–8]. В последнее время появились работы, в которых исследования второй задачи Стокса проводятся не только в координатах Эйлера, но и в переменных Лагранжа [9]. Отметим, что течение Стокса является слоистым [1–3], при описании которого конвективная часть полной производной (производной Лагранжа) тождественно равна нулю. Таким образом, интерес представляет задача нахождения решения, описывающего колебательные движения жидкости с ненулевой конвективной производной (влияние завихренности на перенос вибрационных возмущений). В данной статье дается ответ на этот важный вопрос.

1. Постановка задачи

Известно, что течение вязкой несжимаемой жидкости описывается системой уравнений Навье–Стокса и уравнением несжимаемости [1–3]:

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = -\nabla P + \nu \Delta \mathbf{V}, \quad (1.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0. \quad (1.2)$$

Здесь $\mathbf{V} = (V_x, V_y, V_z)$ — вектор скорости, P — давление, деленное на постоянную среднюю плотность жидкости ρ , ν — коэффициент кинематической вязкости, $\frac{d}{dt}$ — полная производная, ∇ , Δ — дифференциальные операторы Гамильтона и Лапласа соответственно, определенные в декартовой прямоугольной системе координат.

Будем изучать такие течения вязкой несжимаемой жидкости, для которых верхняя граница слоя жидкости на протяжении всего времени не деформируется (является плоской). При отсутствии искривления поверхности давление будет постоянным, а вертикальная скорость равна нулю. Отметим, что в этом случае описываются крупномасштабные течения [10]. Следовательно, система (1.1)–(1.2) преобразуется к следующей переопределенной системе уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_x}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} &= \nu \left(\frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2} \right), \\ \frac{\partial V_y}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_y}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_y}{\partial y} &= \nu \left(\frac{\partial^2 V_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial z^2} \right), \\ \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Решение последней системы уравнений будем искать в виде

$$V_x = u(z, t) + \Omega \frac{z}{h} y, \quad V_y = v(z, t). \quad (1.4)$$

Здесь $\Omega = \frac{\partial V_x}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial x}$ — вертикальная компонента завихренности, вычисленная при $z = h$ для скоростей, определяемых равенствами (1.4) (здесь и далее постоянная величина) [3, 12]. Выражения (1.4) представляют класс решений уравнений Навье–Стокса, в которых скорости жидкости линейно зависят от горизонтальных координат x и y , а коэффициенты — от вертикальной координаты z и времени t .

В работе [3] приведен обзор класса решений, записанных в виде (1.4), которые были впервые предложены в работе [11] для уравнений проводящей жидкости в магнитном поле. В том же обзоре [3] указаны все известные и найдены новые решения, описывающие так называемые слоистые течения. Описанное ниже решение не было приведено в [3]. Отметим, что в обзоре [3] и в библиографическом списке к нему рассматривается более широкий класс решений типа (1.4). Однако, как было показано в работе [12], для описания слоистых течений без потери общности можно рассматривать класс решений вида (1.4).

Подставляя в систему уравнений (1.3) выражения для скоростей (1.4), получим систему уравнений, записанную в операторном виде:

$$\widehat{L}v = 0, \quad \widehat{L}u = -\Omega \frac{z}{h}v, \quad (1.5)$$

где $\widehat{L} = \frac{\partial}{\partial t} - \nu \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ — диффузионный дифференциальный оператор параболического типа [10].

Характерной особенностью второй задачи Стокса является задание нестационарных граничных условий. Это обстоятельство означает, что течение жидкости задается не в какой-то определенный момент времени (как правило, нулевой), а в любой момент времени. Иными словами, волны Стокса описывается краевой задачей, а не начально-краевой.

Для начала отметим, что возмущение границы может происходить, вообще говоря, по произвольному закону. Однако эти возмущения при необременительных ограничениях можно разложить в ряд Фурье, поэтому в дальнейшем будем анализировать поведение отдельных Фурье-компонент, а для получения ответа просуммируем их [2].

На нижней границе, при $z = 0$, зададим граничные условия, которые являются периодическими колебаниями (вибрациями)

$$V_x = A \cos \omega t, \quad V_y = B \sin \omega t,$$

где A , B и ω — вещественные постоянные. Проанализируем траектории частиц жидкости, находящихся на твердой границе. Поскольку при взаимодействии жидкости с твердой поверхностью справедливо условие прилипания, то корректно говорить о движении частиц, составляющих твердую поверхность. Отметим справедливость следующих равенств [2]:

$$V_x = \frac{\partial x}{\partial t}, \quad V_y = \frac{\partial y}{\partial t}.$$

Интегрируя последние уравнения, получим параметрическое уравнение траекторий:

$$x = x_0 - \frac{A}{\omega} \sin \omega t, \quad y = y_0 + \frac{B}{\omega} \cos \omega t. \quad (1.6)$$

Здесь x_0 и y_0 — функции, зависящие от координат x и y . Очевидно, что траектории движения нижней поверхности представляют собой эллипсы. Важно заметить, что ранее были описаны только движения жидкости при поступательном и вращательном движениях твердой поверхности [3]. Данный тип движения твердой поверхности используется старателями при добыче золота: именно так движется лоток, на котором промывают золото.

Далее будем рассматривать краевые условия, характерные для второй задачи Стокса [1–3]

$$\text{при } z = 0: \quad u = 0, \quad v = A \sin \omega t. \quad (1.7)$$

Верхняя граница является свободной (отсутствуют касательные напряжения):

$$\text{при } z = h: \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial z} = 0. \quad (1.8)$$

Далее краевая задача (1.5), (1.7), (1.8) будет предметом исследования. По сравнению с граничными условиями, заданными для описания волн Стокса, мы не требуем затухания скорости на бесконечности, а рассматриваем слой жидкости конечной толщины h [1].

2. Решение краевой задачи, описывающей колебания завихренной жидкости

Решение системы (1.5) будем искать в виде

$$\begin{aligned} u &= U(z) \exp(i\omega t) + U^*(z) \exp(-i\omega t), \\ v &= V(z) \exp(i\omega t) + V^*(z) \exp(-i\omega t). \end{aligned} \quad (2.1)$$

Здесь звездочка обозначает комплексное сопряжение соответствующих функций, i — мнимая единица. Подставляя соотношения (2.1) в уравнение (1.5), имеем

$$i\omega V - \nu \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0, \quad i\omega U - \nu \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = -\Omega \frac{z}{h} V. \quad (2.2)$$

Решение уравнений (2.2) записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} V &= V_1 \exp(k(1+i)z) + V_2 \exp(-k(1+i)z), \\ U &= \left[U_1 + V_1 \left(\frac{\Omega(1-i)}{8\nu kh} z^2 + \frac{i\Omega}{4\omega h} z \right) \right] \exp(k(1+i)z) + \\ &+ \left[U_2 + V_2 \left(\frac{\Omega(i-1)}{8\nu kh} z^2 + \frac{i\Omega}{4\omega h} z \right) \right] \exp(-k(1+i)z). \end{aligned}$$

Здесь $k^2 = \frac{\omega}{2\nu}$ — дисперсионное соотношение, V_1, V_2, U_1, U_2 — постоянные интегрирования, которые могут быть, вообще говоря, комплексными числами. Заметим, что волновое число k зависит от кинематической вязкости ν при фиксированной частоте колебаний ω .

Сформулируем граничные условия, учитывая равенства (1.7) и (1.8) для вычисления постоянных интегрирования уравнений (2.2). На нижней границе справедливы следующие соотношения

$$\text{при } z = 0: \quad U = 0, \quad V = -iA;$$

верхняя граница является свободной

$$\text{при } z = h: \quad \frac{dU}{dz} = 0, \quad \frac{dV}{dz} = 0.$$

Из соображений компактности результатов будем искать решения для функции V в виде

$$V = C_1 \exp(k(1+i)(z-h)) + C_2 \exp(-k(1+i)(z-h)),$$



где C_1 и C_2 — модифицированные постоянные интегрирования для вычисления скорости V . Система уравнений, вытекающая из граничных условий для функции V , записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} C_1 \exp(-k(1+i)h) + C_2 \exp(k(1+i)) &= -iA, \\ C_1 - C_2 &= 0. \end{aligned}$$

Решая систему, получим

$$C_1 = C_2 = \frac{-iA}{2 \cosh(kh(1+i))}.$$

Следовательно,

$$V_1 = \frac{-iA \exp(-k(1+i))}{2 \cosh(kh(1+i))}, \quad V_2 = \frac{-iA \exp(k(1+i))}{2 \cosh(kh(1+i))}.$$

Подставим постоянные интегрирования, получим в комплексной форме выражение для скорости V :

$$V(z) = \frac{-iA \cosh(k(1+i)(z-h))}{\cosh(kh(1+i))}.$$

Согласно формуле (2.1), скорость, параллельная оси ординат, определяется как

$$\begin{aligned} V_y = v &= \frac{-iA}{2 \cosh(kh(1+i))} \times \\ &\times [\exp(k(z-h) - ikh) \exp(i(\omega t + kz)) + \exp(-k(z-h) + ikh) \exp(i(\omega t - kz))] + \\ &+ \frac{iA}{2 \cosh(kh(1+i))} \times \\ &\times [\exp(k(z-h) + ikh) \exp(-i(\omega t + kz)) + \exp(-k(z-h) - ikh) \exp(-i(\omega t - kz))]. \end{aligned}$$

Выделяем из последнего равенства вещественную и мнимую части, получаем выражение для скорости V_y , записанное в виде бегущих волн:

$$\begin{aligned} V_y &= \frac{A \exp(-kz) \sin(2kh)}{2 [\cosh(2kh) + \cos(2kh)]} \cos(kz - \omega t) - \\ &- \frac{A [\exp(-k(z-2h)) + \exp(-kz) \cos(2kh)]}{2 [\cosh(2kh) + \cos(2kh)]} \sin(kz - \omega t) - \\ &- \frac{A \exp(kz) \sin(2kh)}{2 [\cosh(2kh) + \cos(2kh)]} \cos(kz + \omega t) - \\ &- \frac{A [\exp(k(z-2h)) + \exp(kz) \cos(2kh)]}{2 [\cosh(2kh) + \cos(2kh)]} \sin(kz + \omega t). \end{aligned} \tag{2.3}$$

Далее определим постоянные интегрирования U_1 и U_2 . Выражение для функции преобразуем к виду

$$\begin{aligned} U &= \exp(kh(1+i)) \left[U_1 + C_1 \left(\frac{\Omega(1-i)}{8\nu kh} z^2 + \frac{i\Omega}{4\omega h} z \right) \right] \exp(k(1+i)(z-h)) + \\ &+ \exp(-kh(1+i)) \left[U_2 + C_2 \left(\frac{\Omega(i-1)}{8\nu kh} z^2 + \frac{i\Omega}{4\omega h} z \right) \right] \exp(-k(1+i)(z-h)). \end{aligned}$$

Система уравнения для определения постоянных интегрирования U_1 и U_2 имеет вид

$$\begin{aligned}
 &U_1 + U_2 = 0, \\
 &\exp(kh(1+i)) \left[U_1 + C_1 \left(\frac{\Omega(1-i)}{4\nu k} + \frac{i\Omega}{4\omega h} \right) \right] + \\
 &+ k(1+i) \exp(kh(1+i)) \left[U_1 + C_1 \left(\frac{\Omega(1-i)}{8\nu k} h + \frac{i\Omega}{4\omega} \right) \right] + \\
 &+ \exp(-kh(1+i)) \left[U_2 + C_2 \left(\frac{\Omega(i-1)}{4\nu k} + \frac{i\Omega}{4\omega h} \right) \right] - \\
 &- k(1+i) \exp(-kh(1+i)) \left[U_2 + C_2 \left(\frac{\Omega(i-1)}{8\nu k} h + \frac{i\Omega}{4\omega} \right) \right] = 0.
 \end{aligned}$$

Постоянные интегрирования — решения последней алгебраической системы — записываются следующим образом:

$$U_1 = \frac{A\Omega}{4\omega} \left[\frac{1-i}{4kh} + \frac{hk(1+i)}{2} \right], \quad U_2 = \frac{A\Omega}{4\omega} \left[\frac{i-1}{4kh} - \frac{hk(1+i)}{2} \right].$$

Таким образом, вычислено выражение для однородной компоненты U скорости V_x :

$$\begin{aligned}
 U = &\frac{A\Omega}{4\omega} \left[\frac{1-i}{4kh} + \frac{hk(1+i)}{2} \frac{k(i+1)z^2 - z}{h[1 + \exp(2kh(1+i))]} \right] \exp(k(1+i)z) + \\
 &+ \frac{A\Omega}{4\omega} \left[\frac{i-1}{4kh} - \frac{hk(1+i)}{2} + \frac{\exp(2kh(1+i))}{h[1 + \exp(2kh(1+i))]} k(i+1)z^2 + z \right] \exp(-k(1+i)z).
 \end{aligned}$$

В этом случае скорость, параллельная оси Ox , может быть представлена в виде бегущих волн следующим образом:

$$\begin{aligned}
 V_x = &\frac{A\Omega}{4\omega} \exp(kz) \left[\frac{1-i}{4kh} + \frac{hk(1+i)}{2} - \frac{k(i+1)z^2 - z}{h[1 + \exp(2kh(1+i))]} \right] \exp(i(kz + \omega t)) + \\
 &+ \frac{A\Omega}{4\omega} \exp(-kz) \times \\
 &\times \left[\frac{i-1}{4kh} - \frac{hk(1+i)}{2} + \frac{\exp(2kh(1+i))}{h[1 + \exp(2kh(1+i))]} k(i+1)z^2 + z \right] \exp(i(\omega t - kz)z) + \\
 &+ \frac{A\Omega}{4\omega} \exp(kz) \times \\
 &\times \left[\frac{1+i}{4kh} + \frac{hk(1-i)}{2} - \frac{k(-i+1)z^2 - z}{h[1 + \exp(2kh(1-i))]} \right] \exp(-i(kz + \omega t)) + \\
 &+ \frac{A\Omega}{4\omega} \exp(-kz) \times \\
 &\times \left[-\frac{i+1}{4kh} - \frac{hk(1-i)}{2} + \frac{\exp(2kh(1-i))}{h[1 + \exp(2kh(1-i))]} k(-i+1)z^2 + z \right] \exp(-i(\omega t - kz)z) + \Omega \frac{z}{h} y.
 \end{aligned}$$

Выделяем вещественную и мнимую части, получаем

$$\begin{aligned}
 V_x = & \frac{A\Omega}{4\omega} \exp(kz) \cos(kz + \omega t) \times \\
 & \times \left[\frac{kh}{2} + \frac{1}{4kh} + \frac{-kz^2(1 + \exp(2kh)\cos(2kh) + \sin(2kh)) + z(1 + \exp(2kh)\cos(2kh))}{h[1 + 2\exp(2kh)\cos(2kh) + \exp(4kh)]} \right] + \\
 & + \frac{A\Omega}{4\omega} \exp(kz) \sin(kz + \omega t) \times \\
 & \times \left[-\frac{kh}{2} + \frac{1}{4kh} + \frac{kz^2(1 + \exp(2kh)\cos(2kh) - \sin(2kh)) + z\sin(2kh)}{h[1 + 2\exp(2kh)\cos(2kh) + \exp(4kh)]} \right] + \\
 & + \frac{A\Omega}{4\omega} \exp(-kz) \cos(kz - \omega t) \times \\
 & \times \left[-\frac{kh}{2} - \frac{1}{4kh} + \exp(2kh) \frac{kz^2(\exp(2kh) + \cos(2kh) - \sin(2kh)) + z(\exp(2kh) + \cos(2kh))}{h[1 + 2\exp(2kh)\cos(2kh) + \exp(4kh)]} \right] + \\
 & + \frac{A\Omega}{4\omega} \exp(-kz) \sin(kz - \omega t) \times \\
 & \times \left[\frac{kh}{2} - \frac{1}{4kh} + \exp(2kh) \frac{kz^2(\exp(2kh) + \cos(2kh) + \sin(2kh)) + z\sin(2kh)}{h[1 + 2\exp(2kh)\cos(2kh) + \exp(4kh)]} \right] + \Omega \frac{z}{h} y. \quad (2.4)
 \end{aligned}$$

3. Анализ решений краевой задачи

Отметим, что решения (2.3) и (2.4) содержат решение задачи второй Стокса в незавихренной жидкости для слоя конечной толщины. Для этого в выражениях (1.3) нужно потребовать выполнение равенств

$$u = 0, \quad \Omega = 0.$$

Напомним, что во второй задаче Стокса волны очень быстро затухают, и уже на втором периоде колебаний их влияние на движение жидкости оказывается несущественным [1–3]. Таким образом, огибающая этих волн является монотонно убывающей функцией. Покажем, что при наличии завихренности в жидкости возможно усиление волн. Проанализируем поведение огибающих скоростей на свободной границе слоя жидкости. Без ограничения общности, в формулах (1.3) и (2.1) соответственно положим $y = 0$ и $z = h$, получим

$$\frac{V_y}{A} = F_1 \cos(\omega t - kh) + F_2 \sin(\omega t - kh) + F_3 \cos(\omega t + kh) + F_4 \sin(\omega t + kh).$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
 F_1 &= \frac{\exp(-kh) \sin(2kh)}{2[\cosh(2kh) + \cos(2kh)]}, & F_2 &= \frac{\exp(kh) + \exp(-kh) \cos(2kh)}{2[\cosh(2kh) + \cos(2kh)]}, \\
 F_3 &= \frac{\exp(kh) \sin(2kh)}{2[\cosh(2kh) + \cos(2kh)]}, & F_4 &= \frac{\exp(-kh) + \exp(kh) \cos(2kh)}{2[\cosh(2kh) + \cos(2kh)]}.
 \end{aligned}$$

Для сравнения скорости на свободной поверхности со скоростью на твердой границе граничное условие (1.5) перепишем следующим образом:

$$\frac{v}{A} = \sin \omega t = \frac{1}{2 \cos(kh)} [\sin(\omega t - kh) + \sin(\omega t + kh)].$$

На рисунке 1 представлены графики огибающих безразмерных скоростей $\frac{V_y}{A}$ и $\frac{v}{A}$. Обозначим их следующим образом:

$$F = F_1 + F_2 + F_3 + F_4 = \cosh(kh) \frac{1 + \cos(2kh) + \sin(2kh)}{\cosh(2kh) + \cos(2kh)} \quad \text{и} \quad G = \sec(kh).$$

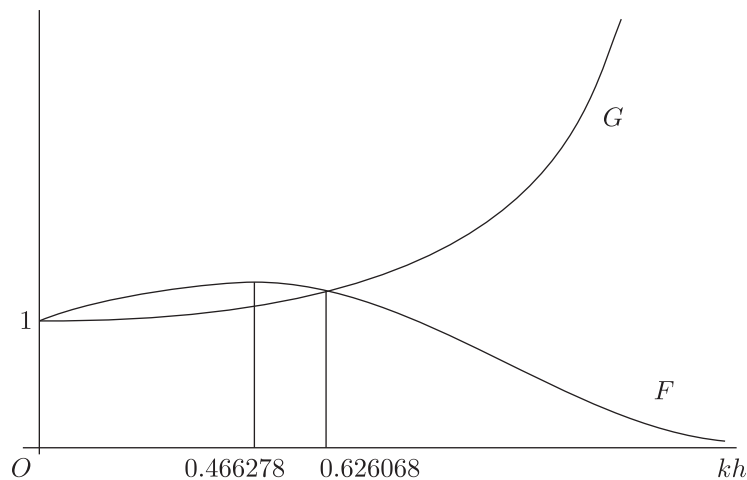


Рис. 1. Графики результирующих огибающих F и G скоростей на свободной и нижней границах слоя вязкой несжимаемой жидкости

Отметим, что функция F больше функции G на интервале $kh \in (0; 0.626028)$. В точках $kh = 0$ и $kh = 0.626028$ функции совпадают. Огибающая F принимает максимальное значение при $kh = 0.466278$. Следовательно, максимальное значение скорости $V_y(0.466278) = 1.29152A$. Очевидно, что имеет место усиление волны при широком диапазоне частот по сравнению с заданной вибрацией. Этот эффект отсутствует в классической постановке Стокса [1–3].

Приведем анализ огибающей H безразмерной скорости $\frac{V_x \omega}{A \Omega}$. Данная составляющая вектора скорости имеет ненулевое значение благодаря наличию завихренности в жидкости. Функция H имеет локальный максимум при $kh = 0.499254$, $V_x = 2.4727 \frac{A \Omega}{\omega}$ и локальный минимум при $kh = 1.33728$, $V_x = 2.1012 \frac{A \Omega}{\omega}$ (рис. 2). После прохождения локального минимума огибающая H будет возрастать. Отметим, что бесконечное возрастание огибающей H ограничено двумя физическими соображениями: приближением несжимаемости и интервалом усиления волн скорости V_y .

Отметим также, что полученные волны, как и во второй задаче Стокса, являются поперечными, причем данные волны, согласно уравнениям (1.6), являются эллиптически поляризованными.

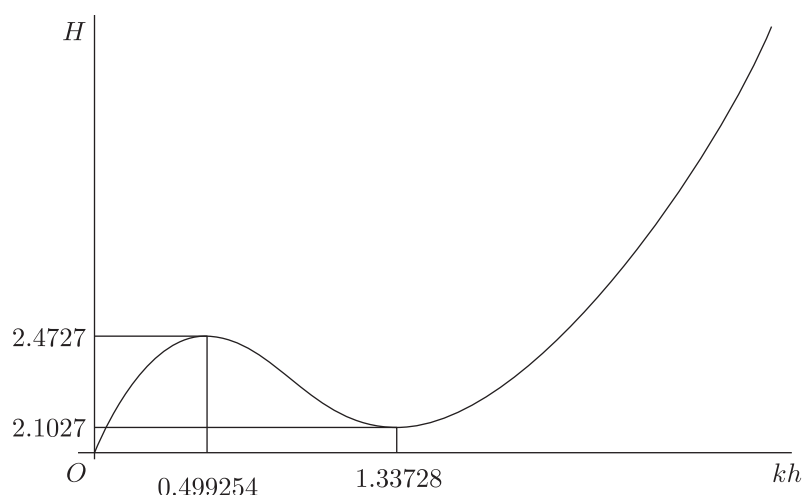


Рис. 2. График результирующей огибающей H скорости V_y на свободной и нижней границах слоя вязкой несжимаемой жидкости

Заключение

В настоящей работе приведено решение второй задачи Стокса для крупномасштабных течений вязкой завихренной несжимаемой жидкости. Проведенный анализ решений показывает, что при определенном диапазоне частот начального периодического возмущения возможно усиление волн на поверхности. Рассуждая аналогично, можно вычислить наибольшие значения скоростей, больших, чем начальные значения, и внутри слоя. Отметим, что волны, индуцируемые вибрацией, являются поперечными и эллиптически поляризованными.

Список литературы

- [1] Stokes G.G. On the effect of the internal friction of fluid on the motion of pendulums // Trans. Cambridge Philos. Soc., 1851, vol. 9, pp. 8–106.
- [2] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика: В 10 тт.: Т. 6: Гидродинамика. 5-е изд. Москва: Физматлит, 2006. 736 с.
- [3] Аристов С. Н., Князев Д. В., Полянин А. Д. Точные решения уравнений Навье–Стокса с линейной зависимостью компонент скорости от двух пространственных переменных // ТОХТ, 2009, т. 43, № 5, с. 547–566.
- [4] Баринов В. А. Распространение волн по свободной поверхности вязкой жидкости // Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 10. Прикл. матем. Информ. Проц. упр., 2010, № 2, с. 18–31.
- [5] Pritchard D., McArdle C.R., Wilson S.K. The Stokes boundary layer for a power-law fluid // J. Non-Newton Fluid, 2011, vol. 166, nos. 12–13, pp. 745–753.
- [6] Rajagopal K.R. A note on unsteady unidirectional flows of a non-Newtonian fluid // Internat. J. Non-Linear Mech., 1982, vol. 17, nos. 5–6, pp. 369–373.
- [7] Rajagopal K.R., Na T.Y. On Stokes' problem for a non-Newtonian fluid // Acta Mech., 1983, vol. 48, nos. 3–4, pp. 233–239.
- [8] Hayat T., Asghar S., Siddiqui A. M. Stokes' second problem for a Johnson–Segalman fluid // Appl. Math. Comput., 2004, vol. 148, no. 3, pp. 697–706.

- [9] Абрашкин А. А., Якубович Е. И. Вихревая динамика в лагранжевом описании. Москва: Физматлит, 2006. 176 с.
- [10] Аристов С. Н., Шварц К. Г. Вихревые течения в тонких слоях жидкости. Киров: ВятГУ, 2011. 207 с.
- [11] Lin C. C. Note on a class of exact solutions in magneto-hydrodynamics // Arch. Rational Mech. Anal., 1957/58, vol. 1, no. 1, pp. 391–395.
- [12] Аристов С. Н., Просвиряков Е. Ю. Неоднородные течения Куэтта // Нелинейная динамика, 2014, т. 10, № 2, с. 177–182.

Stokes waves in vortical fluid

Sergey N. Aristov¹, Eugeny Yu. Prosviryakov²

¹Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS
Ak. Koroleva str. 1, Perm, 614013, Russia

²Kazan National Research Technical University named after A. N. Tupolev
Karl Marx str. 10, Kazan, 420111, Russia

²Institute of Engineering Science UB RAS
Komsomolskaya str. 34, Ekaterinburg, 620049, Russia

¹asn@icmm.ru, ²evgen_pros@mail.ru

The solution of the second task of Stokes for the swirled knitting of incompressible liquid is provided. The found solutions represent the elliptic polarized cross waves. The solution of the second Stokes problem for the swirl flow of a viscous incompressible fluid is presented.

MSC 2010: 76F02, 76F45, 76M45, 76R05, 76U05

Keywords: second Stokes problem, layered flows, vortical fluid, exact solution, wave amplification, elliptical polarization

Received June 09, 2014, accepted August 24, 2014

Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2014, vol. 10, no. 3, pp. 309–318 (Russian)

