



УДК: 532.527, 532.5.013
MSC 2010: 37N05, 76M23

Динамика трех вихреисточников

И. А. Бизяев, А. В. Борисов, И. С. Мамаев

В данной работе показана интегрируемость уравнений системы трех вихреисточников. Получена редуцированная система, описывающая эволюцию конфигураций системы с точностью до подобия. Приведены возможные фазовые портреты и различные относительные равновесия системы.

Ключевые слова: интегрируемость, вихреисточники, форм-сфера, редукция, гомотетические конфигурации

Введение

В классической гидродинамике хорошо изученной является задача о взаимодействии точечных вихрей, подробнее с ней можно ознакомиться по книге [1]. Модель точечных вихрей восходит к Кирхгофу и Гельмгольцу. В работе [2] предложена модель взаимодействия более сложных точечных особенностей, сочетающая в себе вихревые свойства, а также свойства источников и стоков. Такая модель в некоторых случаях более предпочтительна для целей гидродинамики.

Получено 14 августа 2014 года
После доработки 8 сентября 2014 года

Работа Мамаева И. С. и Бизяева И. А. выполнена в рамках государственного задания УдГУ. Работа Борисова А. В. поддержана грантом РФФИ 14-01-00395-а.

Бизяев Иван Алексеевич
bizaev_90@mail.ru
Удмуртский государственный университет
426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, д. 1

Борисов Алексей Владимирович
borisov@rcd.ru
Мамаев Иван Сергеевич
mamaev@rcd.ru
Удмуртский государственный университет
426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, д. 1
Институт математики и механики УрО РАН
620990, Россия, г. Екатеринбург, ул. Софьи Ковалевской, д. 16

В [2, 3] показана интегрируемость системы двух источников-стоков. При этом в [3] основные закономерности движения источников-стоков применяются для исследования тепловой конвекции в плоском горизонтальном слое жидкости (конвективные ячейки). В работе [3] указано, что для $N > 3$ уравнения движения N источников-стоков являются неинтегрируемыми, как и в небесной механике в задаче N тел. В [1, 11] проинтегрирован случай двух произвольных вихреисточников и указана интегрируемость трех источников-стоков. В работе [4] указан метод сведения к квадратурам задачи двух вихреисточников, когда интенсивности стоковой части зависят от времени.

Среди работ, посвященных динамике источников, отметим также [5, 6], где исследуется хаотическая адвекция в слое пульсирующих источников. В [7] рассматривается задача о движении вихреисточника, взаимодействующего с круговым цилиндром и находящегося в пульсирующем плоскопараллельном слое. Там же приведены движения вихреисточников (называемых в работе экранирующими твисторами) и указаны явные квадратуры для взаимодействия двух твисторов. Структура и неустойчивость реальных вихреисточников обсуждается в [8].

В данной работе мы показываем интегрируемость уравнений движения системы трех вихреисточников (аналогичной системе трех вихрей). При помощи редукции система получена приведенная система на так называемой форм-сфере, описывающая эволюцию конфигураций системы с точностью до подобия. Приведены возможные фазовые портреты и различные относительные равновесия системы (обобщающие известные относительные равновесия задачи трех вихрей). Напомним, что понятие форм-сферы было дано в работах, посвященных частным периодическим решениям в задаче трех тел в небесной механике [10], хотя схожая сфера без специального названия использовалась при редукции в задаче трех вихрей.

1. Уравнения движения, законы сохранения, редукция

Уравнения движения n вихреисточников на плоскости имеют вид [7]

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= \frac{1}{\Gamma_i} \frac{\partial H}{\partial y_i} + \frac{1}{K_i} \frac{\partial \Phi}{\partial y_i}, & \dot{y}_i &= -\frac{1}{\Gamma_i} \frac{\partial H}{\partial x_i} - \frac{1}{K_i} \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}, & i &= 1, \dots, n \\ H &= -\frac{1}{4\pi} \sum_{i < j} \Gamma_i \Gamma_j \ln((x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2), & \Phi &= \frac{1}{2\pi} \sum_{i < j} K_i K_j \theta_{ij}, & (1.1) \\ \theta_{ij} &= \arctg \frac{y_i - y_j}{x_i - x_j}, \end{aligned}$$

где (x_i, y_i) — декартовы координаты i -го вихреисточника, а Γ_i и K_i — завихренность и интенсивность такого источника, которые всюду в данной работе полагаются постоянными.

Система (1.1) сохраняет стандартную инвариантную меру

$$\mu = \prod_{i=1}^n dx_i dy_i.$$

Кроме того, она обладает тремя полями симметрии, связанными с инвариантностью системы относительно сдвигов и поворотов, то есть относительно действия группы $E(2)$:

$$\mathbf{u}_x = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad \mathbf{u}_y = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial y_i}, \quad \mathbf{u}_\varphi = \sum_{i=1}^n \left(y_i \frac{\partial}{\partial x_i} - x_i \frac{\partial}{\partial y_i} \right). \quad (1.2)$$

Коммутационные соотношения для них имеют следующий вид:

$$[\mathbf{u}_\varphi, \mathbf{u}_x] = \mathbf{u}_y, \quad [\mathbf{u}_\varphi, \mathbf{u}_y] = -\mathbf{u}_x, \quad [\mathbf{u}_x, \mathbf{u}_y] = 0.$$

Помимо этого, система (1.1) также обладает двумя линейными интегралами

$$Q = \sum_{i=1}^n (\Gamma_i y_i - K_i x_i), \quad P = \sum_{i=1}^n (\Gamma_i x_i + K_i y_i). \quad (1.3)$$

Случай двух вихреисточников проинтегрирован в работах [2, 3]. Оказывается, что интегралов (1.3) и полей симметрий (1.2) достаточно для интегрируемости системы (1.1) в квадратурах при $n = 3$ (трех вихреисточников). Для этого надо воспользоваться обобщенной теоремой Эйлера – Якоби – Ли [9], из которой следует, что

система n дифференциальных уравнений имеющая инвариантную меру и обладающая k первыми интегралами и $n - k - 2$ полями симметрий, образующими нильпотентную алгебру Ли, интегрируется в квадратурах.

В нашем случае $n = 6$, $k = 2$. В качестве двух (так как $n - k - 2 = 2$) коммутирующих полей симметрий можно выбрать \mathbf{u}_x , \mathbf{u}_y .

Прежде всего для системы трех вихреисточников выполним редукцию по полям симметрий. Для этого в качестве новых переменных выберем взаимные расстояния между вихреисточниками

$$M_i = (x_j - x_k)^2 + (y_j - y_k)^2, \quad i \neq j \neq k \neq i, \quad (1.4)$$

которые очевидно являются инвариантами действия группы движений плоскости и удовлетворяют соотношениям $\mathbf{u}_x(M_i) = \mathbf{u}_y(M_i) = 0$, $i = 1, 2, 3$. При этом получим

$$\begin{aligned} \dot{M}_i &= \frac{\Gamma_i \Delta}{\pi} \left(\frac{1}{M_j} - \frac{1}{M_k} \right) + \frac{K_i}{2\pi} \left(M_i \left(\frac{1}{M_j} + \frac{1}{M_k} \right) - \frac{M_j}{M_k} - \frac{M_k}{M_j} \right) + \sum_{s=1}^3 \frac{K_s}{\pi}, \\ 4\Delta^2 &= 2(M_1 M_2 + M_2 M_3 + M_1 M_3) - M_1^2 - M_2^2 - M_3^2, \end{aligned} \quad (1.5)$$

где второе уравнение представляет собой хорошо известную геометрическую формулу Герона, выражающую площадь треугольника Δ через длины его сторон.

Для того чтобы по решениям системы (1.5) найти координаты (x_i, y_i) вихреисточников, необходимо дополнить систему (1.5) уравнением для одного из углов θ_{ij} , образуемого отрезком, соединяющим вихреисточники i, j и ось Ox (см. рис. 1). Так, для θ_{12} имеем

$$\dot{\theta}_{12} = K_3 \Delta \frac{M_1 - M_2}{2\pi M_1 M_2 M_3} - \frac{\Gamma_3}{4\pi} \left(\frac{M_1 - M_3}{M_2 M_3} + \frac{M_2 - M_3}{M_1 M_3} \right) + \sum_{i=1}^3 \frac{\Gamma_i}{2\pi M_3}. \quad (1.6)$$

Оставшиеся углы находятся с помощью теоремы косинусов:

$$\theta_{13} = \theta_{12} + \arccos \left(\frac{M_2 + M_3 - M_1}{2\sqrt{M_2 M_3}} \right), \quad \theta_{23} = \theta_{12} - \arccos \left(\frac{M_1 + M_3 - M_2}{2\sqrt{M_1 M_3}} \right).$$

Если заданы величины M_i и θ_{ij} и значения первых интегралов P, Q , то из уравнений (1.3), (1.4) координаты вихреисточников находятся однозначно.

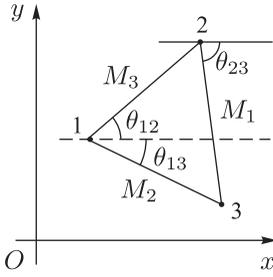


Рис. 1

Однородность системы (1.5) позволяет понизить ее порядок еще на единицу; для этого произведем замену переменных и времени следующего вида:

$$x = \frac{M_1 + M_2}{2M_3}, \quad y = \frac{M_1 - M_2}{2M_3}, \quad z = \frac{\Delta}{M_3}, \quad d\tau = \frac{M_3^2 dt}{4\pi M_1 M_2}.$$

В выбранных координатах инвариантное соотношение (1.5) можно представить в форме

$$4(y^2 + z^2) - 4x + 1 = 0. \tag{1.7}$$

В результате задача сводится к исследованию системы уравнений вида

$$\begin{aligned} x' &= \frac{dx}{d\tau} = p(K_1(2y - 4x + 1) - 2\Gamma_1 z) - q(K_2(2y + 4x - 1) - 2\Gamma_2 z) + 8\Gamma_3 xyz + 4K_3(2x - 1)y^2, \\ y' &= \frac{dy}{d\tau} = p(K_1(1 - 2y) - 2\Gamma_1 z) - q(K_2(2y + 1) + 2\Gamma_2 z) + 8\Gamma_3 y^2 z + 4K_3(2y^2 - x)y, \\ z' &= \frac{dz}{d\tau} = p(\Gamma_1(2y - 1) - 2K_1 z) + q(\Gamma_2(2y + 1) - 2K_2 z) + 2y(4z^2 - 2x + 1)\Gamma_3 + 8K_3 zy^2, \\ p &= (x + y)(x - y - 1), \quad q = (x - y)(x + y - 1), \end{aligned} \tag{1.8}$$

где штрих обозначает дифференцирование по τ . Как видим, система (1.8) определяет поток на параболоиде с круговым сечением (1.7). Исключая в системе (1.8) переменную x с помощью соотношения (1.7), можем свести ее к системе на плоскости $\mathbb{R}^2\{(y, z)\}$.

2. Гомотетические конфигурации

Важную роль для качественного описания динамики трех вихреисточников играют *гомотетические конфигурации*, то есть конфигурации, остающиеся подобными во все моменты времени. Это аналоги относительных равновесий в задаче n тел в небесной механике и n вихрей в вихревой динамике.

В данном случае гомотетическим конфигурациям соответствуют неподвижные точки системы (1.8), для которых справедливо

Предложение. *Множество неподвижных точек системы (1.8) в трехмерном пространстве $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z)\}$ задается как пересечение трех квадриков, определяемых уравнениями*

$$\begin{aligned} 4y^2 + 4z^2 - 4x + 1 &= 0, \\ f_1 &= (x - y - 1)(2K_1 z + \Gamma_1(1 + 2y)) + (x + y - 1)(2K_2 z - \Gamma_2(1 - 2y)) - 4\Gamma_3 y = 0, \\ f_2 &= (x - y - 1)(-2\Gamma_1 z + K_1(1 + 2y)) + (x + y - 1)(-2\Gamma_2 z - K_2(1 - 2y)) - 4K_3 y = 0. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Для доказательства достаточно показать, что на уровне (1.7) справедливо

$$\begin{aligned} f_1 &= -\lambda_1 y' - \lambda_2 z', \quad f_2 = \lambda_1 z' - \lambda_2 y', \\ \lambda_1 &= \frac{2yz}{x^2 - y^2}, \quad \lambda_2 = \frac{4z^2 - 2x + 1}{x^2 - y^2}. \end{aligned}$$

Таким образом, в общем случае множество неподвижных точек системы (1.8) состоит из изолированных точек в пространстве $\mathbb{R}^3 = \{x, y, z\}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Отметим, что в уравнениях (2.1) исключены из рассмотрения особенности исходной системы (1.5), когда одно из расстояний обращается в нуль, то есть когда два вихресточника сливаются.

Пользуясь уравнениями (2.1), можно показать, что среди гомотетических конфигураций встречается два типа конфигураций, которые обобщают классические относительные равновесия в задаче трех вихрей.

1. *Равносторонняя конфигурация.* Эта конфигурация существует при произвольных величинах $\Gamma_i K_i$ в зависимости от ориентации вихресточников ей соответствуют две неподвижные точки системы (1.8):

$$x = 1, \quad y = 0, \quad z = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}. \quad (2.2)$$

В этом случае вихресточники образуют равносторонний треугольник, квадрат стороны которого обозначим M . Скорость изменения M и взаимного угла θ_{12} имеет вид

$$\dot{M} = \sum_{i=1}^3 \frac{K_i}{\pi}, \quad \dot{\theta}_{12} = \sum_{i=1}^3 \frac{\Gamma_i}{2\pi M}.$$

Отсюда, в частности, следует, что если $\sum K_i = 0$, то все три вихресточника вращаются с одинаковой угловой скоростью Ω ,

$$\Omega = \sum_{i=1}^3 \frac{\Gamma_i}{2\pi M},$$

вокруг общего центра с координатами (x_0, y_0) ,

$$x_0 = \left(\sum_{i=1}^3 \Gamma_i \right)^{-1} Q, \quad y_0 = \left(\sum_{i=1}^3 \Gamma_i \right)^{-1} P.$$

2. *Коллинеарная конфигурация.* Она существует только в случае пропорциональных интенсивностей и завихренностей

$$K_i = \mu \Gamma_i, \quad \mu = \text{const}, \quad i = 1, 2, 3.$$

При коллинеарной конфигурации вихресточники лежат на одной прямой, которую параметризуем следующим образом: $M_1 = s^2 M_3$, $M_2 = (1 - s)^2 M_3$. Тогда из (2.1) следует, что s является корнем уравнения третьей степени:

$$(\Gamma_1 + \Gamma_2)s^3 - (2\Gamma_1 + \Gamma_2)s^2 - (\Gamma_2 + 2\Gamma_3)s + \Gamma_2 + \Gamma_3 = 0. \quad (2.3)$$

Скорость изменения M_3 и взаимного угла θ_{12} в этом случае представляется в форме

$$\dot{M}_3 = \frac{\mu(\Gamma_1 + \Gamma_2)}{\pi} + \frac{\mu\Gamma_3}{s(1-s)\pi}, \quad \dot{\theta}_{12} = \frac{\Gamma_1 + \Gamma_2}{\pi M_3} + \frac{\Gamma_3}{s(1-s)\pi M_3}.$$

Как будет показано в следующем разделе, в общем случае (при произвольных интенсивностях) система (2.1) имеет решения, *отличные от равносторонней и коллинеарной конфигураций*.

Остановимся подробнее на устойчивости равносторонней конфигурации. Характеристический полином линеаризации системы (1.8) в окрестности соответствующих неподвижных точек (2.2) представляется в виде

$$P(\lambda) = \lambda^2 + a\lambda + b, \quad a = \sum_{i=1}^3 K_i,$$

$$b = \frac{3}{4}(\Gamma_1\Gamma_2 + \Gamma_1\Gamma_3 + \Gamma_2\Gamma_3 + K_1K_2 + K_1K_3 + K_2K_3) -$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{4}(\Gamma_1K_2 + \Gamma_2K_3 + \Gamma_3K_1 - \Gamma_1K_3 - \Gamma_2K_1 - \Gamma_3K_2).$$

Как мы видим, при $\sum_{i=1}^3 K_i \neq 0$ этот полином не является инвариантным относительно смены знака λ (то есть замены $\lambda \rightarrow -\lambda$), поэтому в общем случае эта неподвижная точка в зависимости от параметров имеет один из следующих типов:

- если $a^2 - 4b < 0$, то такая точка представляет собой фокус, устойчивый при $a > 0$ и неустойчивый при $a < 0$,
- если $a^2 - 4b > 0$ и $b > 0$, то такая точка представляет собой узел, устойчивый при $a > 0$ и неустойчивый при $a < 0$,
- если $b < 0$, то такая точка представляет собой седло.

3. Форм-сфера. Геометрическая интерпретация и качественный анализ

Для качественного анализа удобнее свести систему трех вихреисточников к исследованию потока на форм-сфере [10], в отличие от рассмотренного ранее потока на параболоида (1.7). Для этого снова воспользуемся однородностью (1.5) и выполним замену переменных и времени:

$$\gamma_1 = \frac{2M_1 - M_2 - M_3}{M_1 + M_2 + M_3}, \quad \gamma_2 = \frac{\sqrt{3}(M_3 - M_2)}{M_1 + M_2 + M_3},$$

$$\gamma_3 = \frac{2\sqrt{3}\Delta}{M_1 + M_2 + M_3}, \quad d\tau = \frac{dt}{M_1 + M_2 + M_3};$$
(3.1)

при этом в новых координатах $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ соотношение Герона приводится к уравнению сферы

$$\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1.$$

Исходя из замены (3.1), получаем следующие свойства:

- на полосах форм-сферы лежит равносторонняя конфигурация: $A_1 = (0, 0, 1)$, $A_2 = (0, 0, -1)$,

— на экваторе форм-сферы лежат все коллинеарные конфигурации и точки, в которых два вихреисточника сливаются: $B_1 = (-1, 0, 0)$, $B_2 = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$, $B_3 = \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$.

ЗАМЕЧАНИЕ. При таком определении (когда координаты γ_i не зависят от интенсивностей) форм-сфера является чисто геометрическим объектом. Ее точки параметризуют множество всевозможных неподобных друг другу треугольников на плоскости (включая треугольники нулевой площади).

Как будет показано далее, слоение фазового потока на форм-сфере полностью определяется своими особенностями, неподвижными точками и сепаратрисами, соединяющими неподвижные точки.

Один из характерных фазовых портретов для вихрей ($\Gamma_i \neq 0$, $K_i = 0$, $i = 1, 2, 3$) приведен на рисунке 2, из которого следует, что коллинеарные конфигурации C_1, C_2, C_3 являются седлами, в то время как равносторонняя конфигурация A_1 является центром. Особенности B_1, B_2, B_3 на фазовом портрете являются эллиптическими особыми точками.

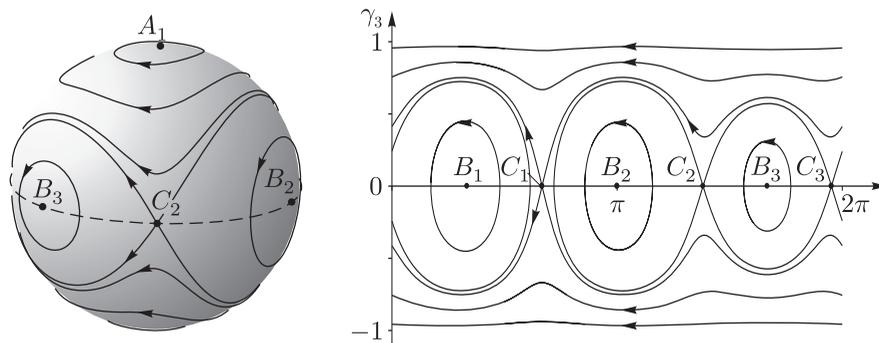


Рис. 2. Траектории на форм-сфере и ее цилиндрической развертке для вихрей ($\Gamma_1 = 1$, $\Gamma_2 = 1$, $\Gamma_3 = 2$, $K_1 = K_2 = K_3 = 0$), A_1 — равносторонняя конфигурация, B_1, B_2, B_3 — точки, в которых вихри сливаются, C_1, C_2, C_3 — коллинеарные конфигурации.

Фазовый портрет для источников ($\Gamma = 0$, $K_i > 0$, $i = 1, 2, 3$) представлен на рисунке 3. Как видим, в случае источников экватор форм-сферы является инвариантным многообразием. При этом равносторонняя конфигурация является узлом, к которому стремятся все траектории на форм-сфере.

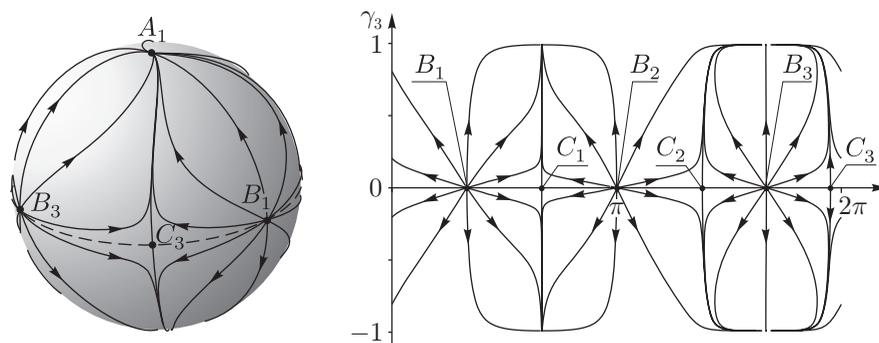


Рис. 3. Траектории на форм-сфере и ее цилиндрической развертке для источников ($\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma_3 = 0$, $K_1 = 1$, $K_2 = 1$, $K_3 = 2$), A_1 — равносторонняя конфигурация, B_1, B_2, B_3 — точки, в которых вихри сливаются, C_1, C_2, C_3 — коллинеарные конфигурации.

Фазовые портреты на форм-сфере для вихреисточников приведены на рисунках 4 и 5. Как видим, экватор форм-сферы уже не является инвариантным многообразием. Равносторонняя конфигурация становится фокусом, к которому притягиваются все траектории. В случае произвольных завихренностей и интенсивностей, как следует из рисунка 5, возникают *новые гомотетические конфигурации* (C_1, C_2, C_3), *обобщающие коллинеарные*.

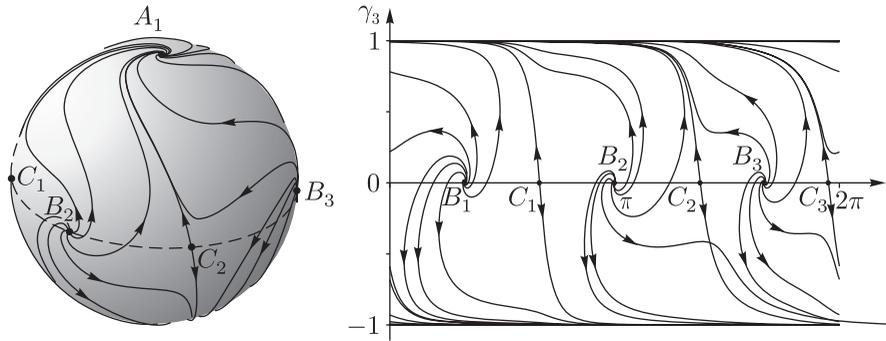


Рис. 4. Траектории на форм-сфере и ее цилиндрической развертке для вихреисточников ($\Gamma_1 = 1, \Gamma_2 = 1, \Gamma_3 = 2, K_1 = 1, K_2 = 2, K_3 = 3$), A_1 — равносторонняя конфигурация, B_1, B_2, B_3 — точки, в которых вихри сливаются, C_1, C_2, C_3 — коллинеарные конфигурации.

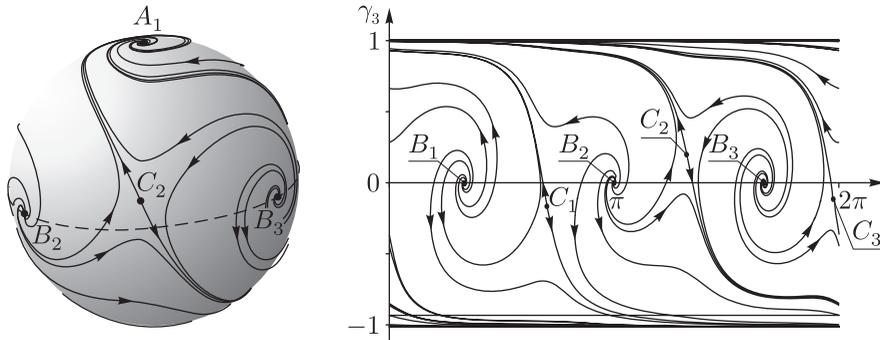


Рис. 5. Траектории на форм-сфере и ее цилиндрической развертке для вихреисточников ($\Gamma_1 = 4, \Gamma_2 = 2, \Gamma_3 = 3, K_1 = 1, K_2 = 1, K_3 = 2$), A_1 — равносторонняя конфигурация, B_1, B_2, B_3 — точки, в которых вихри сливаются, C_1, C_2, C_3 — конфигурации, обобщающие коллинеарные.

Список литературы

- [1] Борисов А. В., Мамаев И. С. Математические методы динамики вихревых структур. Москва – Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2005. 368 с.
- [2] Фридман А. А., Полубаринова П. Я. О перемещающихся особенностях плоского движения несжимаемой жидкости // Геофиз. сб., 1928, т. 5, № 2, с. 9–23.
- [3] Богомолов В. А. Движение идеальной жидкости постоянной плотности при наличии стоков // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа, 1976, № 4, с. 21–27.
- [4] Седов Ю. Б. Взаимодействие спиральных вихрей // Изв. РАН. Механика жидкости и газа, 1995, № 4, с. 183–185.
- [5] Jones S. W., Aref H. Chaotic advection in pulsed source-sink systems // Phys. Fluids, 1988, vol. 31, no. 3, pp. 469–485.

- [6] Stremler M. A., Haselton F. R., Aref H. Designing for chaos: Applications of chaotic advection at the microscale // *Philos. Trans. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci.*, 2004, vol. 362, no. 1818, pp. 1019–1036.
- [7] Novikov A. E., Novikov E. A. Vortex-sink dynamics // *Phys. Rev. E*, 1996, vol. 54, no. 4, pp. 3681–3686.
- [8] Noguchi T., Yukimoto S., Kimura R., Niino H. Structure and instability of a sink vortex // *Proc. PSFVIP-4 (Chamonix, France, 2003)*.
- [9] Козлов В. В. Теорема Эйлера – Якоби – Ли об интегрируемости // *Нелинейная динамика*, 2013, т. 9, № 2, с. 229–245. (См. также: Kozlov V. V. The Euler – Jacobi – Lie integrability theorem // *Regul. Chaotic Dyn.*, 2013, vol. 18, no. 4, pp. 329–343.)
- [10] Chenciner A., Montgomery R. A remarkable periodic solution of the three-body problem in the case of equal masses // *Ann. of Math. (2)*, 2000, vol. 152, no. 2, pp. 881–901. (См. также: Современные проблемы хаоса и нелинейности: Сб. ст. / К. Симо, С. Смейл, А. Шенсине и др. Москва–Ижевск: НИЦ «РХД», Институт компьютерных исследований, 2002, с. 183–205.)
- [11] Borisov A. V., Mamaev I. S. On the problem of motion vortex sources on a plane // *Regul. Chaotic Dyn.*, 2006, vol. 11, no. 4, pp. 455–466.

The dynamics of three vortex sources

Ivan A. Bizyaev¹, Alexey V. Borisov², Ivan S. Mamaev³

^{1,2,3}Udmurt State University

Universitetskaya 1, Izhevsk, 426034, Russia

^{2,3}Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of RAS

S. Kovalevskaja str. 16, Ekaterinburg, 620990, Russia

¹bizaev_90@mail.ru, ²borisov@rcd.ru, ³mamaev@rcd.ru

In this paper, the integrability of the equations of a system of three vortex sources is shown. A reduced system describing, up to similarity, the evolution of the system's configurations is obtained. Possible phase portraits and various relative equilibria of the system are presented.

MSC 2010: 37N05, 76M23

Keywords: integrability, vortex sources, shape sphere, reduction, homothetic configurations

Received August 14, 2014, accepted September 8, 2014

Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2014, vol. 10, no. 3, pp. 319–327 (Russian)

- [6] Stremler M. A., Haselton F. R., Aref H. Designing for chaos: Applications of chaotic advection at the microscale // *Philos. Trans. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci.*, 2004, vol. 362, no. 1818, pp. 1019–1036.
- [7] Novikov A. E., Novikov E. A. Vortex-sink dynamics // *Phys. Rev. E*, 1996, vol. 54, no. 4, pp. 3681–3686.
- [8] Noguchi T., Yukimoto S., Kimura R., Niino H. Structure and instability of a sink vortex // *Proc. PSFVIP-4 (Chamonix, France, 2003)*, pp. 1–7.
- [9] Козлов В. В. Теорема Эйлера – Якоби – Ли об интегрируемости // *Нелинейная динамика*, 2013, т. 9, № 2, с. 229–245. (См. также: Kozlov V. V. The Euler – Jacobi – Lie integrability theorem // *Regul. Chaotic Dyn.*, 2013, vol. 18, no. 4, pp. 329–343.)
- [10] Chenciner A., Montgomery R. A remarkable periodic solution of the three-body problem in the case of equal masses // *Ann. of Math. (2)*, 2000, vol. 152, no. 2, pp. 881–901. (См. также: Современные проблемы хаоса и нелинейности: Сб. ст. / К. Симо, С. Смейл, А. Шенсине и др. Москва–Ижевск: НИЦ «РХД», Институт компьютерных исследований, 2002, с. 183–205.)
- [11] Borisov A. V., Mamaev I. S. On the problem of motion vortex sources on a plane // *Regul. Chaotic Dyn.*, 2006, vol. 11, no. 4, pp. 455–466.

The dynamics of three vortex sources

Ivan A. Bizyaev¹, Alexey V. Borisov², Ivan S. Mamaev³

^{1,2,3}Udmurt State University

Universitetskaya 1, Izhevsk, 426034, Russia

^{2,3}Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of RAS

S. Kovalevskaja str. 16, Ekaterinburg, 620990, Russia

¹bizaev_90@mail.ru, ²borisov@rcd.ru, ³mamaev@rcd.ru

In this paper, the integrability of the equations of a system of three vortex sources is shown. A reduced system describing, up to similarity, the evolution of the system's configurations is obtained. Possible phase portraits and various relative equilibria of the system are presented.

MSC 2010: 37N05, 76M23

Keywords: integrability, vortex sources, shape sphere, reduction, homothetic configurations

Received August 14, 2014, accepted September 8, 2014

Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2014, vol. 10, no. 3, pp. 319–327 (Russian)