



УДК: 517.925 + 517.93

MSC 2010: 37J60, 37N15, 37G35, 70E18, 70F25, 70H45

Регулярные и хаотические аттракторы в неголономной модели волчка Чаплыгина

А. В. Борисов, А. О. Казаков, И. Р. Сатаев

В работе рассматривается движение неоднородного шара по плоскости под действием силы тяжести. В точке контакта шара с плоскостью наложена неголономная связь, запрещающая проскальзывание. Движения шара описываются обратимой неголономной системой, состоящей из шести дифференциальных уравнений. В случае произвольного смещения центра масс шара рассматриваемая система является неинтегрируемой системой без инвариантной меры. С помощью аналитических и численных методов показано, что при некоторых значениях параметров неуравновешенный шар демонстрирует эффект реверса (изменение направления вращения шара на противоположное). Кроме того, с помощью построения карт динамических режимов, в системе удалось обнаружить восьмерочный аттрактор, относящийся к настоящим странным аттракторам псевдогиперболического типа.

Ключевые слова: волчок Чаплыгина, качение без проскальзывания, обратимость, инволюция, интегрируемость, реверс, карта динамических режимов, странный аттрактор

Получено 26 августа 2014 года

После доработки 7 сентября 2014 года

Работа Борисова А. В. выполнена в рамках государственного задания УдГУ «Регулярная и хаотическая динамика». Работа Казакова А. О. над разделом 3 поддержана грантом РФ № 14-12-00811, над разделом 4.1 — частично поддержана грантом РФ № 14-41-00044 и грантом Президента РФ поддержки молодых докторов наук МД-2324.2013.1. Остальная часть работы Казакова А. О. выполнена при поддержке Министерства образования и науки (проект № 2000). Работа Сатаева И. Р. поддержана грантом Президента РФ поддержки ведущих научных школ НШ-1726.2014.2.

Борисов Алексей Владимирович

borisov@rcd.ru

Удмуртский государственный университет

426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, д. 1

Казаков Алексей Олегович

kazakovdz@yandex.ru

Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского

603950, Россия, г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23

Сатаев Игорь Рустамович

sataevir@rambler.ru

Саратовский филиал Института радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН

410019, Россия, г. Саратов, ул. Зеленая, д. 38

1. Введение

Задача о движении абсолютно твердого неоднородного тела по плоскости под действием силы тяжести может быть рассмотрена в рамках двух математических моделей: неголономной и модели с трением. В первом случае тело движется по (абсолютно шероховатой) плоскости без проскальзывания. Отсутствие проскальзывания обеспечивает сила трения, которая, однако, не совершает работу. Во втором случае проскальзывания возможны, при этом силы трения носят диссипативный характер. Достоинством неголономных моделей является то, что они, как правило, проще моделей с трением и поэтому часто позволяют объяснить природу динамических явлений. Так, например, неголономная модель кельтского камня позволяет объяснить наблюдаемый в реальных экспериментах *эффект реверса* — способность менять направление вращения на противоположное при закрутке вокруг вертикальной оси в «неудобном» направлении. Этот эффект известен давно и, по-видимому, впервые был описан в работе Уолкера [1], а в работах Астапова, Карапетяна и Маркеева [2–4] было дано математическое объяснение этого явления в рамках неголономной модели. Однако в динамике твердого тела могут наблюдаться явления, для описания которых неголономная модель явно не подходит. Одним из самых известных таких примеров является волчок Томсона, эффект переворота которого удается объяснить только с учетом диссипативных сил трения [5, 6].

В настоящей работе мы рассматриваем неголономную модель движения по плоскости динамически несимметричного шара, центр масс которого не лежит ни на одной из главных плоскостей инерции. В работе [7] исследовались вопросы управляемости такого шара, а для названия самого шара был введен термин *волчок Чаплыгина*, который мы будем использовать и далее. Отметим, что волчок Чаплыгина является наиболее сложным шаром с точки зрения распределения масс. В зависимости от типа смещения центра масс и распределения массы внутри шара можно выделить несколько частных случаев. Когда центр масс шара совпадает с геометрическим центром, такой шар называется *шаром Чаплыгина*. Его неголономная модель была исследована еще в начале XX века в работе С. А. Чаплыгина [8], в которой он доказал интегрируемость этой задачи, нашел интегралы (константу площадей, кинетического момента и полной механической энергии), а также инвариантную меру. Движение шара Чаплыгина в абсолютном пространстве изучалось в недавних

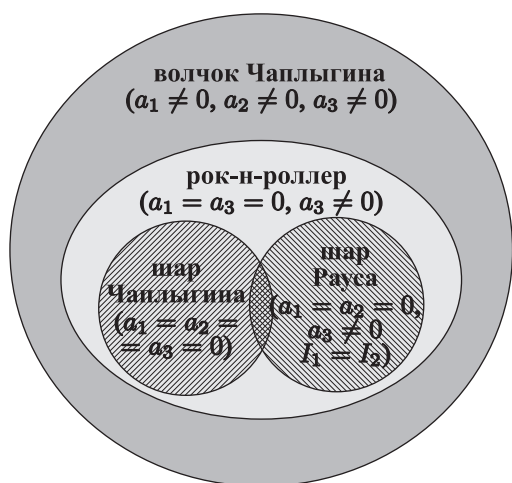


Рис. 1. Иерархия шаров.

работах [9, 10], в которых также были описаны уравнения траектории точки контакта и найдены условия для финитных и инфинитных движений шара. В общем случае, при смещении центра масс шара, интегралы, указанные Чаплыгиным, а также инвариантная мера пропадают [11]. Исключение составляет лишь так называемый *шар Рауса* — шар, у которого центр масс смещен вдоль одной из осей инерции, а главные моменты инерции, отвечающие двум другим осям, одинаковы. Впервые такой шар был исследован в работе [12], где также было указано на интегрируемость неголономной модели и приведены интегралы (полной механической энергии, Джеллетта и Рауса). В общем случае шар, центр масс которого смещен вдоль одной оси инерции, называется

рок-н-роллером. Такой термин был введен в работе [13], где также исследован динамический эффект, названный рецессией — регулярной сменой направления изменения угла прецессии при колебании и качении шара относительно оси инерции, отвечающей смещению центра масс. На рисунке 1 схематически изображена иерархия шаров различного типа в зависимости от типа неоднородности.

В другой неголономной постановке, где помимо шероховатости плоскости накладывается дополнительное условие отсутствия верчения шара вокруг вертикальной оси (тело, обладающее таким свойством, называется *резиновым*), задача о движении волчка Чаплыгина также оказывается неинтегрируемой в общем случае [14]. Более того, в работах [15, 16] показано, что динамика такой системы зависит от типа инволюций, число которых определяется типом смещения центра масс шара. При различных типах смещения центра масс в этой модели обнаружены странные аттракторы со слабой диссипацией, а также другой тип динамического хаоса — смешанная динамика [17–19].

С точки зрения динамики, наиболее близкой к рассматриваемой модели волчка Чаплыгина является неголономная модель кельтского камня, в которой обнаружены как структуры, в некоторой степени близкие к гамильтоновым (смешанная динамика, например) [20], так и различные предельные режимы, в том числе странные аттракторы [21, 22]. Отдельно стоит отметить открытие и исследование аттрактора типа Лоренца [23, 24], ранее не наблюдаемого в динамике твердого тела.

В настоящей работе изучается динамика волчка Чаплыгина на плоскости в неголономной постановке. Более сложную модель, учитывающую диссипативные силы трения, мы предполагаем исследовать в дальнейших работах.

Содержание статьи. Далее, в § 2, описана неголономная модель волчка Чаплыгина: приведены соответствующие уравнения движения, указаны первые интегралы и инволюции, описана процедура построения отображения Пуанкаре. В § 3 изучена регулярная динамика волчка Чаплыгина, связанная с существованием асимптотически устойчивых и неустойчивых состояний равновесия, отвечающих перманентным вращениям волчка в противоположных направлениях. Как мы показываем, такая динамика является одной из основных причин возникновения эффекта реверса. В § 4 основное внимание уделено исследованию сценария возникновения странного аттрактора нового типа, так называемого восьмерочного аттрактора. Насколько мы знаем, такие аттракторы в физических моделях еще не наблюдались. В приложении 1 приведен полный перечень инволюций для шаров с различным типом смещения центра масс (шар Чаплыгина, шар Рауса, рок-н-роллер). И, наконец, в приложении 2 описана процедура поиска состояний равновесия рассматриваемой неголономной системы.

2. Неголономная модель волчка Чаплыгина

2.1. Уравнения движения и интегралы

Для вывода уравнений движения волчка Чаплыгина по плоскости введем систему координат $Sxyz$, связанную с центром масс шара (см. рис. 2) и выбранную таким образом, что тензор инерции волчка является диагональной матрицей $\mathbf{I} = \text{diag}(I_1, I_2, I_3)$, где I_i — главные моменты инерции. В неголономной постановке в точке контакта шара с плоскостью наложена связь, запрещающая проскальзывание. Если обозначить через \mathbf{v} и $\boldsymbol{\omega}$ скорость центра масс и угловую скорость шара соответственно, а через \mathbf{r} — радиус-вектор, соединяющий центр масс шара с точкой контакта P , то отсутствие проскальзывания в точке контакта

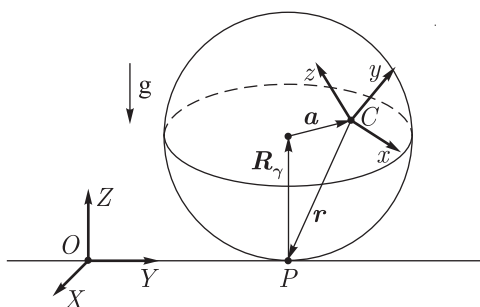


Рис. 2. Волчок Чаплыгина на плоскости.

записывается в виде

$$\mathbf{v} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = 0. \quad (2.1)$$

Хорошо известно (см., например, [25]), что уравнения движения твердого тела в переменных \mathbf{M} и $\boldsymbol{\gamma}$, где $\boldsymbol{\gamma}$ — вектор нормали, а \mathbf{M} — кинетический момент относительно точки контакта, могут быть записаны в следующем виде:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{M}} = \mathbf{M} \times \boldsymbol{\omega} + m\dot{\mathbf{r}} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) + mg\mathbf{r} \times \boldsymbol{\gamma}, \\ \dot{\boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\omega}. \end{cases} \quad (2.2)$$

Здесь m — масса тела, а g — ускорение свободного падения. Так как в нашем случае тело является шаром, справедлива формула (см. рис. 2)

$$\mathbf{r} = -R\boldsymbol{\gamma} - \mathbf{a}, \quad (2.3)$$

где $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ — вектор смещения центра масс шара. Известно (см., например, [11]), что вектор \mathbf{M} связан с $\boldsymbol{\omega}$ и \mathbf{r} соотношением

$$\mathbf{M} = \mathbf{I}\boldsymbol{\omega} + m\mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}). \quad (2.4)$$

Выразив векторы \mathbf{r} , $\dot{\mathbf{r}}$ и $\boldsymbol{\omega}$ через \mathbf{M} и $\boldsymbol{\gamma}$ и используя соотношения (2.4) и (2.3), получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$(\dot{\mathbf{M}}, \dot{\boldsymbol{\gamma}}) = F(\mathbf{M}, \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\mu}), \quad (2.5)$$

зависящую от параметров $\boldsymbol{\mu}$, характеризующих физические и динамические свойства волчка Чаплыгина.

В общем случае система уравнений (2.2) обладает лишь двумя интегралами — энергии и геометрическим:

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{M}, \boldsymbol{\omega}) - mg(\mathbf{r}, \boldsymbol{\gamma}) \quad \text{и} \quad \mathcal{G} = (\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\gamma}). \quad (2.6)$$

Из соображений нормировки константа геометрического интеграла определяется однозначно ($\mathcal{G} = 1$). Таким образом, для интегрируемости системы (2.2) по теореме Эйлера–Якоби не хватает двух интегралов и инвариантной меры. Из работы [11] известно, что рассматриваемая система интегрируема лишь в двух частных случаях:

- шар Чаплыгина ($\mathbf{a} = 0$),
- шар Рауса ($I_1 = I_2, a_1 = a_2 = 0$).

В остальных случаях система (2.2), вообще говоря, не допускает существования дополнительного интеграла и инвариантной меры, поэтому на совместном уровне интегралов (2.6) может иметь место поведение траекторий, характерное для диссипативных систем. Поэтому в исследуемой системе можно ожидать существование асимптотически устойчивых режимов, таких как состояния равновесия, предельные циклы, инвариантные торы и даже странные аттракторы.

2.2. Отображение Пуанкаре

На уровне двух интегралов (2.6) фазовым пространством системы является четырехмерное многообразие

$$\mathcal{M}^4 = \{(M, \gamma) : \mathcal{G}(\gamma) = 1, \mathcal{E}(M, \gamma) = E_0\}, \quad (2.7)$$

гомеоморфное $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$. Для параметризации этого многообразия очень удобными оказываются переменные Андуайе–Депри (см., например, [25]), связанные с переменными (M, γ) следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} M_1 &= \sqrt{G^2 - L^2} \sin l, & M_2 &= \sqrt{G^2 - L^2} \cos l, & M_3 &= L, \\ \gamma_1 &= \left(\frac{H}{G} \sqrt{1 - \frac{L^2}{G^2}} + \frac{L}{G} \sqrt{1 - \frac{H^2}{G^2}} \cos g \right) \sin l + \sqrt{1 - \frac{H^2}{G^2}} \sin g \cos l, \\ \gamma_2 &= \left(\frac{H}{G} \sqrt{1 - \frac{L^2}{G^2}} + \frac{L}{G} \sqrt{1 - \frac{H^2}{G^2}} \cos g \right) \cos l - \sqrt{1 - \frac{H^2}{G^2}} \sin g \sin l, \\ \gamma_3 &= \frac{HL}{G^2} - \sqrt{1 - \frac{L^2}{G^2}} \sqrt{1 - \frac{H^2}{G^2}} \cos g. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Заметим, что в новых переменных условие $(\gamma, \gamma) = 1$ выполняется автоматически. Таким образом, формулы (2.8) задают взаимно однозначное соответствие между переменными $\{(M, \gamma) : (\gamma, \gamma) = 1\}$ и (L, H, G, g, l) всюду, кроме четырех плоскостей $L/G = \pm 1$ и $H/G = \pm 1$ (на которых не определены l и g соответственно).

В переменных Андуайе–Депри плоскость $g = g_0$ можно рассматривать в качестве секущей для потока, определяемого системой (2.2). Тогда на секущей можно определить *отображение Пуанкаре*. Для этого удобно ввести на секущей $g = g_0$ координаты: l (которая является 2π -периодической), $\frac{L}{G} \in [-1, 1]$ и $\frac{H}{G} \in [-1, 1]$.

Таким образом, мы можем изучать динамику волчка Чаплыгина с помощью трехмерного отображения Пуанкаре

$$\bar{x} = \mathcal{F}_{g_0}(x), \quad x = \left(l, \frac{L}{G}, \frac{H}{G} \right), \quad (2.9)$$

определенного всюду, кроме указанных выше четырех плоскостей.

2.3. Обратимость и инволюции

В работе [15] показано, что динамика волчка Чаплыгина,двигающегося по плоскости без проскальзывания и верчения (резиновое тело), существенным образом зависит от числа и типа инволюций в системе, которые, в свою очередь, определяются степенью неоднородности шара (числом ненулевых компонент вектора \mathbf{a}). В случае максимально неоднородного шара (все $a_i \neq 0$) у системы существует только одна инволюция. В этом случае в динамике системы были обнаружены странные аттракторы. Если же хотя бы одна (но не все) из компонент вектора \mathbf{a} нулевая, в системе возникают дополнительные инволюции. Странных аттракторов в этом случае нет, но наблюдается смешанная динамика, очень похожая на гамильтонов хаос, однако отличающаяся от него наличием асимптотически устойчивых и вполне неустойчивых траекторий больших периодов [15, 16].

В данной работе мы провели исследования движения волчка Чаплыгина по плоскости только лишь без проскальзывания (верчение допускается) и получили аналогичные результаты. При любых значениях параметров система (2.2) обратима относительно *тривиальной инволюции*

$$R_0: M \rightarrow -M, \gamma \rightarrow \gamma, t \rightarrow -t, \quad (2.10)$$

отвечающей за обращение момента тела (а значит, и угловых скоростей шара ω). Инволюция R_0 оказывает весьма важное влияние на динамику системы в целом: для каждого устойчивого динамического режима в системе существует симметричный ему аналог — неустойчивый режим, с противоположными по знаку угловыми скоростями; это значит, что для каждого аттрактора в системе существует симметричный ему репеллер.

Помимо R_0 , система (2.2) может допускать дополнительные инволюции, число которых равно числу нулевых компонент вектора \mathbf{a} . Максимальное число инволюций, таким образом, будет у шара Чаплыгина. Полный перечень инволюций при различных типах смещения центра масс шара приводится в приложении 1.

В данной работе нас интересует случай произвольного смещения центра масс шара ($a_i \neq 0$), так как только в этом случае удалось обнаружить интересные особенности диссипативной динамики (как регулярной, так и хаотической)¹.

Заметим, что каждая инволюция для потоковой системы порождает соответствующую инволюцию для отображения Пуанкаре, если в качестве секущей выбрать многообразие, инвариантное относительно действия этой инволюции. Если выбрать в качестве секущей $g_0 = 0$, то тривиальной инволюции R_0 будет отвечать инволюция r_0 на отображении Пуанкаре (2.9):

$$r_0: \frac{L}{G} \rightarrow -\frac{L}{G}, \frac{H}{G} \rightarrow -\frac{H}{G}, l \rightarrow l + \pi. \quad (2.11)$$

Таким образом, если множество траекторий A принадлежит аттрактору (2.9), то множество траекторий $r_0(A)$ будет принадлежать репеллеру.

3. Феномены регулярной динамики

Первое, что привлекло наше внимание при исследовании неголономной модели волчка Чаплыгина это *эффект реверса* — способность тела менять направление вращения вокруг вертикальной оси на противоположное при закрутке в «неудобном» направлении.

Давно известно, что эффект реверса наблюдается в реальных экспериментах с волчками другого типа — кельтскими камнями [1, 26]. Однако объяснение этому эффекту было дано в рамках неголономной модели сравнительно недавно (см. работы [2–4]). В этой модели вращению в «удобном» направлении (например, по часовой стрелке) соответствует асимптотически устойчивое состояние равновесия системы, а вращению в «неудобном» направлении (против часовой стрелки) — неустойчивое состояние равновесия. Таким образом, при достаточно сильной закрутке против часовой стрелки, камень, сделав несколько оборотов, начинает раскачиваться и колебаться, а затем эти колебания переходят во вращение камня по часовой стрелке.

¹В случае, когда, например, $a_1 \neq 0$, $a_2 \neq 0$, $a_3 = 0$, предварительные исследования показывают, что фазовое пространство системы расслаивается на инвариантные торы и никаких видимых проявлений диссипативной динамики не наблюдается.

В отличие от кельтского камня, волчок Чаплыгина является полностью геометрически симметричным телом. В связи с этим наличие асимптотически устойчивого и неустойчивого состояний (относительного) равновесия², отличающихся лишь направлениями вращения вокруг одной и той же вертикальной оси, является, на наш взгляд, удивительным и замечательным фактом.

Заметим, что даже для кельтского камня эффект реверса может иметь различную природу в зависимости от геометрических и физических свойств камня, а также от силы закрутки. В некоторых случаях неустойчивые вертикальные вращения могут сменяться устойчивыми вращениями с небольшими колебаниями. В других случаях эти колебания могут оказаться достаточно сильными. Мы называем реверс такого типа *периодическим*, и объяснение ему также дает неголономная модель, в которой (при некоторых значениях параметров системы) устойчивое состояние равновесие претерпевает бифуркацию Андронова–Хопфа, становясь неустойчивым, а в его окрестности рождается устойчивый цикл. В этом случае, после закрутки в «неудобном» направлении, финальные движения камня оказываются на родившемся предельном цикле, которому соответствует вращение камня с некоторой прецессией. При некоторых параметрах в системе сосуществуют два устойчивых предельных цикла. Динамика на втором соответствует движению со значительными колебаниями, в результате которых вертикальная составляющая угловой скорости может даже менять знак. Попадая на такой цикл, камень совершает *многократный периодический реверс*.

В данной работе нас интересует *настоящий реверс*, в результате которого волчок Чаплыгина, должным образом закрученный вокруг определенной оси, меняет направление вращения и продолжает устойчиво вращаться вокруг той же оси в противоположном направлении³. Для существования настоящего реверса требуется выполнение двух условий.

- Система (2.2) должна обладать устойчивым состоянием равновесия. Состоянию равновесия рассматриваемой системы соответствует вращение волчка вокруг постоянной оси с постоянной угловой скоростью. По инволюции R_0 в этом случае система также будет обладать неустойчивым состоянием равновесия, соответствующим вращению вокруг той же оси с противоположной скоростью.
- Необходимо существование начальных условий, при которых траектории системы (2.2) в прямом времени попадают на устойчивое состояние равновесия, а в обратном — на неустойчивое.

Согласно приведенным условиям, опишем алгоритм исследования возможности настоящего реверса. Сначала проанализируем состояния равновесия системы (2.2) и их устойчивость. В состоянии равновесия векторы $M = M^*$ и $\gamma = \gamma^*$ удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} \gamma \times \omega = 0, \\ M \times \omega + m\dot{r} \times (\omega \times r) + mgr \times \gamma = 0. \end{cases} \quad (3.1)$$

Из первого уравнения вытекает, что в состоянии равновесия векторы ω^* и γ^* коллинеарны, то есть $\omega^* = \alpha\gamma^*$ ($\alpha \neq 0$, в противном случае шар неподвижен). Подставляя эту зависи-

²Здесь и везде далее под состоянием равновесия волчка Чаплыгина понимается состояние равновесия системы (2.2).

³Заметим, что в рассматриваемом случае меняется на противоположное лишь направление вращения волчка Чаплыгина. При этом ось вращения в отличие от, например, «суперкельтского камня» [27], остается неизменной.



мость во второе уравнение системы и используя выражения (2.3) и (2.4), можно получить соотношение

$$(\alpha^2 \mathbf{I} \gamma^* - m[\alpha^2(R + (\mathbf{a}, \gamma^*)) + g]) \mathbf{a} \times \gamma^* = 0,$$

из которого следует соотношение, связывающее векторы γ^* и \mathbf{a} через коэффициенты α и β :

$$(\alpha^2 \mathbf{I} - \beta \mathbf{E}) \gamma^* = m[\alpha^2(R + (\mathbf{a}, \gamma)) + g] \mathbf{a}. \quad (3.2)$$

Таким образом, векторы ω^* , γ^* , а значит (согласно (2.4)), и \mathbf{M}^* , определяются через параметры системы и коэффициенты α и β . Для определения неизвестных α и β воспользуемся двумя первыми интегралами (2.6). Полагая $\varepsilon = E_0 = \text{const}$, получим систему из двух уравнений:

$$\begin{cases} \mathcal{G}(\gamma^*(\alpha^*, \beta^*)) = 1, \\ \mathcal{E}(\omega^*(\alpha^*, \beta^*), \gamma^*(\alpha^*, \beta^*)) = E_0. \end{cases} \quad (3.3)$$

Процедура поиска неизвестных α и β описана в приложении 2. К сожалению, разрешить указанную систему аналитически не удастся. Однако нам удалось для конкретных значений параметров оценить число ее решений, а значит, определить число состояний равновесия.

Согласно (3.2), γ^* зависит от α квадратично, а значит, каждому решению системы (3.3) соответствует два состояния равновесия: $O^+ = (\omega^*, \gamma^*)$ и $O^- = (-\omega^*, \gamma^*)$. В силу обратимости, если состояние равновесия O^+ имеет собственные числа $\lambda^+ = \lambda^* = (\lambda_1^*, \dots, \lambda_6^*)$, то O^- будет иметь собственные числа $\lambda^- = -\lambda^* = (-\lambda_1^*, \dots, -\lambda_6^*)$. Таким образом, для анализа устойчивости достаточно исследовать одно из пары состояний равновесия, соответствующих конкретному решению системы (3.3).

Характеристическое уравнение линеаризованной системы имеет вид

$$\lambda^2(\lambda^4 + a\lambda^3 + b\lambda^2 + c\lambda + d) = 0, \quad (3.4)$$

где a, b, c и d — некоторые коэффициенты, зависящие от параметров системы. Отметим, что характеристическое уравнение имеет два нулевых корня, отвечающих за существование двух интегралов (2.6). На уровне этих интегралов состояние равновесия системы является асимптотически устойчивым, если все ненулевые корни характеристического уравнения (3.4) имеют отрицательную действительную часть.

Далее приведем результаты численного исследования состояний равновесия системы (2.2) на плоскости параметров $\mathbf{Q} = (E_0, a_3)$: $E_0 \in [200, 800]$, $a_3 \in [0.1, 2.0]$; остальные параметры зафиксируем следующими образом:

$$I_1 = 2, \quad I_2 = 6, \quad I_3 = 7, \quad m = 1, \quad g = 100, \quad R = 3, \quad a_1 = 1, \quad a_2 = 1.5. \quad (3.5)$$

Для поиска неизвестных (α, β) системы (3.3) и построения линеаризации исходной системы в окрестности состояний равновесия нами применялись методы программного пакета *Maple*. При изменении параметров (E_0, a_3) в квадрате \mathbf{Q} число действительных решений (соответствующих состояниям равновесия) системы (3.3) изменяется от одного до двух. На рисунке 3а светло-серым цветом показана область параметров, при которых существует единственное решение системы (α_1, β_1) , а темно-серым — область, в которой появляется также второе решение (α_2, β_2) . Обозначим через O_1^+ и O_1^- состояния равновесия, соответствующие решению (α_1, β_1) , а через O_2^+ и O_2^- — состояния равновесия для решения (α_2, β_2) . Численный счет показывает, что в рассматриваемой области \mathbf{Q} все состояния равновесия обладают двумя парами ненулевых комплексно-сопряженных корней. На рисунке 3б представлена диаграмма

устойчивости для O_1^+ . В затемненной области Q_1 все ненулевые собственные значения имеют отрицательную действительную часть, а значит, состояние равновесия является асимптотически устойчивым (соответственно, O_1^- вполне неустойчиво). При переходе значений параметров из Q_1 в Q_2 одна пара комплексно-сопряженных корней состояния равновесия O_1^+ переходит в правую полуплоскость, состояние равновесия становится седло-фокусом, а в его окрестности рождается асимптотически устойчивый предельный цикл, которому соответствует движение волчка вокруг некоторой оси с небольшой прецессией (см. рис. 4)⁴.

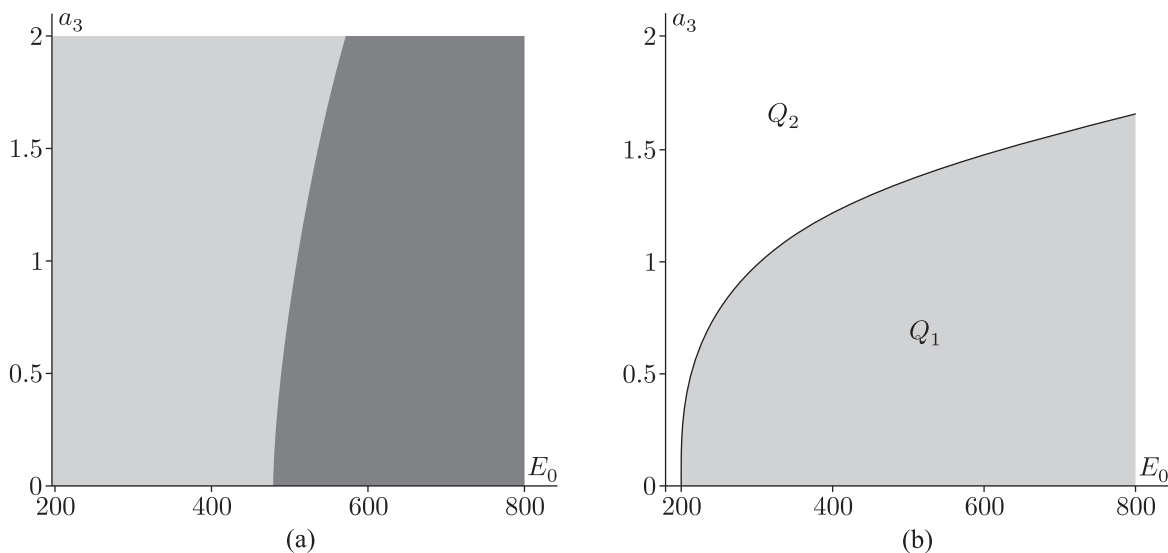


Рис. 3. На плоскости параметров Q изображены: (а) области параметров, при которых существует одно (светло-серым) и два (темно-серым) состояния равновесия, (б) диаграмма устойчивости состояния равновесия O_1^+ , соответствующего первому решению системы (3.3).

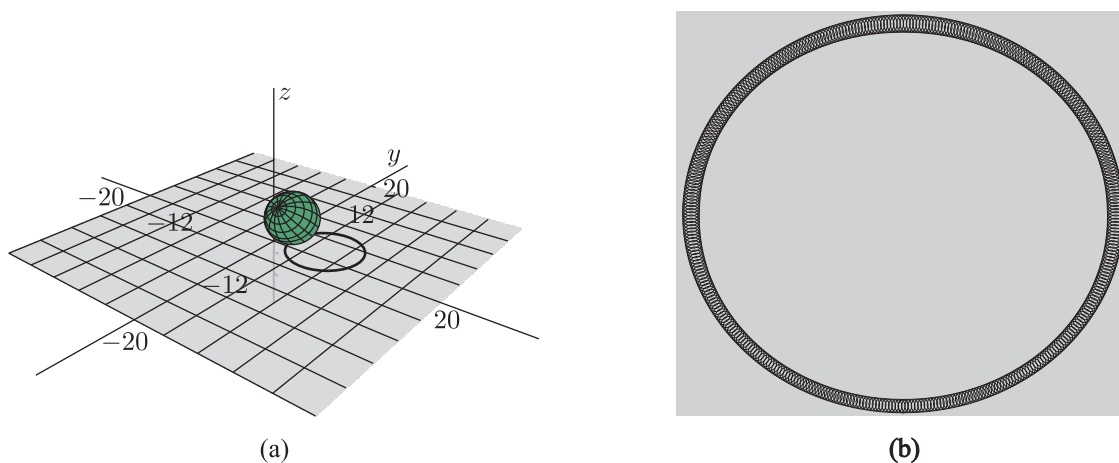


Рис. 4. (а) Визуализация движения волчка после потери устойчивости состояния равновесия через бифуркацию Андронова–Хопфа при параметрах $E_0 = 500$, $a_3 = 1.4$. (б) Вокруг ставшего неустойчивым состояния равновесия рождается предельный цикл, динамика на котором соответствует движению камня внутри «кольца» с некоторой прецессией.

⁴Заметим, что аналогичным образом теряет устойчивость состояние равновесия, соответствующее вертикальному вращению кельтского камня, при уменьшении начальной энергии ниже некоторого критического уровня [3].



Аналогичные исследования устойчивости были проведены для состояний равновесия O_2^+ и O_2^- . Вычисления показали, что при любых значениях параметров эти состояния являются седло-фокусами и, соответственно, не могут быть устойчивыми. Таким образом, при рассматриваемых значениях параметров система может обладать единственным асимптотически устойчивым и единственным вполне неустойчивым состояниями равновесия.

Однако в некоторых областях параметров из \mathbf{Q}_1 динамика волчка Чаплыгина демонстрирует *развитую мультистабильность* — существование различных устойчивых предельных режимов в зависимости от начальных условий. Например, на рисунке 5 показаны три аттрактора (в дополнение к устойчивому состоянию равновесия O_1^+), сосуществующие при одних и тех же значениях параметров: тор и два двухобходных тора (на рисунке аттракторы приведены в сечении Пуанкаре, где тору соответствуют инвариантная замкнутая кривая, а двухобходному тору — инвариантная кривая периода 2). Таким образом, при одних и тех же значениях параметров в системе сосуществуют как минимум четыре аттрактора! А значит может оказаться так, что из окрестности неустойчивого состояния равновесия траектории будут убегать на один из торов, и настоящий реверс наблюдаться не будет.

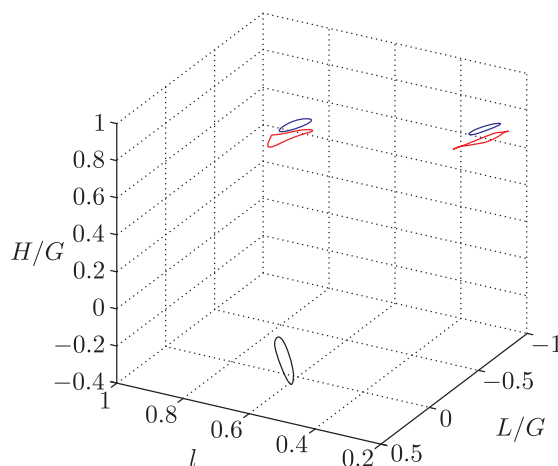


Рис. 5. Сосуществование состояния равновесия и еще трех аттракторов — торов.

Для нахождения и классификации предельных режимов мы построили карты показателей Ляпунова в прямом и обратном времени на плоскости параметров \mathbf{Q} , разбитой на 600×600 узлов. Из каждого узла запускалась траектория из одной и той же начальной точки⁵ P_0 , для исключения переходного процесса система интегрировалась в течение $T = 10^5$ единиц времени, а затем производилась оценка ляпуновских показателей на интервале $T = 10^4$ по методу Бенеттина [28]. Для численного решения уравнений движения использовался интегратор Дормана–Принса [29], реализующий метод Рунге–Кутты восьмого порядка с автоматически изменяемой величиной шага интегрирования, локальная точность интегрирования при вычислении показателей выбиралась равной 10^{-12} . В последних точках также оценивалась правая часть системы (2.2), для уточнения попадания в окрестность состояния равновесия. В результате вычислений соответствующий пиксель на карте окрашивался определенным цветом (состоянию равновесия соответствует черный цвет, предельному циклу — синий, тору — голубой, хаотическому режиму — красный).

⁵Начальная точка $P_0 = (M_0, \gamma_0) = (21.042, 52.241, 41.687, -0.290, -0.720, -0.630)$ выбиралась вблизи неустойчивого состояния равновесия при параметрах $E_0 = 500, a_3 = 1$.

На рисунках 6а и 6б изображены карты показателей Ляпунова, построенные в прямом и обратном времени из начальной точки P_0 . Анализ карт позволяет сделать вывод, что область параметров, для которых предельным режимом из заданной точки является устойчивое состояние равновесия, гораздо меньше области параметров, из которых достижимо неустойчивое состояние равновесия в обратном времени⁶. Для наглядности на рисунке 6с области параметров, при которых в прямом времени достижимо устойчивое, а в обратном — неустойчивое состояния равновесия, наложены друг на друга. В пересечении этих двух областей неголономная модель волчка Чаплыгина демонстрирует эффект настоящего реверса, отчетливо наблюдаемый в численных экспериментах. На рисунке 7 представлены зависимости угловых скоростей волчка Чаплыгина от времени при параметрах $E_0 = 500$, $a_3 = 1$. В качестве начальной точки выбрана все та же точка P_0 , а траектория запущена как в прямом, так и в обратном времени. Таким образом, согласно неголономной модели, если задать параметры системы и начальную точку в соответствии с рисунками 6, а затем закрутить волчок Чаплыгина вокруг вертикальной оси $\gamma = \gamma^*$ в «неудобном направлении», то после (при некоторых параметрах достаточно продолжительного) переходного процесса, сопровождающегося колебаниями и качениями, волчок поменяет направление вращения и начнет вращаться вокруг той же оси в противоположном направлении.

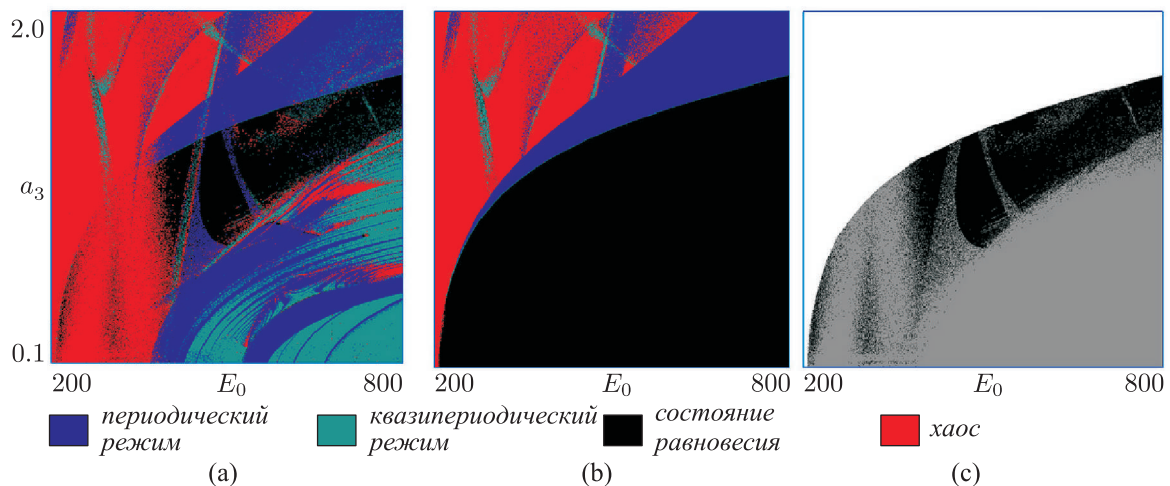


Рис. 6. Карты показателей Ляпунова в прямом и обратном времени, а также их пересечение на плоскости \mathbf{Q} .

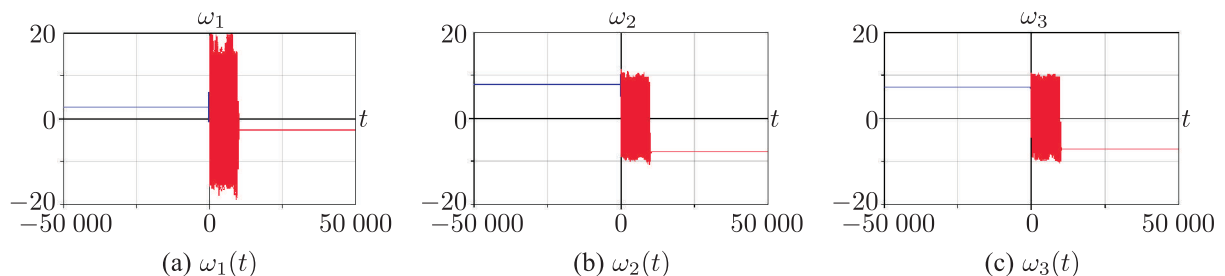


Рис. 7. Зависимость компонент угловой скорости от времени ($E_0 = 500$, $a_3 = 1$).

⁶Если бы мы взяли начальную точку $R_0(P_0)$, карта показателей Ляпунова в прямом (обратном) времени была бы такой же, как для точки P_0 в обратном (прямом) направлении.

4. Феномены хаотической динамики

Перейдем к рассмотрению хаотической динамики в неголономной модели волчка Чаплыгина. Как и при исследовании реверса, будем рассматривать динамику шара для значений параметров E_0 и a_3 из области \mathbf{Q} . Значения остальных параметров заданы согласно (3.5). Обнаружить странные аттракторы и исследовать сценарии их возникновения помог анализ карты динамических режимов (см. рис. 8), построенной для отображения Пуанкаре (2.9)⁷. Как и в случае карты показателей Ляпунова, для построения карты режимов проводился перебор узлов сетки на плоскости \mathbf{Q} . В каждом из 600×600 узлов выполнялось около 30 000 итераций отображения Пуанкаре, а результаты нескольких последних итераций (до 14) анализировались на предмет наличия периода. При обнаружении периодичности соответствующий пиксель на диаграмме обозначался определенным цветом и производился переход к анализу следующей точки на плоскости \mathbf{Q} . При этом в качестве начальных условий в новой точке разумно задавать состояние, полученное в итоге итераций в предыдущей точке («сканирование с наследованием»), что способствует ускорению сходимости к установившемуся режиму динамики, а также позволяет выбрать нужный лист в случае мультистабильности в исследуемой системе.

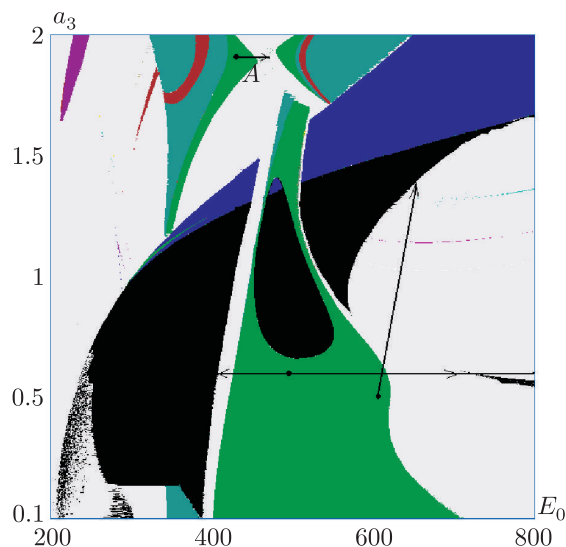
Построенная карта режимов изображена на рисунке 8. Отметим, что на построение карты существенное влияние оказала развитая мультистабильность, в результате которой карту пришлось «склеивать» из нескольких кусков, построенных с помощью разного типа сканирования начальных условий. Прокомментируем правила кодирования режимов, указанных на рисунке 8. Для периодических точек (изображенных в цвете) номера периодов указаны цифрами внутри соответствующих областей. Серым цветом указаны квазипериодические (инвариантные кривые) и хаотические режимы, различить которые, используя только лишь карту динамических режимов, невозможно. Черному цвету соответствуют режимы, для которых траектория не возвращается на выбранную секущую.⁸

Карта режимов строилась «с наследованием», как было описано выше. Однако если траектория не возвращалась в течение достаточно долгого времени в сечение Пуанкаре, то начальные условия в следующей точке устанавливались те же, что и на краю карты. Это делалось для того, чтобы выявить режимы, отличающиеся от устойчивого положения равновесия. Надо также отметить, что период цикла, обозначенный на рисунке, — это просто количество пересечений траектории с сечением Пуанкаре. Исследуемая система отличается достаточно сложной формой циклов: количество пересечений с выбранным сечением часто меняется, поэтому область устойчивости одного и того же цикла может быть окрашена в различные цвета и обозначена разными числами, но это не следует интерпретировать как бифуркации.

Типичными аттракторами для отображения Пуанкаре рассматриваемой системы являются неподвижные и периодические точки, инвариантные кривые и тор-хаосы, возникающие в результате разрушения инвариантных кривых по сценарию Афраймовича–Шильникова [31]. Черными стрелками на карте динамических режимов указаны пути, двигаясь

⁷Вообще говоря, карты динамических режимов удобно использовать при исследовании диссипативной хаотической динамики в самых разных моделях [30]. Например, в работе [22] с помощью построения и анализа таких карт была изучена хаотическая динамика в неголономной модели кельтского камня.

⁸В этом случае, как показывают численные эксперименты, траектория убегает либо на устойчивое состояние равновесия, либо, после бифуркации Андронова–Хопфа, на родившийся из него предельный цикл, пока тот еще не достиг достаточных размеров, чтобы пересекаться с секущей.

Рис. 8. Карта режимов на плоскости параметров Q .

вдоль которых можно наблюдать последовательности бифуркаций, приводящие к рождению странных аттракторов. Характерной особенностью рассматриваемой системы является видимое отсутствие удвоений периода устойчивых периодических точек⁹. Границы областей устойчивости этих точек образованы бифуркационными линиями седло-узловых бифуркаций и бифуркаций Неймарка–Сакера. Таким образом, сценарии перехода к хаосу в нашей системе связаны в основном с разрушением инвариантных кривых. Рассмотрим один из наиболее интересных, на наш взгляд, сценариев развития хаоса, связанный с возникновением восьмерчного аттрактора.

4.1. Восьмерчный аттрактор

Возможность появления у трехмерных отображений восьмерчных аттракторов (а также аттракторов лоренцевского типа) в результате простых бифуркационных сценариев была установлена в работе [33] (см. также [34]). В этих сценариях предполагалось, что поначалу аттрактором в отображении является неподвижная точка. Далее, по одному из сценариев, эта точка при изменении параметра претерпевает бифуркацию удвоения периода, становясь седловой с одномерным неустойчивым многообразием, а в ее окрестности рождается устойчивый цикл периода 2. Затем этот цикл теряет устойчивость (в принципе, неважно, каким способом), а устойчивое и неустойчивое многообразия седловой точки начинают пересекаться. Образовавшийся «гомоклинический аттрактор», в зависимости от мультипликаторов седловой точки, является аттрактором либо лоренцевского, либо восьмерчного типа (см. рис. 9).

В нашем случае рождается гомоклинический аттрактор восьмерчного типа, а сценарий его рождения, на начальном этапе, несколько отличается от описанного в работе [33]. Рассмотрим теперь этапы возникновения этого аттрактора.

⁹Этот эффект, по-видимому, характерен для трехмерных отображений, у которых якобиан не слишком близок к нулю. Например, в работе [32] было обнаружено, что в случае трехмерных отображений Эно с постоянным якобианом $B > \frac{1}{3}$ не наблюдается второе удвоение периода для устойчивой неподвижной точки.

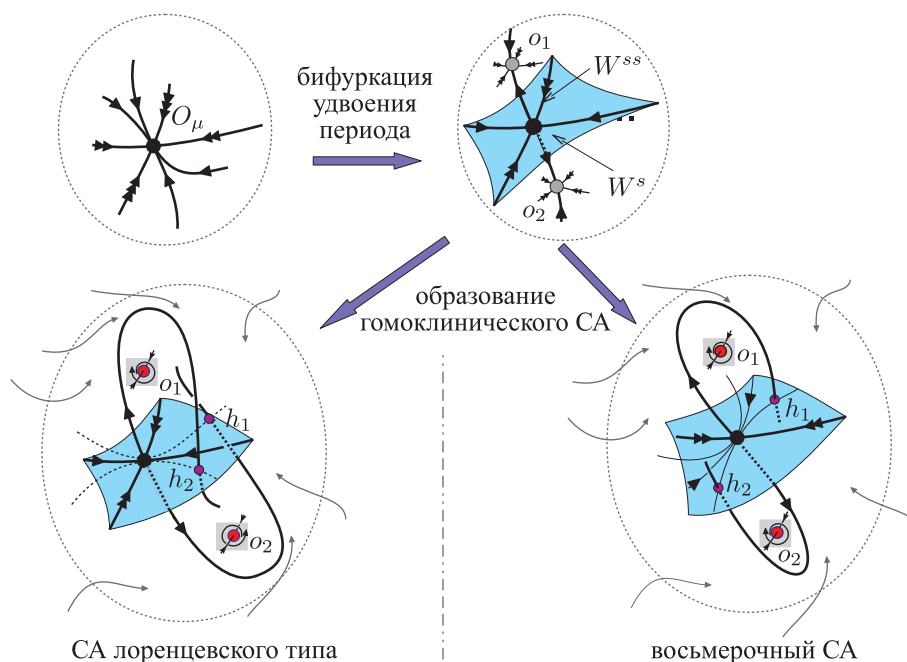


Рис. 9. Простейшие сценарии рождения двух типов гомоклинических аттракторов.

Зафиксируем $a_3 = 1.9$ и проанализируем бифуркации, возникающие на пути А на карте режимов (рис. 8). Поначалу, при $417.5 \simeq E_1 < E < E_2 \simeq 455.60$, аттрактором является точка (o_1, o_2) периода 2, которая рождается в результате седло-узловой бифуркации вместе с седловой точкой (s_1, s_2) . Отображение (2.9) также имеет неподвижную седловую точку S_1 , которая расположена между o_1 и o_2 (см. рис. 10а). Точка S_1 является седло-фокусом вплоть до $E \simeq E_3 = 456.162$, после чего ее неустойчивые комплексно-сопряженные мультипликаторы становятся действительными отрицательными. В момент $E \simeq E_4 = 456.30$ в седло S_1 влипают (в результате обратной бифуркации удвоения периода) точка периода 2 (s_1, s_2) , а само седло меняет тип с $(1, 2)$ на $(2, 1)$ (его неустойчивое многообразие становится одномерным). После этой бифуркации седло S_1 имеет мультипликаторы λ_1, λ_2 и γ , такие, что $\gamma < -1 < \lambda_2 < 0 < \lambda_1 < 1$. Теперь неустойчивое многообразие начинает наматываться на инвариантную кривую (l_1, l_2) периода 2 (см. рис. 10b). Последняя возникает в результате бифуркации Неймарка–Сакера из устойчивого цикла (o_1, o_2) при $E \simeq 455.60$. При дальнейшем увеличении параметра E инвариантная кривая L претерпевает серию бифуркаций «удвоения тора» (см. рис. 10с и 10d), а затем разрушается, образуя тор-хаос (рис. 10е). Вскоре после этого неустойчивое многообразие седла S_1 начинает пересекаться с устойчивым и образуется странный аттрактор, визуально похожий на восьмерочный аттрактор. На рисунке 10f представлен портрет обнаруженного аттрактора при $E = 457.913$, полученный итерированием точки, запущенной из окрестности седла S_1 с координатами $l = 0.514231, L/G = -0.700259, H/G = -0.930815$.

Приведем ряд количественных и качественных характеристик обнаруженного аттрактора. Мультипликаторы седла S_1 при $E = 457.913, a_3 = 1.9$ приведены ниже:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &\simeq 0.98885, \\ \lambda_2 &\simeq -0.99732, \\ \gamma &\simeq -1.00907. \end{aligned} \quad (4.1)$$

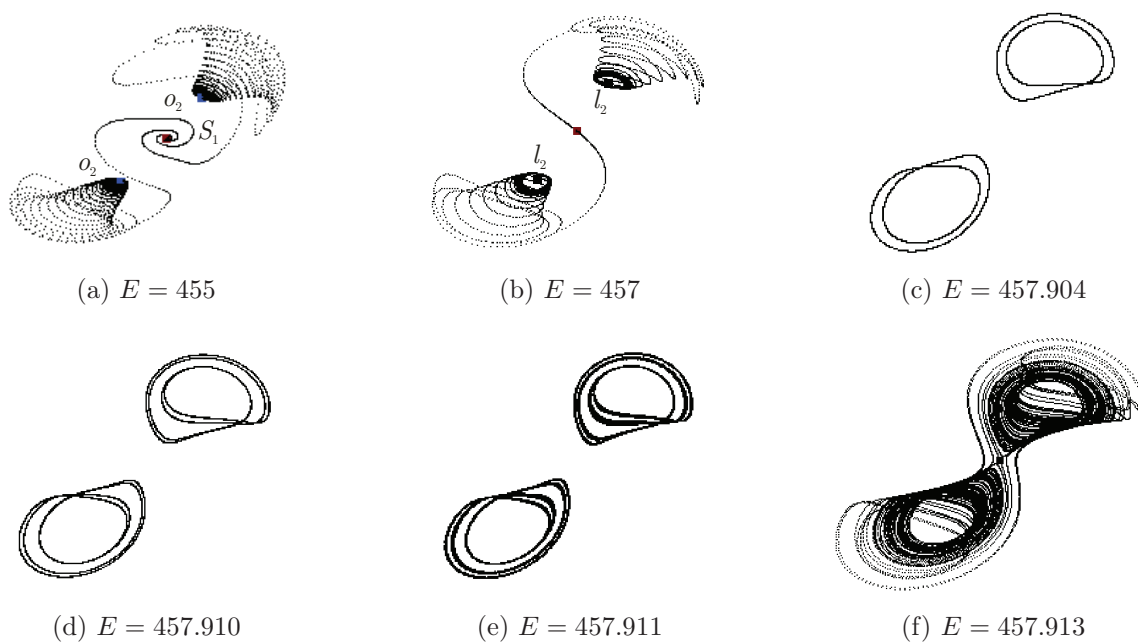


Рис. 10. Основные этапы возникновения восьмерочного аттрактора.

Таким образом, $|\lambda_1| < |\lambda_2| < 1 < |\gamma|$. Мультипликатор λ_1 , отвечающий сильному сжатию, является положительным, что характерно для восьмерочных аттракторов и отличает их от аттракторов лоренцевского типа (см. рис. 9). Условие $|\lambda_2||\gamma| > 1$ означает растяжение площадей, трансверсальных к направлению сильного сжатия, и свидетельствует о псевдогиперболичности обнаруженного аттрактора.

Ляпуновские показатели случайно заданной на аттракторе траектории принимают следующие значения:

$$\begin{aligned} \Lambda_1 &\simeq 0.00063, \\ \Lambda_2 &\simeq -0.00003, \\ \Lambda_3 &\simeq -0.00492. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Условие $\Lambda_1 + \Lambda_2 > 0$ также свидетельствует о псевдогиперболичности, а отрицательная сумма говорит о сжатии объемов, характерном для настоящих странных аттракторов. Проведенный анализ позволяют классифицировать обнаруженный аттрактор как псевдогиперболический восьмерочный аттрактор.

5. Заключение

В работе исследована неголономная модель волчка Чаплыгина, в рамках которой обнаружен эффект реверса. Хорошо известно, что неголономная модель — это идеализация, в которой сила трения не совершает работу. Однако именно анализ такой модели позволил ответить на вопрос о причине возникновения реверса для кельтских камней.

Если в случае с кельтскими камнями эффект реверса сначала был замечен в реальном эксперименте, а только потом, гораздо позже, исследован на базе математической модели, то для волчка Чаплыгина ситуация обратная. Здесь пока что удалось обнаружить эффект реверса только в неголономной модели. В своих дальнейших исследованиях мы планируем

построить более реалистичную модель, учитывающую силы трения. В случае успеха будут предприняты попытки сконструировать волчок и смоделировать эффект реверса в реальном эксперименте.

Помимо возможности существования эффекта реверса, неголомомная модель оказалась весьма интересной в плане исследования хаотической динамики. Анализ карты динамических режимов позволил обнаружить несколько типов странных аттракторов. В данной работе мы рассмотрели сценарий рождения восьмерочного аттрактора (на наш взгляд, наиболее интересного из обнаруженных). В дальнейших работах мы планируем провести исследования других типичных для рассматриваемой модели сценариев рождения странных аттракторов.

Приложение 1. Об инволюциях

Напомним определение обратимости и инволюции для потоковой системы. Представим уравнения движения (2.2) в виде $\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{v}(\mathbf{X})$, где $\mathbf{X} = (M_1, M_2, M_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$. Отображение фазового пространства $R(\mathbf{X}): \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X}$ будем называть *инволюцией для потока* $\mathbf{v}(\mathbf{X})$, если

$$\frac{d}{dt}(R(\mathbf{X})) = -\mathbf{v}(R(\mathbf{X})), \quad R \circ R = id. \quad (5.1)$$

В этом случае поток $\mathbf{v}(\mathbf{X})$ называется *обратимым* по отношению к инволюции $R(\mathbf{X})$.

В зависимости от типа преобразования переменных $(\mathbf{M}, \boldsymbol{\gamma})$ все дополнительные инволюции (помимо R_0) можно разделить на два класса:

- инволюции, отвечающие за поворот шара вокруг одной из осей инерции на угол π ,

$$\begin{aligned} \Pi_1: \mathbf{M} &\rightarrow (M_1, M_2, -M_3), \quad \boldsymbol{\gamma} \rightarrow (-\gamma_1, -\gamma_2, \gamma_3), \quad t \rightarrow -t, \\ \Pi_2: \mathbf{M} &\rightarrow (M_1, -M_2, M_3), \quad \boldsymbol{\gamma} \rightarrow (-\gamma_1, \gamma_2, -\gamma_3), \quad t \rightarrow -t, \\ \Pi_3: \mathbf{M} &\rightarrow (-M_1, M_2, M_3), \quad \boldsymbol{\gamma} \rightarrow (\gamma_1, -\gamma_2, -\gamma_3), \quad t \rightarrow -t, \end{aligned} \quad (5.2)$$

- инволюции, отвечающие за отражение шара относительно одной из трех плоскостей, проходящих через пару осей инерции шара,

$$\begin{aligned} \Sigma_1: \mathbf{M} &\rightarrow (M_1, M_2, -M_3), \quad \boldsymbol{\gamma} \rightarrow (\gamma_1, \gamma_2, -\gamma_3), \quad t \rightarrow -t, \\ \Sigma_2: \mathbf{M} &\rightarrow (M_1, -M_2, M_3), \quad \boldsymbol{\gamma} \rightarrow (\gamma_1, -\gamma_2, \gamma_3), \quad t \rightarrow -t, \\ \Sigma_3: \mathbf{M} &\rightarrow (-M_1, M_2, M_3), \quad \boldsymbol{\gamma} \rightarrow (-\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3), \quad t \rightarrow -t. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Если центр масс шара смещен вдоль единственной оси, то система (2.2) допускает три дополнительные (помимо R_0) инволюции: инволюцию, отвечающую за поворот шара на угол π вдоль оси смещения (одну из Π_i , $i = 1, \dots, 3$), и две инволюции, отвечающие за отражение шара относительно плоскостей, проходящих через ось смещения и одну из двух осей инерции (две из Σ_i , $i = 1, \dots, 3$). Если центр масс шара смещен вдоль двух осей, то исследуемая система имеет единственную дополнительную инволюцию, отвечающую за отражение шара относительно плоскости, проходящей через оси смещения (одну из Σ_i , $i = 1, \dots, 3$). В случае произвольного смещения центра масс шара (когда все компоненты a_1 , a_2 и a_3 ненулевые) рассматриваемая система не обладает дополнительными инволюциями.



Напомним определение обратимости и инволюции для отображений. Преобразование $r(\mathbf{x}): \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}$ называется *инволюцией для отображения* (2.9), если

$$\mathcal{F}_{g_0} \circ r = r \circ \mathcal{F}_{g_0}^{-1}. \tag{5.4}$$

Отображение $\mathcal{F}_{g_0}(\mathbf{x})$ в этом случае называется *обратимым* по отношению к инволюции $r(\mathbf{x})$. При должном выборе секущей инволюции потоковой системы (5.2) и (5.3) порождают инволюции для отображения Пуанкаре (2.9).

- Порожденные от Π_1, Π_2 и Π_3

$$\begin{aligned} \pi_1: \frac{L}{G} &\rightarrow -\frac{L}{G}, & \frac{H}{G} &\rightarrow -\frac{H}{G}, & l &\rightarrow l, \\ \pi_2: \frac{L}{G} &\rightarrow \frac{L}{G}, & \frac{H}{G} &\rightarrow -\frac{H}{G}, & l &\rightarrow \pi - l, \\ \pi_3: \frac{L}{G} &\rightarrow \frac{L}{G}, & \frac{H}{G} &\rightarrow -\frac{H}{G}, & l &\rightarrow -l. \end{aligned} \tag{5.5}$$

- Порожденные от Σ_1, Σ_2 и Σ_3

$$\begin{aligned} \sigma_1: \frac{L}{G} &\rightarrow -\frac{L}{G}, & \frac{H}{G} &\rightarrow \frac{H}{G}, & l &\rightarrow l, \\ \sigma_2: \frac{L}{G} &\rightarrow \frac{L}{G}, & \frac{H}{G} &\rightarrow \frac{H}{G}, & l &\rightarrow \pi - l, \\ \sigma_3: \frac{L}{G} &\rightarrow \frac{L}{G}, & \frac{H}{G} &\rightarrow \frac{H}{G}, & l &\rightarrow -l. \end{aligned} \tag{5.6}$$

Приложение 2. О поиске состояний равновесия

Для нахождения состояний равновесия системы (2.2) необходимо определить неизвестные α и β , используя выражения для первых интегралов и соотношения (3.1)–(3.2). Соотношение (3.2) можно переписать в виде

$$\left(\mathbf{I} - \frac{\beta}{\alpha^2}\right)\gamma^* = m\left(R + (\mathbf{a}, \gamma) + \frac{g}{\alpha^2}\right)\mathbf{a}, \tag{5.7}$$

откуда, введя обозначения

$$\tilde{\alpha} = \frac{1}{\alpha^2}, \quad \tilde{\beta} = \frac{\beta}{\alpha^2}, \quad \tilde{\mathbf{I}} = \left(\mathbf{I} - \frac{\beta}{\alpha^2}\right)^{-1},$$

получаем соотношение

$$\gamma^* = m(R + (\mathbf{a}, \gamma) + \tilde{\alpha}g)\tilde{\mathbf{I}}\mathbf{a}.$$

Скалярно домножим последнее соотношение на \mathbf{a} и выразим (\mathbf{a}, γ) , а также γ :

$$\begin{aligned} (\mathbf{a}, \gamma) &= \frac{m(R + \tilde{\alpha}g)(\tilde{\mathbf{I}}\mathbf{a}, \mathbf{a})}{1 - m(\tilde{\mathbf{I}}\mathbf{a}, \mathbf{a})}, \\ \gamma &= \frac{m(R + \tilde{\alpha}g)(\tilde{\mathbf{I}}\mathbf{a}, \mathbf{a})}{1 - m(\tilde{\mathbf{I}}\mathbf{a}, \mathbf{a})}. \end{aligned} \tag{5.8}$$



Далее, используя условие нормировки (геометрический интеграл зафиксирован на единичном уровне) и обозначив $R + \tilde{\alpha}g$ через $\hat{\alpha}$, запишем первое уравнение системы (3.3) в виде

$$\frac{m^2 \hat{\alpha}^2 (\tilde{\mathbf{I}}\mathbf{a}, \tilde{\mathbf{I}}\mathbf{a})}{(1 - m(\tilde{\mathbf{I}}\mathbf{a}, \mathbf{a}))^2} - 1 = 0. \quad (5.9)$$

Теперь преобразуем выражение для интеграла энергии (2.6). В состоянии равновесия вектор \mathbf{M} , выраженный по формуле (2.4), можно представить в виде

$$\mathbf{M} = \alpha[\mathbf{I}\boldsymbol{\gamma} + m(R(\mathbf{a}, \boldsymbol{\gamma})\boldsymbol{\gamma} + \mathbf{a}^2\boldsymbol{\gamma} - R\mathbf{a} - (\mathbf{a}, \boldsymbol{\gamma})\mathbf{a})]. \quad (5.10)$$

Тогда выражение для интеграла энергии примет следующий вид:

$$E_0 = \frac{1}{2}\alpha^2[(\mathbf{I}\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\gamma}) + m(\mathbf{a}^2 - (\mathbf{a}, \boldsymbol{\gamma})^2)] + mg((\mathbf{a}, \boldsymbol{\gamma}) + R). \quad (5.11)$$

Домножив (5.7) скалярно на $\boldsymbol{\gamma}$, получим выражение для $(\mathbf{I}\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\gamma})$:

$$(\mathbf{I}\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\gamma}) = \tilde{\beta} + m(R + (\mathbf{a}, \boldsymbol{\gamma}) + \tilde{\alpha}g)(\mathbf{a}, \boldsymbol{\gamma}).$$

Подставим это выражение в (5.11) и, используя соотношения (5.8), получим выражение для второго уравнения системы (3.3):

$$\frac{3m^2(\tilde{\mathbf{I}}\mathbf{a}, \mathbf{a})}{1 - m(\tilde{\mathbf{I}}\mathbf{a}, \mathbf{a})}\hat{\alpha}^2 + \left(2mR - \frac{2E_0}{g} - \frac{2mR^2(\tilde{\mathbf{I}}\mathbf{a}, \mathbf{a})}{1 - m(\tilde{\mathbf{I}}\mathbf{a}, \mathbf{a})}\right)\hat{\alpha} + m\mathbf{a}^2 + \tilde{\beta} + \frac{2E_0R}{g} - 2mR^2 = 0. \quad (5.12)$$

Таким образом, систему (3.3) образуют уравнения (5.9) и (5.12). Вычитая из уравнения (5.12) уравнение (5.9), помноженное на

$$\frac{3(\tilde{\mathbf{I}}\mathbf{a}, \mathbf{a})(1 - m(\tilde{\mathbf{I}}\mathbf{a}, \mathbf{a}))}{(\tilde{\mathbf{I}}\mathbf{a}, \tilde{\mathbf{I}}\mathbf{a})},$$

получим соотношение, связывающее $\hat{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$:

$$\hat{\alpha} = \frac{2mR^2 - \frac{2E_0R}{g} - \tilde{\beta} - m\mathbf{a}^2 - \frac{3(1 - m(\tilde{\mathbf{I}}\mathbf{a}, \mathbf{a}))(\tilde{\mathbf{I}}\mathbf{a}, \mathbf{a})}{(\tilde{\mathbf{I}}\mathbf{a}, \tilde{\mathbf{I}}\mathbf{a})}}{2mR\left(1 - \frac{m(\tilde{\mathbf{I}}\mathbf{a}, \mathbf{a})}{1 - m(\tilde{\mathbf{I}}\mathbf{a}, \mathbf{a})}\right) - \frac{2E_0}{g}}.$$

Подставляя $\hat{\alpha}$ в уравнение (5.9), получаем для $\tilde{\beta}$ иррациональное уравнение высокой степени. Для численного решения этого уравнения при конкретных значениях параметров мы применяли пакет программ *Maple*.

Благодарности

Авторы статьи выражают признательность Килину А. А., Кузнецову С. П., Мамаеву И. С. и Бизяеву И. А. за ценные консультации и советы. Отдельно авторы хотят поблагодарить Гонченко С. В. за неоценимую помощь при написании текста статьи.



Список литературы

- [1] Walker G. T. On a curious dynamical property of celt's // Proc. Cambridge Phil. Soc., 1895, vol. 8, pt. 5, pp. 305–306.
- [2] Астапов И. С. Об устойчивости вращения кельтского камня // Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем. Механ., 1980, № 2, с. 97–100.
- [3] Карапетян А. В. О реализации неголономных связей силами вязкого трения и устойчивость кельтских камней // ПММ, 1981, т. 45, № 1, с. 42–51.
- [4] Маркеев А. П. О динамике твердого тела на абсолютно шероховатой плоскости // ПММ, 1983, т. 47, № 4, с. 575–582.
- [5] Kane T. R., Levinson D. A. A realistic solution of the symmetric top problem // J. Appl. Mech., 1978, vol. 45, no. 4, pp. 903–909.
- [6] Алешкевич В. А., Деденко Л. Г., Караваев В. А. Лекции по механике твердого тела. Москва: МГУ, 1997. 72 с.
- [7] Shen J., Schneider D. A., Bloch A. M. Controllability and motion planning of a multibody Chaplygin's sphere and Chaplygin's top // Int. J. Robust Nonlinear Control, 2008, vol. 18, no. 9, pp. 905–945.
- [8] Чаплыгин С. А. О катании шара по горизонтальной плоскости // Матем. сб., 1903, т. 24, с. 139–168. См. также: Чаплыгин С. А. Собр. соч.: Т. 1. Москва–Ленинград: ОГИЗ, 1948. С. 76–101.
- [9] Kilin A. A. The dynamics of Chaplygin ball: The qualitative and computer analysis // Regul. Chaotic Dyn., 2001, vol. 6, no. 3, pp. 291–306.
- [10] Борисов А. В., Килин А. А., Мамаев И. С. Проблема дрейфа и возвращаемости при качении шара Чаплыгина // Нелинейная динамика, 2013, т. 9, № 4, с. 721–754.
- [11] Borisov A. V., Mamaev I. S., Kilin A. A. The rolling motion of a ball on a surface: New integrals and hierarchy of dynamics // Regul. Chaotic Dyn., 2002, vol. 7, no. 2, pp. 201–219.
- [12] Routh E. J. A treatise on the dynamics of a system of rigid bodies: P. 2. The advanced part. 6th ed. New York: Macmillan, 1905. См. также: New York: Dover, 1955 (reprint).
- [13] Lynch P., Bustamante M. D. Precession and recession of the rock'n'roller // J. Phys. A, 2009, vol. 42, no. 42, 425203, 25 pp.
- [14] Борисов А. В., Мамаев И. С., Бизяев И. А. Иерархия динамики при качении твердого тела без проскальзывания и верчения по плоскости и сфере // Нелинейная динамика, 2013, т. 9, № 2, с. 141–202.
- [15] Казаков А. О. Феномены хаотической динамики в задаче о качении рок-н-роллера без верчения // Нелинейная динамика, 2013, т. 9, № 2, с. 309–325.
- [16] Kazakov A. O. On the chaotic dynamics of a rubber ball with three internal rotors // Nonlinear Dynamics & Mobile Robotics, 2014, vol. 2, no. 1, pp. 73–97.
- [17] Гонченко С. В., Тураев Д. В., Шильников Л. П. Об областях Ньюхауса двумерных диффеоморфизмов, близких к диффеоморфизму с негрубым гетероклиническим контуром // Динамические системы и смежные вопросы: Сб. ст.: К 60-летию со дня рождения академика Дмитрия Викторовича Аносова / отв. ред. Е. Ф. Мищенко. (Тр. МИАН, т. 216.) Москва: Наука, 1997. С. 76–125.
- [18] Lamb J. S. W., Stenkin O. V. Newhouse regions for reversible systems with infinitely many stable, unstable and elliptic periodic orbits // Nonlinearity, 2004, vol. 17, no. 4, pp. 1217–1244.
- [19] Delshams A., Gonchenko S. V., Gonchenko A. S., Lázaro J. T., Sten'kin O. Abundance of attracting, repelling and elliptic periodic orbits in two-dimensional reversible maps // Nonlinearity, 2013, vol. 26, no. 1, pp. 1–33.
- [20] Гонченко А. С., Гонченко С. В., Казаков А. О. О некоторых новых аспектах хаотической динамики «кельтского камня» // Нелинейная динамика, 2012, т. 8, № 3, с. 507–518.
- [21] Борисов А. В., Мамаев И. С. Странные аттракторы в динамике кельтских камней // УФН, 2003, т. 173, № 4, с. 407–418.
- [22] Кузнецов С. П., Жалнин А. Ю., Сатаев И. Р., Седова Ю. В. Феномены нелинейной динамики диссипативных систем в неголономной механике «кельтского камня» // Нелинейная динамика, 2012, т. 8, № 4, с. 735–762.
- [23] Гонченко А. С., Гонченко С. В. О существовании аттракторов лоренцевского типа в неголономной модели «кельтского камня» // Нелинейная динамика, 2013, т. 9, № 1, с. 77–89.

- [24] Гонченко А. С. Об аттракторах лоренцевского типа в модели кельтского камня // Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьютер. науки, 2013, № 2, с. 3–11.
- [25] Борисов А. В., Мамаев И. С. Динамика твердого тела: Гамильтоновы методы, интегрируемость, хаос. Москва – Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2005. 576 с.
- [26] Walker J. The amateur scientist: The mysterious «rattleback»: A stone that spins in one direction and then reverses // Sci. Am., 1979, vol. 241, pp. 172–184.
- [27] Борисов А. В., Килин А. А., Мамаев И. С. Новые эффекты в динамике кельтских камней // Докл. РАН, 2006, т. 408, № 2, с. 192–195.
- [28] Benettin G., Galgani L., Giorgilli A., Strelcyn J.-M. Lyapunov characteristic exponents for smooth dynamical systems and for Hamiltonian systems: A method for computing all of them: P. 1, 2 // Meccanica, 1980, vol. 15, pp. 9–30.
- [29] Hairer E., Norsett S. P., Wanner G. Solving ordinary differential equations: 1. Nonstiff problems. Berlin: Springer, 1987. 480 pp.
- [30] Кузнецов С. П. Динамический хаос. 2-е изд. Москва: Физматлит, 2006. 356 с.
- [31] Афраймович В. С., Шильников Л. П. Инвариантные двумерные торы, их разрушение и стохастичность // Методы качественной теории дифференциальных уравнений: Межвуз. сб. / отв. ред. Е. А. Леонтович-Андропова. Горький: ГГУ, 1983. С. 3–26.
- [32] Gonchenko S. V., Ovsyannikov I. I., Simó C., Turaev D. Three-dimensional Hénon-like maps and wild Lorenz-like attractors // Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg., 2005, vol. 15, no. 11, pp. 3493–3508.
- [33] Гонченко А. С., Гонченко С. В., Шильников Л. П. К вопросу о сценариях возникновения хаоса у трехмерных отображений // Нелинейная динамика, 2012, т. 8, № 1, с. 3–28.
- [34] Gonchenko A. S., Gonchenko S. V., Kazakov A. O., Turaev D. V. Simple scenarios of onset of chaos in three-dimensional maps // Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg., 2014, vol. 24, no. 08, 1440005, 25 pp.

Regular and chaotic attractors in the nonholonomic model of Chapygin's ball

Alexey V. Borisov¹, Alexey O. Kazakov², Igor R. Sataev³

¹Udmurt State University

Universitetskaya 1, Izhevsk, 426034, Russia

²Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod

23 Prospekt Gagarina, Nizhny Novgorod, 603950, Russia

³Saratov Branch of Kotelnikov's Institute of Radio-Engineering and Electronics of RAS

Zelenaya st. 38, Saratov, 410019, Russia

¹borisov@rcd.ru, ²kazakovdz@yandex.ru, ³sataevir@rambler.ru

We study both analytically and numerically the dynamics of an inhomogeneous ball on a rough horizontal plane under the influence of gravity. A nonholonomic constraint of zero velocity at the point of contact of the ball with the plane is imposed. In the case of an arbitrary displacement of the center of mass of the ball, the system is nonintegrable without the property of phase volume conservation. We show that at certain parameter values the unbalanced ball exhibits the effect of reversal (the direction of the ball rotation reverses). Charts of dynamical regimes on the parameter plane are presented. The system under consideration exhibits diverse chaotic dynamics, in particular, the figure-eight chaotic attractor, which is a special type of pseudohyperbolic chaos.

MSC 2010: 37J60, 37N15, 37G35, 70E18, 70F25, 70H45

Keywords: Chaplygin's top, rolling without slipping, reversibility, involution, integrability, reverse, chart of dynamical regimes, strange attractor

Received August 26, 2014, accepted September 7, 2014

Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2014, vol. 10, no. 3, pp. 361–380 (Russian)

