



УДК: 534.16
MSC 2010: 39A21, 74J30

Амплитудно-зависимое внутреннее трение и генерация гармоник в средах с гистерезисной нелинейностью

В. Е. Назаров, С. Б. Кияшко

Проведено теоретическое и численное исследование нелинейных волновых процессов в средах с гистерезисной нелинейностью. Рассмотрены эффекты амплитудно-зависимых затухания и изменения скорости распространения гармонической волны и генерации ее второй и третьей гармоник. Показано, что гистерезисные среды обладают нелинейной дисперсией, проявляющейся в отличии фазовых скоростей сильной гармонической волны и ее слабых высших гармоник и приводящей к пространственным биениям и немонотонному росту амплитуд высших гармоник при увеличении амплитуды волны основной частоты.

Ключевые слова: гистерезис, амплитудно-зависимое внутреннее трение, генерация гармоник, нелинейная дисперсия

1. Введение

Распространение интенсивных упругих волн в различных средах сопровождается нелинейными эффектами, связанными с генерацией высших гармоник, искажением формы волны, нелинейным затуханием и т. п. [1]. В микронеоднородных средах, обладающих сильной нелинейностью, нелинейные эффекты проявляются более интенсивно (чем в однородных слабонелинейных средах), при этом закономерности этих эффектов определяются уравнением состояния среды. Сильная нелинейность микронеоднородных сред связывается с наличием дефектов их структуры: трещинами, границами зерен, дислокациями и т. п. К таким средам относятся многие поликристаллические металлы и горные породы. Как правило, в низкочастотном диапазоне акустические свойства поликристаллических твердых тел

Получено 24 февраля 2014 года
После доработки 22 августа 2014 года

Назаров Вениамин Евгеньевич
nazarov@hydro.appl.sci-nnov.ru
Кияшко Сергей Борисович
nazarov@hydro.appl.sci-nnov.ru
Институт прикладной физики РАН
603950, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Ульянова, д. 46

характеризуются гистерезисной нелинейностью, приводящей, в первую очередь, к эффектам амплитудно-зависимого внутреннего трения (АЗВТ): нелинейным декременту затухания и дефекту модуля упругости. Амплитудно-зависимое внутреннее трение, обусловленное движением одномерных дефектов поликристаллических твердых тел — дислокаций, известно уже более 70 лет [2–10]. Изучение этого явления направлено на выявление дислокационной структуры твердых тел, определение плотности дислокаций, характера их взаимодействия с точечными дефектами — вакансиями, внедренными и примесными атомами и т. д. Для описания эффектов АЗВТ была создана дислокационная теория амплитудно-зависимого поглощения [3, 4], основанная на струнной модели дислокации Кёлера [11]. В теории Гранато и Люкке уравнение состояния поликристалла $\sigma = \sigma(\varepsilon, \text{sign } \dot{\varepsilon})$, где σ — напряжение, ε — деформация, описывается гистерезисной (то есть неоднозначной) функцией: площадь петли гистерезиса определяет амплитудно-зависимые потери (или декремент затухания), а среднее (по периоду T циклической деформации) значение производной $\langle \sigma'_\varepsilon(0, \text{sign } \dot{\varepsilon}) - \sigma'_\varepsilon(\varepsilon_m, \text{sign } \dot{\varepsilon}) \rangle$ — дефект модуля упругости (ε_m — амплитуда деформации). В теории Гранато–Люкке гистерезис в зависимости $\sigma = \sigma(\varepsilon, \text{sign } \dot{\varepsilon})$ связывается с последовательным и лавинообразным отрывом дислокаций от внутренних точек закрепления (примесных атомов) при нагрузке и с последующим одновременным их закреплением (на них же) при разгрузке, при этом нагрузочные ветви кривой $\sigma = \sigma(\varepsilon, \text{sign } \dot{\varepsilon})$ — нелинейны, а разгрузочные — линейны. В диапазоне упругих деформаций ($\varepsilon_m < \Gamma = \text{const}$) теория Гранато–Люкке предсказывает монотонно растущие, пропорционально $(\Gamma/\varepsilon_m) \exp(-\Gamma/\varepsilon_m)$, зависимости нелинейных потерь и дефекта модуля упругости от амплитуды ε_m , что, вообще говоря, наблюдается не для всех поликристаллических твердых тел. Так, например, в меди наблюдались линейная [12], квадратичная [13] и экспоненциальная [14] зависимости нелинейных потерь от амплитуды деформации ε_m , что связано с большой чувствительностью АЗВТ к малому изменению концентрации примесей и плотности дислокаций [4–7]. Предложенная позднее несколько видоизмененная теория поглощения [15] предполагает, что движение дислокаций ограничивается не только их линейным натяжением, но и полем упругих напряжений соседних примесных атомов. Отрывающиеся от примесных атомов дислокации вновь закрепляются на соседних атомах [16] — этот механизм ограничивает и увеличение длины сегментов дислокации, и рост площади петель гистерезисной зависимости $\sigma = \sigma(\varepsilon, \text{sign } \dot{\varepsilon})$. Такое ограничение приводит вначале к линейной зависимости нелинейных потерь от амплитуды ε_m , а затем к их насыщению; при этом разгрузочные ветви кривой $\sigma = \sigma(\varepsilon, \text{sign } \dot{\varepsilon})$ так же, как и нагрузочные, становятся нелинейными. Линейные зависимости гистерезисных потерь от амплитуды ε_m и их насыщение наблюдались в поликристаллических отожженной меди [17] и цинке [18, 19], при этом дефект модуля упругости был пропорционален ε_m^n , где для меди $n = 1, 1/2$, а для цинка $n = 1$. Насыщение гистерезисных потерь наблюдалось также в монокристалле меди [4] и в свинце [20], при этом в свинце дефект модуля упругости был пропорционален ε_m^2 (в начале процесса) и $\varepsilon_m^{1/2}$ (на стадии насыщения).

При распространении в поликристалле с дислокациями интенсивной гармонической акустической волны гистерезисная нелинейность, кроме эффектов АЗВТ, приводит также к генерации высших гармоник (или волн кратных частот) [21–23]. Поведение гармоник при гистерезисной зависимости $\sigma = \sigma(\varepsilon, \text{sign } \dot{\varepsilon})$ качественно отличается от поведения гармоник при гладкой однозначной зависимости $\sigma = \sigma(\varepsilon)$, определяемой пятиконстантной теорией упругости [24] и описывающей деформирование однородных твердых тел и тех же поликристаллов, но при малых напряжениях, недостаточных для отрыва дислокаций от примесных атомов. Гистерезисная зависимость $\sigma = \sigma(\varepsilon, \text{sign } \dot{\varepsilon})$, следующая из теории Гранато–Люкке,

не всегда правильно описывает наблюдаемые в эксперименте с поликристаллами амплитудные зависимости эффектов АЗВТ и генерации гармоник, в видоизмененной же теории [14] аналитического выражения для гистерезисной зависимости $\sigma = \sigma(\varepsilon, \text{sign } \dot{\varepsilon})$ не получено. Заметим, однако, что именно уравнение состояния наиболее полно характеризует нелинейные свойства среды, поскольку именно уравнение состояния позволяет в полной мере исследовать нелинейные волновые процессы и описать не только эффекты АЗВТ (нелинейные потери и дефект модуля упругости), но и любые другие характеристики этих процессов. В связи с этим важно также отметить, что для каждого материала гистерезисную зависимость $\sigma = \sigma(\varepsilon, \text{sign } \dot{\varepsilon})$ можно реконструировать на основе анализа экспериментально установленных для этого материала амплитудных зависимостей эффектов АЗВТ и генерации высших гармоник (обратная задача), что дает возможность решать и прямую задачу о нелинейном распространении волн в исследуемом материале [21–23].

В настоящей работе предложено феноменологическое гистерезисное уравнение состояния поликристаллических твердых тел, учитывающее насыщение нелинейных потерь, и проведено теоретическое и численное исследование нелинейных процессов, возникающих при распространении акустических волн в таких средах.

2. Уравнение состояния поликристалла с насыщением гистерезисных потерь

Уравнение состояния поликристалла, аналогичное гистерезисному уравнению Гранато–Люкке [2, 3], но учитывающее насыщение нелинейных потерь и нелинейность ветвей разгрузки [21], можно представить в виде

$$\sigma(\varepsilon, \text{sign } \dot{\varepsilon}) = E[\varepsilon - f(\varepsilon, \text{sign } \dot{\varepsilon})], \quad (2.1)$$

$$f(\varepsilon, \text{sign } \dot{\varepsilon}) = \frac{1}{2(1 + \gamma_0 |\varepsilon|)} \cdot \begin{cases} \gamma_1 \varepsilon^2, & \varepsilon > 0, \dot{\varepsilon} > 0, \\ -\gamma_2 \varepsilon^2 + (\gamma_1 + \gamma_2) \varepsilon_m \varepsilon, & \varepsilon > 0, \dot{\varepsilon} < 0, \\ -\gamma_3 \varepsilon^2, & \varepsilon < 0, \dot{\varepsilon} < 0, \\ \gamma_4 \varepsilon^2 + (\gamma_3 + \gamma_4) \varepsilon_m \varepsilon, & \varepsilon < 0, \dot{\varepsilon} > 0, \end{cases} \quad (2.2)$$

где E — модуль упругости, $f(\varepsilon, \text{sign } \dot{\varepsilon})$ — гистерезисная функция, $|f(\varepsilon, \text{sign } \dot{\varepsilon})| \ll |\varepsilon| \ll 1$, $|f'_\varepsilon(\varepsilon, \text{sign } \dot{\varepsilon})| \ll 1$, γ_0 и γ_{1-4} — параметры гистерезисной нелинейности, $\gamma_0 \geq 0$, $\gamma_1 + \gamma_2 \geq 0$, $\gamma_3 + \gamma_4 \geq 0$, $|\gamma_{1-4} \varepsilon_m| \ll 1$, $|\gamma_{1-4}| \gg 1$.

Для того чтобы наиболее четко проявлялось влияние гистерезисных свойств среды на динамику нелинейных волновых процессов, мы не будем учитывать здесь ее линейную диссипацию, определяемую слагаемым $\alpha \rho \dot{\varepsilon}$ [24], где α — коэффициент линейной диссипации среды, ρ — ее плотность. Это справедливо при выполнении условия $E |f(\varepsilon, \text{sign } \dot{\varepsilon})| \gg \alpha \rho |\dot{\varepsilon}|$.

Отличие гистерезисного уравнения (2.2) от предложенного в работе [21] заключается в наличии множителя $(1 + \gamma_0 |\varepsilon|)^{-1}$, ответственного за ограничение движения дислокаций и насыщение нелинейных потерь (при $\gamma_0 = 0$ насыщения нет). Этот множитель, однако, существенно влияет и на дефект модуля упругости, то есть на скорость распространения гармонической волны, и на генерацию ее высших гармоник. Несмотря на зависимость напряжения σ от скорости деформации $\dot{\varepsilon}$ (вернее, от $\text{sign } \dot{\varepsilon}$), гистерезисное слагаемое (2.2) в уравнении состояния (2.1) безынерционно и, следовательно, нелинейные свойства таких

сред не зависят от частоты волны. Однако, как будет показано ниже, такие среды обладают нелинейной дисперсией, приводящей к отличию фазовых скоростей сильной гармонической волны накачки и ее слабых высших гармоник. Из уравнения (2.2) можно получить выражение для амплитудно-зависимого декремента:

$$\delta(\varepsilon_m) = \frac{1}{\varepsilon_m^2} \oint_T f(\varepsilon, \text{sign } \dot{\varepsilon}) d\varepsilon = \frac{\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4}{2\gamma_0^2 \varepsilon_m} \left[1 + \frac{\gamma_0 \varepsilon_m}{2} - \frac{1 + \gamma_0 \varepsilon_m}{\gamma_0 \varepsilon_m} \ln(1 + \gamma_0 \varepsilon_m) \right] > 0, \quad (2.3)$$

где интеграл вычисляется по периоду T циклической деформации ε .

Из этого выражения следует, что $\gamma_0 \varepsilon_m \ll 1 - \delta(\varepsilon_m) = (\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4) \varepsilon_m / 12 \sim \varepsilon_m$, а $\gamma_0 \varepsilon_m \gg 1 - \delta(\varepsilon_m) = (\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4) / 4\gamma_0 = \text{const}$, что, действительно, соответствует результатам работ [5, 15, 17–20].

3. Нелинейные эффекты АЗВТ при распространении квазигармонической волны

Подставляя уравнение состояния (2.1) в уравнение движения [24] $\rho U_{tt} = \sigma_x(\varepsilon, \text{sign } \dot{\varepsilon})$, получим одномерное волновое уравнение для деформации $\varepsilon(x, t) = U_x(x, t)$:

$$\varepsilon_{tt} - C_0^2 \varepsilon_{xx} = -C_0^2 [f(\varepsilon, \text{sign } \dot{\varepsilon})]_{xx}, \quad (3.1)$$

где U — смещение, $C_0 = (E/\rho)^{1/2}$.

Отметим сразу, что для волн, описываемых уравнением (3.1), линейная дисперсия отсутствует, то есть малоамплитудные (линейные) гармонические волны различных частот распространяются с одинаковой фазовой скоростью, равной C_0 . Переходя в уравнении (3.1) к переменным $\tau = t - x/C_0$, $x' = x$, получим уравнение для волн, бегущих в положительном направлении оси x :

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial x} = -\frac{1}{2C_0} \frac{\partial}{\partial \tau} \{f(\varepsilon, \text{sign } \dot{\varepsilon})\}. \quad (3.2)$$

Граничное условие зададим в виде $\varepsilon(x = 0, t) = \varepsilon_0 \sin \omega t$. Решение уравнения (3.2) будем искать методом возмущений, полагая, что

$$\varepsilon(x, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n(x, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n(x) \sin[n\theta + \psi_n(x)], \quad (3.3)$$

где $\theta = \omega\tau + \Phi(x)$, $\varepsilon_n(x)$, $\Phi(x)$ и $\psi_{n \geq 2}(x)$ — медленно меняющиеся функции координаты x , $\psi_1 = 0$, $|\sum_{n=2}^{\infty} \varepsilon_n(x, \theta)| \ll |\varepsilon_1(x, \theta)|$, $\varepsilon_m(x) \cong \varepsilon_1(x)$. Конечно, в общем случае амплитуды $\varepsilon_n(x)$ и фазы $\Phi(x)$, $\psi_{n \geq 2}(x)$ гармоник нелинейной волны $\varepsilon(x, \theta)$ зависят не только от координаты x , но и от начальной амплитуды ε_0 .

Подставляя разложение (3.3) в уравнение (3.2) и оставляя в правой части этого уравнения слагаемое только на основной частоте, получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{d\varepsilon_n}{dx} \sin[n\theta + \psi_n] + \varepsilon_n \left(n \frac{d\Phi}{dx} + \frac{d\psi_n}{dx} \right) \cos[n\theta + \psi_n] \right] = -\frac{1}{2C_0} \frac{\partial}{\partial \tau} \{f(\varepsilon_1, \text{sign } \dot{\varepsilon}_1)\}. \quad (3.4)$$

Разложим нелинейную функцию $f(\varepsilon_1, \text{sign } \dot{\varepsilon}_1)$ в уравнении (3.4) в ряд Фурье:

$$f(\varepsilon_1, \text{sign } \dot{\varepsilon}_1) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(\varepsilon_1) \cos n\theta + b_n(\varepsilon_1) \sin n\theta,$$

где $a_n(\varepsilon_1) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\varepsilon_1, \text{sign } \dot{\varepsilon}_1) \cos n\theta d\theta$, $b_n(\varepsilon_1) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\varepsilon_1, \text{sign } \dot{\varepsilon}_1) \sin n\theta d\theta$.

Выделяя в уравнении (3.4) слагаемые с одинаковыми частотами, получаем систему нелинейных уравнений для амплитуд $\varepsilon_1(x)$, $\varepsilon_n(x)$ и фаз $\Phi(x)$, $\psi_n(x)$:

$$\frac{d\varepsilon_n}{dx} \cos \psi_n - \varepsilon_n \left(n \frac{d\Phi}{dx} + \frac{d\psi_n}{dx} \right) \sin \psi_n = \frac{a_n(\varepsilon_1)K_n}{2}, \quad (3.5)$$

$$\frac{d\varepsilon_n}{dx} \sin \psi_n + \varepsilon_n \left(n \frac{d\Phi}{dx} + \frac{d\psi_n}{dx} \right) \cos \psi_n = -\frac{b_n(\varepsilon_1)K_n}{2}, \quad (3.6)$$

где $K_n = nK_1 = n\omega/C_0$.

Для амплитуд и фаз первых трех гармоник уравнения (3.5), (3.6) имеют следующий вид:

$$\frac{d\varepsilon_1}{dz} = -\frac{1}{2\gamma_0^2} \left[1 + \frac{\gamma_0\varepsilon_1}{2} - \frac{(1 + \gamma_0\varepsilon_1) \ln(1 + \gamma_0\varepsilon_1)}{\gamma_0\varepsilon_1} \right], \quad (3.7)$$

$$\frac{d\Phi}{dz} = \frac{1}{2\gamma_0^2\varepsilon_1} \left[\frac{\pi}{2} - \gamma_0\varepsilon_1 - \frac{\ln[\gamma_0\varepsilon_1 + \sqrt{(\gamma_0\varepsilon_1)^2 - 1}]}{\sqrt{(\gamma_0\varepsilon_1)^2 - 1}} \right] \left[1 - \frac{b}{\gamma_0\varepsilon_1} \right] - \frac{\pi b}{8\gamma_0}, \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\varepsilon_2}{dz} \cos \psi_2 - \varepsilon_2 \left(2 \frac{d\Phi}{dz} + \frac{d\psi_2}{dz} \right) \sin \psi_2 = \\ = -\frac{1}{3\gamma_0^2} \left\{ c\gamma_0\varepsilon_1 - 6 \left[d - \frac{c}{\gamma_0\varepsilon_1} \right] \left[1 - \frac{\pi}{2\gamma_0\varepsilon_1} + \frac{2 - (\gamma_0\varepsilon_1)^2 \ln[\gamma_0\varepsilon_1 + \sqrt{(\gamma_0\varepsilon_1)^2 - 1}]}{2\gamma_0\varepsilon_1 \sqrt{(\gamma_0\varepsilon_1)^2 - 1}} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$\frac{d\varepsilon_2}{dz} \sin \psi_2 + \varepsilon_2 \left(2 \frac{d\Phi}{dz} + \frac{d\psi_2}{dz} \right) \cos \psi_2 = \frac{2d}{\gamma_0^2} \left[\frac{\gamma_0\varepsilon_1}{6} - \frac{1}{2} - \frac{1}{\gamma_0\varepsilon_1} + \frac{(1 + \gamma_0\varepsilon_1) \ln(1 + \gamma_0\varepsilon_1)}{(\gamma_0\varepsilon_1)^2} \right], \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\varepsilon_3}{dz} \cos \psi_3 - \varepsilon_3 \left(3 \frac{d\Phi}{dz} + \frac{d\psi_3}{dz} \right) \sin \psi_3 = \\ = -\frac{3}{\gamma_0^2} \left[\frac{\gamma_0\varepsilon_1}{12} + \frac{5}{6} - \frac{1}{\gamma_0\varepsilon_1} - \frac{2}{(\gamma_0\varepsilon_1)^2} - \frac{[(\gamma_0\varepsilon_1)^2 - 4](1 + \gamma_0\varepsilon_1) \ln(1 + \gamma_0\varepsilon_1)}{2(\gamma_0\varepsilon_1)^3} \right], \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\varepsilon_3}{dz} \sin \psi_3 + \varepsilon_3 \left(3 \frac{d\Phi}{dz} + \frac{d\psi_3}{dz} \right) \cos \psi_3 = \\ = \frac{3}{\gamma_0^2} \left[1 - \frac{b}{\gamma_0\varepsilon_1} \right] \left[\frac{[4 - 3(\gamma_0\varepsilon_1)^2] \ln[\gamma_0\varepsilon_1 + \sqrt{(\gamma_0\varepsilon_1)^2 - 1}]}{2(\gamma_0\varepsilon_1)^2 \sqrt{(\gamma_0\varepsilon_1)^2 - 1}} - \frac{\pi}{(\gamma_0\varepsilon_1)^2} + \frac{2}{(\gamma_0\varepsilon_1)} + \frac{\pi}{4} - \frac{\gamma_0\varepsilon_1}{6} \right], \end{aligned} \quad (3.12)$$

где

$$\begin{aligned} z = aK_1x, \quad a = \frac{\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4}{2\pi}, \quad b = \frac{\gamma_1 - \gamma_2 + \gamma_3 - \gamma_4}{\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4}, \\ c = \frac{\gamma_1 - \gamma_2 - \gamma_3 + \gamma_4}{\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4}, \quad d = \frac{\gamma_1 + \gamma_2 - \gamma_3 - \gamma_4}{\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4}. \end{aligned}$$

Из уравнений (3.7), (3.8) можно определить локальные амплитудно-зависимые декремент затухания $\alpha(\varepsilon_1) = -\varepsilon_1^{-1}(z)[d\varepsilon_1(z)/dz]$ и относительное изменение фазовой скорости



$\eta(\varepsilon_1) = \Delta C(\varepsilon_1)/C_0 = [C(\varepsilon_1) - C_0]/C_0 = a[d\Phi(z)/dz] < 0$ волны основной частоты:

$$\alpha(\varepsilon_1) = \frac{1}{2\gamma_0^2\varepsilon_1} \left[1 + \frac{\gamma_0\varepsilon_1}{2} - \frac{(1 + \gamma_0\varepsilon_1) \ln(1 + \gamma_0\varepsilon_1)}{\gamma_0\varepsilon_1} \right], \quad (3.13)$$

$$\frac{\eta(\varepsilon_1)}{a} = \frac{1}{2\gamma_0^2\varepsilon_1} \left[\frac{\pi}{2} - \gamma_0\varepsilon_1 - \frac{\ln[\gamma_0\varepsilon_1 + \sqrt{(\gamma_0\varepsilon_1)^2 - 1}]}{\sqrt{(\gamma_0\varepsilon_1)^2 - 1}} \right] \left[1 - \frac{b}{\gamma_0\varepsilon_1} \right] - \frac{\pi b}{8\gamma_0}. \quad (3.14)$$

На рисунке 1 показаны графики зависимостей $\alpha(\varepsilon_1)$ и $|\eta(\varepsilon_1)|/a$, а также их отношения $r(\varepsilon_1) = \alpha(\varepsilon_1)/[|\eta(\varepsilon_1)|/a]$ от амплитуды ε_1 при различных значениях параметра γ_0 и при $b = 1/8$. На графиках видно, что с ростом ε_1 коэффициенты $\alpha(\varepsilon_1)$ и $|\eta(\varepsilon_1)|/a$ также растут: $\gamma_0\varepsilon_1 \ll 1 - \alpha(\varepsilon_1) \sim |\eta(\varepsilon_1)|/a \sim \varepsilon_1$, и $\gamma_0\varepsilon_1 \gg 1$ они демонстрируют насыщение. При $\gamma_0 = 0$ и $\gamma_0\varepsilon_1 \ll 1 - r(\varepsilon_1) = \text{const}$, а при $\gamma_0\varepsilon_1 > 10^{-1}$ отношение $r(\varepsilon_1)$ начинает заметно расти и при $\gamma_0\varepsilon_1 \gg 1$ также стремится к насыщению.

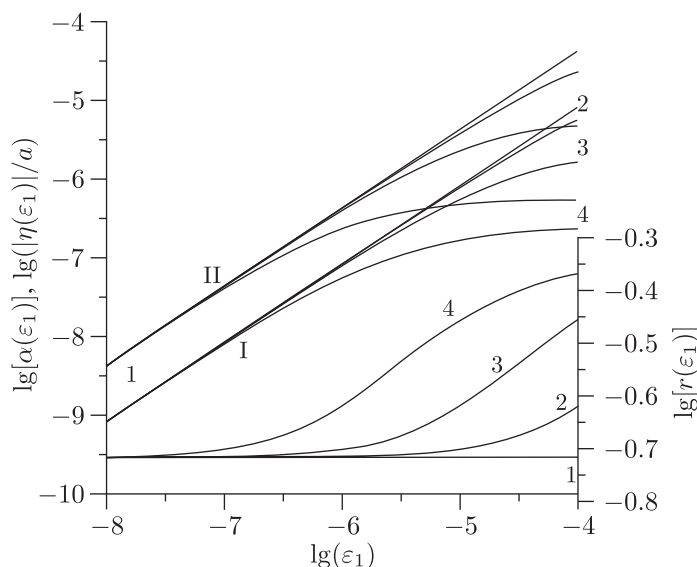


Рис. 1. Зависимости $\alpha(\varepsilon_1)$ (кривая I), $|\eta(\varepsilon_1)|/a$ (кривая II) и $r(\varepsilon_1)$ от ε_1 при различных параметрах γ_0 : (1) $\gamma_0 = 0$, (2) $\gamma_0 = 10^4$, (3) $\gamma_0 = 10^5$, (4) $\gamma_0 = 10^6$.

В общем случае аналитических решений системы уравнений (3.7)–(3.12) получить не удастся, поэтому вначале мы рассмотрим несколько простых частных случаев, а затем приведем численное решение этих уравнений.

Рассмотрим среду с упругой квадратичной нелинейностью $f(\varepsilon, \text{sign } \dot{\varepsilon}) = (\gamma/2)\varepsilon^2$, полагая в уравнении (2.2) $\gamma_1 + \gamma_2 = 0$, $\gamma_3 + \gamma_4 = 0$, $\gamma_1 = -\gamma_3 = \gamma$, $\gamma_0 = 0$. В этом случае имеем: $a_1 = 0$, $b_1 = 0$, $a_2 = -\gamma\varepsilon_1^2/4$, $b_2 = 0$, $a_3 = 0$, $b_3 = 0$ и т. д., и из уравнений (3.7)–(3.12) получаем: $\varepsilon_1(x) = \varepsilon_0$, $\Phi(x) = 0$, $\alpha(\varepsilon_0) = 0$, $\varepsilon_2(x) = \frac{\gamma\varepsilon_0^2 K_1 x}{4} \ll \varepsilon_0$, $\psi_2 = \pi$, $\varepsilon_3(x) = 0$.

Аналогичные выражения легко получаются и для гистерезисной среды без ограничения нелинейных потерь ($\gamma_0 = 0$) на малых расстояниях при $a\varepsilon_0 K_1 x \ll 1$ [21]:

$$\varepsilon_1(x) = \left(1 - \frac{\bar{a}_1 \varepsilon_0 K_1 x}{2\pi} \right) \varepsilon_0, \quad \Phi(x) = -\bar{b}_1 \varepsilon_0 K_1 x, \quad \alpha(\varepsilon_0) = \bar{a}_1 \varepsilon_0, \quad \varepsilon_n(x) = \sqrt{\bar{a}_n^2 + \bar{b}_n^2} \varepsilon_0^2 n K_1 x, \quad (3.15)$$

где:

$$\begin{aligned}\bar{a}_1 &= \frac{\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4}{12}, & \bar{b}_1 &= \frac{1}{6\pi} \left\{ \gamma_1 - \gamma_2 + \gamma_3 - \gamma_4 + \frac{3\pi}{8}(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4) \right\}, \\ \bar{a}_2 &= \frac{1}{12\pi} \left\{ \gamma_1 + \gamma_2 - \gamma_3 - \gamma_4 + \frac{3\pi}{8}(\gamma_1 - \gamma_2 - \gamma_3 + \gamma_4) \right\}, & \bar{b}_2 &= \frac{\gamma_1 + \gamma_2 - \gamma_3 - \gamma_4}{24\pi}, \\ \bar{a}_3 &= \frac{\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4}{120\pi}, & \bar{b}_3 &= \frac{\gamma_1 - \gamma_2 + \gamma_3 - \gamma_4}{30\pi}, & \operatorname{tg} \psi_n &= -\frac{\bar{b}_n}{\bar{a}_n} = \operatorname{const}.\end{aligned}$$

Рассмотрим также случай $\gamma_1 + \gamma_2 = 0$, $\gamma_3 + \gamma_4 = 0$, $\gamma_1 = -\gamma_3 = \gamma$, $\gamma_0 \neq 0$, $\gamma_0 \varepsilon_0 \ll 1$, когда $a_1 = 0$, $b_1 = 0$, $a_2 = -\frac{\gamma}{4}\varepsilon_1^2 \left(1 - \frac{16}{5\pi}\gamma_0\varepsilon_1\right)$, $b_2 = 0$, $a_3 = 0$, $b_3 = 0$. Эти параметры соответствуют среде с ограничением упругой квадратичной нелинейности [$f(\varepsilon, \operatorname{sign} \dot{\varepsilon}) = \gamma\varepsilon^2/2(1 + \gamma_0|\varepsilon|)$], для которой получаем: $\varepsilon_1(x) = \varepsilon_0$, $\Phi(x) = 0$, $\alpha(\varepsilon_0) = 0$, $\varepsilon_2(x) = \frac{\gamma\varepsilon_0^2 K_1 x}{4} \left(1 - \frac{16}{5\pi}\gamma_0\varepsilon_0\right) \ll \varepsilon_0$, $\psi_2 = \pi$, $\varepsilon_3(x) = 0$.

Здесь важно отметить, что во всех этих средах (на малых расстояниях x) фазы ψ_n высших гармоник не зависят ни от координаты x , ни от амплитуды ε_0 . Это свидетельствует о том, что во всех этих случаях линейной дисперсии нет, а нелинейная дисперсия не проявляется, то есть расфазировка вынужденной и собственной высших гармоник волны основной частоты незначительна. [При возбуждении в нелинейной среде с дисперсией гармонической волны с частотой ω в среде возникает и распространяется волна на частоте $n\omega$, которая является суммой двух волн: собственной и вынужденной. Собственная волна с частотой $n\omega$ распространяется с фазовой скоростью $C(n\omega)$, а вынужденная (с той же частотой $n\omega$) возникает за счет нелинейности среды и распространяется со скоростью $C(\omega)$ «вынуждающей» первичной волны — волны накачки (с частотой ω).] Подчеркнем, что в первом случае, в среде с квадратичной упругой нелинейностью, нелинейная дисперсия не проявляется ни на малых, ни на больших расстояниях, поскольку в такой среде ее просто нет и $C(n\omega) = C(\omega) = C_0$. Таким образом, если нелинейная дисперсия среды не проявляется, то при увеличении амплитуды ε_0 волны основной частоты амплитуды высших гармоник $\varepsilon_{n \geq 2}$ растут монотонно.

4. Результаты численного моделирования

Далее приведем результаты численного решения уравнений (3.7)–(3.12), полагая для упрощения расчетов $d = 0$, что соответствует одинаковым гистерезисным потерям для синусоидальной волны в фазе сжатия и растяжения, то есть $\gamma_1 + \gamma_2 = \gamma_3 + \gamma_4$. На рисунках 2–5 приведены зависимости амплитуд $\varepsilon_{1,2,3}(z)$ первых трех гармоник и производных фаз $\Phi_z(z)$, $\psi_{2,3z}(z)$ от расстояния z (при $\varepsilon_0 = \operatorname{const}$) и от ε_0 (при $z = \operatorname{const}$) при различных параметрах γ_0 и фиксированных параметрах b и c : $b = 1/8$, $c = 1/10$. На графиках видно, что с ростом z амплитуда $\varepsilon_1(z)$ первой гармоники монотонно уменьшается — из-за гистерезисных потерь, при этом с ростом параметра γ_0 скорость уменьшения $\varepsilon_1(z)$ падает (см. рис. 2). Амплитуды же $\varepsilon_{2,3}(z)$ второй и третьей гармоник вначале растут, достигают максимумов, уменьшаются (из-за гистерезисных потерь — не до нуля), опять растут, и так несколько раз, то есть амплитуды $\varepsilon_{2,3}(z)$ испытывают пространственные биения; при увеличении параметра γ_0 периоды биений $\varepsilon_{2,3}(z)$ растут, а соотношения между амплитудами $\varepsilon_{2,3}(z)$ могут меняться. На графике видно, что производная $\Phi_z(z)$ монотонно изменяется по z , при этом

$\Phi_z(z) < 0$, а производные $\psi_{2,3z}(z)$ изменяются немонотонно, они имеют несколько максимумов, причем $\psi_{2,3z}(z) > 0$ (рис. 3). Из сравнения рисунка 2 и рисунка 3 можно заметить, что минимумы амплитуд $\varepsilon_{2,3}(z)$ совпадают с максимумами производных $\psi_{2,3z}(z)$. Это непосредственно следует и из уравнений (3.7)–(3.12): при $\varepsilon_{2,3}(z) = \min$, когда $\varepsilon_{2,3z}(z) = 0$, должно выполняться условие $\psi_{2,3z}(z) \cong \max$. Расстояния $z_m = aK_1x_m$, на которых имеют место минимумы и максимумы амплитуд $\varepsilon_{n \geq 2}(z)$, определяются из выражения $\operatorname{tg} \psi_{n \geq 2}(z_m) = a_n(\varepsilon_1)/b_n(\varepsilon_1)$. Аналогичные биения амплитуды $\varepsilon_{n \geq 2}(z)$ испытывают в среде с упругой квадратичной нелинейностью и линейной дисперсией. Но в нашем случае линейной дисперсии нет, следовательно, в гистерезисной среде, описываемой уравнением (2.2), проявляется нелинейная дисперсия. Об этом свидетельствует и вторая серия зависимостей амплитуд $\varepsilon_{1,2,3}(z)$ и производных фаз $\Phi_z(z)$ и $\psi_{2,3z}(z)$ от начальной амплитуды ε_0 при $z = \operatorname{const}$ (рис. 4). Из этих графиков видно, что при увеличении величины ε_0 амплитуды $\varepsilon_{1,2,3}(z)$ растут причем в начале $\varepsilon_1(z) \sim \varepsilon_0$, $\varepsilon_{2,3}(z) \sim \varepsilon_0^2$ — в соответствии с выражениями (3.15), затем для амплитуды $\varepsilon_1(z)$ наблюдается отклонение от линейной зависимости — из-за гистерезисных потерь, а амплитуды $\varepsilon_{2,3}(z)$ достигают некоторых локальных максимумов, уменьшаются, опять растут, и т. д., то есть при относительно больших ε_0 амплитуды $\varepsilon_{2,3}(z)$ растут немонотонно и испытывают биения (также не до нуля). Из графиков на рисунке 5 видно, что $\Phi_z(z)$ монотонно изменяется при увеличении ε_0 , при этом $\Phi_z(z) < 0$, а производные $\psi_{2,3z}(z)$ — немонотонны, они также имеют несколько максимумов, но $\psi_{2,3z}(z) > 0$. Здесь, как и ранее, минимумы амплитуд $\varepsilon_{2,3}(z)$ совпадают с максимумами производных фаз $\psi_{2,3z}(z)$. Производные $\Phi_z(z)$ и $\psi_{nz}(z)$ определяют зависимости изменения фазовых скоростей $C_1(z)$ и $C_{n \geq 2}(z)$ гармоник волны от z и от начальной амплитуды ε_0 :

$$\eta(\varepsilon_1) = \frac{\Delta C_1(z)}{C_0} = \frac{C_1(z) - C_0}{C_0} = a \frac{d\Phi(z)}{dz} < 0, \quad \mu_n(\varepsilon_1) = \frac{C_n(z) - C_1(z)}{C_0} = \frac{a}{n} \frac{d\psi_n(z)}{dz} > 0.$$

Из этих выражений следует, что распространение сильной и слабых волн с частотами ω и $n\omega$, соответственно, происходит с близкими ($|\eta(\varepsilon_1)| \ll 1$, $|\mu_n(\varepsilon_1)| \ll 1$), но различными скоростями $C_1(z)$ и $C_{n \geq 2}(z) > C_1(z)$; их значения определяются амплитудой ε_0 и зависят от расстояния z . На достаточно большом расстоянии z , при увеличении ε_0 между вынужденной и собственной волнами с частотой $n\omega$, возникает расфазировка, равная πq ($q = 1, 2, \dots$),

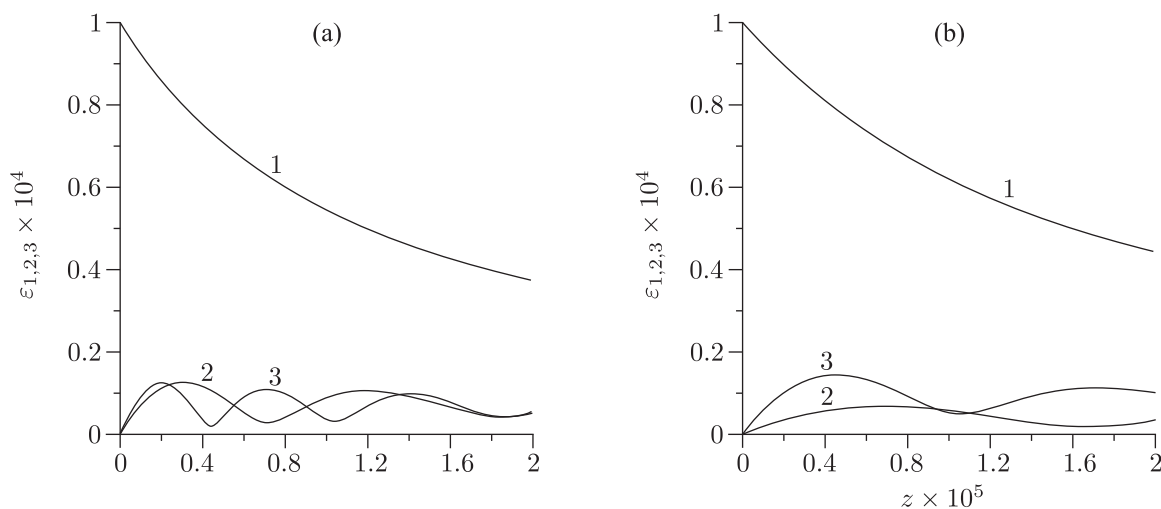


Рис. 2. Зависимости $\varepsilon_{1,2,3} = \varepsilon_{1,2,3}(z)$ при $\gamma_0 = 0$ (а), $\gamma_0 = 10^4$ (б).

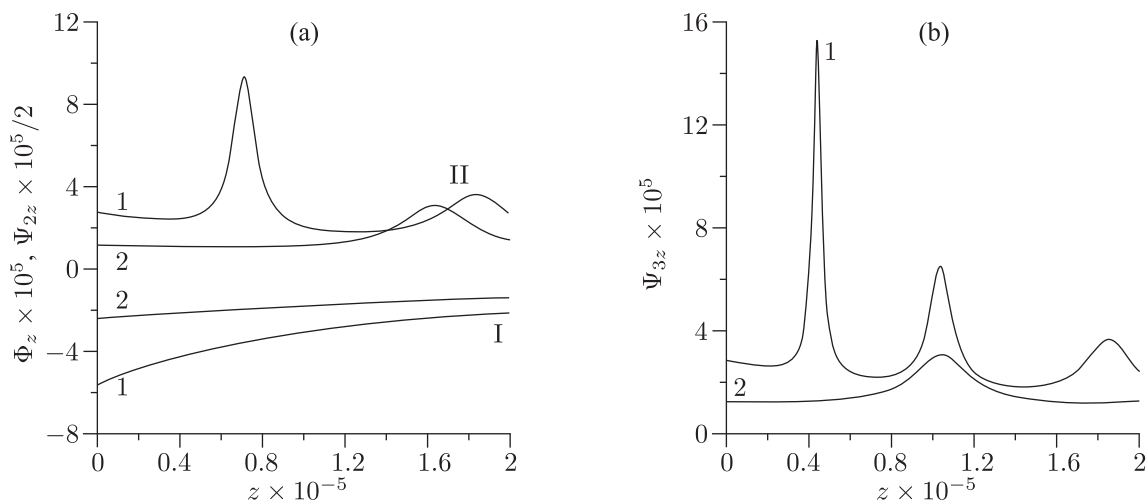


Рис. 3. Зависимости от z при $\varepsilon_0 = 10^{-4}$ [$\gamma_0 = 0$ (кривая 1), $\gamma_0 = 10^4$ (кривая 2)]: (а) $\Phi_z(z)$ (кривая I) и $\Psi_{2z}(z)$ (кривая II); (б) $\Psi_{3z}(z)$.

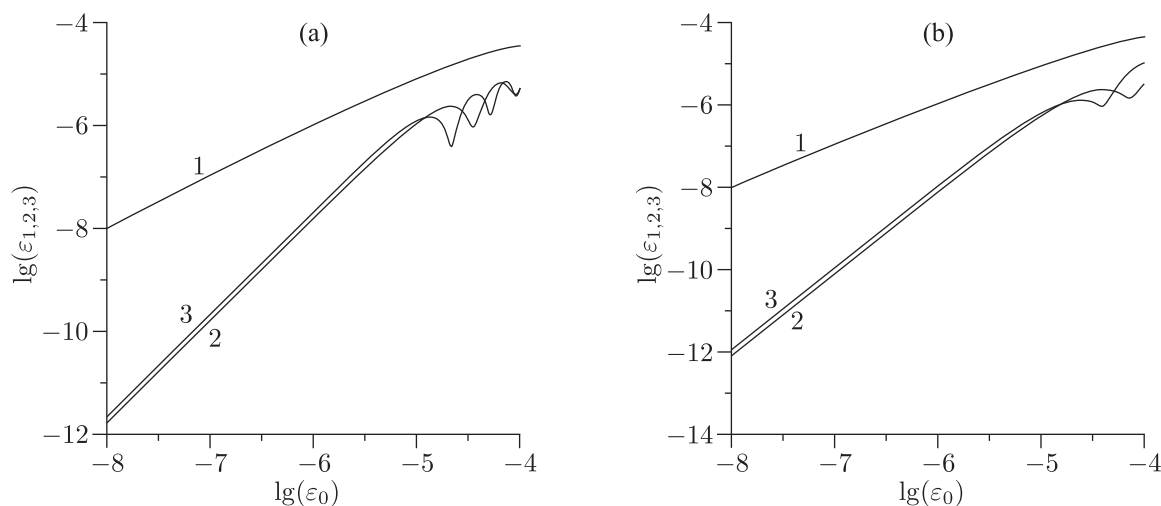


Рис. 4. Зависимости $\varepsilon_{1,2,3} = \varepsilon_{1,2,3}(\varepsilon_0)$ при $z = 2 \times 10^5$: $\gamma_0 = 0$ (а), $\gamma_0 = 10^4$ (б).

что и приводит к биениям амплитуд $\varepsilon_{n \geq 2}(z)$ высших гармоник: они осциллируют из-за интерференции вынужденной и собственной волн, бегущих с разными фазовыми скоростями $C_1(z)$ и $C_{n \geq 2}(z)$.

5. Заключение

На основе обобщения и объединения моделей дислокационных механизмов гистерезисной нелинейности [3, 15, 16, 21], а также анализа результатов экспериментальных работ по изучению явления АЗВТ [5, 17–20] в работе предложено гистерезисное уравнение состояния поликристаллических твердых тел с насыщением амплитудно-зависимых потерь. Методом возмущений проведено теоретическое и численное исследование нелинейных процессов, возникающих при распространении упругих волн в таких средах: рассмотрены эффекты



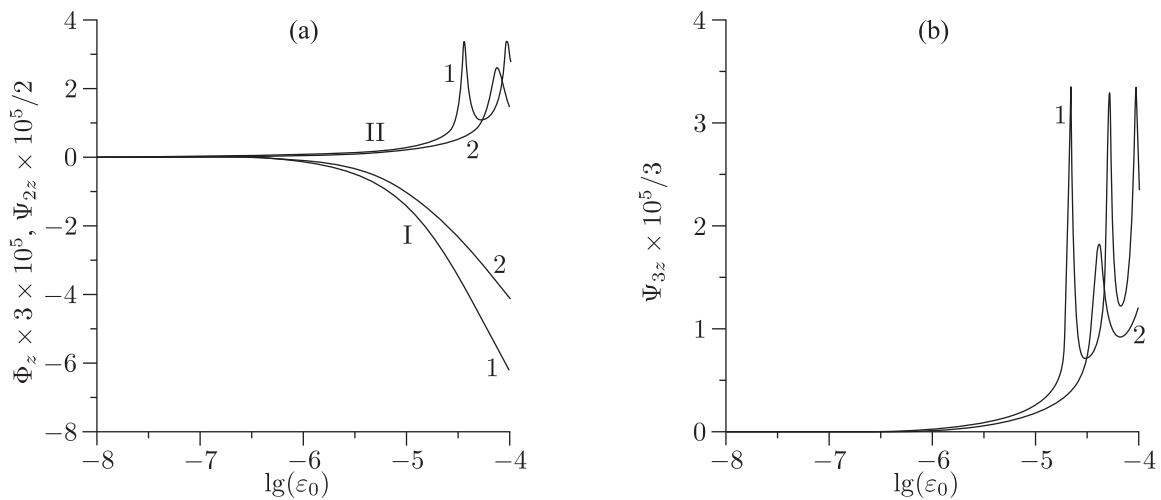


Рис. 5. Зависимости от ε_0 при $z = 2 \times 10^5$ [$\gamma_0 = 0$ (кривая 1), $\gamma_0 = 10^4$ (кривая 2)]: (а) $\Phi_z(z)$ (кривая I) и $\psi_{2z}(z)$ (кривая II); (б) $\psi_{3z}(z)$.

амплитудно-зависимых затухания и изменения скорости распространения волны основной частоты, а также генерации ее второй и третьей гармоник. Определены нелинейные декремент затухания и скорость распространения волны основной частоты и закономерности для амплитуд и фазовых скоростей ее второй и третьей гармоник. Показано, что среды, описываемые аналогичными гистерезисными уравнениями состояния, обладают нелинейной дисперсией, что приводит к пространственным биениям и немонотонному росту амплитуд высших гармоник при увеличении амплитуды волны основной частоты. Это обстоятельство необходимо учитывать при проведении экспериментальных исследований нелинейных волновых процессов в средах с гистерезисной нелинейностью и при интерпретации результатов таких исследований.

Список литературы

- [1] Рыскин Н. М., Трубецков Д. И. Нелинейные волны. Москва: Наука, Физматлит, 2000. 272 с.
- [2] Read T. A. The internal friction on single metal crystals // *Phys. Rev.*, 1940, vol. 58, pp. 371–380.
- [3] Granato A., Lücker K. Theory of mechanical damping due to dislocations // *J. Appl. Phys.*, 1956, vol. 27, no. 5, pp. 583–593.
- [4] Ультразвуковые методы исследования дислокаций: Сб. ст. / Пер. с англ. и нем. под ред. Л. Г. Меркулова. Москва: ИИЛ, 1963. 376 с.
- [5] Ниблетт Д., Уилкс Дж. Внутреннее трение в металлах, связанное с дислокациями // *УФН*, 1963, т. 80, № 1, с. 125–187.
- [6] Физическая акустика: Т. 4, Ч. А: Применения физической акустики в квантовой физике и физике твердого тела / Под ред. У. Мезона. Москва: Мир, 1969. 436 с.
- [7] Физическая акустика: Т. 3, Ч. А: Влияние дефектов на свойства твердых тел / Под ред. У. Мезона. Москва: Мир, 1969. 578 с.
- [8] Asano S. Theory of nonlinear damping due to dislocation hysteresis // *J. Phys. Soc. Jpn.*, 1970, vol. 29, no. 4, pp. 952–963.
- [9] Лебедев А. Б. Внутреннее трение в процессе квазистатического деформирования кристаллов // *ФТТ*, 1993, т. 35, № 9, с. 2304–2340.

- [10] Лебедев А. Б. Амплитудно-зависимый дефект модуля упругости в основных моделях дислокационного гистерезиса // ФТТ, 1999, т. 41, № 7, с. 1214–1221.
- [11] Koehler J. S. Imperfections in nearly perfect crystals. New York: Wiley, 1952. P. 197–216.
- [12] Novick A. S. Variation of amplitude-dependent internal friction in single crystals of copper with frequency and temperature // Phys. Rev., 1950, vol. 80, no. 2, pp. 249–257.
- [13] Takahachi S. Internal friction and critical stress of copper alloys // J. Phys. Soc. Jpn., 1956, vol. 11, no. 12, pp. 1253–1261.
- [14] Beshers D. N. Internal friction of copper and alloys // J. Appl. Phys., 1959, vol. 30, no. 2, pp. 252–258.
- [15] Swartz J. C., Weertman J. Modification of the Koehler–Granato–Lücke dislocation damping theory // J. Appl. Phys., 1961, vol. 32, no. 10, pp. 1860–1865.
- [16] Gelli D. A qualitative model for amplitude dependent dislocation damping // J. Appl. Phys., 1962, vol. 33, no. 4, pp. 1547–1550.
- [17] Назаров В. Е. Влияние структуры меди на ее акустическую нелинейность // Физика металлов и металловедение, 1991, т. 71, № 3, с. 172–178.
- [18] Назаров В. Е. Об амплитудной зависимости внутреннего трения цинка // Акуст. журн., 2000, т. 46, № 2, с. 228–233.
- [19] Nazarov V. E., Kolpakov A. B. Experimental investigations of nonlinear acoustic phenomena in polycrystalline zinc // J. Acoust. Soc. Am., 2000, vol. 107, no. 4, pp. 1915–1921.
- [20] Назаров В. Е. Амплитудно-зависимое внутреннее трение свинца // Физика металлов и металловедение, 1999, т. 88, № 4, с. 82–90.
- [21] Назаров В. Е., Сутин А. М. Генерация гармоник в твердых нелинейных средах // Акуст. журн., 1989, т. 35, № 4, с. 711–716.
- [22] Nazarov V. E., Ostrovsky L. A., Soustova I. A., Sutin A. M. Nonlinear acoustics of microinhomogeneous media // Phys. Earth and Planet. Inter., 1988, vol. 50, no. 1, pp. 65–73.
- [23] Назаров В. Е., Радостин А. В., Островский Л. А., Соустова И. А. Упругие волны в средах с гистерезисной нелинейностью: Ч. 1 // Акуст. журн., 2003, т. 49, № 3, с. 405–415.
- [24] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика: В 10 тт.: Т. 7: Теория упругости. Изд. 5-е, стереотипное. Москва: Физматлит, 2003. 264 с.

Amplitude-dependent internal friction and harmonics generation in solids with hysteretic nonlinearity

Veniamin E. Nazarov¹, Sergey B. Kiyashko²

^{1,2}Institute of Applied Physics, Russian Academy of Sciences
46 Ul'yanova str., Nizhniy Novgorod, 603950, Russia

^{1,2}nazarov@hydro.appl.sci-nnov.ru

Theoretical and numerical study of nonlinear wave processes in media with hysteretic nonlinearity are carried out. The phenomena of amplitude-dependent damping as well as change of the propagation velocity of harmonic wave and its second and third harmonic generation are considered. It was shown that the hysteretic media possess nonlinear dispersion that become apparent in the difference between the phase velocities of strong harmonic pump wave and its weak high harmonics. The dispersion leads to both spatial beatings and non-monotonically rate of growth of an amplitude of high harmonic at the increase in amplitude of basic frequency wave.

MSC 2010: 39A21, 74J30

Keywords: hysteresis, amplitude-dependent internal friction, harmonics generation, nonlinear dispersion

Received February 24, 2014, accepted August 22, 2014

Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2014, vol. 10, no. 3, pp. 297–307 (Russian)

