



УДК: 532.5.031

MSC 2010: 76B47

Бифуркации и хаос в задаче о движении двух точечных вихрей в акустической волне

Е. В. Ветчанин, А. О. Казаков

В работе рассмотрена система двух точечных вихрей одинаковой интенсивности, на которые воздействует звуковая волна. С помощью построения карт динамических режимов выявлены характерные для системы бифуркации неподвижных точек, а также построены бифуркационные диаграммы.

Ключевые слова: точечные вихри, неинтегрируемость, бифуркации, карта динамических режимов

Введение

Задача о движении вихрей в жидкости является классической задачей гидроаэромеханики. Впервые задача о движении вихрей была рассмотрена Г. Гельмгольцем в 1858 году в работе [1], положившей начало исследованию динамики вихревых структур. В этой работе Гельмгольц доказал основополагающие теоремы теории вихрей, а также рассмотрел ряд

Получено 10 сентября 2014 года

После доработки 25 сентября 2014 года

Работа Ветчанина Е. В. выполнена при поддержке гранта РФФИ 14-01-00395_а. Работа Казакова А. О. поддержана Министерством образования и науки РФ (проект № 2000), «Динамика и бифуркации диссипативных и консервативных систем» (конкурс 2014 года «Проведение фундаментальных научных исследований и поисковых научных исследований международными научными группами», проект № 14-41-00044).

Ветчанин Евгений Владимирович
eugene186@mail.ru

Удмуртский государственный университет
426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, д. 1

Казаков Алексей Олегович
kazakovdz@yandex.ru

Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского
603950, Россия, г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23

примеров, относящихся к движению прямолинейных и кольцеобразных вихревых нитей. В 1876 году Г. Кирхгофом были выведены общие уравнения движения N точечных вихрей, а также получены все возможные первые интегралы этих уравнений [2]. Теория точечных вихрей на плоскости была изложена в 1893 году в лекциях А. Пуанкаре [3], где обсуждались результаты Гельмгольца, а также были представлены результаты самого Пуанкаре. Построение подобной теории для вихрей на поверхности шара было осуществлено Э. Цермело в 1902 году [4]. Позднее, в 70-е годы XX века, В. А. Богомоловым [5, 6] была получена общая гамильтонова форма уравнений движения N точечных вихрей на сфере, а также указаны их первые интегралы.

Существует множество современных работ, посвященных изучению динамики вихрей. Здесь приведем лишь некоторые из них. Динамика точечных вихрей на плоскости и сфере рассматривалась в работах [7–10], кольцевых вихрей — в работах [11–16]. Общая теория динамики вихрей на плоскости и сфере в постановке идеальной жидкости, включая редукцию уравнений и частные вопросы, а также обширный литературный обзор представлены в книге [17].

Большое количество работ посвящено изучению движения структур во внешнем потоке различной природы. Это связано с исследованиями океана, атмосферы, стремлением управлять течениями газов и жидкостей и акустикой потоков. В работе [18] изучается влияние внешнего сдвигового потока на размер атмосферы вихря, а также поведение частицы жидкости в нестационарном потоке. В работе [19] исследуется динамика пары вихрей интенсивности равной по модулю и противоположной по знаку вблизи неподвижного вихря в однородной среде. Показаны два варианта поведения вихрей: движение вблизи фиксированного вихря и неограниченное движение.

Исследование атмосферных вихрей имеет приложение в аэроакустике. Общая теория генерации звука воздушным потоком была построена Лайтхиллом [20]. В работе Лайтхилла звуковые явления связываются с нелинейными членами уравнений Навье–Стокса и постулируются предположения, которые могут быть в дальнейшем использованы для исследования акустики вихрей. Теория Лайтхилла применяется, например, при определении шума, создаваемого пограничным слоем и газодинамическим соплом [21].

Аэроакустические исследования вихревых течений проводились в работе [22]: влияние изменения завихренности на звуковые процессы и производство звука свободным вихревым течением, приложения теории к генерации звука осциллирующей сферой и эоловых тонов.

На основе модели потенциального течения с точечными вихрями в работе [23] рассчитывается шум, производимый каверной, определяет интенсивность звука в зависимости от направления распространения.

Особый интерес представляет управление вихрями с помощью внешнего воздействия, например, акустического. В работе [24] изучается взаимодействие вихревых и акустических мод, получена математическая модель процесса. Рассмотрены задачи рассеяния звуковой волны стационарным вихрем, генерации шума вихрями и возбуждения вихревого потока внешним источником звука.

В работе [25] проведен анализ динамики и хаотического поведения системы, состоящей из двух точечных вихрей, взаимодействующих с потенциальной волной. Показано взаимодействие особых решений с резонансами и бифуркации неподвижных точек.

В настоящей работе изучается обратимая система двух точечных вихрей, взаимодействующих со звуковой волной; уравнения, описывающие процесс, получены в работах [24, 25]. Целью исследования является анализ динамики и бифуркаций, а также поиск странных аттракторов с помощью построения карт динамических режимов.

1. Уравнения движения

Рассмотрим движение двух одинаковых точечных вихрей в потоке, возмущенном внешним источником звука. При этом примем следующие предположения [24]:

- 1) течение жидкости двумерно,
- 2) жидкость идеальна,
- 3) движение жидкости изоэнтропично.

Последнее допущение означает, что отсутствует теплообмен между частицами жидкости, работа сил трения пренебрежимо мала и скорость потока существенно ниже скорости звука.

При данных предположениях при движении нескольких точечных вихрей в поле акустических волн общее поле скоростей жидкости может быть записано в виде суммы $\mathbf{V} = \sum_{i=1}^N (U_{xi}, U_{yi})^T + \nabla\varphi$. Первое слагаемое соответствует полям скоростей, порождаемым N точечными вихрями [29]:

$$U_{xi} = -\frac{\Gamma_i}{2\pi} \frac{y - y_i}{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2}, \quad U_{yi} = \frac{\Gamma_i}{2\pi} \frac{x - x_i}{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2}, \quad (1.1)$$

где Γ_i — интенсивности вихрей, x_i, y_i — координаты вихрей. Второе слагаемое связано с акустическими волнами и определяется через акустический потенциал [24, 25]:

$$\varphi = \frac{V_0}{k} \sin(ky - \omega t), \quad (1.2)$$

где V_0 — амплитуда, k — волновое число, ω — частота акустической волны.

Более подробное обоснование для поля скоростей рассматриваемой системы проведено в приложении 1. Используя стандартный подход [29, 30], запишем уравнения движения двух одинаковых вихрей интенсивности Γ в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= -\frac{\Gamma}{2\pi} \frac{y_1 - y_2}{l_{12}^2}, & \frac{dy_1}{dt} &= \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{x_1 - x_2}{l_{12}^2} + V_0 \cos(ky_1 - \omega t), \\ \frac{dx_2}{dt} &= -\frac{\Gamma}{2\pi} \frac{y_2 - y_1}{l_{12}^2}, & \frac{dy_2}{dt} &= \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{x_2 - x_1}{l_{12}^2} + V_0 \cos(ky_2 - \omega t), \\ l_{12}^2 &= (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2. \end{aligned} \quad (1.3)$$

В отличие от классической модели точечных вихрей, в отсутствие акустического воздействия, эти уравнения являются негамильтоновыми и неавтономными и обладают только одним интегралом движения

$$x_1 + x_2 = \text{const}. \quad (1.4)$$

Уравнения (1.3) можно привести к автономному виду, если перейти к системе координат, движущейся вместе с волной, с помощью замены переменных

$$\bar{y}_1 = y_1 - \frac{\omega t}{k}, \quad \bar{y}_2 = y_2 - \frac{\omega t}{k}. \quad (1.5)$$

В новых переменных уравнения движения примут вид

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= -\frac{\Gamma}{2\pi} \frac{\bar{y}_1 - \bar{y}_2}{l_{12}^2}, & \frac{d\bar{y}_1}{dt} &= -\frac{\omega}{k} + \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{x_1 - x_2}{l_{12}^2} + V_0 \cos(k\bar{y}_1), \\ \frac{dx_2}{dt} &= -\frac{\Gamma}{2\pi} \frac{\bar{y}_2 - \bar{y}_1}{l_{12}^2}, & \frac{d\bar{y}_2}{dt} &= -\frac{\omega}{k} + \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{x_2 - x_1}{l_{12}^2} + V_0 \cos(k\bar{y}_2), \\ l_{12}^2 &= (x_1 - x_2)^2 + (\bar{y}_1 - \bar{y}_2)^2. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Используя интеграл (1.4), понизим порядок системы (1.6) на единицу. Для этого введем безразмерные переменные и время

$$R = \frac{k}{2} \left((x_1 - x_2)^2 + (\bar{y}_1 - \bar{y}_2)^2 \right)^{1/2}, \quad S = \frac{k}{2} (\bar{y}_1 + \bar{y}_2), \quad \varphi = \arctg \frac{\bar{y}_1 - \bar{y}_2}{x_1 - x_2}, \quad \tau = \omega t. \quad (1.7)$$

Здесь R — безразмерное расстояние между вихрями, S — ордината центра завихренности в подвижной системе координат, φ — угол между прямой, соединяющей вихри, и положительным направлением оси абсцисс, τ — безразмерное время. Аналогичная редукция уравнений движения использовалась в [25].

Система уравнений (1.6) в новых переменных может быть представлена в виде

$$\begin{aligned} \dot{R} &= -\varepsilon \sin \varphi \sin S \sin(R \sin \varphi), \\ \dot{S} &= -1 + \varepsilon \cos S \cos(R \sin \varphi), \\ \dot{\varphi} &= \frac{\kappa}{2R^2} - \frac{\varepsilon}{R} \cos \varphi \sin S \sin(R \sin \varphi), \end{aligned} \quad (1.8)$$

где введены безразмерные величины $\varepsilon = \frac{V_0 k}{\omega}$, $\kappa = \frac{\Gamma k^2}{2\pi\omega}$, а точка означает дифференцирование по безразмерному времени τ . Параметр ε характеризует амплитуду звуковых волн, а κ является безразмерным аналогом завихренности. Поскольку скорости рассматриваемых течений существенно ниже скорости звука, а величина ω/k имеет смысл скорости звука, то $\varepsilon \ll 1$.

Так как фазовые переменные S и φ рассматриваемой системы являются угловыми, а $R \in (0, \infty)$, фазовое пространство системы представляет собой прямое произведение плоскости на окружность ($\mathbb{R}^2 \times \mathbb{C}^1$). Не уменьшая общности, везде далее будем полагать $S \in [-\pi, \pi)$ и $\varphi \in [-\pi, \pi)$.

В работе [25] показано, что система уравнений (1.8) является неинтегрируемой. Акустические процессы связаны со сжимаемостью среды, и эта физическая сжимаемость приводит к потере свойства сохранения фазового объема потока (1.8) и отсутствию инвариантной меры. При этом в системе могут наблюдаться различные притягивающие или отталкивающие траектории (неподвижные точки, периодические решения и т. д.). Более того, в работе [25] указывается на возможность существования в системах, подобных рассматриваемой, странных аттракторов, однако конкретных примеров таких аттракторов в этой работе не приводится. В данной работе мы ставим целью поиск странных аттракторов с помощью карт динамических режимов [37, 39].

Можно заметить, что уравнения (1.8) инвариантны относительно замены

$$\mathcal{R}: R \rightarrow R, \quad S \rightarrow -S, \quad \varphi \rightarrow -\varphi, \quad \tau \rightarrow -\tau. \quad (1.9)$$

В таких случаях говорят, что система является *обратимой*, а замену \mathcal{R} называют *инволюцией*. Благодаря обратимости, у каждой траектории системы есть симметричный «двойник». Центром рассматриваемой симметрии является множество неподвижных точек инволюции \mathcal{R}

$$\text{Fix}(\mathcal{R}): S = 0, \varphi = 0, \quad (1.10)$$

образующих линию в фазовом пространстве системы. Системы с инволюциями исследовались, например, в работах [35, 36].

2. Численный анализ модели. Карты режимов и бифуркации

Как отмечено выше, система уравнений (1.8) неинтегрируема, а ее исследование требует применения методов численного анализа. Для большинства подобных задач подходящим инструментом исследования является построение сечения Пуанкаре.

Система (1.8) представляет собой фазовый поток на трехмерном многообразии $\mathcal{M}^3 = \{x = (R, S, \varphi) \mid R \in (0, +\infty), S \in [-\pi, \pi), \varphi \in [-\pi, \pi)\}$. Рассмотрим сечение

$$\mathcal{M}_{\varphi_0}^2 = \{x \in \mathcal{M}^3 \mid \varphi(x) = \varphi_0\}. \quad (2.1)$$

Поток (1.8) задает на данном сечении отображение

$$\pi: \mathcal{M}_{\varphi_0}^2 \rightarrow \mathcal{M}_{\varphi_0}^2, \quad (2.2)$$

которое называется отображением Пуанкаре. Более подробное описание построения отображения Пуанкаре и его применение при исследовании задач вихревой динамики можно найти в работах [15, 28, 30].

Исходная система является обратимой, а значит, если в качестве секущей выбрать многообразие, инвариантное по отношению к действию инволюции (1.9), мы получим двумерное обратимое отображение. Таким образом, в случае $\varphi = \varphi_0 = 0$ инволюция (1.9) для системы (1.8) порождает инволюцию отображения Пуанкаре

$$\mathbf{r}: R \rightarrow R, S \rightarrow -S, \quad (2.3)$$

множеством неподвижных точек которой является прямая $S = 0$. Благодаря инволюции \mathbf{r} отображение Пуанкаре (2.2) является симметричным относительно прямой $S = 0$, что хорошо видно из отображений Пуанкаре, представленных на рисунке 1.

Отметим важное следствие обратимости системы (а значит, и отображения Пуанкаре). Если в системе существует устойчивый предельный режим, то существует и неустойчивый режим, симметричный по инволюции (1.9). Следовательно, если удалось обнаружить какое-либо притягивающее множество на отображении Пуанкаре, то замена (2.3) позволит найти симметричное ему отталкивающее множество.

Для поиска устойчивых предельных режимов (в том числе странных аттракторов) воспользуемся методом построения и исследования карт динамических режимов [37, 39, 40].

Карта динамических режимов на плоскости параметров (κ, ε) определяет области с различными предельными режимами системы. Для построения карты плоскость (κ, ε) разбивается равномерной сеткой. Для каждого узла сетки строится траектория отображения Пуанкаре с некоторой (общей для всех узлов) начальной точкой. Выбор начальной точки достаточно произволен и, как правило, связан с уже известными периодическими решениями и неподвижными точками. Длина траектории определяется скоростью сходимости

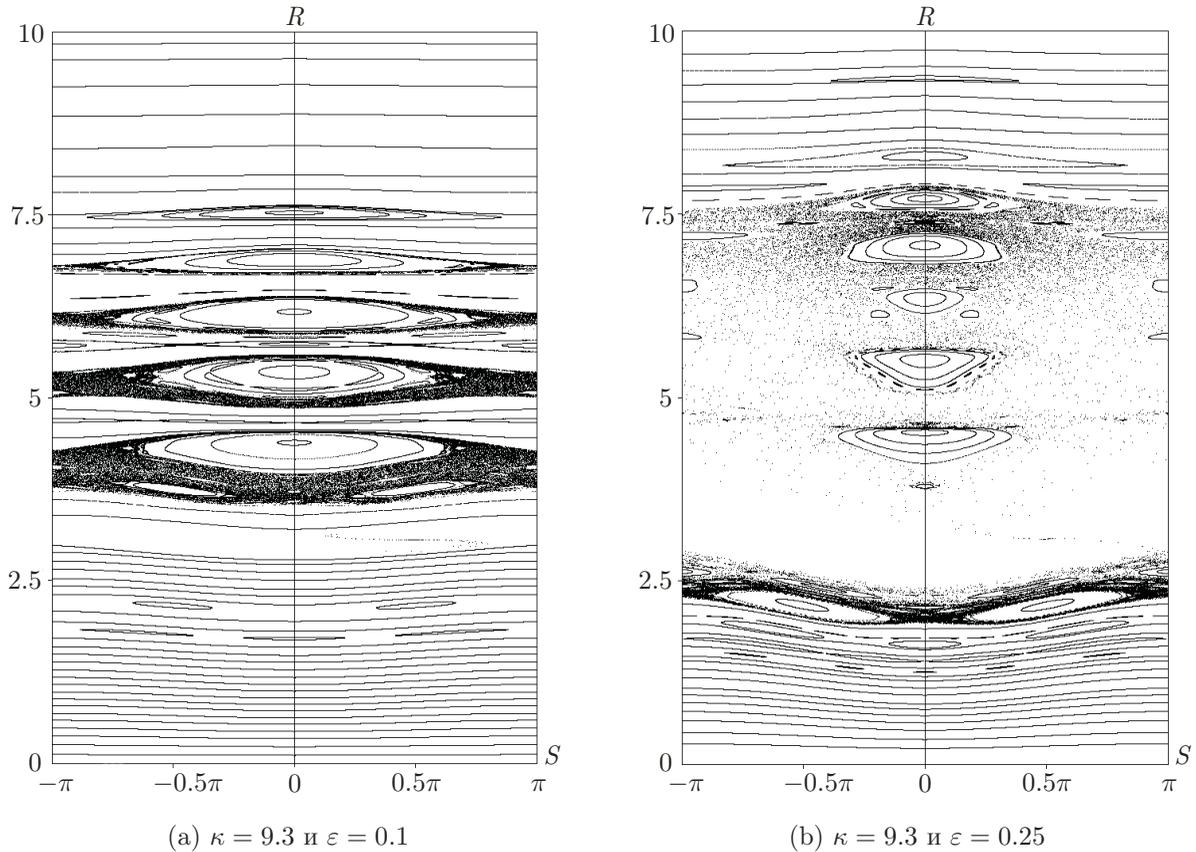


Рис. 1. Фрагменты отображения Пуанкаре при различных значениях параметров (секущая $\varphi_0 = 0$).

к асимптотическим режимам; в нашем случае была выбрана длина 50 000 итераций. Результаты последних итераций анализируются на периодичность с некоторым заданным уровнем допустимой погрешности. В зависимости от периодичности точка на плоскости (κ, ε) обозначается соответствующим цветом. В результате анализа всех узлов сетки получаем окрашенные различными цветами области, соответствующие предельным режимам с различными периодами. Поскольку система (1.8) содержит только два параметра (κ и ε), то следует ожидать, что карта динамических режимов даст полную информацию о поведении системы, наличии предельных режимов и притягивающих множеств.

Пример карты динамических режимов и ее увеличенный фрагмент изображены на рисунке 2. Обе карты имеют размер 200×100 пикселей. В качестве начальной точки при построении карты использовалась точка с координатами $(S, R) = (2.39, 3.11)$ (именно такие координаты имеет неподвижная точка периода 1 для параметров κ и ε , расположенных в центре первой карты). Периодические режимы с периодами от 1 до 14 обозначены различными цветами (расшифровка приведена справа от карт), остальные точки окрашены черным.

С помощью анализа построенных карт можно исследовать различные бифуркации, происходящие в системе при изменении параметров вдоль какой-либо траектории на плоскости (κ, ε) . На картах отмечены четыре маршрута: M_1 , M_2 , M_3 и M_5 , вдоль которых наблюдаются бифуркации рождения и исчезновения устойчивых предельных режимов — фокусных точек периодов 1, 2, 3 и 5 соответственно. Опишем более подробно бифуркации,

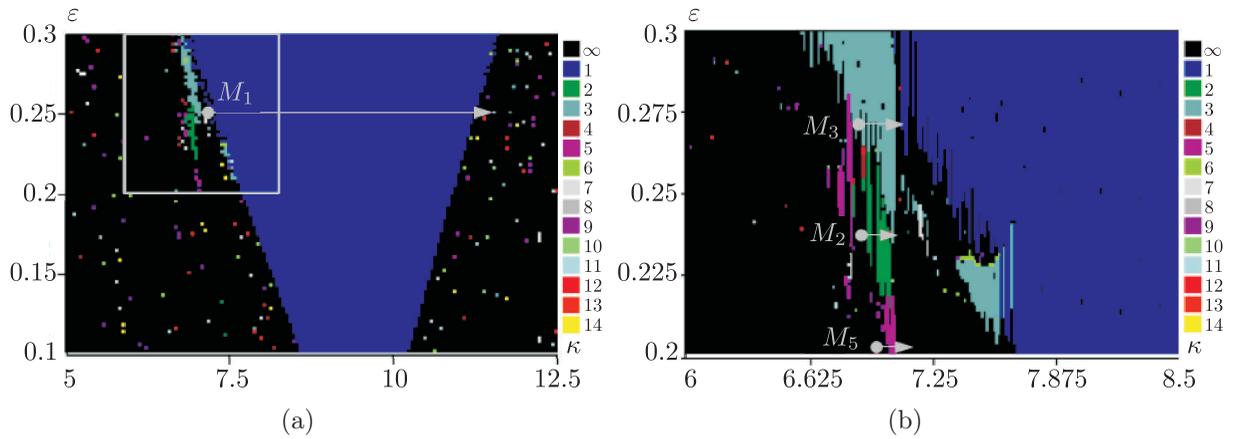


Рис. 2. (а) Карта режимов на плоскости параметров (κ, ϵ) . (б) Увеличенный фрагмент, выделенный прямоугольником на карте (а).

порождающие перечисленные фокусные точки. Начнем с фокуса, возникающего при движении по маршруту M_1 на карте режимов (см. рис. 2а) при постоянном $\epsilon = 0.25$. При переходе параметра κ через значение $\kappa_0 \in [7.017, 7.018]$ в системе наблюдается *бифуркация Риммера* [34] (или *потеря симметрии* [33]), в результате которой эллиптическая точка e^1 , расположенная на линии симметрии $S = 0$ (см. рис. 3а), распадается на устойчивый фокус f^+ , неустойчивый фокус f^- и седловую точку h^1 (рис. 3б).

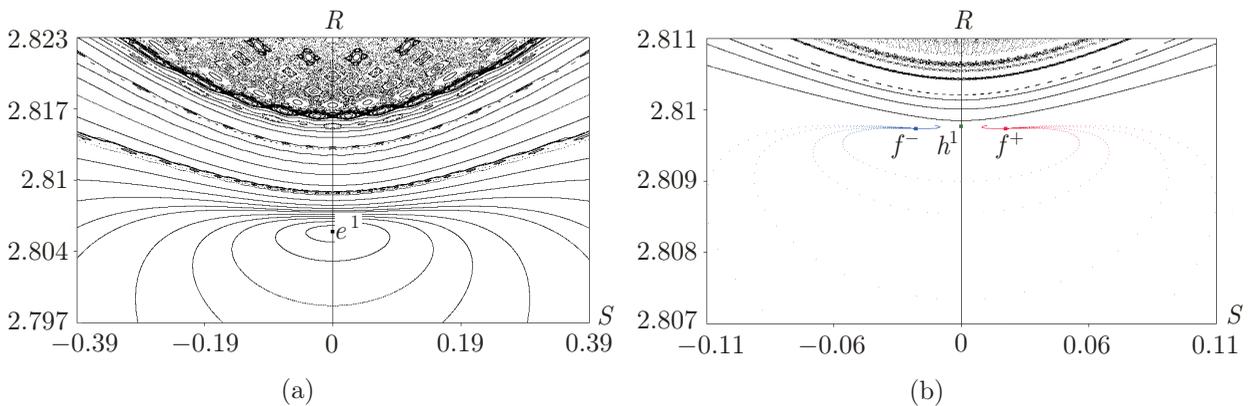


Рис. 3. Бифуркация Риммера.

При увеличении параметра κ точки f^+ и f^- отдаляются от седловой точки h^1 , двигающейся при изменении параметра вдоль линии симметрии, и, при переходе параметра κ через значение $\kappa_1 \in [11.65, 11.7]$, происходит обратная *бифуркация Риммера*, или *бифуркация восстановления симметрии*. Неподвижные точки f^+ , f^- и h^1 (рис. 4а), сливаются в эллиптическую точку e^2 (рис. 4б).

Бифуркационная диаграмма описанного выше процесса, на котором изображена зависимость координаты S неподвижных точек от параметра κ , показана на рисунке 5.

Следует отметить, что бифуркация Риммера является типичным сценарием потери симметрии в рассматриваемой системе. В результате такой бифуркации эллиптическая точка на линии симметрии $S = 0$ становится седловой, а в ее окрестности рождаются притягивающая и отталкивающая точки. Проиллюстрируем такую же бифуркацию для точек

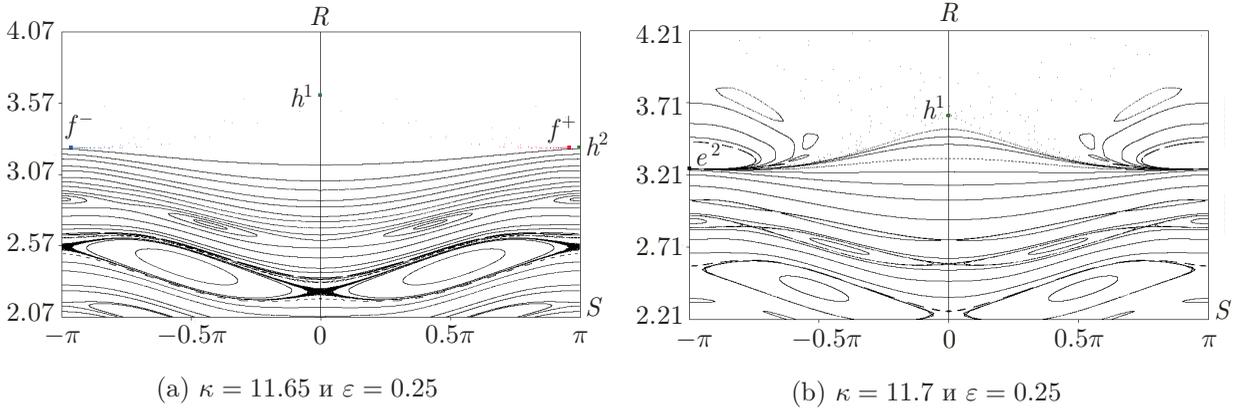


Рис. 4. Обратная бифуркация Риммера.

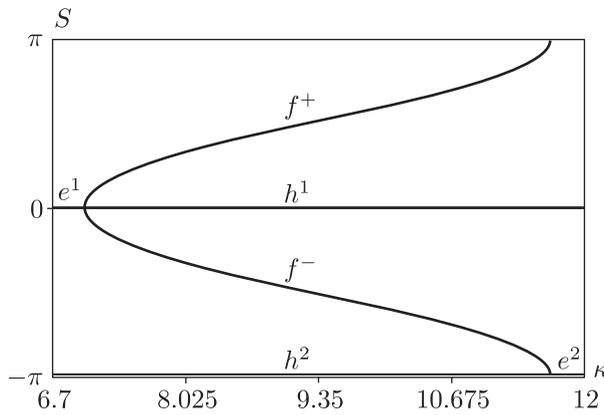


Рис. 5. Бифуркационная диаграмма: f^+ — устойчивый фокус, f^- — неустойчивый фокус, e — эллиптические точки, h — седловые точки.

более высокого порядка. На карте режимов (см. рис. 2b) вдоль маршрута M_2 при $\epsilon = 0.234$ наблюдается бифуркация Риммера и обратная бифуркация Риммера для эллиптической точки периода 2. На рисунке 6 приведена соответствующая бифуркационная диаграмма.

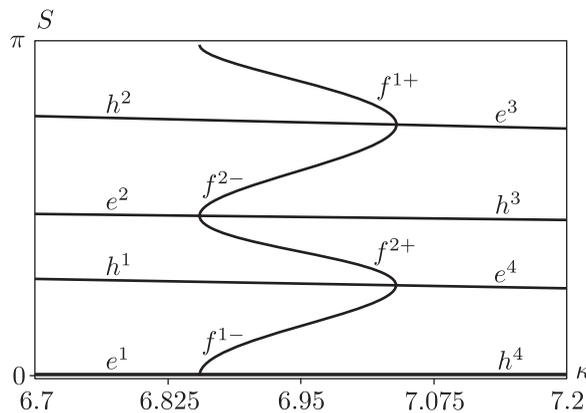


Рис. 6. Бифуркационная диаграмма: f^{1+}, f^{2+} — устойчивые фокусы, f^{1-}, f^{2-} — неустойчивые фокусы, e^1, e^2, e^3, e^4 — эллиптические точки, h^1, h^2, h^3, h^4 — седловые точки.

Однако в рассматриваемом случае при росте параметра κ бифуркацию Риммера претерпевают сразу две пары эллиптических точек периода 2. Отмеченные на рисунке 6 эллиптические точки e^1 распадаются на устойчивый фокус f^{1+} периода 2, неустойчивые фокусы f^{1-} периода 2 и седловую точку h^4 периода 2. Аналогичная ситуация наблюдается с другой эллиптической точкой e^2 периода 2, сосуществующей с e^1 и смещенной относительно нее на $\pi/2$ по координате S . Однако на рисунке 6 изображены бифуркации неподвижных точек с координатой $S \geq 0$. Очевидно, что у каждой из них в силу инволюции существует пара, симметричная относительно оси $S = 0$. Она также распадается на устойчивый 2-фокус f^{2+} , неустойчивый 2-фокус f^{2-} и 2-седло h^3 . Сечения Пуанкаре до и после бифуркации показаны на рисунке 7.

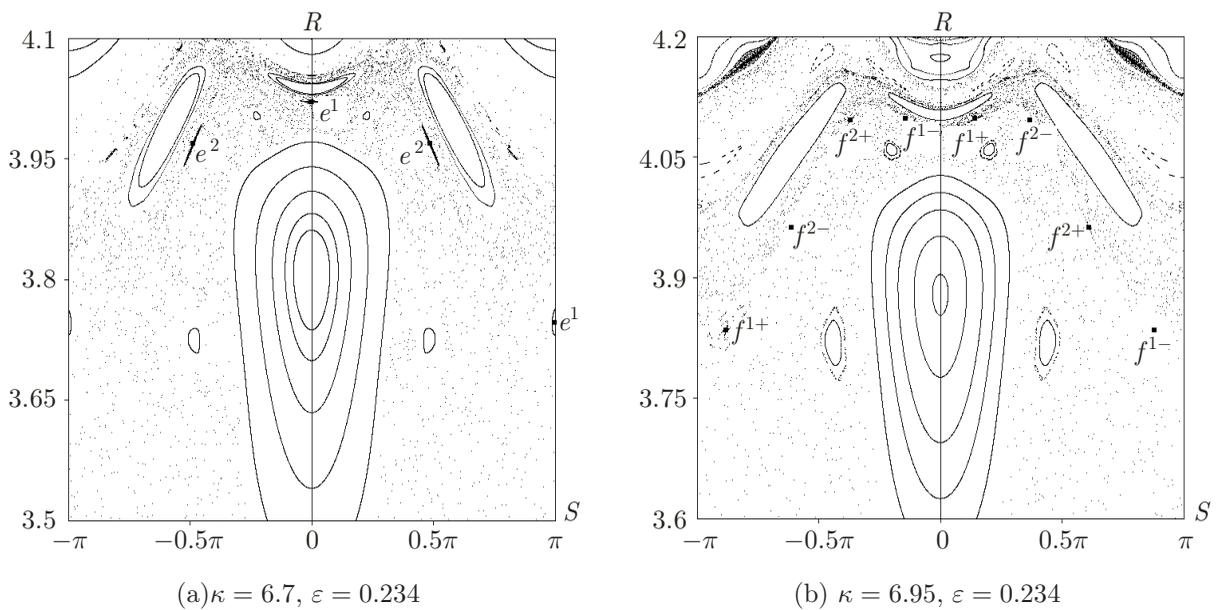


Рис. 7. Бифуркация Риммера для неподвижных точек периода 2.

С дальнейшим ростом параметра κ устойчивые и неустойчивые фокусы отдаляются от своих седловых точек и претерпевают обратную бифуркацию Риммера, сливаясь в эллиптические точки e^3 и e^4 периода 2. Однако в данном случае бифуркациям подвергаются тройки f^{1+}, f^{2-}, h^2 и f^{2+}, f^{1-}, h^1 , а родившиеся в результате эллиптические точки e^3 и e^4 уже не находятся на линии симметрии.

То же поведение наблюдалось нами для неподвижных точек более высокого порядка. В частности, мы обнаружили такие же сценарии потери и восстановления симметрии на маршрутах M_3 и M_5 , изображенных на карте режимов на рисунке 2b.

Еще одним типичным сценарием возникновения/исчезновения притягивающих множеств (фокусов) является седло-узловая бифуркация. Например, вокруг фокуса пятого порядка, рожденного через бифуркацию Риммера, в результате седло-узловой бифуркации рождаются две пары узловых и две пары седловых точек периода 10: $f^{10+,1}, f^{10+,2}, h^{10,1}, h^{10,2}$ (см. рис. 8a).

При увеличении параметра κ узловые точки становятся фокусами, а при дальнейшем его росте, изменение типа неподвижной точки происходит в обратном порядке. Пара седло-узел исчезает в результате обратной седло-узловой бифуркации при росте параметра κ (см. рис. 8b).

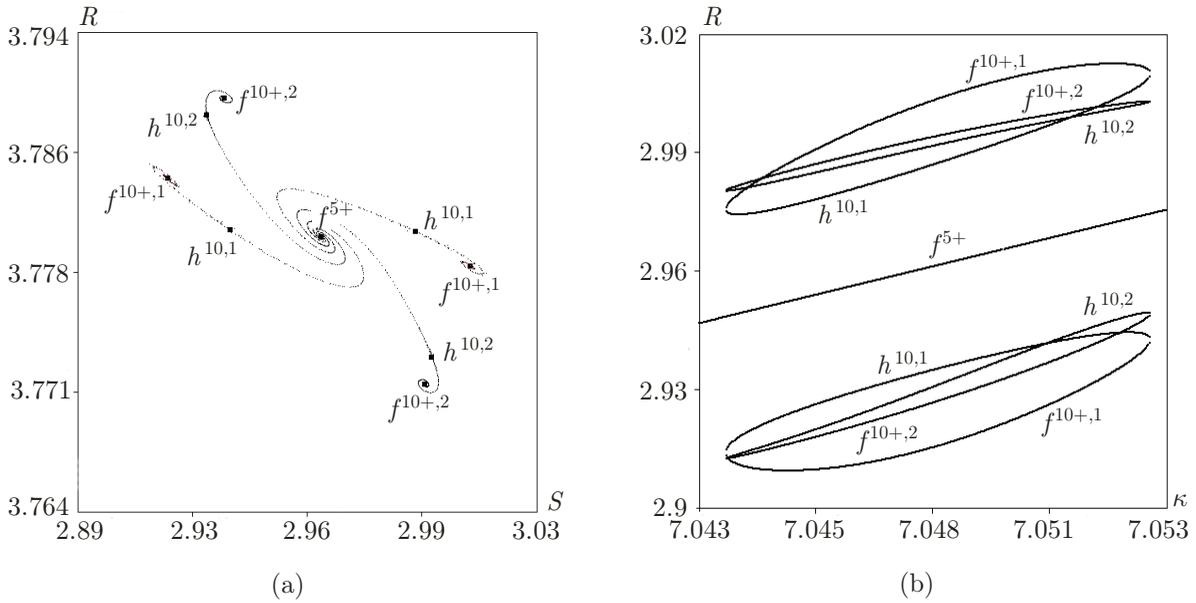


Рис. 8. Седло-узловая бифуркация: (а) сечение Пуанкаре при $\kappa = 7.05$, $\varepsilon = 0.202$: f^{5+} — устойчивый фокус пятого порядка, $f^{10+,1}$, $f^{10+,2}$ — устойчивые фокусы десятого порядка, $h^{10,1}$, $h^{10,2}$ — седловые точки десятого порядка, (б) бифуркационная диаграмма.

Заключение

В результате подробного компьютерного анализа отображения Пуанкаре и карт режимов удалось исследовать динамическое поведение и типичные бифуркации системы (1.8). Однако обнаружить странные аттракторы в системе не удалось. Все обнаруженные бифуркации приводят к рождению простейших устойчивых режимов типа периодических фокусных точек. Типичными бифуркациями для рассматриваемой системы являются бифуркация Риммера (потери симметрии) и седло-узловая бифуркация, а рождающиеся периодические орбиты в дальнейшем бифурцируют через такие же обратные бифуркации, не оставляя после себя никаких сложных образований. Проведенные исследования позволяют сформулировать гипотезу о том, что существование странных аттракторов для системы (1.8) не характерно.

Приложение 1

Рассмотрим вывод уравнений движения в предположениях, описанных в начале данной статьи.

Движение жидкости описывается уравнением неразрывности и уравнениями Эйлера [29]. Для двумерного случая они имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \operatorname{div} \mathbf{V} &= 0, & \frac{d\mathbf{V}}{dt} + \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p &= 0, \\ \frac{d}{dt} &= \frac{\partial}{\partial t} + V_x \frac{\partial}{\partial x} + V_y \frac{\partial}{\partial y}, \end{aligned} \tag{2.4}$$

где ρ — плотность, $\mathbf{V} = (V_x, V_y)$ — вектор скорости, p — давление.

Приведенная система содержит 3 уравнения и 4 неизвестных функции. Условие постоянства энтропии позволяет замкнуть систему (2.4) уравнением адиабаты

$$\frac{p}{\rho^\gamma} = C = \text{const.} \quad (2.5)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Обратимся к первому началу термодинамики: теплота, сообщаемая системе, идет на приращение внутренней энергии и совершение внешней работы [31]:

$$\delta q = du + \delta l, \quad (2.6)$$

где δq — элементарное удельное количество теплоты, δl — элементарная удельная работа, du — полный дифференциал удельной внутренней энергии. Величины δq и δl нельзя считать полными дифференциалами, так как в общем случае q и l не являются функциями состояния системы, в отличие от u .

Если процесс является изэнтропичным, то изменение энтропии выражается как

$$ds = \frac{\delta q}{T} = 0, \quad (2.7)$$

что эквивалентно отсутствию подвода тепла $\delta q = 0$. Учитывая выражение для работы, совершаемой газом, имеем

$$c_v dT + p dv = 0. \quad (2.8)$$

Принимая во внимание уравнение состояния $p v = RT$ и связь удельного объема с плотностью $v = \frac{1}{\rho}$, получим

$$\frac{p}{\rho^\gamma} = C = \text{const.} \quad (2.9)$$

Систему уравнений (2.4), согласно работе [24], можно редуцировать с помощью замены переменных ρ , p через удельную энтальпию

$$h = \frac{\gamma p}{(\gamma - 1)\rho}. \quad (2.10)$$

Выразив ρ и p из уравнений (2.5) и (2.10) и подставив полученные выражения в систему (2.4), запишем замкнутую систему трех дифференциальных уравнений

$$\frac{1}{a^2} \frac{dh}{dt} + \text{div } \mathbf{V} = 0, \quad (2.11)$$

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} + \text{grad } h = 0, \quad (2.12)$$

где $a^2 = (\gamma - 1)h$ — квадрат скорости звука.

В работе [24] для отделения вихревых процессов от акустических предложено раскладывать скорость на две компоненты

$$\mathbf{V} = \mathbf{U} + \text{grad } \varphi, \quad (2.13)$$

где $\mathbf{U} = (U_x, U_y)$ — поле скорости точечных вихрей, а φ — акустический потенциал; поле \mathbf{U} является несжимаемым.

С учетом разложения (2.13) и в предположении несжимаемости поля \mathbf{U} уравнения (2.11), (2.12) приводят к следующей системе уравнений:

$$\operatorname{div} \mathbf{U} = 0, \quad (2.14)$$

$$\omega = \operatorname{rot}_2 \mathbf{U}, \quad (2.15)$$

$$\frac{dh}{dt} + a^2 \Delta \varphi = 0, \quad (2.16)$$

$$\frac{D\omega}{Dt} + \omega \Delta \varphi + \operatorname{grad} \varphi \cdot \operatorname{grad} \omega = 0, \quad (2.17)$$

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + U_x \frac{\partial}{\partial x} + U_y \frac{\partial}{\partial y},$$

$$\Delta \left(h + \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\nabla \varphi|^2 \right) = - \frac{\partial^2 U_i U_j}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \left(U_j \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right) - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial U_j}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right); \quad (2.18)$$

здесь для удобства введен оператор двумерного ротора от некоторого вектора $\mathbf{a} = (a_x, a_y)$

$$\operatorname{rot}_2 \mathbf{a} = \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}, \quad (2.19)$$

а в уравнении (2.18) для краткости используется суммирование по неммым индексам.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Выражение (2.15) является следствием разложения (2.13) и тождества $\operatorname{rot}_2(\operatorname{grad} \varphi) \equiv 0$. Уравнение (2.16) получается подстановкой (2.13) в (2.11) с учетом условия несжимаемости поля в (2.14).

Уравнение (2.17) выводится следующим образом. Запишем уравнение (2.12) в форме Громеки – Ламба

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \frac{\operatorname{grad} |\mathbf{V}|^2}{2} + \mathbf{J} \mathbf{V} \omega + \operatorname{grad} h = 0, \quad (2.20)$$

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.21)$$

Замена (2.13) в уравнениях (2.20) приведет к уравнению вида

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \operatorname{grad} \left(h + \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\operatorname{grad} \varphi|^2 \right) + \operatorname{grad} \left(\frac{\mathbf{U}^2}{2} + \mathbf{U} \cdot \operatorname{grad} \varphi \right) - \mathbf{J} \mathbf{V} \omega = 0. \quad (2.22)$$

Применяя оператор rot_2 к уравнению (2.22), получим уравнение

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \omega \operatorname{div} \mathbf{V} + \mathbf{V} \cdot \operatorname{grad} \omega = 0. \quad (2.23)$$

Учитывая разложение (2.13), получим уравнение (2.17).

Уравнение (2.18) получается при применении оператора div к уравнению (2.12) дает уравнение вида

$$\Delta \left(h + \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) + \mathbf{V} \cdot \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{V} + \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x} \cdot \operatorname{grad} V_x + \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial y} \cdot \operatorname{grad} V_y = 0, \quad (2.24)$$

которое с учетом разложения (2.13) может быть представлено в виде (2.18).

Согласно работе [26], в уравнении (2.18) слагаемое $\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \left(U_j \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right)$ существенно при высокой сжимаемости среды, а слагаемое $\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial U_j}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right)$ — при наличии в потоке препятствий. Поэтому указанными членами можно пренебречь, и уравнение (2.18) примет вид

$$\Delta \left(h + \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\nabla \varphi|^2 \right) = - \frac{\partial^2 U_i U_j}{\partial x_i \partial x_j}. \quad (2.25)$$

В работе [24] полагается, что $|\nabla \varphi| \ll |U|$. Совместно с гипотезой Лайтхилла, согласно которой звук порождается течением, уравнения (2.16), (2.17) примут вид

$$\frac{Dh}{Dt} + a^2 \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right) = 0, \quad (2.26)$$

$$\frac{D\omega}{Dt} = 0. \quad (2.27)$$

Так как уравнение (2.27) совпадает с известным уравнением для вихревого потока, то поле скорости может быть получено известным методом [29], что приведет нас к слагаемым, указанным в начале статьи (см. (1.1)).

Добавочное поле скоростей в разложении (2.13), которое соответствует акустической волне, определяется потенциалом (1.2) (бегущая волна).

Авторы благодарят А. В. Борисова, А. А. Килина, И. С. Мамаева за постановку задачи, ценные советы и продуктивные обсуждения результатов.

Список литературы

- [1] Гельмгольц Г. Об интегралах уравнений гидродинамики, соответствующих вихревым движениям // Нелинейная динамика, 2006, т. 2, № 4, с. 473–507.
- [2] Кирхгоф Г. Механика. Лекции по математической физике. Москва: АН СССР, 1962. 404 с.
- [3] Пуанкаре А. Теория вихрей. Москва–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2000. 160 с.
- [4] Цермело Э. Гидродинамические исследования вихревых движений на поверхности сферы // Нелинейная динамика, 2007, т. 3, № 1, с. 81–110.
- [5] Богомолов В. А. Динамика завихренности на сфере // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа, 1977, № 6, с. 57–65.
- [6] Богомолов В. А. О двумерной гидродинамике на сфере // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана, 1979, т. 15, № 1, с. 29–35.
- [7] Khanin K. M. Quasi-periodic motions of vortex systems // Phys. D, 1982, vol. 4, no. 2, pp. 261–269.
- [8] Kidambi R., Newton P. K. Motion of three point vortices on a sphere // Phys. D, 1998, vol. 116, no. 1, pp. 143–175.
- [9] Borisov A. V., Mamaev I. S., Kilin A. A. Absolute and relative choreographies in the problem of point vortices moving on a plane // Regul. Chaotic Dyn., 2004, vol. 9, no. 2, pp. 101–112.
- [10] Borisov A. V., Mamaev I. S., Kilin A. A. New periodic solutions for three or four identical vortices on a plane and a sphere // Supplement Volume 2005 of DCDS-B devoted to the 5th AIMS International Conference on Dynamical Systems and Differential Equations (Pomona, California, USA, June 2004), pp. 110–120.

- [11] Брутян М. А., Крапивский П. Л. Движение системы вихревых колец в несжимаемой жидкости // ПММ, 1984, т. 48, № 3, с. 503–506.
- [12] Бояринцев В. И., Левченко Е. С., Савин А. С. О движении двух вихревых колец // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа, 1985, № 5, с. 176–177.
- [13] Huang Y., Schorghofer N., Ching E. S. C. Two vortex rings produce chaos // Europhys. Lett., 2000, vol. 52, no. 4, pp. 399–405.
- [14] Blackmore D., Brons M., Goulet A. A coaxial vortex ring model for vortex breakdown // Phys. D, 2008, vol. 237, no. 22, pp. 2817–2844.
- [15] Борисов А. В., Килин А. А., Мамаев И. С. Динамика вихревых колец: Чехарда, хореографии и проблема устойчивости // Нелинейная динамика, 2012, т. 8, № 1, с. 113–147.
- [16] Borisov A. V., Kilin A. A., Mamaev I. S., Teneney V. A. The dynamics of vortex rings: Leapfrogging in an ideal and viscous fluid // Fluid Dyn. Res., 2014, vol. 46, no. 3, pp. 31415–31430.
- [17] Борисов А. В., Мамаев И. С. Математические методы динамики вихревых структур. Москва–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2005. 368 с.
- [18] Ryzhov E. A. On changing the size of the atmosphere of a vortex pair embedded in a periodic external shear flow // Phys. Lett. A, 2011, vol. 375, no. 44, pp. 3884–3889.
- [19] Ryzhov E. A., Koshel K. V. Dynamics of a vortex pair interacting with a fixed point vortex // Europhys. Lett., 2013, vol. 102, no. 4, 44004, 6 pp.
- [20] Lighthill M. J. On sound generated aerodynamically: 1. General theory // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A, 1952, vol. 211, pp. 564–587.
- [21] Liepmann H. W. On the acoustic radiation from boundary layers and jets: Technical report. <http://authors.library.caltech.edu/12113/1/HWLiepmann.pdf> (1954).
- [22] Powell A. Theory of vortex sound // J. Acoust. Soc. Am., 1964, vol. 36, no. 1, pp. 177–195.
- [23] Hardin J. C., Mason J. P. Broadband noise generation by a vortex model of cavity flow // AIAA J., 1977, vol. 15, no. 5, pp. 632–637.
- [24] Yates J. E. Interaction with and production of sound by vortex flows: AIAA Paper 77-1352 (1977).
- [25] Gonchar V. Yu., Ostapchuk P. N., Tur A. V., Yanovsky V. V. Dynamics and stochasticity in a reversible system describing interaction of point vortices with a potential wave // Phys. Lett. A, 1991, vol. 152, nos. 5–6, pp. 287–292.
- [26] Yates J. E., Sandri G. Bernoulli enthalpy: A fundamental concept in the theory of sound // 2nd Aero-Acoustics Conf. (Hampton, Va., Mar. 24–26, 1975). 12 pp.
- [27] Quispel G. R. W., Roberts J. A. G. Conservative and dissipative behaviour in reversible dynamical systems // Phys. Lett. A, 1989, vol. 135, no. 6, pp. 337–342.
- [28] Borisov A. V., Mamaev I. S., Kilin A. A. Reduction and chaotic behavior of point vortices on a plane and a sphere // Supplement Volume 2005 of DCDS-B devoted to the 5th AIMS International Conference on Dynamical Systems and Differential Equations (Pomona, California, USA, June 2004), pp. 100–109.
- [29] Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика: Ч. 1. Москва: Физматлит, 1963. 584 с.
- [30] Борисов А. В., Килин А. А., Мамаев И. С. Переход к хаосу в динамике четырех точечных вихрей на плоскости // Докл. РАН, 2006, т. 408, № 1, с. 49–54.
- [31] Болгарский А. В. Термодинамика и теплопередача. 2-е изд., перераб. и доп. Москва: Высш. школа, 1975. 495 с.
- [32] Гельфер Я. М. История и методология термодинамики и статистической физики. 2-е изд., перераб. и доп. Москва: Высш. школа, 1981. 536 с.
- [33] Лерман Л. М., Тураев Д. В. О бифуркациях потери симметрии в обратимых системах // Нелинейная динамика, 2012, т. 8, № 2, с. 323–343.
- [34] Post T., Capel H. W., Quispel G. R. W., van der Weele J. P. Bifurcations in two-dimensional reversible maps // Phys. A, 1990, vol. 164, no. 3, pp. 625–662.

- [35] Борисов А. В., Мамаев И. С., Бизяев И. А. Иерархия динамики при качении твердого тела без проскальзывания и вращения по плоскости и сфере // *Нелинейная динамика*, 2013, т. 9, № 2, с. 141–202.
- [36] Борисов А. В., Мамаев И. С. Странные аттракторы в динамике кельтских камней // *УФН*, 2003, т. 173, № 4, с. 407–418.
- [37] Кузнецов С. П. Динамический хаос. 2-е изд. Москва: Физматлит, 2006. 356 с.
- [39] Кузнецов С. П., Жалнин А. Ю., Сатаев И. Р., Седова Ю. В. Феномены нелинейной динамики диссипативных систем в неголономной механике «кельтского камня» // *Нелинейная динамика*, 2012, т. 8, № 4, с. 735–762.
- [39] Борисов А. В., Казаков А. О., Кузнецов С. П. Нелинейная динамика кельтского камня: неголономная модель // *УФН*, 2014, т. 184, № 5, с. 493–500.
- [40] Борисов А. В., Мамаев И. С. Динамика саней Чаплыгина // *ПММ*, 2009, т. 73, № 2, с. 219–225.

Bifurcations and chaos in the problem of the motion of two point vortices in an acoustic wave

Evgeny V. Vetchanin¹, Alexey O. Kazakov²

¹Udmurt State University
Universitetskaya 1, Izhevsk, 426034 Russia

²Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod
23 Prospekt Gagarina, Nizhny Novgorod, 603950, Russia

¹eugene186@mail.ru, ²Kazakovdz@yandex.ru

This paper is concerned with the dynamics of two point vortices of the same intensity which are affected by an acoustic wave. Typical bifurcations of fixed points have been identified by constructing charts of dynamical regimes, and bifurcation diagrams have been plotted.

MSC 2010: 76B47

Keywords: point vortices, nonintegrability, bifurcations, chart of dynamical regimes

Received September 10, 2014, accepted September 25, 2014

Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2014, vol. 10, no. 3, pp. 329–343 (Russian)