МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«УДМУРТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Географический факультет
Кафедра геодезии и геоинформатики

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ГЕОДЕЗИИ, КАРТОГРАФИИ И ГЕОИНФОРМАТИКИ

Методическое пособие

Ижевск 2014

УДК 528.2
ББК 26.11
Г 75

Рекомендовано к изданию учебно-методическим советом УдГУ

Рецензент: канд. физ.-мат. наук, доцент Романов Л. И.

Составители: Казаков А.Г, Копанева И.М, Чиканов Ю.А.

Г 75 **Математические основы геодезии, картографии и геоинформатики.** : Методическое пособие / сост. Казаков А.Г., Копанева И.М., Чиканов Ю.А. ; УдГУ. – Ижевск, 2014. – 44 с.

Методическое пособие подготовлено в соответствии с утверждением программой курса «Математические основы геодезии, картографии и геоинформатики». Пособие содержит введение, описание операций программы Maple, рассмотрение примеров вычислений. Пособие предназначено для студентов 1, 2, 3, 4 курсов направления подготовки 021300 Картография и геоинформатика (профиль подготовки Картография, геоинформатика)

УДК 528.2
ББК 26.11

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Подготовка по математике учащихся средней школы в последнее десятилетие не ориентирована на поступление на инженерные специальности ВУЗа. Формально преподавание математики на первом курсе инженерных специальностей нужно начинать с функции многих переменных, последовательно проходя дифференциальное и интегральное исчисление. Особое место занимает рассмотрение раздела " Экстремумы функций многих переменных - "ФМП", "Криволинейные и кратные интегралы", "Дифференциальные уравнения", "Ряды".

В плане учебного процесса по направлению подготовки 021310 Картография и геоинформатика (бакалавриат) такие математизированные дисциплины как Топография, Метеорология и Климатология, Физика и Общая геология проходят уже во втором семестре! По вузовской программе по математике за первый семестр студенты знакомятся с аналитической геометрией и линейной алгеброй, в разделе «Математический анализ» останавливаются перед определённым интегралом, не рассматривая его прикладные задачи. Пособие " Математические основы геодезии, картографии и геоинформатики" ориентировано на восполнение пробелов в соответствующих разделах математики, нацеленных на прикладные аспекты наук о Земле.

Несколько слов хочется сказать относительно школьного единого государственного экзамена (ЕГЭ) по математике, введённого административными методами без обсуждения с учителями - предметниками. В школьной программе, как и ранее до реформы, по-прежнему остаются важные разделы предмета: исследование функций, решение уравнений, неравенств, систем уравнений, содержащих параметры и модули. Особенно это относится к частям В и С единого экзамена, однако современный объём часов в 9 - 11 классах недостаточен для глубокого освоения алгебры и тригонометрии. Тем более их совершенно недостаточно для подготовки по программе абитуриента на инженерную специальность ВУЗа. Не секрет, что появилась даже, выражаясь словами профессора МГУ Н.Х. Розова, «математика вступительных экзаменов», основанная на углублённом изучении таких разделов как «Комбинаторика», «Комплексные числа» и т.п. Необходимо также развивать у школьников нестандартное мышление. Такой подход обусловлен современными требованиями к уровню знаний выпускника по математике вне зависимости от того или иного направления его дальнейшего обучения. Ещё Птолемей в предисловии к «Альмагесту» (2 -й век.) отметил, что «во всякой науке столько истины, сколько в ней математики».

Существующая система образования последних двух десятков лет, особенно в области математики, подвергается критике уже много лет, Большинство выступающих «знают, как учить и чему учить», стараются навязать свою точку зрения. Еще смотритель училищ в « Ревизоре» Н. В. Гоголя Лука Лукич говорил: « Не приведи бог служить по учёной части, всего боишься. Всякий мешается, всякому хочется показать, что он тоже умный человек».

В настоящее время в школах, к сожалению, исключено также изучение астрономии; нет отдельного предмета "Тригонометрия", «Логика». В курсе физики отсутствует раздел механики - связующего звена математики, физики, и астрономии. Преподавание механики в школе не предусмотрено, несмотря на то, что ещё в 1970 году в школах СССР вводился факультативный курс с механическим уклоном «Основы космонавтики», но ни в одной школе Ижевска он так и не был проведён. Предлагаемоё методическое пособие ставит своей целью ликвидацию отмеченных пробелов школьной и вузовской (первого семестра) обучения программ преподавания математики и физики, особенно в плане решения задач геодезии, картографии и геоинформатики.

Задачи пособия «Математические основы геодезии, картографии и геоинформатики»

Кратко задачи данного пособия можно сформулировать так:

1. Расширить и углубить знания наиболее трудных разделов школьного и вузовского курса математики для инженерных специальностей.

2 Приобрести опыт оптимального решения задач и примеров повышенной трудности с использованием математического аппарата Maple. 7 - 15;

3 Решать нестандартные задачи.

4 Решать задачи сферической тригонометрии .

5 Решать некоторые задачи сфероидической геодезии и картографии с использованием аппарата линейной алгебры With(linalg) .

6.Вычислять «неберущиеся интегралы», разлагая функции в степенные ряды любой степени, на примере эллиптических интегралов, встречающихся в геодезии и математической картографии.

6. Исследовать на экстремум функции одного и двух переменных.

7. Решать дифференциальные уравнения с использованием Maple.

Рассмотрим вначале некоторые вопросы математического анализа и линейной алгебры, необходимые для курсов геодезии, картографии и геоинформатики.

Предварительно следует самостоятельно проработать или повторить следующие вопросы.

1. Координаты в пространстве. Поверхности первого порядка. Эллипсоиды. Кривизны и радиусы кривизны линий двухосного эллипсоида.

2. Матрицы и определители. Матричная запись преобразования координат при вращениях. Использования алгоритма нахождения обратных матриц, произведения матриц, дифференцирования матриц на Maple.

Математические операции, реализуемые возможностями Maple.

Начнём с аналитической геометрии и линейной алгебры: с элементарных операций над векторами, матрицами, массивами и определителями . К ним относятся сложение и вычитание векторов, скалярное и векторное произведение. Приложения этих операций к решению геодезических задач. Далее переходим к действия с векторами и матрицами.

ПРИМЕР 1. В этих примерах используется функция evalm(M), осуществляющая вычисление матрицы или вектора M.

Начнём с самых простых операций над векторами. Пусть заданы 2 вектора с компонентами **a**{x1,x2,x3} и **b**{y1,y2,y3}. Предварительно введём в программе Maple оператор аналитической геометрии и векторной алгебры **with (linalg)**

with(linalg): подключение линейной алгебры

Зададим трёхмерные векторы с неизвестными компонентами

a:=vector(3,[x1,x2,x3]); вектор с неизвестными компонентами

$$a := [x1, x2, x3]$$

b:=vector(3,[y1,y2,y3]);

$$b := [y1, y2, y3]$$

Затем воспользуемся оператором **evalm.** Его возможности можно посмотреть в Helpe, где **evalm** задает операцию суммирования векторов. Операция вычитания векторов идентична.

c:=evalm(a+b); сложение векторов

$$c := [x1 + y1, x2 + y2, x3 + y3]$$

Компоненты вектора суммы **c**={c[1],c[2],c[3]}. В явном виде это вектор можно задать, используя, оператор **subs**, например, так:

c1:=**subs**(c[1]=2.3,c[2]=-3.85,c[3]=7,**c**);

Перейдём теперь к команде **multiply**, которая определяет операцию скалярного произведения векторов

d:=multiply(a,b); скалярное произведение векторов (число)

$$d := x1\,y1 + x2\,y2 + x3\,y3$$

Для получения конкретного значения компоненты векторов a и b зададим, используя, тот же оператор **subs.** Например:

d1:=subs(x1=1,x2=2,x3=3,y1=4,y2=5,y3=6,d);

d1=32

ПРИМЕР 2. Матрица задаётся аналогично вектору с указанием числа строк и столбцов, например. M(3,3,[a11,a12,a13,a21.a22,a23,a31,a32,a33]).

Обратим внимание на то, что векторы и матрицы, хотя и похожи на списки, но не полностью отождествляются с ними. В этом можно убедиться с помощью следующих примеров (файл vmop), в которых функция type используется для *контроля типов* множественных объектов (векторов и матриц):

> M1:=[1,2,3,4];

M1 := [1, 2, 3, 4]

> type(M1,vector);

false

> V:=convert(M1,vector);

V := [1, 2, 3, 4]

> type(V,vector);

true

> M2:=[[1,2],[3,4]];

M2 := [[1,2], [3, 4]]
> type(M2,matrix);
false
> M:=convert(M2,matrix);

$$M := \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

> type(M,matrix);
True

ПРИМЕР 3. Таким образом, используя функцию преобразования данных convert, можно преобразовывать одномерные списки в векторы, а двумерные — в матрицы. Функция type используется в следующих формах:

type(V,vector) — тестирует аргумент V и возвращает true, если V — вектор, и false в ином случае;

Приведем примеры операций над векторами (файл vector):

> V:=array(1..4,[1,2,3,4]);
V:= [1, 2, 3, 4]
> [V[1], V[2], V[4]];
[1, 2, 4]
> V[1]:=a: V[3]:=b:
> evalm(V);
[a, 2, b, 4]
> evalm(V+2);
[a + 2, 4, b + 2, 6]
> evalm(2*V);
[2 a, 4, 2 b, 8]
> evalm(V**V);
$[a, 2, b, 4]^V$
> evalm(a*V);
$[a^2, 2 a, a b, 4 a]$

В этих примерах используется функция evalm(M), осуществляющая вычисление матрицы или вектора M.

ПРИМЕР 4. Рассмотрим далее векторное произведения двух векторов, которое задается оператором **crossprod**

e:=crossprod(a,b); векторное произведение векторов

$$e := [x2\,y3 - x3\,y2,\ x3\,y1 - x1\,y3,\ x1\,y2 - x2\,y1]$$

Компоненты вектора произведения **e**={e[1],e[2],e[3]} получим опять с помощью **subs,** например:

e:=vector(3,[subs(x1=1,x2=2,x3=3,y1=4,y2=5,y3=6,e[1]),subs(x1=1,x2=2,x3=3,y1=4,y2=5,y3=6,e[2]),subs(x1=1,x2=2,x3=3,y1=4,y2=5,y3=6,e[3])]);

$$e1 := [-3,\ 6,\ -3]$$

Можно и в дальнейшем оперировать отдельно с компонентами векторов, в качестве которых могут быть, например, градусы, минуты, секунды дуги, имеем **e**={e[1],e[2],e[3]},где e[1] – градусы, e[2]-минуты, e[3] – секунды. Аналогично можем считать компонентами метры, сантиметры, миллиметры или килограммы, граммы, миллиграммы и т.д.

ПРИМЕР 5. В качестве наглядного примера рассмотрим, например, вектор **a** с компонентами – координатами города Ижевска. Пусть широта **B** задана в градусах, минутах и секундах и её нужно представить в радианах. Преобразования выглядят так:

B:=vector(3,[x1,x2,x3]);

$$a := [x1,\ x2,\ x3]$$

pm:=evalf(Pi/180);

$$pm := 0.01745329252$$

Если опустить оператор **evalf,** то получим для переводного множителя такое выражение

pm:=Pi/180;

$$pm := \frac{\pi}{180}$$

Широта в радианах будет находиться так:

B:=subs(x1=56,x2=50,x3=10.6,(a[1]+a[2]/60+a[3]/3600)*pm);

$$B := 0.9919801818$$

ПРИМЕР 6. Перейдём к операциями с матрицами и определителями с использованием алгоритма на Maple. Действия с матрицами и определителями выполняются также легко и просто. Можно выполнять разнообразные операции. Приведём основные из них:

> M:=array(1..2,1..2,[[1,2],[3,4]]); Задание массива (матрицы M)

$$M := \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

> evalm(2*M); Умножение массива (матрицы) на число 2. Умножаются все элементы !

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$$

> evalm(2+M); Число 2 прибавляется к диагональным элементам.

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

> evalm(M^2);

$$\begin{bmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{bmatrix}$$

> evalm(M^(-1));

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} \end{bmatrix}$$

> evalm(M-M);

0

> evalm(M+M);

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$$

> evalm(M*M);

$$\begin{bmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{bmatrix}$$

> evalm(M/M);

1

> evalm(M^0);

1

ПРИМЕР 7. Рассмотрим действия на конкретном : например, пусть заданы вектор **x** и матрица **A** в общем виде

x:=vector(3,[N1,N1,N1*(1-e^2)]);

$$x := [N1, N1, N1\,(1 - e^2)]$$

A:=matrix(3,3,[cos(phi)*cos(lambda),0,0,0,cos(phi)*sin(lambda), 0,0,0,sin(phi)]); Матрица поворота

$$A := \begin{bmatrix} \cos(\phi)\cos(\lambda) & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\phi)\sin(\lambda) & 0 \\ 0 & 0 & \sin(\phi) \end{bmatrix}$$

Найдём вектор **y** как произведение матрицы **A** на вектор **x**

y:=multiply(A,x);Умножение матрицы на вектор

$$y := [\cos(\phi)\cos(\lambda)\,N1, \cos(\phi)\sin(\lambda)\,N1, \sin(\phi)\,N1\,(1 - e^2)]$$

Отдельные компоненты вектора **y** представим через вектор **y1**

y1:=vector(3,[y[1],y[2],y[3]]);

$$y1 := [\cos(\phi)\cos(\lambda)\,N1, \cos(\phi)\sin(\lambda)\,N1, \sin(\phi)\,N1\,(1 - e^2)]$$

Можно оперировать отдельно с этими компонентами

Z1g:=y[3]+e^2*N0*sin(phi0);

$$Z1g := \sin(\phi)\,N1\,(1 - e^2) + e^2\,N0\,\sin(\phi 0)$$

Z1:=Z+N0+H0;

$$Z1 := Z + N0 + H0$$

ПРИМЕР 8. Перейдём к действиям с произведением матриц поворота, операции, которые часто встречаются при преобразовании систем координат.

Пусть, например, задана матрица поворота вокруг оси Оy на угол ϕ0

A1:=matrix(3,3,[cos(phi0),0,-sin(phi0),0,1,0,sin(phi0),0,cos(phi0)]);

$$A1 := \begin{bmatrix} \cos(\phi 0) & 0 & -\sin(\phi 0) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\phi 0) & 0 & \cos(\phi 0) \end{bmatrix}$$

Найдём транспонированную **A3** и обратную **A31** (не упрощённую) матрицы **A1** , операторами **transpose** и **inverse**

A3:=transpose(A1);A31:=inverse(A1);

$$A3 := \begin{bmatrix} \cos(\phi 0) & 0 & \sin(\phi 0) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\phi 0) & 0 & \cos(\phi 0) \end{bmatrix}$$

$$A31 := \begin{bmatrix} \dfrac{\cos(\phi 0)}{\sin(\phi 0)^2 + \cos(\phi 0)^2} & 0 & \dfrac{\sin(\phi 0)}{\sin(\phi 0)^2 + \cos(\phi 0)^2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\dfrac{\sin(\phi 0)}{\sin(\phi 0)^2 + \cos(\phi 0)^2} & 0 & \dfrac{\cos(\phi 0)}{\sin(\phi 0)^2 + \cos(\phi 0)^2} \end{bmatrix}$$

Применяя, оператор **simplify, упростим A31**

A32:=simplify(A31);

$$A32 := \begin{bmatrix} \cos(\phi 0) & 0 & \sin(\phi 0) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\phi 0) & 0 & \cos(\phi 0) \end{bmatrix}$$

Видим, что оператор существенно упрощает вид матрицы A31. Найдём единичную матрицу как произведение прямой и обратной матриц

E:=multiply(A1,A32);

$$E := \begin{bmatrix} \sin(\phi 0)^2 + \cos(\phi 0)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sin(\phi 0)^2 + \cos(\phi 0)^2 \end{bmatrix}$$

С оператором simplify получим единичную матрицу **E1**

E1:=simplify(E);

$$E1 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Определитель матрицы **E1**, естественно, равен 1.

Неиспользованные операторы и комментарии можно записывать в решётках

#A1:=matrix(3,3,[cos(phi0),0,- sin(phi0),0,1,0,sin(phi0),0,cos(phi0)]);#

A3- транспонированная матрица матрицы **A1**, её определитель, как и определитель исходной матрицы **A1**, равен 1

Матрица поворота вокруг оси **Oy** запишется так:

A3:=transpose (A1);simplify(det(A1));

$$A3 := \begin{bmatrix} \sin(\phi 0) & 0 & \cos(\phi 0) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\cos(\phi 0) & 0 & \sin(\phi 0) \end{bmatrix}$$

A4:=simplify(det(inverse(A1)));

$A4 := 1$

Запишем матрицу поворота **A2** вокруг оси **Oz**

A2:=matrix(3,3,[cos(lambda0),-sin(lambda0),0,sin(lambda0),cos(lambda0),0,0,0,1]);

$$A2 := \begin{bmatrix} \cos(\lambda 0) & -\sin(\lambda 0) & 0 \\ \sin(\lambda 0) & \cos(\lambda 0) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Найдём произведение этих двух матриц – матрицу **B**

B:=multiply(A2,A1);

$$B := \begin{bmatrix} \cos(\lambda 0)\sin(\phi 0) & -\sin(\lambda 0) & -\cos(\lambda 0)\cos(\phi 0) \\ \sin(\lambda 0)\sin(\phi 0) & \cos(\lambda 0) & -\sin(\lambda 0)\cos(\phi 0) \\ \cos(\phi 0) & 0 & \sin(\phi 0) \end{bmatrix}$$

Найдём матрицу **B11,** обратную матрицы **B**

B11:=simplify(inverse(B));

$$B11 := \begin{bmatrix} \cos(\lambda 0)\sin(\phi 0) & \sin(\lambda 0)\sin(\phi 0) & \cos(\phi 0) \\ -\sin(\lambda 0) & \cos(\lambda 0) & 0 \\ -\cos(\lambda 0)\cos(\phi 0) & -\sin(\lambda 0)\cos(\phi 0) & \sin(\phi 0) \end{bmatrix}$$

Рассмотрим, как меняется результирующая матрица произведения от перестановки сомножителей. Пусть матрица **B1** в отличие от матрицы **B** получена умножением матрицы **A1** на **A2**

B1:=multiply(A1,A2);

$$B1 := \begin{bmatrix} \cos(\lambda 0)\sin(\phi 0) & -\sin(\lambda 0)\sin(\phi 0) & -\cos(\phi 0) \\ \sin(\lambda 0) & \cos(\lambda 0) & 0 \\ \cos(\lambda 0)\cos(\phi 0) & -\sin(\lambda 0)\cos(\phi 0) & \sin(\phi 0) \end{bmatrix}$$

Как и выше найдём матрицу **B21**,обратную этой матрицы

B21:=simplify(inverse(B1));

$$B21 := \begin{bmatrix} \cos(\lambda 0)\sin(\phi 0) & \sin(\lambda 0) & \cos(\lambda 0)\cos(\phi 0) \\ -\sin(\lambda 0)\sin(\phi 0) & \cos(\lambda 0) & -\sin(\lambda 0)\cos(\phi 0) \\ -\cos(\phi 0) & 0 & \sin(\phi 0) \end{bmatrix}$$

Не преобразованный определитель матрицы **B1** равен **B6**

B6:=det(B1);

$$B6 := \cos(\lambda 0)^2 \sin(\phi 0)^2 + \sin(\lambda 0)^2 \sin(\phi 0)^2 + \sin(\lambda 0)^2 \cos(\phi 0)^2 + \cos(\lambda 0)^2 \cos(\phi 0)^2$$

С оператором свёртывания **simplify** он равен,естественно

B7:=simplify(B6);

$$B7 := 1$$

ПРИМЕР 9. Можно также написать произведение N матриц как **B:=multiply (A1,A2, .. ,An).** Обратная матрица найдётся так: **B1:=inverse(B**), определитель – как **det(B);** если матрицы поворота, то **D:= simplify(det(B))=**1. Заметим, что произведение матрицы **A**

порядка $m \times n$ на матрицу **B** порядка $n \times p$ равно матрицы **C=AB** порядка $m \times p$. Напомним свойства операций сложения и умножения матриц :

1) **(AB)C = A(BC)** - ассоциативность;
2) α**(AB) = (**α**A)B = A(**α**B);**
3) **(A+B) C = AC + BC** –дистрибутивность;
4) **A(B + C) =AB+AC, где A,B** и **C** матрицы, для которых определены соответствующие операции, α - число.

Отметим наиболее употребительные функции пакета linalg:

• addcol — добавляет к одному из столбцов другой столбец, умноженный на некоторое число;

• addrow — добавляет к одной из строк другую строку, умноженную на некоторое число;

• angle — вычисляет угол между векторами;

• augment — объединяет две или больше матриц по горизонтали;

• backsub — реализует метод обратной подстановки при решении системы линейных уравнений (см. также forwardsub);

• band — создает ленточную матрицу.

ПРИМЕР 10. Покажем на примере с действиями над матрицами размерности, например 6*4, очень важные особенности их трансформаций.

w0:=matrix(6,4,[910040.28,498990.17,870633.06,565104.18,916995.11,494952.72,877861.56,561592.45,924003.61,500988.12,884404.02,568131.15,920066.11,509242.14,880457.71,576111.31,910993.58,507005.37,870982.79,573168.09,916682.33,502252.75,877008.58,568849.79]);

$$w0 := \begin{bmatrix} 910040.28 & 498990.17 & 870633.06 & 565104.18 \\ 916995.11 & 494952.72 & 877861.56 & 561592.45 \\ 924003.61 & 500988.12 & 884404.02 & 568131.15 \\ 920066.11 & 509242.14 & 880457.71 & 576111.31 \\ 910993.58 & 507005.37 & 870982.79 & 573168.09 \\ 916682.33 & 502252.75 & 877008.58 & 568849.79 \end{bmatrix}$$

Оператор addrow (wo,i,j,k) позволяет к j –й строке матрицы прибавляется i– строка, умноженная на k. Это видно по матрице **B1** , где из второй строки вычитается первая !

B1 := addrow(w0, 1, 2, -1);

$$B1 := \begin{bmatrix} 910040.28 & 498990.17 & 870633.06 & 565104.18 \\ 6954.83 & -4037.45 & 7228.50 & -3511.73 \\ 924003.61 & 500988.12 & 884404.02 & 568131.15 \\ 920066.11 & 509242.14 & 880457.71 & 576111.31 \\ 910993.58 & 507005.37 & 870982.79 & 573168.09 \\ 916682.33 & 502252.75 & 877008.58 & 568849.79 \end{bmatrix}$$

ПРИМЕР 11. Оператор цикла имеет вид:.

Зададим такую операцию i^2*j^2, где I –внешний цикл от 1 до 3, а j –внутренний от 1 до 3.

```
for i from 1 by 1 to 3  do
for j from 1 by 1 to 3 do
> print(i,j,i^2*j^2) end end;
```

1, 1, 1

1, 2, 4

1, 3, 9

2, 1, 4

2, 2, 16

2, 3, 36

3, 1, 9

3, 2, 36

3, 3, 81

ПРИМЕР 12. Можно задать алгоритм вычисления факториала числа или , что-нибудь другое.

```
> for i from 1 by 1 to 6 do

> print(i,i!) end;
```

1, 1

2, 2

3, 6

4, 24

5, 120

6, 720

ПРИМЕР 13. Аналогично, матричным способом, решается система **N** уравнений с **N** неизвестными. Продемонстрируем это на простой системе, например, системе 3-х уравнений с 3-мя неизвестными:

7x1+2x2+3x3=15
5x1-3x2+2x3=15 (1)
10x1-11x2+5x3=36

В матричном виде эта система запишется так: **Ax = c**. Достаточно найти обратную матрицу для **A** и умножить её на вектор **c**

Пусть матрица **X** равна матрице **A**, а компоненты вектора с – свободные члены уравнения (1).

```
x:=vector(3,[x1,x2,x3]):
c:=vector(3,[15,15,36]):
X:=matrix(3,3,[7,2,3,5,-3,2,10,-11,5]);
```

$$X := \begin{bmatrix} 7 & 2 & 3 \\ 5 & -3 & 2 \\ 10 & -11 & 5 \end{bmatrix}$$

Простым умножением матрицы на вектор получаем вектор результата

x:=multiply(inverse(X),c);

$$x := [2, -1, 1]$$

Компоненты этого вектора и есть решение системы (1).

ПРИМЕР 14. Если нас будет интересовать обратная матрица, то и она получается просто с помощью оператора **inverse**

X1:=inverse(X);

$$X1 := \begin{bmatrix} \frac{-7}{36} & \frac{43}{36} & \frac{-13}{36} \\ \frac{5}{36} & \frac{-5}{36} & \frac{-1}{36} \\ \frac{25}{36} & \frac{-97}{36} & \frac{31}{36} \end{bmatrix}$$

Работа увеличиться не намного, если система будет из 5,6,7 и т.д. уравнений. Перейдём далее к некоторым задачам ***геодезии и математической картографии***.

ПРИМЕР 15. В задачах геодезии и картографии часто используются формулы сферической тригонометрии. При решении сферических (сфероидических) треугольников часто применяется теорема косинусов, связывающая стороны **а,в,с** с углом **А** , а также теорему синусов:

sin(a)/sin(A)=sin(b)/sin(B)=sin(c)/sin(C) (2)

cos(a)=cos(b)*cos(c)+sin(a)*sin(b)*cos(A)

Перейдём к преобразованиям первой функции (2), разлагая составляющие её в ряды с выделением заданного выражения. Комментарии можно оставить в решетке.

cos(a)=cos(b)*cos(c)+sin(b)*sin(c)*cos(A) **(3)**

Пусть **а,в,с** – стороны сферического треугольника, а **R** –радиус аппроксимирующей сферы, тогда в радианной мере решение выглядит так:

Ac1:=solve(subs(a=a/R,b=b/R,c=c/R,cos(a)=cos(b)*cos(c)+sin(b)*sin(c)*cos(A)),cos(A));

$$Ac1 := \frac{\cos\left(\frac{a}{R}\right) - \cos\left(\frac{b}{R}\right)\cos\left(\frac{c}{R}\right)}{\sin\left(\frac{a}{R}\right)\sin\left(\frac{b}{R}\right)}$$

Здесь **Ac**1 = cos(a). Если требуется представить Ac1 = Ac в виде произведения рядов разложений тригонометрических функций синусов и косинусов до заданного порядка –воспользуемся операторами **poisson** и **parfrac**

Ac:=convert(poisson(Ac1,[a,b,c],5),parfrac,R);

$$Ac := -\frac{a^2 - c^2 - b^2}{2\,a\,b} + \frac{-a^4 - c^4 + b^4 - 4\,b^2\,c^2 + 2\,a^2\,c^2}{24\,R^2\,a\,b}$$

A1c:=simplify(poisson(solve(a^2=b^2+c^2-2*a*b*cos(A),cos(A)),[a,b,c],5));#cos(A1)#

$$A1c := -\frac{a^2 - c^2 - b^2}{2\,a\,b}$$

C1C2:=Ac-A1c;#cosA-cosA1#cos(A)-cos(A1)#

$$C1C2 := \frac{-a^4 - c^4 + b^4 - 4\,b^2\,c^2 + 2\,a^2\,c^2}{24\,R^2\,a\,b}$$

P:=simplify(c*b*sqrt(1-A1c^2)/2);

$$P := \frac{c\, b \sqrt{-\frac{-6\, a^2\, b^2 + a^4 - 2\, a^2\, c^2 + c^4 + 2\, b^2\, c^2 + b^4}{a^2\, b^2}}}{4}$$

x2:=factor(x1);

$$x2 := \frac{(a^4 + c^4 - b^4 + 4\, b^2\, c^2 - 2\, a^2\, c^2)\, b\, a}{6\, R^2\, (-b^2 + 2\, a\, b + a^2 - c^2)\, (-b^2 - 2\, a\, b + a^2 - c^2)}$$

AA1:=solve(C1C2=P^2*x,x);

$$AA1 := \frac{2\, (a^4 + c^4 - b^4 + 4\, b^2\, c^2 - 2\, a^2\, c^2)\, a}{3\, R^2\, b\, c^2\, (-6\, a^2\, b^2 + a^4 - 2\, a^2\, c^2 + c^4 + 2\, b^2\, c^2 + b^4)}$$

epsilon:=solve(2*sin(alpha/2)*sqrt(1-A1c^2)=C1C2,alpha);

$$\varepsilon := -2 \arcsin\left(\frac{a^4 + c^4 - b^4 + 4\, b^2\, c^2 - 2\, a^2\, c^2}{24\, R^2 \sqrt{-\frac{-6\, a^2\, b^2 + a^4 - 2\, a^2\, c^2 + c^4 + 2\, b^2\, c^2 + b^4}{a^2\, b^2}}\; a\, b} \right)$$

Найдём это значение при конкретных константах в радианах и угловых секундах

epsilon1:=evalf(subs(a=30,b=30,c=30,R=6378.1,epsilon));

$\varepsilon 1$:= -0.319329648210^{-5}

epsilons:=evalf(epsilon1*180/Pi*3600);

epsilons:= -0.6586646799

Для получения решения с удвоенной или утроенной точностью можем воспользоваться оператором **Digits**. Например, **Digits:=33**

ПРИМЕР 16. Перейдём к геометрическим вопросам геодезии и математической картографии.

Одной из многочисленных задач геодезии является определение длины меридиана и параллели на двухосном эллипсоиде, а также вычисления площадей криволинейных трапеций. Для радиусов кривизны плоской кривой можно вывести зависимости, воспользовавшись известными дифференциальными соотношениями:

Кривизна и радиус кривизны плоской кривой y=f(x) даются формулами анализа . Оператор diff – оператор дифференцирования

k:= diff(y(x),x$2)/(1+diff(y(x),x)^2)^(3/2);

$$k := \frac{\frac{d^2}{dx^2}\,\mathrm{y}(x)}{\left(1+\left(\frac{d}{dx}\,\mathrm{y}(x)\right)^2\right)^{(3/2)}}$$

кривизна кривой y(x)

r:=1/k;

$$r := \frac{\left(1+\left(\frac{d}{dx}\,\mathrm{y}(x)\right)^2\right)^{(3/2)}}{\frac{d^2}{dx^2}\,\mathrm{y}(x)}$$

радиус кривизны плоской кривой.

Проиллюстрируем эти формулы на простом примере; например, найдём кривизну **к** и радиус кривизны ρ для дуги окружности

y:=sqrt(R^2-x^2);

$$y := \sqrt{R^2 - x^2}$$

С оператором упрощения, получим параметр к в виде

\> **k:=simplify(diff(y,x,x)/(1+diff(y,x)^2)^(3/2));**

$$k := -\frac{1}{\sqrt{R^2 - x^2}\,\sqrt{\frac{R^2}{R^2 - x^2}}}$$

Как видно, радиус кривизны $\rho = 1/\kappa$ равен **R**

Используем этот алгоритм для вычисления **к** в случае задания другой функции

k1:=simplify(subs(y=x^2,k));

$$k1 := \frac{4}{1 + 8\,\mathrm{csgn}(x)\,x^3}$$

r1:=simplify(subs(y=x^2,r));

$$r1 := \frac{1}{4} + 2\,\mathrm{csgn}(x)\,x^3$$

ПРИМЕР 17. Более существенное облегчение в вычислениях получим при решении задачи на вычисление длины дуги меридиана и параллели, вычисление площадей криволинейных трапеций на заданном двухосном эллипсоиде

M:=a*(1-e^2)/(1-e^2*sin(phi)^2)^(3/2); Радиус кривизны меридиана двухосного эллипсоида

$$M := \frac{a\,(1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin(\phi)^2)^{(3/2)}} \qquad (4)$$

N:=a/sqrt(1-e^2*sin(phi)^2); Радиус кривизны первого вертикала двухосного эллипсоида

$$N := \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin(\phi)^2}} \qquad (5)$$

В формулах (4) и (5) **a** - экваториальный радиус эллипсоида, **e** – эксцентриситет эллипса сечения, **ϕ** - геодезическая (астрономическая) широта.

Длина меридиана **∫M(B)dB** в заданных пределах изменения широты равна:

Dm:=int(M,phi); длина дуги меридиана без упрощения формулы

$$Dm := -a\,(1-e^2)\,\Big(e^2\sqrt{(-1+e^2\sin(\phi)^2)\,(-1+\sin(\phi)^2)}\,\sin(\phi)^3 - e^2\sqrt{(-1+e^2\sin(\phi)^2)\,(-1+\sin(\phi)^2)}\,\sin(\phi) + \sqrt{1-\sin(\phi)^2}\,\sqrt{1-e^2\sin(\phi)^2}\,\sqrt{(-1+\sin(\phi)^2)\,(-1+e\sin(\phi))\,(e\sin(\phi)+1)}\,\mathrm{EllipticE}(\sin(\phi),e)\Big) \Big/ \Big((-1+e^2)\sqrt{(-1+\sin(\phi)^2)\,(-1+e\sin(\phi))\,(e\sin(\phi)+1)}\,\cos(\phi)\sqrt{1-e^2\sin(\phi)^2}\Big)$$

Dm1:=simplify (Dm); длина дуги меридиана с упрощением формулы оператором **simplify**

$$Dm1 := -\frac{a\,\left(e^2\sin(\phi)\cos(\phi) - \mathrm{csgn}(\cos(\phi))\sqrt{-e^2+1+e^2\cos(\phi)^2}\,\mathrm{EllipticE}(\sin(\phi),e)\right)}{\sqrt{-e^2+1+e^2\cos(\phi)^2}}$$

Для конкретных широт ϕ1 и ϕ2 с использованием оператора **subs** получим:

Dm:= evalf (subs (a=a1, e=e1,ϕ= ϕ2, Dm1) – (subs (a=a1, e=e1,ϕ= ϕ1, Dm1));

ПРИМЕР 18. Можно решить эту задачу по-другому: разложить **Dm** в ряд по широте до любого порядка и потом интегрировать непосредственно как заданный многочлен. Приведены и возможные упрощающие вид решения операции **simplify, convert, factor**.

M1:=convert(series(M,phi,6),polynom);

$$M1 := a\,(1-e^2) + \frac{3\,a\,(1-e^2)\,e^2\,\phi^2}{2} + a\,(1-e^2)\left(-\frac{1}{2}e^2 + \frac{15}{8}e^4\right)\phi^4$$

> **Mm:=simplify(M1);**

$$Mm := a - a\,e^2 + \frac{3}{2}\,a\,e^2\,\phi^2 - \frac{3}{2}\,a\,e^4\,\phi^2 - \frac{1}{2}\,a\,\phi^4\,e^2 + \frac{19}{8}\,a\,\phi^4\,e^4 - \frac{15}{8}\,a\,\phi^4\,e^6$$

Mn1:=factor(M1);

$$Mn1 := -\frac{a\,(e-1)\,(e+1)\,(15\,\phi^4\,e^4 + 12\,e^2\,\phi^2 - 4\,\phi^4\,e^2 + 8)}{8}$$

Dm2:=int(M1,phi=phi1..phi2);

$$Dm2 := a\,(1-e^2)\,(\phi2 - \phi1) + \frac{a\,(1-e^2)\,e^2\,(\phi2^3 - \phi1^3)}{2} + \frac{a\,(1-e^2)\left(-\frac{1}{2}\,e^2 + \frac{15}{8}\,e^4\right)(\phi2^5 - \phi1^5)}{5}$$

> **Dm3:=simplify(Dm2);**

$$Dm3 := a\,\phi2 - a\,\phi1 - a\,e^2\,\phi2 + a\,e^2\,\phi1 + \frac{a\,e^2\,\phi2^3}{2} - \frac{a\,e^2\,\phi1^3}{2} - \frac{a\,e^4\,\phi2^3}{2} + \frac{a\,e^4\,\phi1^3}{2} - \frac{a\,e^2\,\phi2^5}{10} + \frac{a\,e^2\,\phi1^5}{10} + \frac{19\,a\,e^4\,\phi2^5}{40} - \frac{19\,a\,e^4\,\phi1^5}{40} - \frac{3\,a\,e^6\,\phi2^5}{8} + \frac{3\,a\,e^6\,\phi1^5}{8}$$

> **Dm4:=factor(Dm2);**

$$Dm4 := a\,(\phi1 - \phi2)\,(e-1)\,(e+1)\,(15\,\phi1^4\,e^4 + 15\,\phi1^2\,\phi2^2\,e^4 + 15\,\phi1^3\,\phi2\,e^4 + 15\,\phi1\,e^4\,\phi2^3 + 15\,e^4\,\phi2^4 - 4\,\phi1\,e^2\,\phi2^3 - 4\,\phi1^4\,e^2 - 4\,\phi1^2\,e^2\,\phi2^2 + 20\,e^2\,\phi2^2 + 20\,\phi1\,e^2\,\phi2 - 4\,\phi1^3\,e^2\,\phi2 + 20\,\phi1^2\,e^2 - 4\,e^2\,\phi2^4 + 40)/40$$

Роль операций **convert ,polynom** – очевидна, если сравнить **M1** с **M2**.

> **M2:=series(M,phi,6);**

$$M2 := a\,(1-e^2) + \frac{3\,a\,(1-e^2)\,e^2}{2}\,\phi^2 + a\,(1-e^2)\left(-\frac{1}{2}\,e^2 + \frac{15}{8}\,e^4\right)\phi^4 + \mathrm{O}(\phi^6)$$

ПРИМЕР 19. Прямая и обратная задачи геодезии связаны с решением сфероидических треугольников, что будет хорошо видно из решения задач на ортодромию и локсодромию.

Начнём с задачи на вычисление длины ортодромии на двухосном эллипсоиде. Ортодромия - кривая между двумя точками с заданными геодезическими координатами: **Q1(B1,L1)** и **Q2(B2,L2).**

План решения задачи предельно прост: используя формулу (2), находим длину ортодромии в радианах.

cos(a)=cos(b)*cos(c)+sin(a)*sin(b)*cos(A)

Перевести в линейную меру можно, если будет известен радиус аппроксимирующей средней сферы с параметрами заданного референц - эллипсоида и широтой **Bm=(B1+B2)/2**. Параметры эллипсоида заданы , например, **ПЗ-90** a=6378136 м.,

α =1./298.258.

R:=sqrt(M*N);

$$R := \sqrt{M\,N}$$

Bm:=(B1+B2)/2;

$$Bm := \frac{B1}{2} + \frac{B2}{2}$$

R:=subs(a=a1,e=e1,B=Bm,R);

$$R := \sqrt{M\,N}$$

Тогда длина ортодромии будет равна **Dm(орт)=R*a**

Перейдём к рассмотрению важного вопроса : вычисление локсодромии на шаре. Кратко напомним, что за термин « локсодромия ».

Локсодромия – кривая, пересекающая все меридианы под одним и тем же углом, например**, К** (рис. 2).

Покажем, что прямая линия на карте в меркаторской проекции действительно представляет собой локсодромию.

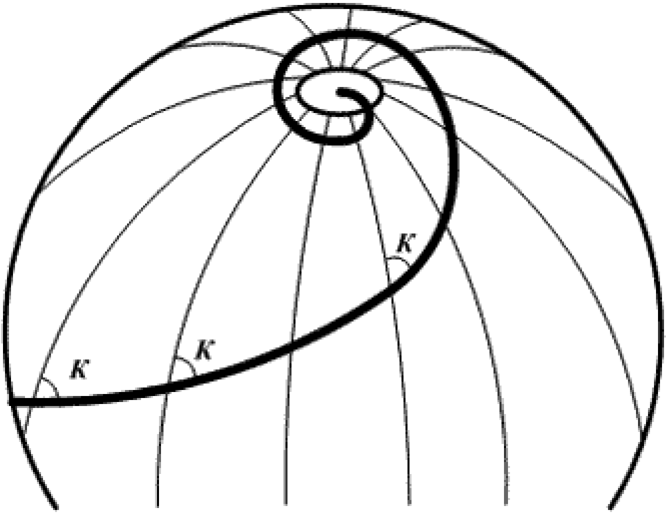


Рис. 2. Локсодромия на земном шаре

Судно, совершающее плавание постоянным курсом, перемещается именно по локсодромии.

Уравнение локсодромии на поверхности эллипсоида имеет вид:

$$\lambda_2 - \lambda_1 = tg\,K \cdot \left[\ln tg \cdot \left(\pi/_4 + \frac{\varphi_2}{2}\right) \cdot \left(\frac{1 - e \cdot \sin\varphi_2}{1 + e \cdot \sin\varphi_2}\right)^{e/_2} - \ln tg \cdot \left(\pi/_4 + \frac{\varphi_1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1 - e \cdot \sin\varphi_1}{1 + e \cdot \sin\varphi_1}\right)^{e/_2} \right]$$

Если пренебречь сжатием эллипсоида и приняв Землю за шар, то уравнение локсодромии примет вид:

$$\lambda_2 - \lambda_1 = tg\,K \cdot [\ln tg \cdot (\pi/_4 + \frac{\varphi_2}{2}) - \ln tg \cdot (\pi/_4 + \frac{\varphi_1}{2})]$$

Из этой формулы выводятся следующие свойства локсодромии:

- – при **К** = 0°(180°) → локсодромия совпадает с меридианом;
- – при **К** = 90°(270°) → локсодромия совпадает с параллелью, а при **φ** = 0° – с экватором;

- – при любых других **К** – локсодромия является логарифмической спиралью, стремящейся к полюсу, но никогда его не достигающей;
- – локсодромия своей выпуклостью обращена к экватору.

Длину и направление локсодромии по известным координатам точек вычисляют по формулам аналитического вычисления.

Напишем уравнение прямой, проходящей через т. ***A*** **(*X_0*, *$У_0$*)** наклонно к оси ***X*** под углом **К** равным курсу (рис. 3).

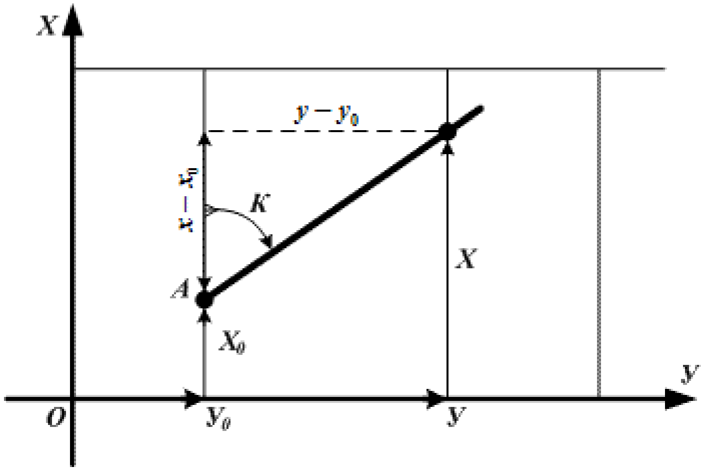


Рис.3. Уравнение прямой

$$(Y - Y_0) = (X - X_0) \cdot \mathrm{tg} K \qquad (3)$$

Подставим в полученное уравнение (3) вместо *X* и *У* их выражения через φ и λ, принимая для простоты Землю за шар:

$$Y = a \cdot \lambda$$

где ***a*** – коэффициент пропорциональности, определяющий расстояния между меридианами.

$$X = MЧ = a \cdot \ln tg \cdot (45° + \frac{\varphi}{2})$$

Тогда:

$$(\lambda-\lambda_0)=tg\,K\cdot[\ln tg\cdot(45^\circ+\frac{\varphi}{2})-\ln tg\cdot(45^\circ+\frac{\varphi_0}{2})]$$

Это уравнение показывает, что прямая линия на меркаторской проекции действительно представляет собой локсодромию

Найдём длину локсодромии для конкретных пунктов.

Вычисление локсодромии **Dl=Do**

U:=tan(Pi/4+phi/2)/tan(Pi/4+arcsin(e*sin(phi))/2)^e;

pm:=evalf(Pi/180);

$pm := 0.01745329252$

phi0:=evalf((56+51/60)*pm);lambda0:=evalf(53+14/60)*pm;

Это координаты Ижевска**.**

$\phi0 := 0.9922196798$

$\lambda0 := 0.9290969384$

q1:=evalf(subs(e=e1,phi=phi0,ln(U)));

$q1 := \ln(U)$

q2:=simplify(int(M/(N*cos(phi)),phi)):

Изометрическая широта

q21:=evalf (subs(e=e1,phi=phi0,q2));

$q21 := 1.206264041 - 1.442275210 I$

q3:=Re(q21);

$q3 := 1.206264041$

q4:=Im(q21);

$q4 := -1.442275210$

phi1:=evalf((59+20/60)*pm);lambda1:=evalf((18+4/60)*pm);

Координаты Стокгольма

phi1:=evalf((56+51/60+27/3600)*pm);lambda1:=evalf((60+36/60+45/3600)*pm); Координаты Екатеринбурга

$\phi1 := 0.9923505795$

$\lambda1 := 1.057887693$

alpha5:=evalf(arctan(subs(e=e1,phi=phi0,N*cos(phi)^2/M)));

phi2:=(18+58/60)*pm;lambda2:=(72+50/60)*pm; Координаты Бомбея

phi2:=evalf((-37-49/60-14/3600)*pm);lambda2:=evalf((144+57/60+41/3600)*pm);Координаты Мельбурна

phis:=evalf((phi0+phi1)/2); lambdas:=(lambda0+lambda1)/2;
С оператором свёртывания
$phis := 0.9922851297$

$lambdas := 0.9934923157$

Rsr:=evalf(sqrt(subs(a=a1,e=e1,phi=phis,M*N)));

$Rsr := 6386.724104$

sigma:=evalf(solve(cos(sigma1)=sin(phi0)*sin(phi1)+cos(phi0)*cos(phi1)*cos(lambda1-lambda0),sigma1));

$\sigma := 0.07038594454$

DORT:=Rsr*sigma; Длина ортодромии Ижевск – Екатеринбург

$DORT := 449.5356086$

ПРИМЕР 20. Основной вопрос математического анализа первого курса - исследование функций, экстремумы, построение графиков.

Перейдём к этим операциям с использованием мощного математического аппарата Maple.Рассмотрим ряд простых примеров. Например, пределы последовательностей находятся одним оператором, **limit**

limit((1-(2*n+1)/n^2)^(n-1),n=infinity);

$$e^{(-2)}$$

limit((x-tan(x))/(4*x^3),x=0);

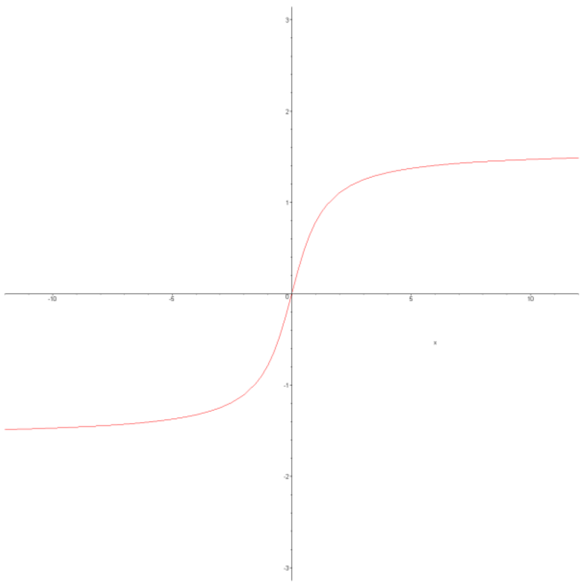
$$\frac{-1}{12}$$

Графики функций строятся также просто с оператором **plot.**

y:=arctan(x);

$$y := \arctan(x)$$

plot(y,x=-5..5,-Pi..Pi);



Рассмотрим ещё ряд примеров на нахождения интегралов и построения графиков разных функций

y:=x/(x^4-x^2-2);

$$y := \frac{x}{x^4 - x^2 - 2}$$

y4:=arctan(sqrt(x))/sqrt(x);

$$y4 := \frac{\arctan(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$$

Операция интегрирования аналогична операции дмференцирования (**diff**) с оператором **int**

z1:=int(y4,x);

$$z1 := 2\sqrt{x}\arctan(\sqrt{x}) - \ln(1 + x)$$

z2:=simplify(diff(z1,x));

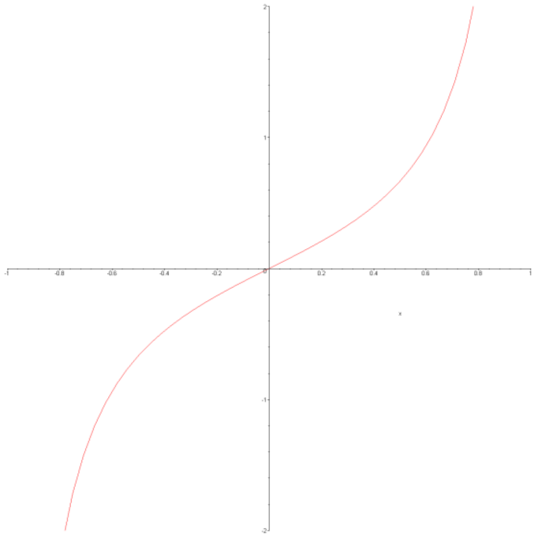
$$z2 := \frac{\arctan(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$$

z:=int(y,x);

$$z := -\frac{1}{6}\ln(x^2 + 1) + \frac{1}{6}\ln(x^2 - 2)$$

plot(x/(1-x^2),x=-1..1,-2..2);

Пределы по **x** указаны как **x=-1..1,** а пределы по **y** указаны без написания **y,** то есть просто **-2..2**.

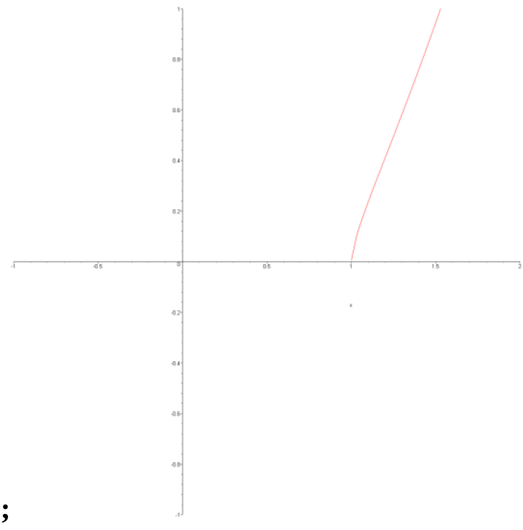


Особый интерес представляют функции такого вида:

y:=x*(x-1)^(2/3);

$$y := x\,(x-1)^{(2/3)}$$

График этой функции с оператором **plot** выглядит усечённым



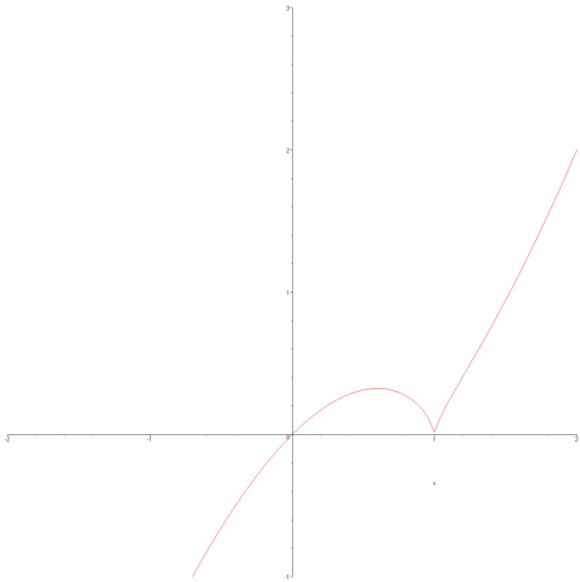
plot(y,x=-1..2,-1..1);

Для полного решения задания функцию **у** нужно представить в виде

y1:=x*((x-1)^2)^(1/3);

$$y1 := x\left((x-1)^2\right)^{(1/3)}$$

plot(y1,x=-1..2,-1..2);



Часто возникает задача о нахождении площади фигуры, ограниченной линиями. Нужно при этом сделать чертёж. Например,

Y=x^2-6*x+7, y=x+1

Задача решается так: задаются уравнения кривых

y1:=x^2-6*x+7;y2:=x+1;

$$y1 := x^2 - 6\,x + 7$$

$$y2 := x + 1$$

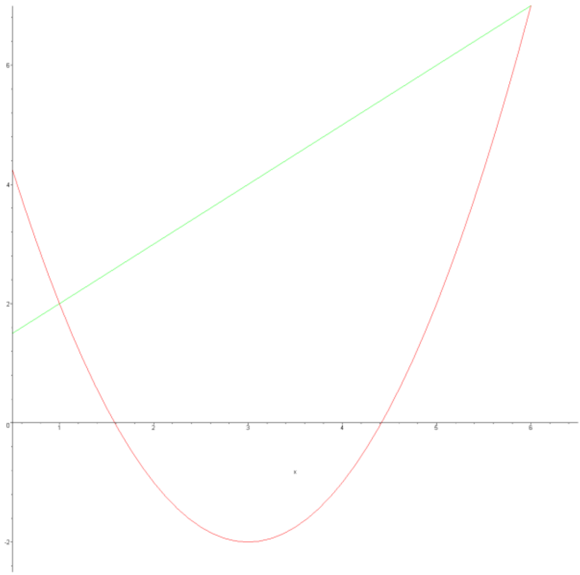
Приравнивая ординаты, находим абсциссы точек пересечения кривых с помощью оператора **solve.**

solve(y1=y2,x);

$x\ 1 = 1,\ \ x2 = 6$

Графики построим с помощью оператора **plot**

plot([y1,y2],x=0.5..6.5,-2.5..7);



Площадь найдём с помощью одномерного интеграла

S:=int(y2-y1,x=1.6);

или двойного

S:=int(int(1,y=y1..y2),x=1..6);

$$S := \frac{125}{6}$$

Перейдём теперь к исследованию функций одного или двух переменных на экстремум

Исследование функций на экстремум осуществляется одним оператором **extrema.** Можно начать с функции одного переменного

y:=-x^2*(x-2)^(2/5);

$$y := -x^2\,(x-2)^{(2/5)}$$

z:=extrema(y,{},x,'S');S;

$$z := \{\min\left(0, -\frac{25\,(-1)^{(2/5)}\,3^{(3/5)}}{27}\right), \max\left(0, -\frac{25\,(-1)^{(2/5)}\,3^{(3/5)}}{27}\right)\}$$

$$\{\{x=0\}, \{x=\frac{5}{3}\}\}$$

z1:=z[1];z2:=z[2];

$$z1 := \min\left(0, -\frac{25\,(-1)^{(2/5)}\,3^{(3/5)}}{27}\right)$$

$$z2 := \max\left(0, -\frac{25\,(-1)^{(2/5)}\,3^{(3/5)}}{27}\right)$$

В случае двух переменных – алгоритм тот же самый: например,

z= 2* x^3+x*y^2+5*x^2+y^2.

z1:=extrema(2*x^3+x*y^2+5*x^2+y^2,{},{x,y},'s');s;

$$z1 := \{0, \frac{125}{27}\}$$

$$\{\{y=0, x=0\}, \{y=0, x=\frac{-5}{3}\}, \{x=-1, y=2\}, \{x=-1, y=-2\}\}$$

Можно решать эту задачу более подробно с выполнением всех промежуточных действий

```
z2:=2*x^3+x*y^2+5*x^2+y^2;
```

$$z2 := 2\,x^3 + x\,y^2 + 5\,x^2 + y^2$$

```
z3:=extrema(z2,{},{x,y},'s');s;
```

$$z3 := \{0, \frac{125}{27}\}$$

$$\{\{y = 0, x = 0\}, \{x = -1, y = 2\}, \{x = -1, y = -2\}, \{y = 0, x = \frac{-5}{3}\}\}$$

```
z4:=subs(x=-1,y=-2,z2);
```

$$z4 := 3$$

```
z5:=subs(x=-5/3,y=0,z2);
```

$$z5 := \frac{125}{27}$$

```
z6:=subs(x=-1,y=2,z2);
```

Уже ясно, какие точки экстремума функции **z = f(x,y)**

ПРИМЕР 21. Аналогично проводятся операции с решениями дифференциальных уравнений, решением задачи Коши для них, нахождения и вычисления неопределённых и определённых интегралов.

Начнём с дифференциальных уравнений первого порядка:

x* dy(x)/dx+ y(x)= y(x)^2

```
dsolve(x*diff(y(x),x)+y(x)=y(x)^2,{y(x)});
```

$$y(x) = \frac{1}{1 + x\,\_C1}$$

dy(x)/dx - y(x)*tg(x) = y(x)^2

dsolve(diff(y(x),x)-y(x)*tan(x)=sec(x),{y(x)});

$$y(x) = \frac{x + \_C1}{\cos(x)}$$

Перейдём к общему решению дифференциального уравнения второго порядка

dsolve(diff(y(x),x$2)-2*diff(y(x),x)=exp(x)*(x^2+x-3),{y(x)});

$$y(x) = -\mathbf{e}^{x}\, x + \mathbf{e}^{x} - \mathbf{e}^{x}\, x^{2} + \frac{1}{2}\,\mathbf{e}^{(2\,x)}\, \_C1 + \_C2$$

На примере одного дифференциального уравнения второго порядка покажем общее решения и решение для него задачи Коши.

dsolve({diff(y(x),x$2)-4*diff(y(x),x)+4*y(x)=2*exp(x)},{y(x)});

$$\{ y(x) = \mathbf{e}^{(2\,x)}\, \_C2 + \mathbf{e}^{(2\,x)}\, x\, \_C1 + 2\,\mathbf{e}^{x} \}$$

\> **dsolve({diff(y(x),x$2)-4*diff(y(x),x)+4*y(x)=2*exp(x),y(0)=-2,D(y)(0)=-2},{y(x)});**

$$y(x) = -4\,\mathbf{e}^{(2\,x)} + 4\,\mathbf{e}^{(2\,x)}\, x + 2\,\mathbf{e}^{x}$$

ПРИМЕР 22. Неопределённые и определённые интегралы, как уже было показано выше, находятся по этому же простому алгоритму.

t=simplify(ln(1+x^2+y^2));

$$t = \ln(1 + R^{2})$$

z3:=int(int(t,t=0..sqrt(R^2-x^2)),phi=0..Pi);

$$z3 := \frac{\pi\, R^{2}}{4}$$

t=simplify(ln(1+x^2+y^2));

$$t = \ln(1 + x^{2} + y^{2})$$

z3:=int(int(t,x),y);

$z3 := t\,x\,y$

ПРИМЕР 23. Наконец, перейдём к криволинейным интегралам первого и второго типа.

Пример. Вычислить криволинейный интеграл **∫ x/y ds** ,где S – дуга параболы **y^2=2*x**, лежащая между точками **(1, √2)** и **(2,2)** Решение простое: **L=∫√(1+f(x)^2)dx** на Maple

y2:=sqrt(2*x);

$y2 := \sqrt{2}\,\sqrt{x}$

s:=sqrt(1+diff(y2,x)^2);

$$s := \frac{\sqrt{4+\frac{2}{x}}}{2}$$

L:=int(x/y2*s,x=1..2);

$$L := -\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{5\sqrt{5}}{6}$$

Или другое решение

x1:=y^2/2;

$$x1 := \frac{y^2}{2}$$

s1:=sqrt(1+diff(x1,y)^2);

$$s1 := \sqrt{1+y^2}$$

L2:=int(x1/y*s1,y=sqrt(2)..2);

$$L2 := -\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{5\sqrt{5}}{6}$$

ПРИМЕР 24. Кратные интегралы появляются, например, из задачи определения объём тела, ограниченного поверхностями. Например, такими: z=x^2+y^2, z=0, x=0, y=0, x+y=1.

v:=int(int(int(1,z=0..(x^2+y^2)),y=0..(1-x)),x=0..1);

$$v := \frac{1}{6}$$

Этот же объём можно найти и с помощью двойного интеграла

v1:=int(int(x^2+y^2,y=0..1-x),x=0..1);

$$v1 := \frac{1}{6}$$

ПРИМЕР 25. С помощью тройного интеграла представление решения (пример 24) более наглядно, так как
V=∭ 1dxdydz

В разделе «Физическая геодезия» рассматривается потенциал силы тяжести, как сумма потенциала притяжения и центробежного потенциала: **U+Q**. В развёрнутом виде потенциал притяжения **U(r,ϕ,λ)** равен

$$U = \frac{Gm}{r}\left[\, 1 + \sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{a}{r}\right)^{n}\sum_{k=0}^{n}\left(C_{nk}\cos k\lambda + S_{nk}\sin k\lambda\right) P_{nk}(\sin\Phi)\right]$$

,

где **G** - гравитационная постоянная, **m** - масса планеты, **a** - экваториальный радиус планеты, **φ** , **λ** - сферические координаты частицы, $\mathbf{P_{nk}}$- присоединенные функции Лежандра (при **k** > 0), P_n- полиномы Лежандра (при k = 0), $\mathbf{C_{nk}}$, $\mathbf{S}_{nk}$ - коэффициенты тессеральных гармоник разложения потенциала,
$\mathbf{J_n}$ **=** **-** $\mathbf{C_{n0}}$ - коэффициенты зональных гармоник разложения потенциала **W**.
W=GM/r{1+ΣΣ(a/r)^2×(Cnm×cos(mλ)+Snm×sin(mλ)))×Pnm(sin(φ))}+ω^2×r^2×cos(φ)^2/2,

Здесь **GM** – гравитационный параметр (произведение массы планеты- Земли на гравитационную постоянную), определяющий **WGS-84**, равен 3.986004418∗10^5 км^3/с^2 . **а** – большая полуось эллипсоида, равная 6378137 м. **Cnm, Snm** - стоксовы постоянные гравитационного поля. **r,φ ,λ** - сферические координаты точки, **ω** - углая скорость вращения планеты,

ПРИМЕР 26.

Вычисление **(a/r)^2∗ (Cnm×cos(mλ+Snm×sin(mλ)** для заданной точки на Maple осуществляется просто.Значительно труднее с вычислениями полиномов Лежандра, но и здесь поможет оператор **LegendreP(n,m,x).**

LegendreP (n,m,x):

P20:=simplify(LegendreP(2,0,sin(phi)),'LegendreP');

$$P20 := -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\sin(\phi)^2$$

P21:=simplify(LegendreP(2,1,sin(phi)),'LegendreP');

$$P21 := 3\sqrt{\sin(\phi)-1}\,\sqrt{\sin(\phi)+1}\,\sin(\phi)$$

P22:=simplify(LegendreP(2, 2,sin(phi)),'LegendreP');

$$P22 := 3\,(\sin(\phi)-1)\,(\sin(\phi)+1)$$

P30:=simplify(LegendreP(3,0,sin(phi)),'LegendreP');

$$P30 := \frac{5}{2}\sin(\phi)^3 - \frac{3}{2}\sin(\phi)$$

P31:=simplify(LegendreP(3,1,sin(phi)),'LegendreP');

$$P31 := \sqrt{\sin(\phi)-1}\,\sqrt{\sin(\phi)+1}\left(-\frac{3}{2} + \frac{15}{2}\sin(\phi)^2\right)$$

P32:=simplify(LegendreP(3,2,sin(phi)),'LegendreP');

$$P32 := 15\,(\sin(\phi)-1)\,(\sin(\phi)+1)\,\sin(\phi)$$

P33:=simplify(LegendreP(3,3,sin(phi)),'LegendreP');

$$P33 := 15\,(\sin(\phi) - 1)^{(3/2)}\,(\sin(\phi) + 1)^{(3/2)}$$

Можно использовать также и рекуррентные соотношения для многочленов Лежандра:

Pn+1(x)=(2n+1)/(n+1)xPn(x)-n/(n+1)Pn-1(x) или

(n+1)Pn+1(x)=(2n+1)xPn(x)-nPn-1(x)

и присоединённых полиномов Лежандра:

В качестве примера найдем полиномы **P20,P22, P30,P31, P32** и **P33** для широты Ижевска:

φ= 56°50′ 11″

mp=evalf(Pi/180);

$$pm := 0.01745329252$$

phi1:=(56+50/60+11/3600)*pm; широта Ижевска в радианах

$$\phi 1 := 0.9919821211$$

p20:=evalf(subs(phi=phi1,P20));

$$p20 := 0.5511345130$$

p21:=evalf(subs(phi=phi1,P21));

$$p21 := 1.373780193\,I$$

p22:=evalf(subs(phi=phi1,P22));

$$p22 := -0.8977309740$$

p30:=evalf(subs(phi=phi1,P30));

$$p30 := 0.210860834$$

p31:=evalf(subs(phi=phi1,P31));

$$p31 := 2.054471870\,I$$

p32:=evalf(subs(phi=phi1,P32));

$p32 := -3.757506430$

p33:=evalf(subs(phi=phi1,P33));

$p33 := -2.455436412I$

Для вычисления отношения **a/r** **r** находим как **r=√(M∗N)** для широты Ижевска.

R2:=evalf(subs(a=a1,e=e1,phi=phi0,R));

$R2 := 6386.721531$

Литература

Д.В. Клетеник. Сборник задач по аналитической геометрии

Любой задачник по курсу математического анализа.

В.Б.Уваров. Математический анализ. Учебное пособие для вузов. М. Высшая школа.1984

Б.П. Демидович Сборник задач и упражнений по математическому анализу. . М. Наука. 1973.

А. Д. Мышкис Лекции по высшей математике. М. Наука. 1969.

Дополнительная литература

С.В. Фролов, Р.Я.Шостак. Курс высшей математики.

Н.Я.. Виленкин и др. Задачник по курсу математического анализа. Часть 1-11

И.Н. Бронштейн, К.А. Семендяев. Справочник по математике

1. ГОСТ Р 52 572–2006. Географические информационные системы. Координатная основа. Общие требования. – М.: Госстандарт России, ИПК Изд-во стандартов, 2006. -15 с.
2. ГОСТ Р 51794-2008. Глобальные навигационные спутниковые системы. Системы координат. Методы преобразований координат определяемых точек. - М.: Стандартинформ. 2009. -16 с.
3. Руководство пользователя по выполнению работ в системе координат 1995 года (СК-95). Издание официальное. – М.: ЦНИИГАиК, 2004. –138 с.
4. Серапинас Б.Б. Геодезические основы карт: Учебное пособие. – М.: Изд-во Моск. Ун-та, 2001. -133 с.
5. Серапинас Б.Б. Практикум по геодезическим основам карт: Учебное пособие. – М.: Географический факультет МГУ, 2008. -146 с.
6. Бугаевский Л.М.Математическая Картография. - М. Злотоуст. 1998. - 400 с.
7. Яковлев Н.В. Высшая геодезия. М. Недра. 1989. - 445 с.

б) **дополнительная литература**:

1. Бовшин Н. А., Зубинский В.И., Остач О.М. Совместное уравнивание общегосударственных опорных геодезических сетей //Геодезия и картография.-1995.- № 8, С. 6-17.
2. Бойков В.В., Галазин В.Ф, Кораблев Е.Б. Применение

геодезических спутников для решения фундаментальных и прикладных задач // Геодезия и картография. 1993. N 11, С. 8-12.

3. Герасимов А.П. Уравнивание государственной геодезической сети. -М.: Картгеоцентр-Геоиздат. 1996. -216 с.

4. Герасимов А.П., Назаров В.Г. Местные системы координат. – М: ООО «Издательство «Проспект», 2010. – 64 с.

5. Дражнюк А.А., Лазарев С.А., Макаренко Н.Л., Демьянов Г.В., Зубинский В.И., Ефимов Г.А., Максимов В.Г. Завершение уравнивания ГГС и введение новой государственной