Нелинейная динамика. 2014. Т. 10. № 4. С. 427–438.
Полнотекстовая версия в свободном доступе
http://nd.ics.org.ru

УДК: 517.938, 514.83
MSC 2010: 37E30

Гетероклинические кривые диффеоморфизмов Морса – Смейла и сепараторы в магнитном поле плазмы

В. З. Гринес, Е. Я. Гуревич, Е. В. Жужома, С. Х. Зинина

В работе выделены свойства трехмерного фазового пространства и динамики диффеоморфизма Морса – Смейла на нем, гарантирующие существование по крайней мере одной гетероклинической кривой в блуждающем множестве. Этот результат применяется для решения проблемы о существовании сепараторов в магнитном поле плазмы.

Ключевые слова: топология фазового пространства, структурно устойчивые динамические системы на многообразиях, диффеоморфизмы Морса – Смейла, сепараторы в магнитном поле плазмы

Получено 24 ноября 2014 года
После доработки 04 декабря 2014 года

Работа выполнена при финансовой поддержке грантов РФФИ № 13-01-12452-офи-м, 12-01-00672-а и РНФ № 14-11-00446.

Гринес Вячеслав Зигмундович
vgrines@yandex.ru
Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского
603950, г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, д. 23

Гуревич Елена Яковлевна
egurevich@hse.ru
Жужома Евгений Викторович
ezhuzhoma@hse.ru
Национальный исследовательский университет Высшая школа экономики
603155, г. Нижний Новгород, ул. Большая Печерская, д. 25/12

Зинина Светлана Халиловна
kapkaevasvetlana@yandex.ru
Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарева
430005, г. Саранск, ул. Большевистская, д. 68

Введение и формулировка результатов

Диффеоморфизм $f\colon M^n \to M^n$ связного замкнутого гладкого многообразия M^n размерности n называется *диффеоморфизмом Морса–Смейла*, если его неблуждающее множество Ω_f конечно и состоит только из гиперболических периодических точек, и для любых различных седловых периодических точек p, $q \in \Omega_f$ инвариантные многообразия W^s_p, W^u_q либо не пересекаются, либо пересекаются трансверсально.

С. Смейл в работе [17] (Theorem A) показал, что градиентный поток функции Морса на произвольном многообразии M^n может быть сколь угодно близко аппроксимирован (в C^1-топологии) потоком Морса–Смейла, что доказывает существование диффеоморфизмов Морса–Смейла на любом многообразии (например, являющихся сдвигами на единицу времени вдоль траекторий потока Морса–Смейла).

Обозначим класс диффеоморфизмов Морса–Смейла на трехмерном многообразии M^3 через $MS(M^3)$.

Пусть $f \in MS(M^3)$. Непустое пересечение $W^s_p \cap W^u_q$, где p, q — различные седловые точки диффеоморфизма f, называется *гетероклиническим*, при этом в случае $\dim(W^s_p \cap W^u_q) = 1$ компонента связности пересечения $W^s_p \cap W^u_q$ называется *гетероклинической кривой*, а в случае $\dim(W^s_p \cap W^u_q) = 0$ любая точка пересечения $W^s_p \cap W^u_q$ называется *гетероклинической точкой*. Диффеоморфизм $f \in MS(M^3)$ называется *градиентно-подобным*, если из условия $W^s_p \cap W^u_q \neq \varnothing$ следует, что размерность множества W^u_p меньше размерности множества W^u_q. Это условие означает, что диффеоморфизм $f \in MS(M^3)$ является градиентно-подобным тогда и только тогда, когда его неблуждающее множество не содержит гетероклинических точек.

Диффеоморфизмы Морса–Смейла обнаруживают замечательную взаимосвязь между динамикой и топологией несущего многообразия. Так, в работе [3] показано, что если сохраняющий ориентацию диффеоморфизм $f \in MS(M^3)$ на ориентируемом многообразии M^3 не имеет гетероклинических кривых, то многообразие M^3 диффеоморфно либо сфере S^3, либо связной сумме многообразий $S^2 \times S^1$ (см. утверждение 6). Отсюда, в частности, следует, что если фазовое пространство диффеоморфизма Морса–Смейла есть трехмерный тор, то его блуждающее множество необходимо содержит гетероклинические кривые. В работе [6] для градиентно-подобных диффеоморфизмов с тривиально вложенными сепаратрисами на ориентируемых 3-многообразиях установлены соотношения между структурой множества неблуждающих орбит и разложением Хегора несущего многообразия.

В настоящей работе получены достаточные условия, при выполнении которых несущее ориентируемое трехмерное многообразие диффеоморфизма Морса–Смейла является локально-тривиальным расслоением над окружностью (что означает наличие по крайней мере одной циклической фазовой переменной). Простейшим примером таких многообразий является прямое произведение $S_g \times c$ некоторой поверхности S_g рода $g \geqslant 0$ и окружности c. Все рассматриваемые в работе многообразия описываются следующей конструкцией. Пусть $\tau\colon S_g \to S_g$ — некоторый гомеоморфизм. Обозначим через $M^3_{g,\tau}$ фактор-пространство прямого произведения $S_g \times [0,1]/_\sim$ по отношению эквивалентности $(z,1) \sim (\tau(z),0)$.

Для диффеоморфизма $f \in MS(M^3)$ обозначим через Ω^i_f множество всех периодических точек, размерность неустойчивого многообразия которых равна $i \in \{0,1,2,3\}$, и положим $\Sigma_f = \Omega^1_f \cup \Omega^2_f$.

Обозначим через $\Phi(M^3)$ класс сохраняющих ориентацию диффеоморфизмов Морса–Смейла на ориентируемом многообразии M^3, такой, что для произвольного диффеоморфизма $f \in \Phi(M^3)$ множество седловых периодических точек представляется как объединение двух подмножеств $\Sigma_f = \Sigma_a \cup \Sigma_r$ и

- каждая компонента связности множеств $\mathcal{A} = W^u_{\Sigma_a} \cup \Omega^0_f$, $\mathcal{R} = W^s_{\Sigma_r} \cup \Omega^3_f$ является ручно вложенной ориентируемой поверхностью[1].

Примеры фазовых портретов диффеоморфизмов из класса $\Phi(M^3)$ приведены на рисунке 1. Несущее многообразие в обоих примерах диффеоморфно прямому произведению сферы на окружность, при этом на рисунке изображена развертка этого многообразия, разрезанного по двумерной сфере R. На рисунке справа штрихпунктиром выделены гетероклинические кривые.

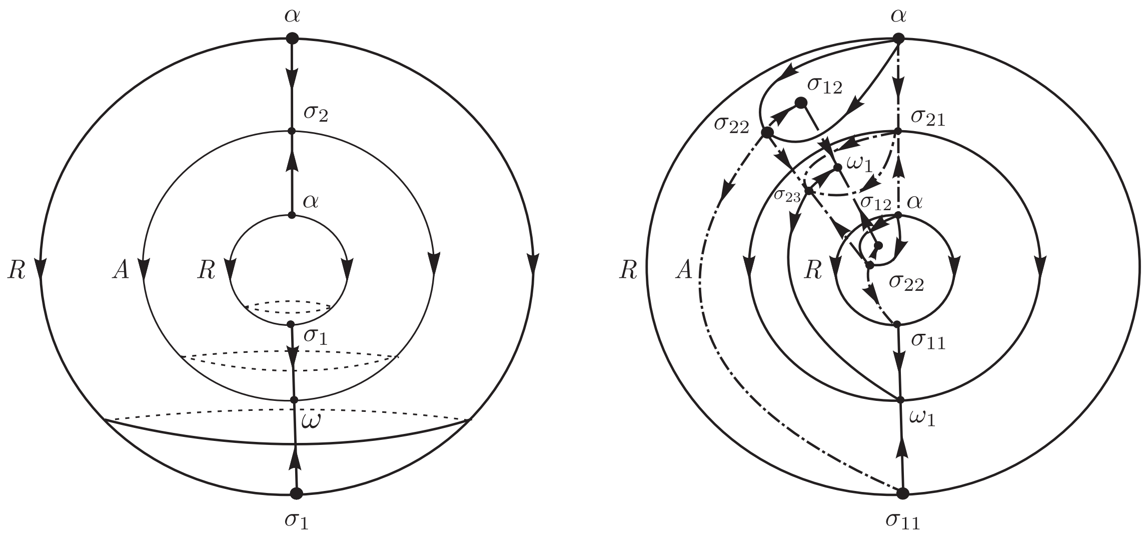

Рис. 1. Примеры фазовых портретов диффеоморфизмов из класса $\Phi(M^3)$.

Напомним, что замкнутое инвариантное множество A называется *аттрактором* диффеоморфизма $f\colon M^3 \to M^3$, если оно имеет компактную окрестность U_A, такую, что $f(U_A) \subset \operatorname{int} U_A$ и $A = \bigcap\limits_{k\geqslant 0} f^k(U_A)$. Окрестность U_A при этом называется *захватывающей*. Множество R называется *репеллером* диффеоморфизма f, если оно является аттрактором для диффеоморфизма f^{-1}.

Лемма 1. *Множества $\mathcal{A}$, $\mathcal{R}$ являются, соответственно, аттрактором и репеллером диффеоморфизма $f \in \Phi(M^3)$. Каждая компонента связности V множества $M^3 \setminus (\mathcal{A} \cup \mathcal{R})$ содержит в своем замыкании ровно по одной связной компоненте множеств $\mathcal{A}$, $\mathcal{R}$.*

Теорема 1. *Пусть $f \in \Phi(M^3)$. Тогда существует целое число $g_f \geqslant 0$ и гомеоморфизм $\tau_f\colon S_{g_f} \to S_{g_f}$, такие, что*

1) *любая компонента связности множества $\mathcal{A} \cup \mathcal{R}$ гомеоморфна поверхности S_{g_f},*

2) *замыкание любой компоненты связности V множества $M^3 \setminus \mathcal{A} \cup \mathcal{R}$ гомеоморфно $S_{g_f} \times [0,1]$,*

3) *M^3 диффеоморфно $M^3_{g_f,\tau_f}$.*

[1]Поверхностью называется замкнутое двумерное многообразие.

Следствие 1. *Пусть $f \in \Phi(M^3)$ и выполняется одно из следующих условий:*

1) $g_f \neq 0$,

2) $g_f = 0$ *и существует компонента связности* $K_0 \subset \mathcal{A} \cup \mathcal{R}$, *такая, что* $K_0 \cap \Omega_f$ *состоит более чем из двух точек.*

Тогда блуждающее множество f содержит по крайней мере одну гетероклиническую кривую.

В разделе 4 описывается подход, примененный впервые в работе [8] и позволяющий использовать следствие 1 для исследования динамики магнитного поля плазмы. Мы вводим понятие компактифицируемого движения, описывающего динамику рассматриваемых магнитных полей, и доказываем следующую теорему.

Теорема 2. *Пусть $f_0\colon \mathcal{M}^3_g \to f_0(\mathcal{M}^3_g)$ — компактифицируемое движение тела $\mathcal{M}^3_g \subset \mathbb{R}^3$, принадлежащего некоторой области плазмы с магнитным полем $\vec{\boldsymbol{B}}$. Если f_0 индуцирует диффеоморфизм $f \in \Phi(M^3)$, удовлетворяющий условиям следствия 1, то поле $\vec{\boldsymbol{B}}$ имеет гетероклинический сепаратор в $\mathcal{M}^3$.*

1. Аттрактор и репеллер диффеоморфизма $f \in \Phi(M^3)$

Этот раздел посвящен доказательству леммы 1. Покажем, что множество $\mathcal{A}$ является аттрактором диффеоморфизма f (переходом к диффеоморфизму f^{-1} аналогично доказывается, что $\mathcal{R}$ — репеллер).

Согласно [16], на множестве периодических орбит $\{\mathcal{O}_p, p \in \Omega_f\}$ диффеоморфизма $f \in MS(M^3)$ определено отношение (транзитивное) частичного порядка $\prec$: $\mathcal{O}_p \prec \mathcal{O}_q$ тогда и только тогда, когда $W^s_{\mathcal{O}_p} \cap W^u_{\mathcal{O}_q} \neq \varnothing$. В силу трансверсальности пересечения $W^s_{\mathcal{O}_p} \cap W^u_{\mathcal{O}_q}$ условие $W^s_{\mathcal{O}_p} \cap W^u_{\mathcal{O}_q} \neq \varnothing$ влечет неравенство $n - \dim W^u_{\mathcal{O}_p} + \dim W^u_{\mathcal{O}_q} \geqslant n$, откуда $\dim W^u_{\mathcal{O}_p} \leqslant \dim W^u_{\mathcal{O}_q}$. Это позволяет ввести на множестве периодических орбит, принадлежащих множеству $\mathcal{A}$, отношение $\mathcal{O}_p \preceq \mathcal{O}_q$, такое, что

1) если $\dim W^u_{\mathcal{O}_p} \leqslant \dim W^u_{\mathcal{O}_q}$, то $\mathcal{O}_p \preceq \mathcal{O}_q$,

2) если $\mathcal{O}_p \prec \mathcal{O}_q$, то $\mathcal{O}_p \preceq \mathcal{O}_q$.

Выберем нумерацию периодических орбит, принадлежащих $\mathcal{A}$, согласованную с введенным отношением порядка: пусть $\mathcal{O}_1 \preceq \mathcal{O}_2 \preceq \ldots \preceq \mathcal{O}_k$ — все периодические орбиты диффеоморфизма f, принадлежащие $\mathcal{A}$.

Из определения класса $\Phi(M^3)$ следует, что для любых двух орбит $\mathcal{O}_i \preceq \mathcal{O}_j$ не существует точки $r \in \Omega_f \cap \mathcal{R}$, такой, что $\mathcal{O}_i \preceq \mathcal{O}_r \preceq \mathcal{O}_j$. Отсюда, в силу работы [9], следует, что множество $\mathcal{A}$ является аттрактором.

Для связности изложения приведем здесь схему построения захватывающей окрестности для $\mathcal{A}$ (см. также доказательство теоремы 2.2.2. в книге [5]). Будем обозначать через m_i период орбиты $\mathcal{O}_i$, через q_i — размерность многообразия $W^u_{\mathcal{O}_i}$.

При построении используется следующее вспомогательное утверждение (см. лемму 2.2.1 в книге [5]).

Утверждение 1. *Для любой периодической орбиты $\mathcal{O}_p$ диффеоморфизма Морса – Смейла $f \in MS(M^n)$ существует окрестность U_p, в которой определена локальная функция Морса – Ляпунова $\psi_p\colon U_p \to \mathbb{R}$, обладающая следующими свойствами:*

1) *$\psi_p(f(x)) < \psi_p(x)$ для любого $x \in (f^{-1}(U_p) \setminus \mathcal{O}_p)$ и $\psi_p(f(x)) = \psi_p(x) = 0$ для $x \in \mathcal{O}_p$,*

2) *множество критических точек функции ψ_p невырожденно и совпадает с орбитой $\mathcal{O}_p$,*

3) *в окрестности произвольной точки $r \in \mathcal{O}_p$ существуют локальные координаты (координаты Морса) $x_1, \ldots, x_n$, такие, в которых функция ψ_i имеет вид $\psi(x_1, \ldots, x_n) = \psi(p) - x_1^2 - \ldots - x_{q_p}^2 + x_{q_p+1}^2 + \ldots + x_n^2$, где $q_p = \dim W^u_{\mathcal{O}_p}$, и $(W^u_r \cap U_p) \subset Ox_1 \ldots x_{q_p}$, $(W^s_r \cap U_p) \subset Ox_{q_p+1}$.*

Положим $\mathcal{A}^l = \bigcup\limits_{i=1}^{l} W^u_{\mathcal{O}_i}$, $l \in \{1, \ldots, k\}$. Покажем индукцией по l, что множество $\mathcal{A}^l$ является аттрактором (построив захватывающую окрестность M_l). Так как $\mathcal{A} = \bigcup\limits_{i=1}^{k} W^u_{\mathcal{O}_i}$, то отсюда будет следовать первое утверждение леммы 1.

База индукции: $l = 1$**.** Из определения порядка $\preceq$ следует, что $\mathcal{O}_1$ — стоковая периодическая орбита и, следовательно, $\mathcal{A}^l = W^u_{\mathcal{O}_1} = \mathcal{O}_1$. Согласно лемме 1, существует окрестность $U_1 \subset W^s_{\mathcal{O}_1}$ орбиты $\mathcal{O}_1$ и локальная функция Морса – Ляпунова $\psi_1\colon U_1 \to \mathbb{R}$, имеющая вид $\psi_1(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ в локальных координатах x_1, x_2, x_3 в окрестности точки $\omega \in \mathcal{O}_1$. Тогда существует значение $\varepsilon_1 > 0$, такое, что множество $M_1 = \psi_1^{-1}([0, \varepsilon_1])$ является объединением m_1 экземпляров шаров, которое в силу пункта 1) утверждения 1 обладает свойством $f(M_1) \subset \operatorname{int} M_1$ и $A^1 = \bigcap\limits_{i \in \mathbb{N}} f^{im_1} M_1$.

Шаг индукции. Предположим, что мы построили захватывающую окрестность M_{l-1} для $\mathcal{A}^{l-1}$. Построим захватывающую окрестность M_l. Если $q_l = 0$, положим $M_l = M_{l-1} + \widetilde{M}_l$, где $\widetilde{M}_l$ — окрестность орбиты $\mathcal{O}_l$, построенная аналогично случаю $l = 1$.

Рассмотрим случай $q_l > 0$. Не уменьшая общности, можно считать, что $S_{l-1} = \partial M_{l-1}$ трансверсально пересекает $W^u_{\mathcal{O}_l}$. Так как $\overline{W^u}_{\mathcal{O}_l} \setminus W^u_{\mathcal{O}_l} = \mathcal{A}^{l-1}$, то существует окрестность N^u_l множества $W^u_{\mathcal{O}_l}$, такая, что пересечение $S_{l-1} \cap \partial N^u_l$ состоит из конечного множества компонент.

Согласно лемме 1, существует окрестность $U_l \subset (N^u_l \cup W^s_{\mathcal{O}_l})$ множества $\mathcal{O}_l$ и функция $\psi_l\colon U_l \to \mathbb{R}$, имеющая вид $\psi_l(x_1, x_2, x_3) = -x_1^2 + (-1)^{q_l+1} x_2^2 + x_3^2$ в локальных координатах x_1, x_2, x_3 в окрестности точки $p \in \mathcal{O}_l$. Тогда по λ-лемме существуют значение $\varepsilon_l > 0$ и натуральное число k, такие, что каждое из множеств $G_l = \psi_l^{-1}(\varepsilon_l)$ и $f(G_l)$ пересекает $f^{-k}(S_{l-1})$ по конечному множеству компонент связности.

Положим $H_l = \psi_l^{-1}((-\infty, \varepsilon_l])$ и $M_l = f^{-k}(M_{l-1}) \cup H_l$. Тогда $f(H_l) \setminus \operatorname{int} f^{-k}(M_{l-1}) \subset \operatorname{int} M_l$. Проверим, что $f(M_l) \subset \operatorname{int} M_l$. Действительно, это верно для любой точки $x \in f^{-k}(M_{l-1})$, так как $f(M_{l-1}) \subset \operatorname{int} M_{l-1}$ по предположению индукции. Это также верно для любой точки $x \in (H_l \setminus f^{-k}(M_{l-1}))$, так как $f(H_l) \setminus \operatorname{int} f^{-k}(M_{l-1}) \subset \operatorname{int} M_l$ в силу пункта 1) утверждения 1.

По построению и предположению индукции, имеем $\mathcal{A}^l \subset \operatorname{int} M_l \subset \bigcup\limits_{j=1}^{l} W^s_{\mathcal{O}_j}$. Сгладив углы многообразия M_l, мы получим гладкое многообразие, являющееся искомой захватывающей окрестностью аттрактора $\mathcal{A}^l$.

Докажем второй пункт леммы. Покажем, что каждая компонента связности V множества $M^3 \setminus \{\mathcal{A} \cup \mathcal{R}\}$ содержит в своем замыкании ровно по одной связной компоненте множеств $\mathcal{A}$, $\mathcal{R}$. Предположим, что $\overline{V}$ содержит компоненты $A_1, \ldots, A_k \subset \mathcal{A}$, и положим $V_j = f^{jm_f}(V)$, $U = \bigcap\limits_{j \in \mathbb{N}} V_j$, где m_f — такое натуральное число, что $f^{m_f}(\overline{V}) = \overline{V}$. Так как V принадлежит устойчивому многообразию множества $\bigcup\limits_{i=1}^{k} A_i$, то $U = \bigcup\limits_{i=1}^{k} A_i$. С другой стороны, U лежит в пересечении вложеных связных множеств $\{V_j\}$, а следовательно, связно, что противоречит предположению.

2. Структура несущего многообразия диффеморфизмов $\Phi(M^3)$

Для доказательства теоремы 1 приведем необходимые вспомогательные утверждения. Следующие два утверждения доказаны в работе [7].

Утверждение 2. *Пусть Q, P — связные области в M^3, граница ∂P области P состоит из двух компонент связности B_1, B_2, таких, что $B_1 \subset Q$, $B_2 \cap (Q \cup \partial Q) = \varnothing$, и B_1 ограничивает область $Q_1 \subset Q$. Тогда $\partial Q \subset P$.*

Пусть S_g — ориентируемая поверхность рода $g \geqslant 0$, ручно вложенная в связное ориентируемое многообразие N^3 с краем, состоящим из двух компонент B_0, B_1. Будем говорить, что S_g *разделяет* B_0 *и* B_1, если B_0, B_1 лежат в разных компонентах связности множества $N^3 \setminus S_g$.

Следствие 2. *S_g не разделяет B_0 и B_1 тогда и только тогда, когда S_g ограничивает в N^3 область.*

Утверждение 3. *Пусть $h_1 \colon S_g \times [0,1] \to N_1$ и $h_2 \colon S_g \times [0,1] \to N_2$ — гомеоморфизмы. Тогда*

a) *если $N_1 \cap N_2 = h_1(S_g \times \{1\}) = h_2(S_g \times \{0\})$, то существует гомеоморфизм $H \colon S_g \times [0,1] \to P_1 \cup P_2$,*

b) *если $N_1 \cap N_2 = h_1(S_g \times \{0,1\}) = h_2(S_g \times \{0,1\})$, то существует непрерывное отображение $H \colon Q \times [0,1] \to P_1 \cup P_2$, такое, что ограничения $H|_{S_g \times (0,1)}$, $H|_{S_g \times \{0\}}$ и $H|_{S_g \times \{1\}}$ являются гомеоморфизмами.*

Следующие важные утверждения доказаны в работе [6] (см. теоремы 3.1 и 3.3).[2]

Утверждение 4. *Пусть S_g — ориентируемая поверхность рода $g \geqslant 0$, ручно вложенная в многообразие $P^3_{g'}$, гомеоморное прямому произведению $S_{g'} \times [0,1]$. Тогда M_g не разделяет компоненты связности края $P^3_{g'}$.*

Утверждение 5. *Пусть многообразие P^3_g гомеоморфно прямому произведению $S_g \times [0,1]$, S_g — ориентируемая поверхность рода g, ручно вложенная в P^3_g и не ограничивающая в нем область. Тогда M_g делит P^3_g на две компоненты связности, гомеоморфные $S_g \times [0,1]$.*

[2]В работе [6] все вложения предполагаются гладкими, но результаты остаются верными и для ручных вложений.

Доказательство теоремы 1.

Не уменьшая общности, предположим, что $m_f = 1$ (в противном случае перейдем к рассмотрению диффеоморфизма f^{m_f}).

Пусть V — компонента связности множества $M^3 \setminus (\mathcal{A} \cup \mathcal{R})$, $A \subset \mathcal{A}, R \subset \mathcal{R}$ — компоненты связности границы ∂V множества V. Так как A, R ручно вложенные поверхности, то существуют окрестности W_a, W_r множеств A, B в M^3 и гомеоморфизмы $h_a\colon S_{g_a} \times [-1,1] \to W_a$, $h_r\colon S_{g_r} \times [-1,1] \to W_r$, такие, что $h_r(S_{g_a} \times \{0\}) = A$, $h_r(S_{g_r} \times \{0\}) = R$. Не уменьшая общности, предположим, что $g_r < g_a$ (в противном случае перейдем к рассмотрению отображения f^{-1}). Положим $N_\delta = h_\delta(S_{g_\delta} \times [0,1])$, $B_\delta = h_\delta(S_{g_\delta} \times \{1\})$ и, не уменьшая общности, предположим, что $N_\delta \subset A \cup V \cup R$, $\delta \in \{a, r\}$.

Покажем, что A и R гомеоморфны. Для этого вначале отметим, что существует натуральное число n^*, такое, что $B_r^* = f^{n^*}(B_r)$ принадлежит $\operatorname{int} N_a$. Действительно, любая точка $p \in B_r$ принадлежит W_A^s, поэтому существуют замкнутая окрестность $U(p) \subset B_r$ точки p и натуральное число $n(p)$, такое, что $f^n(U(p)) \subset \operatorname{int} N_a$ для всех $n > n(p)$. Из компактности поверхности B_r следует, что существует конечное подпокрытие покрытия $\{U(p)\}_{p \in B_r}$, тогда существует натуральное число n^*, такое, что $f^n(B_r) \subset \operatorname{int} N_a$ для любого $n \geqslant n^*$.

Покажем, что B_r^* делит A и B_a в N_a. Предположим противное. Тогда, в силу утверждения 2, B_r^* ограничивает в N_a область. Положим $P = N_a$, $Q = f^{n_*}(N_r)$. Из утверждения 2 следует, что тогда $A \subset N_r$, что противоречит инвариантности A. Таким образом, B_r^* делит N_r. Тогда, в силу утверждения 4, получаем противоречие с предположением о том, что $g_a < g_r$. Отсюда $g_a \geqslant g_r$. Применив аналогичные аргументы к B_a, получим, что $g_r \geqslant g_r$, что доказывает равенство $g_a = g_r$. В силу произвольности выбора компонент A, R получаем, что все компоненты связности множества $\mathcal{A} \cup \mathcal{R}$ имеют один и тот же род g_f.

Покажем теперь, что замыкание $\overline{V}$ множества V гомеоморфно $S_{g_f} \times [0,1]$. Так как множество B_r^* из предыдущего абзаца не ограничивает область в N_a, то, в силу утверждения 5, оно делит N_a на две части, гомеоморфные $S_{g_f} \times [0,1]$. Обозначим через P_1 ту часть, которая ограничена A и B_r^*. Тогда $V = P_1 \cup f^{n_*}(N_r)$, и, в силу первого пункта утверждения 3, V гомеоморфно $S_{g_f} \times [0,1]$.

Докажем третье утверждение теоремы 1. Выберем произвольную компоненту связности $K \subset \mathcal{A} \cup \mathcal{R}$. Из утверждения 3 следует, что существует непрерывное отображение $H_f\colon S_{g_f} \times [0,1] \to M^3$, такое, что отображения $H_f|_{S_{g_f} \times (0,1)}\colon S_{g_f} \times (0,1) \to M^3 \setminus K$, $H_f|_{S_{g_f} \times \{0\}}\colon S_{g_f} \times \{0\} \to K$, $H_f|_{S_{g_f} \times \{1\}}\colon S_{g_f} \times \{1\} \to K$ являются гомеоморфизмами. Положим $H_f|_{S_{g_f} \times \{0\}} = H_{f,0}$ ($H_f|_{S_{g_f} \times \{1\}} = H_{f,1}$) и $\tau_f = H_{f,0}^{-1} H_{f,1}\colon S_{g_f} \to S_{g_f}$. Тогда, по построению, многообразие $M^3_{g_f, \tau_f}$ гомеоморфно многообразию M^3 при помощи гомеоморфизма $\widetilde{H}_f$, отображающего класс эквивалентности $[(z,t)]$ точки $(z,t) \in S_{g_f} \times [0,1]$ в точку $H_f(z,t)$. Доказательство закончено.

3. Существование гетероклинических кривых диффеоморфизмов из $\Phi(M^3)$

В этом разделе приводится доказательство следствия 1. Для случая $g_f > 0$ доказательство базируется на следующем утверждении из работы [3].

Утверждение 6. *Пусть блуждающее множество диффеомрфизма $f \in MS(M^3)$ не содержит гетероклинических кривых и Ω_f состоит из r_f седловых и l_f узловых точек. Тогда $\eta_f = \dfrac{r_f - l_f + 2}{2}$ является целым неотрицательным числом и справедливы следующие* *утверждения:*

1) *если* $\eta_f = 0$, *то* M^3 — 3-*сфера*,
2) *если* $\eta_f > 0$, *то* M^3 — *связная сумма* η_f *копий прямого произведения* $S_0 \times c$ *сферы* S_0 *на окружность* c.

Действительно, при $g_f \neq 0$ многообразие $M^3_{g_f,\tau_f}$ имеет универсальное накрытие, следовательно, является неприводимым (любая ручно вложенная сфера S_0 ограничивает шар в $M^3_{g_f,\tau_f}$). Связная сумма многообразий $S_0 \times c$ не является неприводимым многообразием, поэтому при $g_f \neq 0$ многообразие $M^3_{g_f,\tau_f}$ не гомеоморфно связной сумме многообразий $S_0 \times c$, и, следовательно, диффеоморфизм $f \in \Phi(M^3_{g_f,\tau_f})$ имеет по крайней мере одну гетероклиническую кривую.

Пусть теперь $g_f = 0$ и компонента $K_0 \subset \mathcal{A} \cup \mathcal{R}$ содержит более чем две периодические точки. Для определенности предположим, что $K_0 \subset \mathcal{A}$. Обозначим через m натуральное число, такое, что $f^m(K_0) = K_0$ и $f^m(p) = p$ для любой точки $p \in \Omega_f \cap K_0$. Множество неблуждающих точек Ω_{K_0} ограничения $f^m|_{K_0}$ диффеоморфизма f^m на K_0 совпадает с множеством $\Omega_f \cap K_0$. Из формулы Лефшеца следует, что имеются источник α_0 и седло σ_0 ограничения $f^m|_{K_0}$, такие, что сепаратриса $l \subset W^s_{\sigma_0}$ точки σ_0 принадлежит $W^u_{\alpha_0}$. Так как K_0 — атрркатор, то $\alpha_0 \in \Omega^2_f, \sigma_0 \subset \Omega^1_f$. Тогда l является гетероклинической кривой диффеоморфизма f.

4. Приложение: сепараторы в магнитном поле плазмы

Одним из основных аспектов магнитной гидродинамики (МГД) является взаимовлияние движущейся проводящей среды и ее магнитного поля (для краткости будем называть движущуюся проводящую среду плазмой). Это взаимное влияние отражено в следующем уравнении индукции $\dfrac{\partial\vec{\boldsymbol{H}}}{\partial t} = \operatorname{rot}\left[\vec{\boldsymbol{v}}\vec{\boldsymbol{H}}\right] + \eta\nabla^2\vec{\boldsymbol{H}}$, которое является одним из основных уравнений МГД. Здесь $\vec{\boldsymbol{H}}$ — напряженность магнитного поля, $\vec{\boldsymbol{v}}$ — скорость движения плазмы, η — магнитная вязкость, обратная магнитному числу Рейнольдса (основные определения и понятия МГД представлены в книгах [2, 11, 12] и обзоре [18]). Большое значение для развития теории и ее приложений имела теорема Альвена [1, 2] о «вмороженности» магнитных силовых линий в движущуюся идеально проводящую среду (силовые линии магнитного поля движутся так, как если бы они были вморожены в плазму). Как следствие, при несложных и коротких по времени движениях плазмы топологическая структура магнитного поля не меняется. Однако «вмороженность» силовых линий приводит к возможности появления областей, границы которых в некоторых точках пространства близки, а магнитные поля областей вблизи этих границ имеют различные направления. Это влечет образование особых, или нулевых, точек (точек, в которых магнитное поле обращается в нуль). В типичном случае собственные числа λ_1, λ_2 и λ_3 в нулевой точке векторного поля $\vec{\boldsymbol{H}}$ не равны нулю и удовлетворяют соотношению $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$, в силу равенства $\nabla \cdot \vec{\boldsymbol{H}} = 0$. С точки зрения теории динамических систем, нулевая точка является консервативным седлом с двумя одномерными и одной двумерной сепаратрисами. В физической литературе часто одномерную сепаратрису называют шипом, а двумерную — веерной поверхностью (см., например, [14, 15]). На рисунке 2a изображены силовые линии магнитного поля в окрестности седловой точки. Если силовая магнитная линия одномерной сепаратрисы направлена из нулевой точки, то все магнитные линии на сепаратрисной поверхности направлены к нулевой точке, и наоборот.

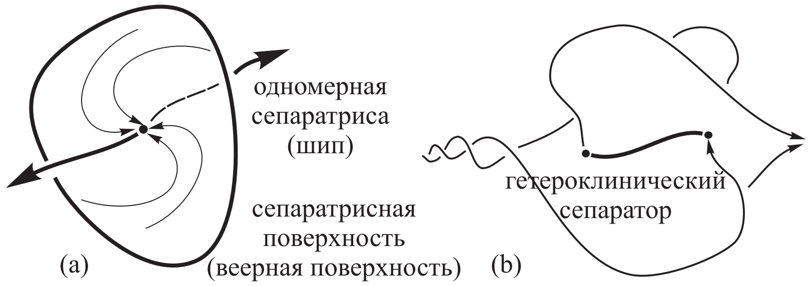

Рис. 2. Структура нулевой точки (a) и гетероклинический сепаратор (b).

В литературе по магнитной гидродинамике магнитное поле обычно представляется индукцией магнитного поля $\vec{\boldsymbol{B}}$, которая связана с $\vec{\boldsymbol{H}}$ соотношением $\vec{\boldsymbol{B}} = \mu\vec{\boldsymbol{H}}$, где μ — магнитная проницаемость среды.

Следуя [14, 15], будем называть магнитную линию, соединяющую две нулевые точки, *сепаратором.* Сепаратор будем называть *гетероклиническим*, если он является трансверсальным пересечением веерных поверхностей.

Топологическая структура магнитного поля определяется числом и типом нулевых точек, взаимным расположением шипов и веерных поверхностей, а также линиями трансверсального пересечения веерных поверхностей — гетероклиническими сепараторами. Эксперимент и наблюдения показывают, что эволюция структуры магнитного поля напоминает релаксационные процессы: сперва достаточно продолжительное время плазма эволюционирует спокойно, а затем быстро развивается перестройка магнитной конфигурации, сопровождаемая процессами перезамыкания[3] [10].

Таким образом, представляет интерес решение проблемы существования особых точек и сепараторов, а также количества сепараторов при заданном расположении особенностей магнитного поля. Объединение особенностей, шипов, веерных поверхностей и сепараторов называется иногда *скелетом* магнитного поля, так как их конфигурация определяет топологическую структуру поля. Ясно, что указанная проблема сперва должна рассматриваться при спокойном движении плазмы, когда число особенностей и сепараторов не меняется (то есть до перезамыкания). Для решения данной проблемы в плазме выделяется трехмерное тело специального вида, и рассматривается движение, при котором все граничные компоненты тела сдвигаются внутрь или наружу так, что после окончания движения все граничные компоненты «параллельны» исходным граничным компонентам (см. ниже точные определения). Тогда движение плазмы можно понимать как диффеоморфизм трехмерного тела. Поскольку в процессе движения топологическая структура магнитного поля, в силу постановки задачи, не меняется, то для простоты естественно предположить, что внутри выделенного тела скелет магнитного поля инвариантен относительно движения плазмы. Отметим, что мы не требуем, чтобы все точки скелета были неподвижны, но их движение внутри тела должно оставлять точки скелета на скелете. Мы также предполагаем, что нулевые точки являются гиперболическими точками не только для поля, но и для диффеоморфизма, описывающего движение плазмы. Заметим однако, что, согласно теореме Купки – Смейла, все периодические точки типичного диффеоморфизма компактного многообразия являются гиперболическими [13]. Таким образом, можно считать, что мы рассматриваем только класс типичных движений плазмы. Предложенный подход позволяет доопределить диффеоморфизм, описывающий движение плазмы, на некоторое замкнутое трехмерное многообразие

[3] Иногда вместо термина перезамыкание используют термин пересоединение [14, 15].

и таким образом применить методы и результаты теории динамических систем. При таком подходе теряется информация о структуре магнитного поля вне выделенного трехмерного тела, но, с другой стороны, мы получаем инструмент для исследования структуры поля в некоторой части пространства. Кроме этого, фазовый портрет динамической системы на полученном трехмерном многообразии дает представление о возможных реальных структурах магнитных полей. Отметим, что постановка и метод решения приводят к задачам качественной теории динамических систем, решение которых имеет самостоятельный интерес.

Пусть S_g, $S'_g \subset \mathbb{R}^3$ — гладко вложенные поверхности рода $g \geqslant 0$. Обозначим через N^3 компактное подмножество пространства $\mathbb{R}^3$, ограниченное поверхностями S_g, S'_g. Пусть $B^3_1, \ldots, B^3_k \subset \operatorname{int} N^3$ — шары с гладко вложенными границами $S_{0,1}, \ldots, S_{0,k} \subset \operatorname{int} N^3$, $k \geqslant 2$. Положим $\mathcal{M}^3_g = N^3 \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{k} \operatorname{int} B^3_k$.

Две гладкие поверхности S_g, $S'_g \subset \mathbb{R}^3$ будем называть *параллельными*, если эти поверхности ограничивают в $\mathbb{R}^3$ компактную область, гомеоморфную $S_g \times [0,1]$.

Пусть $\vec{\boldsymbol{B}}$ — магнитное поле в $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{M}^3_g$ — компактное множество, такое, что ограничение $\vec{\boldsymbol{B}}_0$ поля $\vec{\boldsymbol{B}}$ на множество $\mathcal{M}^3_g$ имеет по крайней мере одну нулевую точку внутри $\mathcal{M}^3_g$. Будем предполагать, что поле $\vec{\boldsymbol{B}}_0$ удовлетворяет следующим условиям:

1) Все нулевые точки поля $\vec{\boldsymbol{B}}_0$ являются гиперболическими. В силу компактности $\mathcal{M}^3_g$ из этого предположения следует, что $\vec{\boldsymbol{B}}_0$ имеет конечное число нулевых точек.
2) Сепаратрисы одной и той же нулевой точки поля $\vec{\boldsymbol{B}}_0$ не пересекаются.
3) Сепаратрисы различных нулевых точек поля $\vec{\boldsymbol{B}}_0$, имеющих разные размерности, не пересекаются, а двумерные сепаратрисы различных нулевых точек либо не пересекаются, либо пересекаются трансверсально.
4) Каждая сепаратриса l любой нулевой точки поля $\vec{\boldsymbol{B}}_0$ либо не пересекает, либо пересекает трансверсально границу $\partial\mathcal{M}^3_g$ множества $\mathcal{M}^3_g$.
5) Если $l \cap \partial\mathcal{M}^3_g$ непусто, то это пересечение состоит только из одной компоненты связности (точки, если $\dim l = 1$, или кривой, если $\dim l = 2$).

Динамика поля $\vec{\boldsymbol{B}}$ индуцирует отображение $f_0\colon \mathcal{M}^3_g \to \mathbb{R}^3$. Будем называть отображение f_0 *компактифицируемым*, если оно удовлетворяет следующим условиям:

a) f_0 является сохраняющим ориентацию диффеоморфизмом $\mathcal{M}^3_g$ на $f_0(\mathcal{M}^3_g)$, причем неблуждающее множество диффеоморфизма f_0 состоит из неподвижных гиперболических точек, которые совпадают с нулями магнитного поля $\vec{\boldsymbol{B}}_0$,
b) $\partial f_0(\mathcal{M}^3_g) \cap \partial\mathcal{M}^3_g = \varnothing$, при этом каждая граничная компонента $K \subset \partial\mathcal{M}^3_g$ параллельна $f_0(K)$,
c) имеется хотя бы одна сферическая граничная компонента, скажем $S_{0,1}$, такая, что $f_0(S_{0,1}) \subset \operatorname{int}\mathcal{M}^3_g$, и хотя бы одна сферическая граничная компонента, скажем $S_{0,2}$, такая, что $f_0(S_{0,1}) \subset \mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{M}^3_g$,
d) веерные поверхности и шипы нулей поля $\vec{\boldsymbol{B}}$ инвариантны относительно f_0, нули поля $\vec{\boldsymbol{B}}_0$ неподвижны относительно f_0, причем тип неподвижной точки диффеоморфизма f_0 совпадает с типом нуля поля $\vec{\boldsymbol{B}}_0$,
e) $f_0(S_g) \subset \operatorname{int}\mathcal{M}^3_g$, $f_0(S'_g) \subset \mathbb{R}^3 \setminus\ \mathcal{M}^3_g$.

Отметим, что мы не требуем трансверсального пересечения силовых линий магнитного поля $\vec{B}_0$ с граничными компонентами. Предложенная математическая модель с физической точки зрения означает, что мы рассматриваем движение плазмы за промежуток времени, в течение которого сохраняются особые точки с веерными поверхностями и шипами. Из приведенных свойств вытекает, что сепараторы (если они существуют) инвариантны относительно f_0 и их число (включая нуль) не меняется в течение наблюдаемого промежутка времени.

Из условий а)–е) следует, что существует компактное ориентируемое многообразие M^3, содержащее подмножество $\widetilde{\mathcal{M}}_g^3 \subset M^3$, диффеоморфное $\mathcal{M}_g^3$, и диффеоморфизм Морса – Смейла $f\colon M^3 \to M^3$, такой, что ограничение $f|_{\widetilde{\mathcal{M}}_g^3}$ топологически сопряжено с f_0 и $f|_{M^3\setminus\widetilde{\mathcal{M}}_g^3}$ не имеет гетероклинических кривых. Будем говорить, что движение f_0 индуцирует диффеоморфизм f. Тогда справедливость теоремы 2 вытекает из следствия 1.

Благодарности

Авторы выражают глубокую признательность С. В. Гонченко за внимание к работе и полезные замечания.

Список литературы

[1] Alfvén H. On sunspots and the solar cycle // Arc. f. Mat. Ast. Fys., 1943, vol. 29A, no. 12, pp. 1–17.

[2] Альвен Г., Фельтхаммар К. Г. Космическая электродинамика. Москва: Мир, 1967. 228 с.

[3] Bonatti C., Grines V., Medvedev V., Pecou E. Three-manifolds admitting Morse – Smale diffeomorphisms without heteroclinic curves // Topology Appl., 2002, vol. 117, no. 3, pp. 335–344.

[4] Batterson S. The dynamics of Morse – Smale diffeomorphisms on the torus // Trans. Amer. Math. Soc., 1979, vol. 256, pp. 395–403.

[5] Гринес В. З., Починка О. В. Введение в топологическую классификацию каскадов на многообразиях размерности два и три. Москва – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Ижевский институт компьютерных исследований, 2011. 424 с.

[6] Гринес В. З., Жужома Е. В., Медведев В. С. Новые соотношения для систем Морса – Смейла с тривиально вложенными одномерными сепаратрисами // Матем. сб., 2003, т. 194, № 7, с. 25–56.

[7] Гринес В. З., Левченко Ю. А., Починка О. В. О топологической классификации диффеоморфизмов на 3-многообразиях с поверхностными двумерными аттракторами и репеллерами // Нелинейная динамика, 2014, т. 10, № 1, с. 17–33.

[8] Grines V., Medvedev T., Pochinka O., Zhuzhoma E. On heteroclinic separators of magnetic fields in electrically conducting fluids // Phys. D, 2014 (в печати).

[9] Гринес В. З., Жужома Е. В., Медведев В. С., Починка О. В. Глобальные аттрактор и репеллер диффеоморфизмов Морса – Смейла // Дифференциальные уравнения и топология II: Сб. ст.: К 100-летию со дня рождения академика Льва Семеновича Понтрягина / отв. ред. Е. Ф. Мищенко. (Тр. МИАН, т. 271.) Москва: МАИК, 2010. С. 111—133.

[10] Кадомцев Б. Б. Перезамыкание магнитных силовых линий // УФН, 1987, т. 151, № 1, с. 3–29.

[11] Каулинг Т. Магнитная гидродинамика. Москва: Атомиздат, 1978. 144 с.

[12] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика: В 10 тт.: Т. 8: Электродинамика сплошных сред. 2-е изд., испр. Москва: Физматлит, 1982. 621 с.

[13] Нитецки З. Введение в дифференциальную динамику. Москва: Мир, 1975. 304 с.

[14] Прист Э. Р. Солнечная магнитогидродинамика. Москва: Мир, 1985. 592 с.

[15] Прист Э., Форбс Т. Магнитное пересоединение: магнитогидродинамическая теория и приложения. Москва: Физматлит, 2005. 592 с.

[16] Smale S. Morse inequalities for a dynamical system // Bull. Amer. Math. Soc., 1960, vol. 66, pp. 43–49.

[17] Smale S. On gradient dynamical systems // Ann. of Math. (2), 1961, vol. 74, pp. 199–206.

[18] Сыроватский С. И. Магнитная гидродинамика // УФН, 1957, т. 62, с. 247–303.

Heteroclinic curves of Morse – Smale cascades and separators in magnetic field of plasma

Vyacheslav Z. Grines[1], Elena Ya. Gurevich[2], Evgenii V. Zhuzhoma[3], Svetlana Kh. Zinina[4]

[1]N. I. Lobachevskii Nizhnii Novgorod State University
Gagarina pr. 23, Nizhnii Novgorod, 603950, Russia

[2,3]National Research University Higher School of Economics
Bolshaya Pecherskaya 25/12, Nizhnii Novgorod, 603155, Russia

[4]N. P. Ogarev State University of Mordovia
Bolshevistskaya 68, Saransk, 430005, Russia

[1]vgrines@yandex.ru, [2]egurevich@hse.ru, [3]ezhuzhoma@hse.ru, [4]kapkaevasvetlana@yandex.ru

We obtain properties of three-dimensional phase space and dynamics of Morse – Smale diffeomorphism that led to existence of at least one heteroclinical curve in non-wandering set of the diffeomorphism. We apply this result to solve a problem of existence of separators in magnetic field of plasma.

MSC 2010: 37E30
Keywords: Morse – Smale cascades, heteroclinic curves, mapping torus, locally trivial bundle, separators of magnetic field

Received November 24, 2014, accepted December 04, 2014
Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2014, vol. 10, no. 4, pp. 427–438 (Russian)