Нелинейная динамика. 2014. Т. 10. № 4. С. 447–464.
Полнотекстовая версия в свободном доступе
http://nd.ics.org.ru

УДК: 531.36
MSC 2010: 70H05,70H15,70E50

Упрощение структуры форм третьей и четвертой степеней в разложении функции Гамильтона при помощи линейного преобразования

А. П. Маркеев

Рассматриваются канонические дифференциальные уравнения, описывающие движение материальной системы с одной степенью свободы. Предполагается, что существует равновесие, совпадающее с началом координат фазового пространства. Считается, что в достаточно малой окрестности положения равновесия функция Гамильтона представима сходящимся рядом, причем этот ряд не содержит членов второй степени, а члены третьей и четвертой степеней не зависят от времени. Найдены линейные вещественные канонические преобразования, приводящие члены третьей и четвертой степеней к простейшим формам. Полученная на основе этих форм классификация рассматриваемых систем используется при обсуждении вопроса об устойчивости положения равновесия.

Ключевые слова: система Гамильтона, канонические преобразования, устойчивость

1. Введение

Постановка задачи. Пусть движение системы с одной степенью свободы описывается каноническими дифференциальными уравнениями

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y}, \quad \frac{dy}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x}. \tag{1.1}$$

Предположим, что система имеет положение равновесия, отвечающее началу координат $x = y = 0$ фазового пространства, и в достаточно малой его окрестности функция

Получено 04 ноября 2014 года
После доработки 20 ноября 2014 года

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 14-21-00068) в Московском авиационном институте (Национальном исследовательском университете).

Маркеев Анатолий Павлович
markeev@ipmnet.ru
Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН
119526, Россия, Москва, пр. Вернадского, 101, стр. 1

Гамильтона $H = H(x, y, t)$ представима сходящимся рядом, не содержащим членов второй степени:

$$H = \sum_{k=3}^{\infty} H_k(x, y, t), \quad H_k = \sum_{\nu+\mu=k} h_{\nu\mu} x^\nu y^\mu. \tag{1.2}$$

Будем считать также, что при $3 \leqslant k \leqslant n$ (n — натуральное, быть может, достаточно большое число) коэффициенты $h_{\nu\mu}$ не зависят от времени t, а при $k \geqslant n+1$ они — непрерывные и периодические функции t.

К рассмотрению уравнений вида (1.1) приводят многие задачи об устойчивости и нелинейных колебаниях 2π-периодической по времени гамильтоновой системы с одной степенью свободы, когда характеристические показатели $\pm i\lambda$ линеаризованной системы чисто мнимые, причем λ — рациональное число [1–4]. К таким задачам относится, например, задача об устойчивости положения равновесия на границе области параметрического резонанса, когда матрица монодромии линеаризованной системы приводима к диагональной форме [5–9] (см. также раздел 5 статьи).

Основная цель данной статьи состоит в нахождении вещественного линейного канонического преобразования x, $y \to q$, p, приводящего члены третьей и четвертой степеней в разложении (1.2) функции Гамильтона к наиболее простой форме. Эта задача аналогична задаче о классификации критических точек гладких функций [10].

В качестве приложения в статье обсуждается также вопрос об устойчивости положения равновесия $x = y = 0$ системы (1.1).

Формулировка основного результата. Пусть в разложении (1.2) форма третьей степени H_3 не зависит от t и не обращается тождественно в нуль. Тогда существуют вещественные линейные канонические преобразования x, $y \to q$, p, такие, что члены третьей степени относительно q, p в разложении преобразованной функции Гамильтона в ряд записываются в одной из следующих форм:

$$1)\ q(q^2+p^2), \qquad 2)\ q(q^2-p^2), \qquad 3)\ q^2p, \qquad 4)\ q^3. \tag{1.3}$$

Если же $H_3 \equiv 0$, но при этом совокупность членов четвертой степени H_4 не зависит от t и не равна тождественно нулю, то вещественным линейным каноническим преобразованием x, $y \to q$, p эта совокупность членов может быть приведена к одной из следующих девяти форм:

$$\begin{gathered}1)\ q^4 + aq^2p^2 + p^4\ (a > -2), \quad 2)\ q^4 + aq^2p^2 + p^4\ (a < -2),\\ 3)\ q^4 + aq^2p^2 - p^4\ (a \text{ — любое вещественное число}), \quad 4)\ q^2(q^2-p^2),\\ 5)\ q^2(q^2+p^2), \quad 6)\ q^2p^2, \quad 7)\ q^3p, \quad 8)\ -q^3p, \quad 9)\ q^4.\end{gathered} \tag{1.4}$$

В статье также указана конструктивная процедура построения канонического преобразования x, $y \to q$, p.

Замечание. Следует иметь в виду, что формы (1.3) и (1.4) членов третьей и четвертой степеней можно записать и иначе, не теряя их простой структуры. Например, если поменять ролями координаты и импульсы (сделав каноническую замену $q = P$, $p = Q$), то вместо формы 8) из (1.4) получим форму QP^3.

2. Предварительная замена переменных

Сделаем в системе (1.1), (1.2) замену переменных — поворот на угол α:

$$x = \cos\alpha\, u + \sin\alpha\, v, \qquad y = -\sin\alpha\, u + \cos\alpha\, v. \tag{2.1}$$

Здесь угол α — произвольная постоянная величина. Ниже, в разделах 3 и 4 при получении форм (1.3) и (1.4), этот угол будет выбираться вполне определенным образом.

Замена (2.1) является унивалентным каноническим преобразованием [11]. В новых переменных u, v уравнения движения остаются каноническими, а формы R_3 и R_4 третьей и четвертой степеней в разложении новой функции Гамильтона $R(u, v, t)$ в ряд не зависят от t и определяются равенствами

$$R_3 = r_{30}u^3 + r_{21}u^2v + r_{12}uv^2 + r_{03}v^3, \tag{2.2}$$

$$r_{03} = F_3(\alpha) \equiv H_3(\sin\alpha, \cos\alpha), \qquad r_{12} = F_3',$$

$$r_{21} = \frac{1}{2}F_3'' + \frac{3}{2}F_3, \qquad r_{30} = \frac{1}{6}F_3''' + \frac{7}{6}F_3', \tag{2.3}$$

$$R_4 = r_{40}u^4 + r_{31}u^3v + r_{22}u^2v^2 + r_{13}uv^3 + r_{04}v^4, \tag{2.4}$$

$$r_{04} = F_4(\alpha) \equiv H_4(\sin\alpha, \cos\alpha), \qquad r_{13} = F_4', \qquad r_{22} = \frac{1}{2}F_4'' + 2F_4,$$

$$r_{31} = \frac{1}{6}F_4''' + \frac{5}{3}F_4', \qquad r_{40} = \frac{1}{24}F_4'''' + \frac{2}{3}F_4'' + F_4. \tag{2.5}$$

Штрихом в формулах (2.3) и (2.5) обозначается дифференцирование по α.

3. Упрощение форм третьей степени

Пусть α_* — вещественный корень уравнения $F_3(\alpha) = 0$. Хотя бы один такой корень существует, так как $F_3(\alpha)$ периодична и имеет нулевое среднее значение по α. В замене переменных (2.1) положим $\alpha = \alpha_*$. При получении простейших форм (1.3) членов третьей степени следует рассматривать три случая в зависимости от того, обращаются ли в нуль производные F_3' и F_3'' при $\alpha = \alpha_*$ (все три первые производные функции F_3 не могут одновременно обратиться в нуль при $\alpha = \alpha_*$, так как в противном случае форма H_3 в разложении (1.2) была бы тождественно равна нулю).

Замечание. Наличие корня $\alpha = \alpha_*$ у уравнения $F_3(\alpha) = 0$ означает, что функция $H_3(x, y)$ имеет множитель $x\cos\alpha_* - y\sin\alpha_*$ и во всех точках прямой $x\cos\alpha_* = y\sin\alpha_*$ в плоскости (x, y) функция $H_3(x, y)$ обращается в нуль. Если при $\alpha = \alpha_*$ еще и $F_3' = 0$, то множитель $x\cos\alpha_* - y\sin\alpha_*$ будет двукратным, а при $F_3(\alpha_*) = F_3'(\alpha_*) = F_3''(\alpha_*) = 0$ — трехкратным.

Очевидно, что аналогичное замечание справедливо и для функции $H_4(x, y)$, когда у уравнения $F_4(\alpha) = 0$ есть корень $\alpha = \alpha_0$.

1. Случай $F_3(\alpha_*) = 0$, $F_3'(\alpha_*) \neq 0$. Функция (2.2) имеет вид

$$R_3 = u(r_{30}u^2 + r_{21}uv + r_{12}v^2) \qquad \big(r_{12} = F_3'(\alpha_*) \neq 0\big). \tag{3.1}$$

В зависимости от значения величины $\delta = 4r_{30}r_{12} - r_{21}^2$ имеется три возможности.

1. $\delta > 0$. Сделаем каноническую замену переменных

$$u = \frac{2}{\sqrt{\delta}}\,q, \qquad v = -\frac{r_{21}}{r_{12}\sqrt{\delta}}\,q + \frac{1}{r_{12}}\,p \qquad \left(c = \frac{r_{12}\sqrt{\delta}}{2}\right). \tag{3.2}$$

Здесь и ниже через c обозначается валентность рассматриваемого канонического преобразования. В новых переменных получаем функцию Гамильтона H^*, у которой совокупность членов третьей степени имеет форму 1) из равенств (1.3):

$$H_3^* = q(q^2 + p^2). \tag{3.3}$$

2. $\delta = 0$. Каноническая замена

$$u = p, \qquad v = -\frac{1}{r_{12}}\,q - \frac{r_{21}}{2r_{12}}\,p \qquad (c = r_{12}) \tag{3.4}$$

приводит функцию (3.1) к форме 3) из равенств (1.3):

$$H_3^* = q^2 p. \tag{3.5}$$

3. $\delta < 0$. После канонической замены переменных

$$u = -\frac{2}{\sqrt{|\delta|}}\,q, \qquad v = \frac{r_{21}}{r_{12}\sqrt{|\delta|}}\,q - \frac{1}{r_{12}}\,p \qquad \left(c = \frac{r_{12}\sqrt{|\delta|}}{2}\right). \tag{3.6}$$

функция (3.1) принимает форму 2) из равенств (1.3):

$$H_3^* = q(q^2 - p^2). \tag{3.7}$$

2. Случай $F_3(\alpha_*) = 0$, $F_3'(\alpha_*) = 0$, $F_3''(\alpha_*) \neq 0$. Функция (2.2) имеет вид

$$R_3 = u^2(r_{30}u + r_{21}v) \qquad \bigl(r_{21} = 1/2\, F_3''(\alpha_*) \neq 0\bigr). \tag{3.8}$$

Каноническая замена переменных

$$u = \frac{1}{r_{21}}\,q, \qquad v = -\frac{r_{30}}{r_{21}^2}\,q + p \qquad (c = r_{21}) \tag{3.9}$$

приводит эту функцию к виду (3.5).

3. Случай $F_3(\alpha_*) = 0$, $F_3'(\alpha_*) = 0$, $F_3''(\alpha_*) = 0$. В этом случае

$$R_3 = r_{30}u^3 \qquad \bigl(r_{30} = 1/6\, F_3'''(\alpha_*) \neq 0\bigr). \tag{3.10}$$

Если сделать замену переменных

$$u = q, \qquad v = r_{30}p \qquad \bigl(c = r_{30}^{-1}\bigr), \tag{3.11}$$

то функция (3.10) принимает форму 4) из равенств (1.3):

$$H_3^* = q^3. \tag{3.12}$$

Фазовые портреты систем, описываемых формами третьей степени (1.3), представлены на рисунке 1.

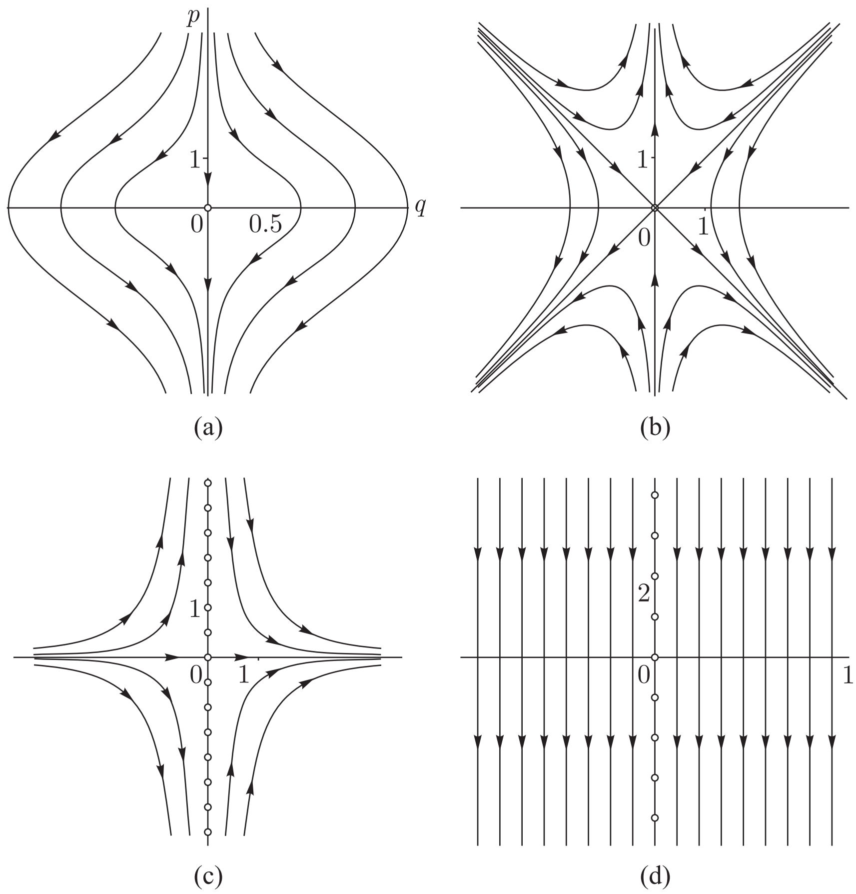

Рис. 1. Фазовые портреты систем, задаваемых формами третьей степени (1.3): a) $H_3^* = q(q^2 + p^2)$, b) $H_3^* = q(q^2 - p^2)$, c) $H_3^* = q^2 p$, d) $H_3^* = q^3$. На двух нижних портретах (c, d) все точки оси ординат ($q = 0$, $p = \mathrm{const}$) отвечают положениям равновесия системы с функцией Гамильтона H_3^*.

4. Упрощение форм четвертой степени

Пусть в разложении (1.2) $H_3 \equiv 0$, а форма H_4 не зависит от t и не обращается тождественно в нуль. После преобразования поворота (2.1) члены четвертой степени запишутся в виде формы R_4 из (2.4). При получении простейших ее форм (1.4) и соответствующих линейных канонических преобразований, приводящих R_4 к этим формам, следует рассмотреть пять отличающихся один от другого случаев.

1. Случай $F_4(\alpha) \neq 0$. Пусть уравнение $F_4(\alpha) = 0$, где $F_4(\alpha)$ определяется первым из равенств (2.5), не имеет вещественных корней. В этом случае форма H_4 (а следовательно, и форма R_4 из (2.4)) будет знакоопределенной. Не ограничивая общности, будем считать ее определенно положительной (в противном случае можно было бы поменять ролями канонически сопряженные переменные x и y).

В силу периодичности функции $F_4(\alpha)$ по α, существует хотя бы одно значение $\alpha = \alpha_0$, для которого производная $F_4'(\alpha)$ обращается в нуль. Примем это значение α в качестве угла поворота в преобразовании (2.1). Тогда коэффициент r_{13} в функции (2.4) равен нулю и она имеет вид

$$R_4 = r_{40}u^4 + r_{31}u^3v + r_{22}u^2v^2 + r_{04}v^4, \tag{4.1}$$

причем коэффициенты r_{40} и r_{04} положительны. Эту функцию можно несколько упростить, сделав каноническую замену по формулам

$$u = r_{40}^{-3/8} r_{04}^{-1/8} u_1, \qquad v = r_{40}^{-1/8} r_{04}^{-3/8} v_1 \qquad (c = \sqrt{r_{40} r_{04}}). \tag{4.2}$$

Функция (4.1), преобразованная к новым переменным u_1, v_1, имеет вид

$$R_4 = u_1^4 + \varrho_{31} u_1^3 v_1 + \varrho_{22} u_1^2 v_1^2 + v_1^4, \tag{4.3}$$

$$\varrho_{31} = r_{40}^{-3/4} r_{04}^{-1/4} r_{31}, \qquad \varrho_{22} = r_{40}^{-1/2} r_{04}^{-1/2} r_{22}. \tag{4.4}$$

Форма (4.3) содержит два коэффициента ϱ_{31} и ϱ_{22}, которые зависят от параметров исходной системы (1.1), (1.2). Опираясь на результаты статьи [12], можно показать, что в плоскости ϱ_{22}, ϱ_{31} область знакоопределенности формы (4.3) лежит справа от прямой $\varrho_{22} = -2$, ее границы задаются равенством $\Delta = 0$, где

$$\Delta = 27\varrho_{31}^4 + 4\varrho_{22}\left(\varrho_{22}^2 - 36\right)\varrho_{31}^2 - 16\left(\varrho_{22}^2 - 4\right)^2, \tag{4.5}$$

а сама область симметрична относительно оси $\varrho_{31} = 0$ и задается неравенством

$$|\varrho_{31}| < \frac{\sqrt{6}}{9}\sqrt{\varrho_{22}\left(36 - \varrho_{22}^2\right) + \left(12 + \varrho_{22}^2\right)^{3/2}}. \tag{4.6}$$

Отметим, что знакоопределенность формы (4.3) означает, что уравнение $g(z) = 0$, где

$$g(z) = z^4 + \varrho_{31} z^3 + \varrho_{22} z^2 + 1, \tag{4.7}$$

не имеет вещественных корней.

Линейной вещественной канонической заменой переменных u_1, $v_1 \to q$, p функцию (4.3) можно привести к форме 1) из равенств (1.4):

$$H_4^* = q^4 + a q^2 p^2 + p^4 \qquad (a > -2). \tag{4.8}$$

Эта функция содержит только один параметр a, а не два, как функция (4.3). Выполнение неравенства $a > -2$ вытекает из знакоопределенности функции (4.3). Покажем, как построить замену u_1, $v_1 \to q$, p.

Если $\varrho_{31} = 0$, то функция (4.3) уже имеет структуру (4.8). Далее считаем, что $\varrho_{31} \neq 0$. В частном случае, когда $\varrho_{31}^2 = 4\varrho_{22}$, замену переменных u_1, $v_1 \to q$, p, приводящую функцию (4.3) к виду (4.8), можно взять такой:

$$u_1 = 2\beta(q - \varrho_{31}\beta^2 p), \quad v_1 = 8\beta^3 p \quad \left(\beta = (\varrho_{31}^4 + 256)^{-1/8},\ c = (2\beta)^{-4}\right). \tag{4.9}$$

Новым переменным отвечает функция (4.8), в которой $a = -2\varrho_{31}^2\beta^4$.

В общем случае, когда $\varrho_{31} \neq 0$ и $\varrho_{31}^2 \neq 4\varrho_{22}$, сделаем предварительно каноническую замену u_1, $v_1 \to \xi$, η по формулам

$$u_1 = g^{-1/8}\xi + b g^{-3/8}\eta, \qquad v_1 = g^{-3/8}\eta \qquad (c = \sqrt{g}), \tag{4.10}$$

где $g = g(b)$, g — многочлен, определяемый равенством (4.7). Способ выбора величины b, входящей в замену (4.10), будет указан ниже.

В результате замены (4.10) функция (4.3) преобразуется в функцию

$$\Gamma_4 = \xi^4 + \gamma_{31}\xi^3\eta + \gamma_{22}\xi^2\eta^2 + \gamma_{13}\xi\eta^3 + \eta^4, \tag{4.11}$$

$$\gamma_{31} = (\varrho_{31} + 4b)g^{-1/4}, \qquad \gamma_{22} = \left(6b^2 + 3\varrho_{31}b + \varrho_{22}\right) g^{-1/2},$$
$$\gamma_{13} = b\left(4b^2 + 3\varrho_{31}b + 2\varrho_{22}\right) g^{-3/4}. \tag{4.12}$$

Величину b выберем так, чтобы коэффициенты γ_{31} и γ_{13} функции (4.11) были равны. Для этого рассмотрим уравнение $\gamma_{31}^2 = \gamma_{13}^2$. Это уравнение эквивалентно уравнению третьей степени относительно b

$$\varrho_{31}(\varrho_{31}^2 - 4\varrho_{22})b^3 + (\varrho_{31}^2\varrho_{22} + 16 - 4\varrho_{22}^2)b^2 + 8\varrho_{31}b + \varrho_{31}^2 = 0. \tag{4.13}$$

Дискриминант D соответствующего приведенного уравнения имеет вид

$$D = \frac{\Delta}{108\varrho_{31}^2(\varrho_{31}^2 - 4\varrho_{22})^2}, \tag{4.14}$$

где величина Δ определяется равенством (4.5). В области знакоопределенности функции (4.3) эта величина отрицательна, поэтому все три корня уравнения (4.13) $b = b_i$ $(i = 1, 2, 3)$ вещественны [13]. Нетрудно убедиться непосредственной проверкой, что для двух из них выполняется равенство $\gamma_{31} = \gamma_{13}$. В замене (4.10) положим b равным одному из этих корней. Тогда функция (4.11) примет вид

$$\Gamma_4 = \xi^4 + \gamma_{31}\xi^3\eta + \gamma_{22}\xi^2\eta^2 + \gamma_{31}\xi\eta^3 + \eta^4, \tag{4.15}$$

где γ_{31}, γ_{22} вычисляются для выбранного значения b.

Если теперь сделать преобразование поворота на угол $\pi/4$

$$\xi = \frac{\sqrt{2}}{2}(\eta_* + \xi_*), \qquad \eta = \frac{\sqrt{2}}{2}(\eta_* - \xi_*),$$

то в функции (4.15) останутся только четные степени ξ_*, η_*:

$$\Gamma_4^* = t_{40}\xi_*^4 + t_{22}\xi_*^2\eta_*^2 + t_{04}\eta_*^4, \tag{4.16}$$

$$t_{40} = \frac{1}{4}(\gamma_{22} - 2\gamma_{31} + 2), \quad t_{22} = \frac{1}{2}(6 - \gamma_{22}), \quad t_{04} = \frac{1}{4}(\gamma_{22} + 2\gamma_{31} + 2). \tag{4.17}$$

Еще одна замена переменных

$$\xi_* = t_{40}^{-3/8}t_{04}^{-1/8}q, \qquad \eta_* = t_{40}^{-1/8}t_{04}^{-3/8}p \qquad (c = \sqrt{t_{40}t_{04}}) \tag{4.18}$$

приводит функцию (4.16) к форме (4.8), в которой

$$a = \frac{2(6 - \gamma_{22})}{\sqrt{(\gamma_{22} + 2)^2 - 4\gamma_{31}^2}}.$$

Фазовые портреты системы с функцией Гамильтона (4.8) показаны на рисунке 2.

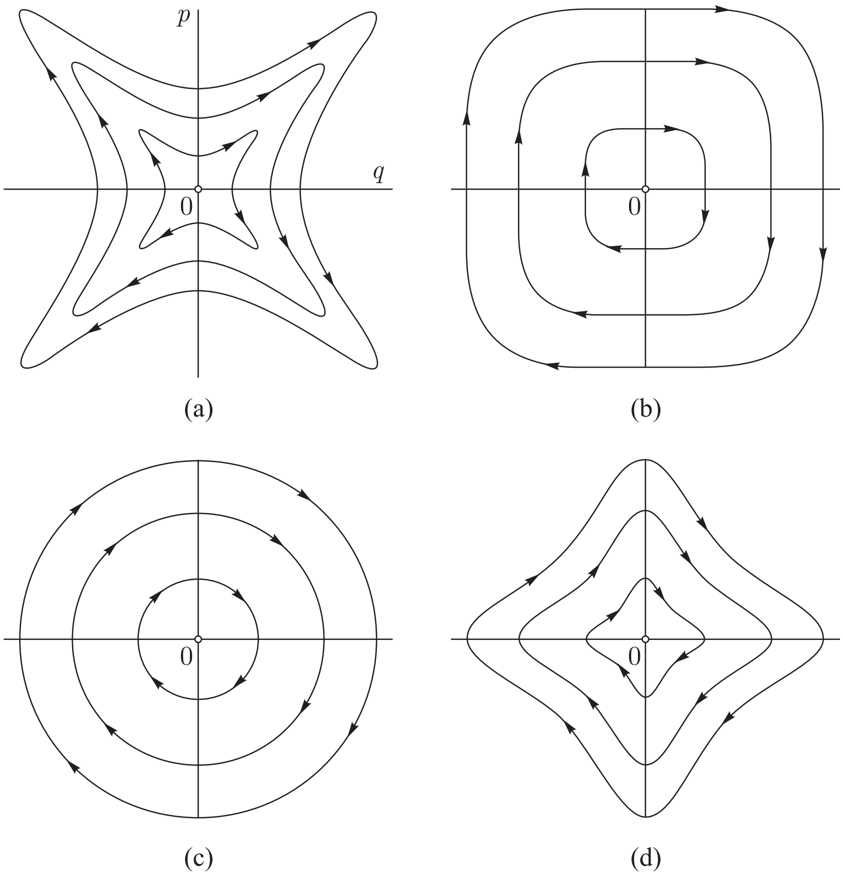

Рис. 2. Фазовые портреты системы с функцией Гамильтона $H_4^* = q^4 + aq^2p^2 + p^4$: a) $a = -1.9$, b) $a = 0$, c) $a = 2$, d) $a = 20$.

2. Случай $F_4(\alpha_0) = 0$, $F_4'(\alpha_0) \neq 0$. Далее будем считать, что функция H_4 не является знакоопределенной. Тогда уравнение $F_4(\alpha) = 0$ имеет вещественный корень $\alpha = \alpha_0$. Предположим, что при этом первая производная $F_4'(\alpha_0) \neq 0$. Тогда функция (2.4) имеет вид

$$R_4 = u\left(r_{40}u^3 + r_{31}u^2v + r_{22}uv^2 + r_{13}v^3\right) \qquad \left(r_{13} = F_4'(\alpha_0) \neq 0\right). \tag{4.19}$$

Каноническая замена переменных

$$u = |r_{13}|^{-1/2}u_1, \qquad v = |r_{13}|^{-1/2}v_1 \qquad (c = |r_{13}|) \tag{4.20}$$

приводит эту функцию к виду

$$R_4 = \sigma u_1\left(k_{40}u_1^3 + k_{31}u_1^2v_1 + k_{22}u_1v_1^2 + v_1^3\right) \qquad (\sigma = \operatorname{sign}(r_{13})), \tag{4.21}$$

$$k_{40} = r_{40}r_{13}^{-1}, \qquad k_{31} = r_{31}r_{13}^{-1}, \qquad k_{22} = r_{22}r_{13}^{-1}. \tag{4.22}$$

Если еще сделать унивалентную каноническую замену переменных по формулам

$$u_1 = \xi, \qquad v_1 = z\xi + \eta, \tag{4.23}$$

где z — корень многочлена третьей степени

$$f(z) = z^3 + k_{22}z^2 + k_{31}z + k_{40},$$

то функция (4.21) преобразуется к виду

$$\Gamma_4 = \sigma\,\xi\,\eta\,(\eta^2 + 1/2\,f''(z)\,\xi\,\eta + f'(z)\,\xi^2), \tag{4.24}$$

где штрихом обозначено дифференцирование по z.

Пусть $f'(z) \neq 0$. Здесь, в зависимости от значения величины $\delta_1 = 16f'(z) - f''(z)^2$, следует рассмотреть три возможных случая.

1. $\delta_1 < 0$. В этом случае функция (4.24) представима в виде

$$\Gamma_4 = \sigma\,\xi\,\eta\,(\eta - \eta_1^*)(\eta - \eta_2^*), \tag{4.25}$$

$$\eta_1^* = \frac{\sqrt{|\delta_1|}}{4}\,(1 - e), \qquad \eta_2^* = -\frac{\sqrt{|\delta_1|}}{4}\,(1 + e), \qquad e = \frac{f''(z)}{\sqrt{|\delta_1|}}. \tag{4.26}$$

Знак величины e совпадает со знаком производной $f''(z)$, причем если $f'(z) > 0$, то $|e| > 1$, а если $f'(z) < 0$, то $|e| < 1$.

Каноническая замена переменных

$$\xi = \frac{4}{\sqrt{|\delta_1|}}\,\xi_*, \qquad \eta = -e\xi_* + \eta_* \qquad \left(c = \frac{\sqrt{|\delta_1|}}{4}\right)$$

приводит функцию (4.25) к виду

$$\Gamma_4^* = \sigma\,\xi_*\,(\eta_* - e\xi_*)\left(\eta_*^2 - \xi_*^2\right). \tag{4.27}$$

Функцию (4.27) можно при помощи линейной канонической замены ξ_*, $\eta_* \to q$, p привести к форме 2) из (1.4), когда она зависит от одного параметра a, причем в рассматриваемом конкретном случае $a < -2$. При $|e| > 1$ замена ξ_*, $\eta_* \to q$, p может быть задана равенствами

$$\begin{aligned} \xi_* &= s_2^{-1}\left(|s_1|^{1/4}\operatorname{sign}(s_1)\,q + \sigma|s_1|^{-1/4}\,p\right), \\ \eta_* &= s_2^{-1}\left(|s_1|^{-3/4}\,q + \sigma|s_1|^{3/4}\operatorname{sign}(s_1)\,p\right) \qquad (c = 1/2\,\sigma\ \operatorname{sign}(s_1)), \end{aligned} \tag{4.28}$$

где $s_1 = e + \sqrt{e^2 - 1}$, $s_2 = (e^2 - 1)^{1/4}$. Преобразованная функция (4.27) записывается в виде

$$H_4^* = q^4 + aq^2p^2 + p^4 \qquad (a = -2|e|). \tag{4.29}$$

Если же $|e| < 1$, то замену ξ_*, $\eta_* \to q$, p можно взять такой:

$$\begin{aligned} \xi_* &= 2^{1/4}(1 - e^2)^{-1/4}r_2^{-1}\left[\sigma r_1\,q + r_1^{-1}r_2\,p\right] \qquad (c = 1/4\,\sigma\,(e - 1)), \\ \eta_* &= 2^{1/4}(1 - e^2)^{-1/4}r_2^{-1}\left[\sigma(\sqrt{2(1 + e)} - 1)r_1\,q - (\sqrt{2(1 + e)} + 1)r_1^{-1}r_2\,p\right]. \end{aligned} \tag{4.30}$$

Здесь $r_1 = (2\sqrt{2(1 + e)} + e + 3)^{1/4}$, $r_2 = \sqrt{1 - e}$. Преобразованная функция (4.27) задается первым из равенств (4.29), в котором

$$a = -2\frac{3 + e}{1 - e}.$$

Фазовый портрет системы с функцией Гамильтона (4.29) показан на рисунке 3a, где принято $a = -3$.

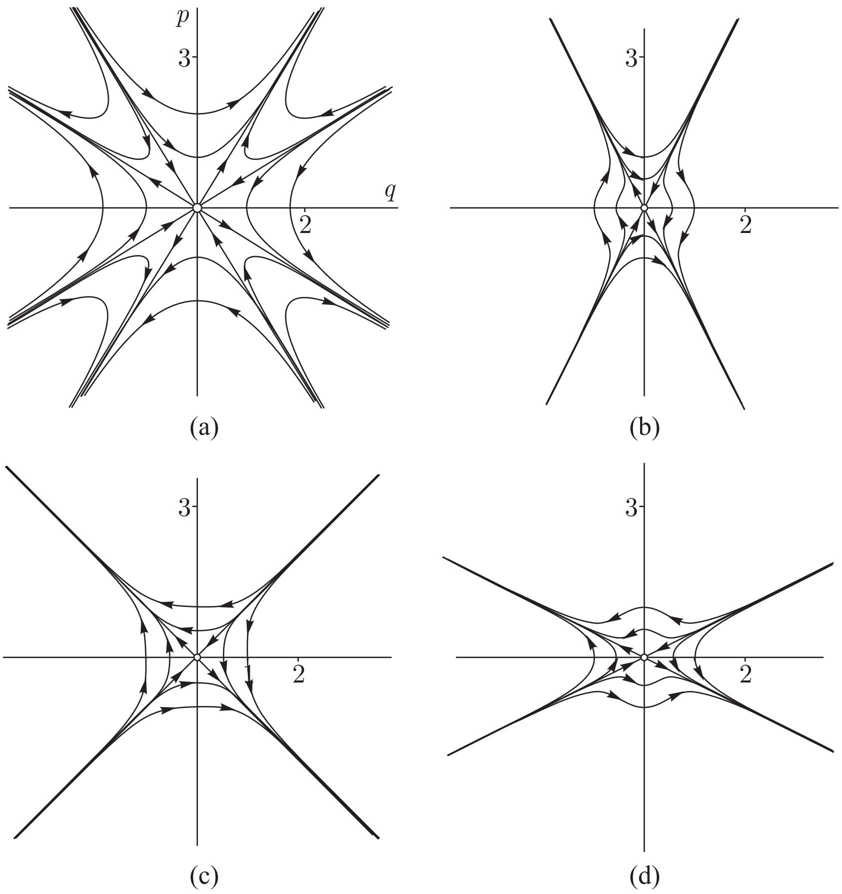

Рис. 3. Фазовые портреты систем, задаваемых формами четвертой степени (1.4): a) $H_4^* = q^4 - 3q^2p^2 + p^4$, b) $H_4^* = q^4 + 15/4\, q^2p^2 - p^4$, c) $H_4^* = q^4 - p^4$, d) $H_4^* = q^4 - 15/4\, q^2p^2 - p^4$.

2. $\delta_1 > 0$. В этом случае квадратичная форма, заключенная в выражении функции (4.24) в круглые скобки, будет определенно положительной. Каноническая замена переменных

$$\xi = -\frac{4}{\sqrt{\delta_1}}\,\widetilde{\xi}, \qquad \eta = k\,\widetilde{\xi} + \sigma\widetilde{\eta} \qquad \left(k = \frac{f''(z)}{\sqrt{\delta_1}},\ c = -\frac{1}{4}\,\sigma\,\sqrt{\delta_1}\right) \tag{4.31}$$

приводит функцию (4.24) к виду

$$\widetilde{\Gamma}_4 = \widetilde{\xi}\,\left(k\widetilde{\xi} + \sigma\widetilde{\eta}\right)\left(\widetilde{\xi}^2 + \widetilde{\eta}^2\right). \tag{4.32}$$

Эту выражение можно упростить. В случае $k = 0$ каноническая замена переменных

$$\widetilde{\xi} = p - \sigma\,q, \qquad \widetilde{\eta} = p + \sigma\,q \qquad (c = -1/2\,\sigma)$$

приводит функцию (4.32) к форме 3) из (1.4) (при $a = 0$):

$$H_4^* = q^4 - p^4.$$

При $k \neq 0$ делаем каноническую (с валентностью $c = 1/2$) замену переменных по следующим формулам:

$$\widetilde{\xi} = \sqrt{2}\left(\cos\theta b^{-1/4}\,q + \sin\theta b^{1/4}\,p\right), \quad \widetilde{\eta} = \sqrt{2}\left(-\sin\theta b^{-1/4}\,q + \cos\theta b^{1/4}\,p\right), \tag{4.33}$$

где
$$\theta = -\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{\sigma}{k} + \frac{\pi}{4}\,(1 - \operatorname{sign}(k)), \qquad b = k + \sqrt{1+k^2}.$$

В результате этого преобразования функция (4.32) принимает форму 3) из (1.4):

$$H_4^* = q^4 + aq^2p^2 - p^4 \qquad (a = 2k). \tag{4.34}$$

Фазовые портреты системы с функцией Гамильтона (4.34) показаны на рисунках 3b, c, d.

3. $\delta_1 = 0$. В этом случае функция (4.24) может быть записана в виде

$$\Gamma_4 = \sigma\,\xi\,\eta\,\big(\eta^2 + 1/4\,f''(z)\,\xi\big)^2. \tag{4.35}$$

Каноническая замена переменных

$$\xi = \frac{2\sqrt{2}}{f''(z)}\,(q - \sigma\,p), \qquad \eta = \frac{\sqrt{2}}{2}\,(q + \sigma\,p) \qquad \left(c = \frac{1}{4}\,\sigma\,f''(z)\right)$$

приводит эту функцию к форме 4) из (1.4):

$$H_4^* = q^2\,\big(q^2 - p^2\big). \tag{4.36}$$

Фазовый портрет системы с функцией Гамильтона (4.36) показан на рисунке 4a.

О случае $f'(z) = 0$. Если $f'(z) = 0$, а $f''(z) \neq 0$, то каноническая замена

$$\xi = \frac{\sqrt{2}}{f''(z)}\,(p - \sigma\,q), \qquad \eta = \sigma\sqrt{2}\,q \qquad \left(c = -\frac{1}{2}\,\sigma\,f''(z)\right)$$

приводит функцию (4.24) к форме (4.36). А если $f'(z) = 0$ и $f''(z) = 0$, то при $\sigma = -1$ замена

$$\xi = p, \qquad \eta = q \qquad (c = -1)$$

приводит функцию (4.24) к форме 7) из (1.4)

$$H_4^* = q^3p, \tag{4.37}$$

а при $\sigma = 1$ — к форме 8) из (1.4):

$$H_4^* = -q^3p. \tag{4.38}$$

Фазовый портрет системы с функцией Гамильтона (4.37) показан на рисунке 4b. Для функции (4.38) фазовый портрет выглядит аналогично, только направление движения по фазовым траекториям меняется на противоположное.

3. Случай $F_4(\alpha_0) = 0$, $F_4'(\alpha_0) = 0$, $F_4''(\alpha_0) \neq 0$. В этом случае $r_{04} = 0$, $r_{13} = 0$ и функция (2.4) принимает вид

$$R_4 = u^2\,\big(r_{40}u^2 + r_{31}uv + r_{22}v^2\big) \qquad \big(r_{22} = 1/2\,F_4''(\alpha_0) \neq 0\big). \tag{4.39}$$

После канонической замены, аналогичной замене (4.20),

$$u = |r_{22}|^{-1/2}u_1, \qquad v = |r_{22}|^{-1/2}v_1 \qquad (c = |r_{22}|) \tag{4.40}$$

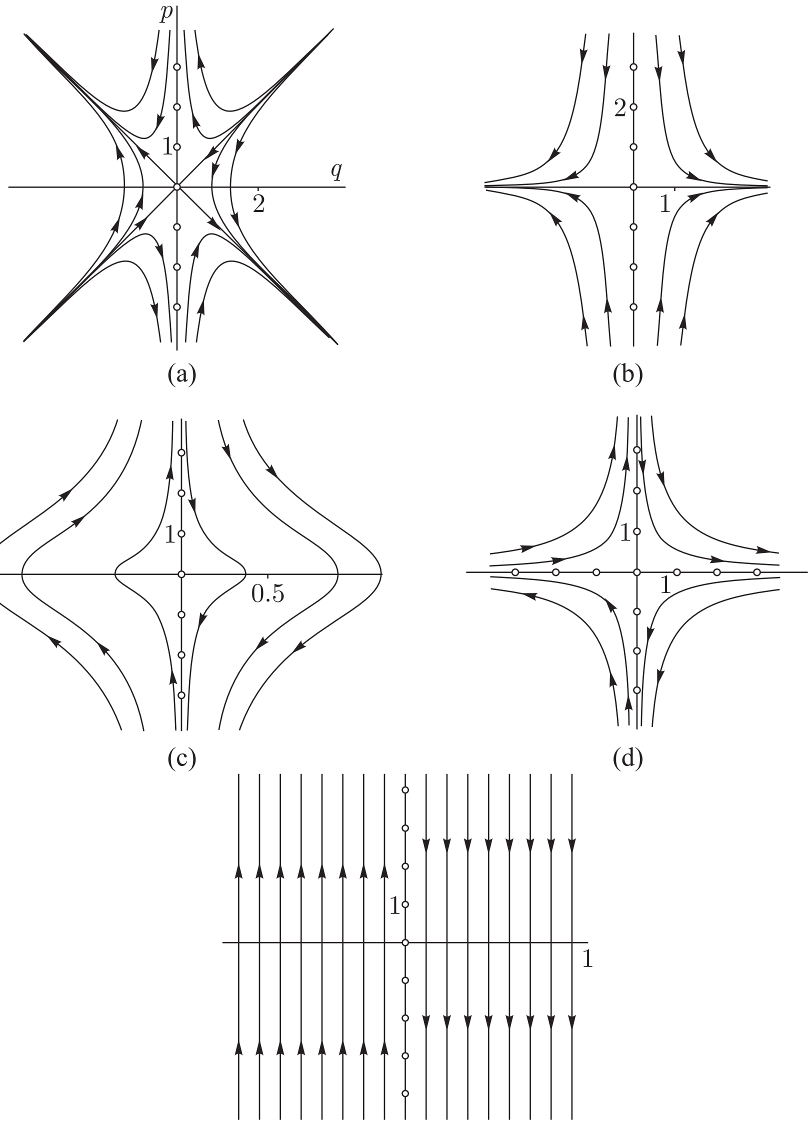

Рис. 4. Фазовые портреты систем, задаваемых формами четвертой степени (1.4): a) $H_4^* = q^2(q^2 - p^2)$, b) $H_4^* = q^3 p$, c) $H_4^* = q^2(q^2 + p^2)$, d) $H_4^* = q^2 p^2$, e) $H_4^* = q^4$.

приходим к функции R_4 вида

$$R_4 = \sigma u_1^2 \left(k_{40} u_1^2 + k_{31} u_1 v_1 + v_1^2 \right) \qquad (\sigma = \operatorname{sign}(r_{22})), \tag{4.41}$$

$$k_{40} = r_{40} r_{22}^{-1}, \qquad k_{31} = r_{31} r_{22}^{-1}. \tag{4.42}$$

В зависимости от значения величины $\delta_2 = 4k_{40} - k_{31}^2$ возможны три отличающихся один от другого случая.

1. $\delta_2 < 0$. В этом случае каноническая замена переменных вида

$$u_1 = -\sigma \left(\frac{|\delta_2|}{4} \right)^{-1/4} q, \quad v_1 = \frac{1}{2} \sigma k_{31} \left(\frac{|\delta_2|}{4} \right)^{-1/4} q + \left(\frac{|\delta_2|}{4} \right)^{1/4} p \quad (c = -\sigma)$$

приводит функцию (4.41) к форме (4.36).

2. $\delta_2 > 0$. Сделав каноническую замену переменных по формулам

$$u_1 = \left(\frac{\delta_2}{4}\right)^{-1/4} q, \quad v_1 = -\frac{1}{2}\, k_{31}\left(\frac{\delta_2}{4}\right)^{-1/4} q + \sigma \left(\frac{\delta_2}{4}\right)^{1/4} p \qquad (c = \sigma),$$

приведем функцию (4.41) к форме 5) из (1.4):

$$H_4^* = q^2(q^2 + p^2). \tag{4.43}$$

Фазовый портрет системы с функцией Гамильтона (4.43) представлен на рисунке 4c.

3. $\delta_2 = 0$. Если сделать каноническую замену переменных

$$u_1 = \sigma\, q, \quad v_1 = -\frac{1}{2}\, \sigma\, k_{31} q + p \quad (c = \sigma),$$

то функция (4.41) преобразуется к форме 6) из (1.4):

$$H_4^* = q^2 p^2. \tag{4.44}$$

Фазовый портрет соответствующей гамильтоновой системы показан на рисунке 4d.

4. Случай $F_4(\alpha_0) = 0$, $F_4'(\alpha_0) = 0$, $F_4''(\alpha_0) = 0$, $F_4'''(\alpha_0) \neq 0$. В этом случае $r_{04} = 0$, $r_{13} = 0$, $r_{22} = 0$ и функция (2.4) имеет вид

$$R_4 = u^3(r_{40}u + r_{31}v) \qquad (r_{31} = 1/6\, F_4'''(\alpha_0) \neq 0). \tag{4.45}$$

Эту функцию можно упростить при помощи канонической замены переменных

$$u = \frac{1}{\sqrt{|r_{31}|}}\, q, \qquad v = -\frac{r_{40}}{r_{31}\sqrt{|r_{31}|}}\, q + \frac{\sqrt{|r_{31}|}}{r_{31}}\, p \qquad (c = r_{31}).$$

Новым переменным отвечает функция (4.37), если $r_{31} > 0$, и функция (4.38), если $r_{31} < 0$.

5. Случай $F_4(\alpha_0) = 0$, $F_4'(\alpha_0) = 0$, $F_4''(\alpha_0) = 0$, $F_4'''(\alpha_0) = 0$. Если при $\alpha = \alpha_0$ функция $F_4(\alpha)$ и ее производные до третьей включительно обращаются в нуль, то после поворота (2.1) на угол α получаем функцию (2.4) в виде

$$R_4 = r_{40}u^4 \qquad \big(r_{40} = 1/24\, F_4''''(\alpha_0) \neq 0\big). \tag{4.46}$$

Каноническая замена переменных

$$u = q, \qquad v = r_{40}\, p \qquad \big(c = r_{40}^{-1}\big)$$

приводит эту функцию к форме 9) из (1.4):

$$H_4^* = q^4. \tag{4.47}$$

Фазовый портрет системы с функцией Гамильтона (4.47) показан на рисунке 4e.

5. К задаче об устойчивости гамильтоновой системы на границе области параметрического резонанса

Рассмотрим каноническую систему

$$\frac{d\widetilde{\xi}}{dt} = \frac{\partial\widetilde{\Gamma}}{\partial\widetilde{\eta}}, \qquad \frac{d\widetilde{\eta}}{dt} = -\frac{\partial\widetilde{\Gamma}}{\partial\widetilde{\xi}}, \tag{5.1}$$

где $\widetilde{\Gamma} = \widetilde{\Gamma}(\widetilde{\xi}, \widetilde{\eta}, t)$ — 2π-периодическая и непрерывная по t функция Гамильтона, представимая в окрестности точки $\widetilde{\xi} = \widetilde{\eta} = 0$ сходящимся рядом вида

$$\widetilde{\Gamma} = \frac{1}{2}\lambda\left(\widetilde{\xi}^2 + \widetilde{\eta}^2\right) + \sum_{k=3}^{\infty}\widetilde{\Gamma}_k(\widetilde{\xi}, \widetilde{\eta}, t), \qquad \widetilde{\Gamma}_k = \sum_{\nu+\mu=k}\gamma_{\nu\mu}(t)\widetilde{\xi}^{\nu}\widetilde{\eta}^{\mu}, \tag{5.2}$$

где λ — целое число. Необходимость анализа системы (5.1), (5.2) возникает, например, в нелинейной задаче об устойчивости положения равновесия периодической по времени гамильтоновой системы при резонансе первого порядка, когда матрица монодромии линеаризованных уравнений возмущенного движения приводима к диагональной форме.

Приведение системы (5.1), (5.2) к виду (1.1), (1.2). При помощи 2π-периодической по t канонической замены переменных $\widetilde{\xi}$, $\widetilde{\eta} \to x$, y систему (5.1), (5.2) можно привести к виду (1.1), (1.2). Это преобразование получим как композицию двух последовательных преобразований. Первое преобразование $\widetilde{\xi}$, $\widetilde{\eta} \to \xi$, η представляет собой поворот на угол λt:

$$\widetilde{\xi} = \cos\lambda t\,\xi + \sin\lambda t\,\eta, \qquad \widetilde{\eta} = -\sin\lambda t\,\xi + \cos\lambda t\,\eta. \tag{5.3}$$

Это преобразование уничтожает в новой функции Гамильтона $\Gamma(\xi, \eta, t)$ члены второй степени относительно ξ, η [11]. При этом функция $\Gamma(\xi, \eta, t)$ будет 2π-периодической по t и представима рядом

$$\Gamma = \sum_{k=3}^{\infty}\Gamma_k(\xi, \eta, t), \tag{5.4}$$

где Γ_k — это функции $\widetilde{\Gamma}_k$ из разложения (5.2), в которых величины $\widetilde{\xi}$, $\widetilde{\eta}$ заменены на их выражения (5.3).

Второе каноническое преобразование ξ, $\eta \to x$, y получим близким к тождественному и 2π-периодическим по t. Построим его при помощи классической теории возмущений [14]. Это преобразование задается неявно при помощи равенств

$$\eta = \frac{\partial S}{\partial\xi}, \qquad x = \frac{\partial S}{\partial y}, \tag{5.5}$$

где производящая функция $S = S(\xi, y, t)$ задается рядом вида

$$S = \xi y + \sum_{k=3}^{\infty}S_k(\xi, y, t), \qquad S_k = \sum_{\nu+\mu=k}s_{\nu\mu}(t)\xi^{\nu}y^{\mu}. \tag{5.6}$$

Преобразованная функция Гамильтона $H(x, y, t)$ — это функция (1.2). Она вычисляется по формуле

$$H = \Gamma(\xi, \eta, t) + \frac{\partial S(\xi, y, t)}{\partial t}. \tag{5.7}$$

В правой части этой формулы старые переменные ξ, η в функциях Γ и $\partial S_3/\partial t$ должны быть выражены через новые переменные x, y.

Из соотношений (5.5), (5.6) величины ξ, η можно найти в виде рядов:

$$\xi = x - \frac{\partial S_3}{\partial y} - \frac{\partial S_4}{\partial y} + \frac{\partial^2 S_3}{\partial x \partial y}\frac{\partial S_3}{\partial y} + \ldots, \quad \eta = y + \frac{\partial S_3}{\partial x} + \frac{\partial S_4}{\partial x} - \frac{\partial^2 S_3}{\partial x^2}\frac{\partial S_3}{\partial y} + \ldots. \tag{5.8}$$

Здесь $S_k = S_k(x, y, t)$, а многоточием обозначена совокупность членов ряда, степень которых больше трех.

Подставив эти ряды в тождество (5.7) и приравняв формы одинаковых степеней k в его правой и левой частях, получим систему уравнений вида

$$H_k(x, y, t) = \Gamma_k(x, y, t) + \Phi_k(x, y, t) + \frac{\partial S_k(x, y, t)}{\partial t} \quad (k = 3, 4, \ldots), \tag{5.9}$$

где функции Φ_k выражаются через функции $S_3, S_4, \ldots, S_{k-1}$, $\Gamma_3, \Gamma_4, \ldots, \Gamma_{k-1}$. Например,

$$\Phi_3 = 0, \quad \Phi_4 = \frac{\partial S_3}{\partial x}\frac{\partial \Gamma_3}{\partial y} - \frac{\partial S_3}{\partial y}\frac{\partial \Gamma_3}{\partial x} - \frac{\partial^2 S_3}{\partial t \partial x}\frac{\partial S_3}{\partial y}, \tag{5.10}$$

где $S_3 = S_3(x, y, t)$, $\Gamma_3 = \Gamma_3(x, y, t)$.

Уравнения (5.9) надо решать последовательно, одно за другим. При этом функции S_k можно выбрать так, чтобы они были 2π-периодическими по t, а соответствующие функции H_k не зависели от времени. Например,

$$\begin{aligned}
H_3(x, y) &= \big\langle \Gamma_3(x, y, t) \big\rangle, \\
S_3(x, y, t) &= \int [H_3(x, y) - \Gamma_3(x, y, t)]\, dt, \\
H_4(x, y) &= \big\langle \Gamma_4(x, y, t) + \Phi_4(x, y, t) \big\rangle, \\
S_4(x, y, t) &= \int [H_4(x, y) - \Gamma_4(x, y, t) - \Phi_4(x, y, t)] dt.
\end{aligned}$$

Угловыми скобками обозначена операция усреднения по явно входящему времени.

Задачи об устойчивости положения равновесия $\widetilde{\xi} = \widetilde{\eta} = 0$ системы (5.1), (5.2) и равновесия $x = y = 0$ системы (1.1), (1.2) эквивалентны.

6. Об устойчивости положения равновесия $x = y = 0$ системы (1.1)

О неустойчивости равновесия по формам третьей степени. Если разложение функции Гамильтона (1.2) в ряд содержит члены третьей степени относительно x, y, то, согласно разделу 3, задача об устойчивости равновесия $x = y = 0$ системы (1.1) сводится к задаче об устойчивости положения равновесия $q = p = 0$ систем с функциями Гамильтона

$$H^* = H_3^*(q, p) + \widetilde{H}(q, p, t), \tag{6.1}$$

где H_3^* — одна из форм 1)–4) из равенств (1.3), а $\widetilde{H}$ — 2π-периодическая по t совокупность членов выше третьей степени относительно q, p.

В симплектических полярных координатах r, φ, задаваемых равенствами

$$q = \sqrt{2r}\sin\varphi, \qquad p = \sqrt{2r}\cos\varphi, \tag{6.2}$$

функция Гамильтона (6.1) принимает вид

$$H^* = r^{3/2}\, F(\varphi) + O(r^2), \tag{6.3}$$

где функция $F(\varphi)$ для форм $1) - 4)$ из равенств (1.3) будет, соответственно, такой:

$$1)\ 2^{3/2}\sin\varphi, \quad 2)\ -2^{3/2}\sin\varphi\cos 2\varphi, \quad 3)\ 2^{3/2}\sin^2\varphi\cos\varphi, \quad 4)\ 2^{3/2}\sin^3\varphi.$$

Следуя [15], покажем, что если существует φ_*, такое, что при $\varphi = \varphi_*$ имеем $F = 0$ и при этом $dF/d\varphi < 0$, то равновесие неустойчиво. Для доказательства воспользуемся теоремой Четаева о неустойчивости [16]. В качестве функции Четаева примем функцию

$$V = r^{1/2}[\cos(\varphi - \varphi_*) - \cos\varepsilon], \tag{6.4}$$

где $0 < \varepsilon \ll 1$; за область $V > 0$ примем область $\varphi = \varphi_* + \beta\varepsilon$, $(-1 < \beta < 1)$. Для производной функции V в силу уравнений движения, задаваемых функцией Гамильтона (6.3), в области $V > 0$ справедлива следующая оценка:

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{1}{4}\frac{dF(\varphi_*)}{d\varphi_*}\, r\bigl\{\varepsilon^2[1 + 5\beta^2 + O(\varepsilon)] + O(r^{1/2})\bigr\}. \tag{6.5}$$

При достаточно малом фиксированном значении ε функция (6.5) положительна, если величина r достаточно мала. На основании теоремы Четаева отсюда следует неустойчивость равновесия.

Для форм $1), 2)$ и $3)$ в качестве величины φ_* можно принять, соответственно, $\varphi_* = \pi$, $\varphi_* = 3\pi/4$ и $\varphi_* = \pi/2$. Поэтому в этих трех случаях имеет место неустойчивость. В случае же 4), когда $H_3^* = q^3$, корнем уравнения $F(\varphi) = 0$ будет любое число, кратное π, но для всех корней производная $dF/d\varphi = 0$. Задача об устойчивости в этом случае требует дополнительного исследования.

Об устойчивости и неустойчивости равновесия $x = y = 0$ по формам четвертой степени. Пусть теперь в разложении (1.2) $H_3 \equiv 0$. Тогда, в соответствии с разделом 4, задача об устойчивости равновесия $x = y = 0$ приводится к задаче об устойчивости равновесия $q = p = 0$ систем с функциями Гамильтона

$$H^* = H_4^*(q, p) + \widetilde{H}(q, p, t), \tag{6.6}$$

где $\widetilde{H}$ — 2π-периодическая функция t, разложение которой в ряд не содержит членов ниже пятой степени относительно q, p, а функция H_4^* задается формами $1) - 9)$ из равенств (1.4).

В переменных r, φ, определяемых равенствами (6.2), функция Гамильтона (6.6) принимает вид

$$H^* = r^2\, G(\varphi) + O(r^{5/2}), \tag{6.7}$$

где функция $G(\varphi)$ в случаях $1) - 9)$ будет, соответственно, такой:

$$1)\ 4 + (a-2)\sin^2 2\varphi, \quad 2)\ 1/2[a + 6 - (a-2)\cos 4\varphi], \quad 3)\ a\sin^2 2\varphi - 4\cos 2\varphi,$$
$$4)\ -4\sin^2\varphi\cos 2\varphi, \quad 5)\ 4\sin^2\varphi, \quad 6)\ \sin^2 2\varphi, \quad 7)\ 4\sin^3\varphi\cos\varphi,$$
$$8)\ -4\sin^3\varphi\cos\varphi, \quad 9)\ 4\sin^4\varphi.$$

1. В случае 1) функция $H_4^*(q, p)$ определенно положительная, и отвечающая ей функция $G(\varphi) = 4 + (a-2)\sin^2 2\varphi$ $(a > -2)$ не имеет вещественных корней. Фазовые портреты приближенной системы с функцией Гамильтона H_4^* показаны на рисунке 2. Фазовые траектории охватывают положение равновесия $q = p = 0$, и движение по ним является периодическим. Пусть I, w — переменные действие–угол в приближенной системе. Тогда, как показывают вычисления, функция Гамильтона (6.7) полной системы записывается в виде

$$H^* = H^{(0)}(I) + H^{(1)}(I, w, t), \tag{6.8}$$

где функция $H^{(1)} = O(I^{5/2})$ — 2π-периодична по w и t и аналитична по w, I при $0 < I \ll 1$, а

$$H^{(0)} = \frac{1}{2}\,\chi\, I^2, \qquad \chi = \begin{cases} \dfrac{2\pi^2}{\mathbf{K}^2\left(\dfrac{\sqrt{2-a}}{2}\right)}, & \text{если } -2 < a \leqslant 2, \\[2ex] \dfrac{\pi^2(a+2)}{2\mathbf{K}^2\left(\sqrt{\dfrac{a-2}{a+2}}\right)}, & \text{если } a \geqslant 2. \end{cases} \tag{6.9}$$

Через $\mathbf{K}$ в (6.9) обозначен полный эллиптический интеграл первого рода.

Так как $\partial^2 H^{(0)}/\partial I^2 = \chi \neq 0$, то из теоремы Мозера об инвариантных кривых [17] следует, что положение равновесия $q = p = 0$ устойчиво.

2. В остальных восьми случаях 2)–9) у уравнения $G(\varphi) = 0$ существует вещественный корень $\varphi = \varphi_*$. Имеет место следующее утверждение: если при $\varphi = \varphi_*$ производная $dG/d\varphi$ отрицательна, то положение равновесия $q = p = 0$ неустойчиво. В справедливости этого утверждения можно убедиться при помощи теоремы Четаева. Как и выше, при рассмотрении неустойчивости по формам третьей степени, за функцию V примем функцию (6.4). Для ее производной в силу уравнений движения, задаваемых функцией Гамильтона (6.7), в области $V > 0$ имеем такую оценку:

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{1}{4}\frac{dG(\varphi_*)}{d\varphi_*}\, r^{3/2}\bigl\{\varepsilon^2[1 + 7\beta^2 + O(\varepsilon)] + O(r^{1/2})\bigr\}. \tag{6.10}$$

Если производная $dG(\varphi_*)/d\varphi_*$ отрицательна, то при малых ε в достаточно малой окрестности положения равновесия правая часть равенства (6.10) положительна. Отсюда на основании теоремы Четаева и следует неустойчивость положения равновесия.

Элементарные вычисления показывают, что в случаях 2), 3), 4) и 7) всегда найдется значение $\varphi = \varphi_*$, для которого $G = 0$, а $dG/d\varphi < 0$. Поэтому в этих случаях равновесие неустойчиво. В случаях же 5), 6), 8) и 9) такие значения $\varphi = \varphi_*$ не существуют. Поэтому задача об устойчивости равновесия $q = p = 0$ в случаях, когда в функции Гамильтона (6.6)

$$H_4^* = q^2(q^2 + p^2), \qquad H_4^* = q^2p^2, \qquad H_4^* = -q^3p, \qquad H_4^* = q^4,$$

требует дополнительного исследования.

Список литературы

[1] Мерман Г. А. О неустойчивости периодического решения канонической системы с одной степенью свободы в случае главного резонанса // Проблемы движения искусственных небесных тел. Москва: АН СССР, 1963. С. 18–41.

[2] Каменков Г. В. Избранные труды: Т. 2. Москва: Наука, 1972. 214 с.

[3] Мустахишев К. М. К вопросу об устойчивости гамильтоновых систем // Изв. АН Казахской ССР. Сер. Физ.-матем., 1967, № 1, с. 63–73.
[4] Маркеев А. П. Точки либрации в небесной механике и космодинамике. Москва: Наука, 1978. 312 с.
[5] Meissner E. Über Schüttelerscheinungen in Systemen mit periodisch veränderlicher Elastizität // Schweizerische Bauzeitung, 1918, vol. 72, no. 11, pp. 95–98.
[6] van der Pol B., Strutt M. J. O. On the stability of solutions of Mathieu's equation // Philos. Mag., 1928, vol. 5, pp. 18–38.
[7] Стретт М. Д. О. Функции Ляме, Матье и родственные им в физике и технике. Харьков – Киев: Госиздат Украины, 1935. 238 с.
[8] Маркеев А. П. О нелинейном уравнении Мейсснера // Нелинейная динамика, 2011, т. 7, № 3, с. 531–547.
[9] Маркеев А. П. О движении связанных маятников // Нелинейная динамика, 2013, т. 9, № 1, с. 27–38.
[10] Арнольд В. И., Варченко А. Н., Гусейн-Заде С. М. Особенности дифференцируемых отображений. Москва: МЦНМО, 2009. 672 с.
[11] Маркеев А. П. Теоретическая механика. Москва – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2007. 592 с.
[12] Вейссенберг А. Н. Критерии знакоопределенности форм высшего порядка // ПММ, 1974, № 3, с. 571–574.
[13] Курош А. Г. Курс высшей алгебры. Москва – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2003. 432 с.
[14] Джакалья Г. Е. О. Методы теории возмущений для нелинейных систем. Москва: Наука, 1979. 319 с.
[15] Маркеев А. П. О сохраняющих площадь отображениях и их применении в динамике систем с соударениями // МТТ, 1996, № 2, с. 37–54.
[16] Малкин И. Г. Теория устойчивости движения. Москва: Наука, 1966. 532 с.
[17] Мозер Ю. Лекции о гамильтоновых системах. Москва: Мир, 1973. 168 с.

Simplifying the structure of the third and fourth degree forms in the expansion of the Hamiltonian with a linear transformation

Anatoly P. Markeev

A. Ishlinsky Institite for Problems in Mechanics, Russian Academy of Sciences
pr. Vernadskogo 101-1, Moscow, 119526, Russia
markeev@ipmnet.ru

We consider the canonical differential equations describing the motion of a system with one degree of freedom. The origin of the phase space is assumed to be an equilibrium position of the system. It is supposed that in a sufficiently small neighborhood of the equilibrium Hamiltonian function can be represented by a convergent series. This series does not include terms of the second degree, and the terms of the third and fourth degrees are independent of time. Linear real canonical transformations leading the terms of the third and fourth degrees to the simplest forms are found. Classification of the systems in question being obtained on the basis of these forms is used in the discussion of the stability of the equilibrium position.

MSC 2010: 70H05,70H15,70E50
Keywords: Hamiltonian system, canonical transformation, stability

Received November 04, 2014, accepted November 20, 2014
Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2014, vol. 10, no. 4, pp. 447–464 (Russian)