Нелинейная динамика. 2014. Т. 10. № 4. С. 465–472.
Полнотекстовая версия в свободном доступе
http://nd.ics.org.ru

УДК: 51-72
MSC 2010: 70K40, 70G40, 37B55

Примеры использования топологических методов в задаче о перевернутом маятнике на подвижном основании

И. Ю. Полехин

Рассматриваются два примера приложения топологических методов к исследованию динамики перевернутого плоского математического маятника с точкой подвеса, совершающей движение вдоль горизонтальной прямой. В первом случае метод Важевского применяется для доказательства существования решений без падений. Во втором случае показано существование периодического решения для случая, когда заданный закон движения точки подвеса является периодическим. Кроме того, показано, что вдоль данного периодического решения маятник никогда не принимает горизонтального положения (никогда не падает).

Ключевые слова: перевернутый маятник, теорема Лефшеца–Хопфа, метод Важевского, периодические решения

1. Введение

Оба рассмотренных в работе примера топологического подхода к исследованию динамики перевернутого маятника с движущейся точкой подвеса берут свое начало в хорошо известной задаче, опубликованной в книге [1]. Задача формулируется следующим образом.

Предположим, что поезд движется от станции A до станции B вдоль прямолинейного участка пути. Движение не предполагается равномерным или равноускоренным. Поезд может двигаться различным образом — ускоряться, тормозить, стоять на месте или даже некоторое время двигаться в обратном направлении, пока не прибудет в пункт B. Однако закон движения поезда считается известным заранее; то есть задана функция $s = f(t)$, где s — расстояние между поездом и станцией A, а t — время, отсчитываемое от момента отправления. К полу одного из вагонов прикреплен стержень — так, что он может двигаться вперед и назад без трения до соприкосновения с полом

Получено 13 сентября 2014 года
После доработки 19 ноября 2014 года

Полехин Иван Юрьевич
ivanpolekhin@gmail.com
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
119991, Россия, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1

вагона. Если он касается пола, то будем предполагать, что он остается лежать на нем; это будет так, если он не будет отскакивать от пола. Можно ли установить стержень в начальный момент движения поезда таким образом, что, будучи отпущенным без начальной скорости и двигаясь под действием только силы гравитации и движения поезда, он никогда не коснется пола за все время движения поезда от A до B?

Положительный ответ на этот вопрос дается самими авторами. Тем не менее, предложенное доказательство использует предположение о том, что движение стержня зависит непрерывным образом от начальных условий. Данное предположение кажется естественным, и подобное действительно верно для широкого класса механических систем, но в случае, когда считается, что, коснувшись пола, стержень вечно остается горизонтальным, непрерывная зависимость от начальных данных становится менее очевидной. В частности, эта неполнота доказательства была отмечена Арнольдом при обсуждении данной задачи [2].

В настоящей работе приводится строгое обоснование существования решения без падений (в том числе для случая решения, определенного на бесконечном полуинтервале времени), основанное на применении топологического метода Важевского. Как и в первоначальной формулировке, на начальные условия накладывается ограничение, заключающееся в равенстве нулю обобщенной скорости маятника. Также рассматривается развитие данной задачи: показано, что в случае периодического заданного закона движения точки подвеса существует периодическое решение без падений. Доказательство является следствием одного общего утверждения [3] о неподвижных точках отображений и является иллюстрацией применения методов алгебраической топологии к задачам механики.

2. Движение без падений

Доказательство существования решений без падений, которое будет приведено в данной главе, основывается на методе Важевского, изложение основных идей и утверждений которого представлено, например, в [4], [5] и [6]. При этом само доказательство приведено в самодостаточном виде, не требующем сколько-нибудь серьезного вовлечения стороннего материала.

Рассмотрим маятник длины l, состоящий из невесомого стержня и массивной точки массы m, совершающий движение в поле силы тяжести. Считаем, что точка подвеса маятника движется вдоль горизонтальной прямой по заданному закону, задаваемому гладкой функцией времени $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$. Таким образом, на движение маятника оказывает влияние закон движения точки подвеса и сила тяжести.

Через Oxy обозначим неподвижную систему декартовых координат, выбранную таким образом, что точка подвеса движется вдоль оси Ox, а ось Oy вертикальна и направлена противоположно силе тяжести. Угол между осью Ox и стержнем обозначим φ (углам $\varphi = -\pi/2$ и $\varphi = \pi/2$ соответствуют горизонтальные положения маятника). Координаты x и y массивной точки выражаются через φ обычным образом:

$$\begin{aligned} x &= f + l\sin\varphi, \\ y &= l\cos\varphi. \end{aligned}$$

Кинетическая энергия системы может быть записана в виде

$$T = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) = \frac{m}{2}\left(\dot{f}^2 + 2\dot{f}l\dot{\varphi}\cos\varphi + l^2\dot{\varphi}^2\right).$$

Пусть g — ускорение свободного падения, тогда выражение для потенциальной энергии имеет вид

$$U = mgy = mgl\cos\varphi.$$

Получаем лагранжиан системы

$$L = T - U = \frac{m}{2}\left(\dot f^2 + 2\dot f l\dot\varphi\cos\varphi + l^2\dot\varphi^2\right) - mgl\cos\varphi.$$

Уравнения, описывающие динамику системы, запишем в следующем виде:

$$\begin{aligned} &\dot\varphi = p,\\ &\dot p = \frac{g}{l}\sin\varphi - \frac{\ddot f}{l}\cos\varphi. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Здесь мы считаем, что угловая переменная 2π-периодична, то есть мы допускаем такие положения маятника, при которых он находится ниже горизонта или, используя первоначальную терминологию из [1], можно сказать, что маятник может быть «под полом» и мы не считаем, что, однажды приняв горизонтальное положение, он вечно останется в нем.

Докажем следующее утверждение.

Теорема 1. *Для системы* (2.1) *существует такое* $\varphi_0 \in (-\pi/2, \pi/2)$, *что решение, выходящее из точки* $\varphi = \varphi_0$, $p = p_0 = 0$ *в момент времени* $t = 0$, *удовлетворяет условию*

$$-\pi/2 < \varphi(t, \varphi_0, 0) < \pi/2 \quad \textit{для всех} \quad t \in [0, \infty).$$

Доказательство.

Обозначим через Ω следующее подмножество расширенного фазового пространства

$$\Omega = \{(t, \varphi, p) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \times \mathbb{R}\colon -\pi/2 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2\}.$$

Рассмотрим отрезок L, содержащийся в Ω и определенный в координатах следующим образом

$$L = \{(t, \varphi, p) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \times \mathbb{R}\colon t = 0, -\pi/2 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2, p = 0\}.$$

Покажем, что L содержит хотя бы одну точку, такую, что решение, выходящее из нее, не покинет подмножества $-\pi/2 < \varphi < \pi/2$ для всех $t \geqslant 0$.

Предположим обратное. Тогда определено отображение, которое будем обозначать σ, из L в $\partial\Omega$

$$\sigma\colon (0, \varphi_0, p_0) \in L \mapsto (t^*, \varphi(t^*, \varphi_0, p_0), p(t^*, \varphi_0, p_0)) \in \partial\Omega.$$

Здесь $t^* = \sup(T)$, $T = \{s \in [0, \infty)\colon \varphi(t, \varphi_0, p_0) \in [-\pi/2, \pi/2]\,\text{для всех}\, t \in [0, s]\}$.

Покажем, что отображение σ непрерывно. В соответствии с рассуждениями метода Важевского для этого будем рассматривать систему (2.1) в окрестности $\partial\Omega$. Для доказательства непрерывности достаточно показать, что каждое решение, начинающееся на L, либо трансверсально $\partial\Omega$ в момент своего первого достижения границы при $t > 0$, либо локально не принадлежит множеству $\Omega \setminus \partial\Omega$. Непрерывность в этих случаях следует из непрерывной зависимости решений (2.1) от начальных условий.

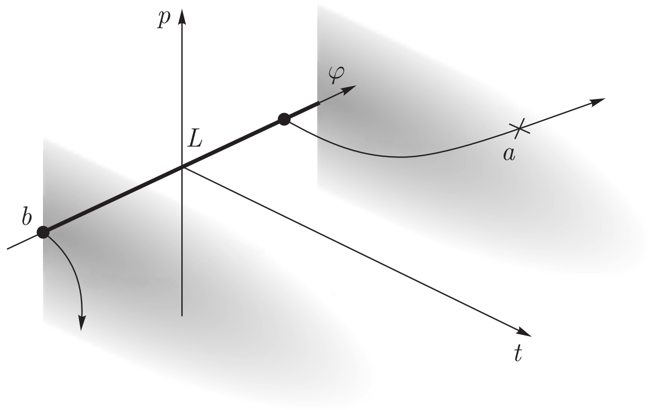

Рис. 1. Каждое решение, начинающееся на L и впервые достигающее полуплоскостей $\varphi = \pm\pi/2$ либо трансверсально границе $\partial\Omega$ (a), либо локально не принадлежит $\Omega \setminus \partial\Omega$ (b).

Это достаточное условие выполнено для (2.1). Действительно, для решений, достигающих Ω^+ и Ω^-, где

$$\begin{aligned}\Omega^- &= \{(t,\varphi,p) \in [0,\infty) \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \times \mathbb{R}\colon t > 0,\ \varphi = \pi/2,\ p > 0\} \cup \\ &\quad\cup \{(t,\varphi,p) \in [0,\infty) \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \times \mathbb{R}\colon t > 0,\ \varphi = -\pi/2,\ p < 0\}, \\ \Omega^+ &= \{(t,\varphi,p) \in [0,\infty) \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \times \mathbb{R}\colon t > 0,\ \varphi = \pi/2,\ p < 0\} \cup \\ &\quad\cup \{(t,\varphi,p) \in [0,\infty) \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \times \mathbb{R}\colon t > 0,\ \varphi = -\pi/2,\ p > 0\},\end{aligned}$$

выполнено условие трансверсальности пересечения. Более того, решения, начинающиеся на L, не могут покинуть Ω через Ω^+. Покажем, что при $t > 0$ они могут покинуть Ω только через Ω^-.

Для каждого решения, начинающегося или достигающего $\partial\Omega$ в точках множества

$$\begin{aligned}\Omega_0^+ &= \{(t,\varphi,p) \in [0,\infty) \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \times \mathbb{R}\colon t \geqslant 0,\ \varphi = \pi/2,\ p = 0\} \cup \\ &\quad\cup \{(t,\varphi,p) \in [0,\infty) \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \times \mathbb{R}\colon t \geqslant 0,\ \varphi = -\pi/2,\ p = 0\},\end{aligned}$$

из (2.1) получаем

$$\ddot{\varphi} = \begin{cases} g/l, & \text{если } \varphi = \pi/2, \\ -\,g/l, & \text{если } \varphi = -\pi/2. \end{cases}$$

Таким образом, получаем, что решения, начинающееся на L, не могут впервые достигнуть Ω_0^+ в момент времени $t > 0$, и для $t = 0$ они как минимум локально покидают Ω.

Закончим доказательство следующим рассуждением, типичным для метода Важевского. Рассмотрим множество ω граничных точек, удовлетворяющих условию $\varphi = \pm\pi/2$, то есть

$$\omega = \partial\Omega \setminus \{(t,\varphi,p) \in [0,\infty) \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \times \mathbb{R}\colon \varphi \in (-\pi/2, \pi/2)\},$$

и непрерывное отображение $\pi\colon \omega \to \omega \cap L$. Поскольку σ и π непрерывны, то получаем, что непрерывное отображение $\pi \circ \sigma$ переводит L в его двухточечную границу. Противоречие доказывает утверждение.

Замечание 1. В доказательстве неявно предполагалось, что решения существуют на всем полуинтервале $[0, \infty)$. Для данной системы это может быть строго показано. Если в каком-либо случае бесконечная продолжаемость показана быть не может, то при использовании рассуждений метода Важевского стоит говорить о том, что решение не покинет какой-либо исследуемой области расширенного фазового пространства на всем интервале существования.

Замечание 2. Аналогично может быть показано, что для сферического маятника с точкой подвеса, движущейся по плоскости, существует решение без падений. Данная задача также предлагалась в [1].

3. Периодическое решение без падений

Покажем, что в случае периодического заданного закона движения точки подвеса система (2.1) допускает периодическое решение, причем вдоль этого решения маятник никогда не принимает горизонтального положения. Данный результат является примером из механики, иллюстрирующим общее утверждение о существовании периодического решения, представленное с доказательством в [3].

Сначала, следуя [3], введем некоторые определения, незначительно модифицированные для нашего использования. Всюду будем предполагать, что $v\colon \mathbb{R} \times M \to TM$ является гладким неавтономным векторным полем на многообразии M.

Определение 1. Для $t_0 \in \mathbb{R}$ и $x_0 \in M$ отображение $t \mapsto x(t, t_0, x_0)$ задается решением системы $\dot{x} = v(t, x)$ с начальным условием $x(0, t_0, x_0) = x_0$.

Определение 2. Пусть $W \subset \mathbb{R} \times M$. Определим множество W^- следующим образом. Точка (t, x) принадлежит W^-, если существует $\delta > 0$, такое, что $(t + t_0, x(t, t_0, x_0)) \notin W$ для всех $t \in (0, \delta)$.

Определение 3. Будем называть $W \subset \mathbb{R} \times M$ блоком для системы $\dot{x} = v(t, x)$, если W и W^- компактны.

Введем некоторые обозначения. Через π_1 и π_2 обозначим проекции $\mathbb{R} \times M$ на $\mathbb{R}$ и M соответственно. Если $Z \subset \mathbb{R} \times M$, $t \in \mathbb{R}$, тогда обозначим

$$Z_t = \{z \in M\colon (t, z) \in Z\}.$$

Определение 4. Множество $W \subset [a, b] \times M$ называется сегментом над $[a, b]$, если оно является блоком для системы $\dot{x} = v(t, x)$ и выполнены следующие условия:

- существует компактное подмножество W^{--} множества W^-, называемое множеством существенного выхода

$$W^- = W^{--} \cup (\{b\} \times W_b), \quad W^- \cap ([a, b) \times M) \subset W^{--},$$

- существует гомеоморфизм $h\colon [a, b] \times W_a \to W$, такой, что $\pi_1 \circ h = \pi_1$ и

$$h([a, b] \times W_a^{--}) = W^{--}. \tag{3.1}$$

Определение 5. Пусть W — сегмент над $[a, b]$. Он называется периодическим, если

$$(W_a, W_a^{--}) = (W_b, W_b^{--}).$$

Определение 6. Для периодического сегмента W определим соответствующее отображение монодромии m следующим образом:

$$m\colon W_a \to W_a, \quad m(x) = \pi_2 h(b, \pi_2 h^{-1}(a, x)).$$

Замечание 3. Отображение монодромии m является гомеоморфизмом. Более того, можно показать, что различный выбор значения h, удовлетворяющего условиям (3.1), приводит к отображениям монодромии, гомотопным m. Из чего следует, что изоморфизм гомологий

$$\mu_W = H(m)\colon H(W_a, W_a^{--}) \to H(W_a, W_a^{--})$$

является инвариантом W (не зависит от выбора h).

Теорема 2 ([3]). *Пусть W — периодический сегмент над $[a, b]$. Тогда множество*

$$U = \{x_0 \in W_a\colon x(t-a, a, x_0) \in W_t \setminus W_t^{--} \text{ для всех } t \in [a, b]\}$$

открыто в W_a и множество неподвижных точек отображения $x(b-a, a, \cdot)|_U\colon U \to W_a$ компактно. Более того, если W и W^{--} являются абсолютными окрестностными ретрактами, то

$$\operatorname{ind}(x(b-a, a, \cdot)|_U) = \Lambda(m) - \Lambda(m|_{W_a^{--}}).$$

Здесь через $\Lambda(m)$ обозначено число Лефшеца отображения m, а через $\Lambda(m|_{W_a^{--}})$ — число Лефшеца его ограничения на W_a^{--}. В частности, если $\Lambda(m) - \Lambda(m|_{W_a^{--}}) \neq 0$, то у $x(b-a, a, \cdot)|_U$ имеется хотя бы одна неподвижная точка в W_a.

Следующее утверждение, относящееся к системе (2.1), является следствием теоремы 2.

Теорема 3. *Предположим, что в (2.1) функция $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ гладкая и T-периодическая, тогда существуют φ_0 и p_0, такие, что для всех $t \in \mathbb{R}$*

1. *$\varphi(t, 0, \varphi_0, p_0) = \varphi(t+T, 0, \varphi_0, p_0)$ и $p(t, 0, \varphi_0, p_0) = p(t+T, 0, \varphi_0, p_0)$,*
2. *$\varphi(t, 0, \varphi_0, p_0) \in (-\pi/2, \pi/2)$.*

Доказательство.

Сначала покажем, что периодический сегмент для рассматриваемой системы можно определить следующим образом:

$$W = \{(t, \varphi, p) \in [0, T] \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \times \mathbb{R}\colon -\pi/2 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2,\ -p' \leqslant p \leqslant p'\},$$

где p' удовлетворяет условию

$$p' > \sup_{t \in [0, T]} \frac{|\dddot{f}|}{g}.$$

Ясно, что W компактно. Покажем, что W^{--} также является компактом и

$$\begin{aligned} W^{--} = {} & \{(t, \varphi, p) \in [0, T] \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \times \mathbb{R}\colon \varphi = \pi/2,\ 0 \leqslant p \leqslant p'\} \cup \\ & \cup \{(t, \varphi, p) \in [0, T] \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \times \mathbb{R}\colon \varphi = -\pi/2,\ -p' \leqslant p \leqslant 0\} \cup \\ & \cup \{(t, \varphi, p) \in [0, T] \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \times \mathbb{R}\colon \varphi'(t) \leqslant \varphi \leqslant \pi/2,\ p = p'\} \cup \\ & \cup \{(t, \varphi, p) \in [0, T] \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \times \mathbb{R}\colon -\pi/2 \leqslant \varphi \leqslant \varphi'(t),\ p = -p'\}, \end{aligned}$$

где для данного $t \in [0, T]$ $\varphi'(t) \in (-\pi/2, \pi/2)$ удовлетворяет условию

$$g \sin \varphi'(t) - \ddot{f}(t) \cos \varphi'(t) = 0.$$

Действительно, если $p = p'$ и $\varphi = \varphi'(t)$ (то есть $\dot{p} = 0$), то имеем из (2.1)

$$\begin{aligned} \ddot{p} &= \frac{g}{l}\, p' \cos \varphi'(t) - \frac{\dddot{f}}{l} \cos \varphi'(t) + \frac{\ddot{f}}{l}\, p' \sin \varphi'(t) = \\ &= \frac{g}{l}\, p' \cos \varphi'(t) - \frac{\dddot{f}}{l} \cos \varphi'(t) + \frac{\ddot{f}^2}{gl}\, p' \cos \varphi'(t) > 0. \end{aligned}$$

Поскольку $\varphi'(t)$ — единственный корень уравнения $\dot{p} = 0$ на отрезке $[-\pi/2, \pi/2]$, то при $p = p'$ и $\varphi'(t) < \varphi \leqslant \pi/2$ получаем $\dot{p} > 0$, для $p = p'$ и $-\pi/2 \leqslant \varphi < \varphi'(t)$ имеем $\dot{p} < 0$. Аналогично рассматривается случай $p = -p'$ и $\varphi = \varphi'(t)$:

$$\begin{aligned} \ddot{p} &= -\frac{g}{l}\, p' \cos \varphi'(t) - \frac{\dddot{f}}{l} \cos \varphi'(t) - \frac{\ddot{f}}{l}\, p' \sin \varphi'(t) = \\ &= -\frac{g}{l}\, p' \cos \varphi'(t) - \frac{\dddot{f}}{l} \cos \varphi'(t) - \frac{\ddot{f}^2}{gl}\, p' \cos \varphi'(t) < 0; \end{aligned}$$

$\dot{p} > 0$ при $p = -p'$, $\varphi'(t) < \varphi \leqslant \pi/2$ и $\dot{p} < 0$ при $p = p'$, $-\pi/2 \leqslant \varphi < \varphi'(t)$.

Для остальных точек W^{--} мы показали в предыдущей главе, что $\ddot{\varphi} > 0$, если $\varphi = \pi/2$, $p = \dot{\varphi} = 0$, и $\ddot{\varphi} < 0$, если $\varphi = -\pi/2$, $p = \dot{\varphi} = 0$.

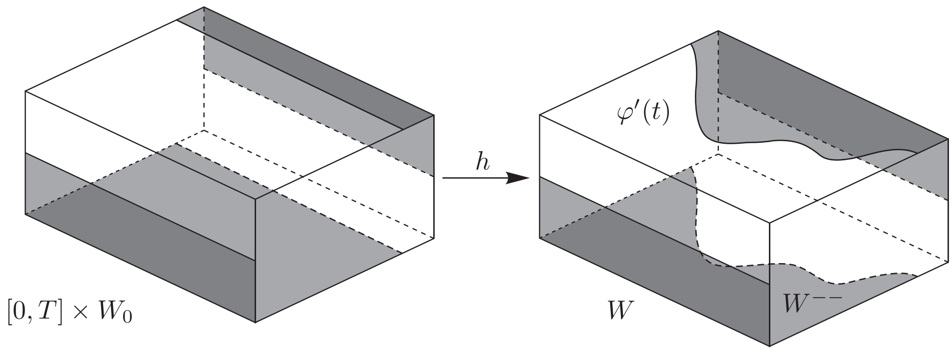

Рис. 2. Периодический сегмент W. Множество W^{--} выделено серым.

Опуская явное определение h, заметим, что в нашем случае $m = \mathrm{id}$. Таким образом, можно выразить $\Lambda(m)$ и $\Lambda(m|_{W_0^{--}})$ через эйлерову характеристику W_0 и W_0^{--}

$$\Lambda(m) - \Lambda(m|_{W_0^{--}}) = \chi(W_0) - \chi(W_0^{--}) = -1,$$

и можно применить теорему 2.

Список литературы

[1] Courant R., Robbins H. What is mathematics?: An elementary approach to ideas and methods. 2nd ed. New York: Oxford Univ. Press, 1996. 592 pp.

[2] Арнольд В. И. Что такое математика? Москва: МЦНМО, 2002. 104 с.

[3] Srzednicki R., Wójcik K., Zgliczyński P. Fixed point results based on the Ważewski method // Handbook of topological fixed point theory / R. Brown, M. Furi, L. Górniewicz, B. Jiang (Eds.). Dordrecht: Springer, 2005. P. 905–943.

[4] Ważewski T. Sur un principe topologique de l'examen de l'allure asymptotique des intégrales des équations différentielles ordinaires // Ann. Soc. Polon. Math., 1947, vol. 20, pp. 279–313.

[5] Hartman Ph. Ordinary differential equations. (Classics Appl. Math., vol. 38.) New York: Wiley, 1964. 612 pp.

[6] Reissig R., Sansone G., Conti R. Qualitative Theorie nichtlinearer Differentialgleichungen. Rome: Edizioni Cremonese, 1963. 381 pp.

Examples of topological approach to the problem of inverted pendulum with moving pivot point

Ivan Yu. Polekhin

Lomonosov Moscow State University,
GSP-1, Leninskie Gory 1, Moscow, 119991, Russia
ivanpolekhin@gmail.com

Two examples concerning application of topology in study of dynamics of inverted plain mathematical pendulum with pivot point moving along horizontal straight line are considered. The first example is an application of the Ważewski principle to the problem of existence of solution without falling. The second example is a proof of existence of periodic solution in the same system when law of motion is periodic as well. Moreover, in the second case it is also shown that along obtained periodic solution pendulum never becomes horizontal (falls).

MSC 2010: 70K40, 70G40, 37B55
Keywords: inverted pendulum, Lefschetz – Hopf theorem, Ważewski principle, periodic solution

Received September 13, 2014, accepted November 19, 2014
Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2014, vol. 10, no. 4, pp. 465–472 (Russian)