



УДК: 539.3, 531.37

MSC 2010: 70F40, 70F35, 70E18

## Динамика тела с осесимметричным основанием на наклонной плоскости

А. В. Борисов, Н. Н. Ердакова, Т. Б. Иванова, И. С. Мамаев

В данной работе мы исследуем динамику тела с плоским основанием, скользящего по наклонной шероховатой плоскости в предположении линейного распределения давления тела на опору как простейшей динамически согласованной модели трения. Компьютерный анализ динамики системы на наклонной плоскости с использованием фазовых портретов позволил выявить не указанные ранее динамические эффекты.

Ключевые слова: сухое трение, линейное распределение давления, плоское движение, закон Кулона

---

Получено 10 ноября 2014 года

После доработки 02 декабря 2014 года

---

Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки РФ в рамках базовой части государственного задания вузам.

---

Борисов Алексей Владимирович

[borisov@rcd.ru](mailto:borisov@rcd.ru)

Ердакова Надежда Николаевна

[enn@rcd.ru](mailto:enn@rcd.ru)

Удмуртский государственный университет

426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1

Иванова Татьяна Борисовна

[tbsp@rcd.ru](mailto:tbsp@rcd.ru)

Удмуртский государственный университет

426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1

Московский физико-технический институт (государственный университет)

141700, Россия, г. Долгопрудный, Институтский пер., д. 9

Мамаев Иван Сергеевич

[mmaev@rcd.ru](mailto:mmaev@rcd.ru)

Ижевский государственный технический университет им. М. Т. Калашникова

426069, Россия, г. Ижевск, ул. Студенческая, д. 7

## Введение

В вышедшей недавно нашей работе [1] была исследована динамика сбалансированного тела (шайбы) с плоским кольцевым и круговым основанием, скользящих по *горизонтальной* шероховатой плоскости в предположении о линейном распределении давления тела на опору как простейшей динамически согласованной модели трения [2, 5]. Используемый при анализе уравнений движения метод дискриптивной функции и последующее построение фазовых портретов позволили качественно описать все возможные типы движения и определить значения критических параметров, описать общие свойства и найти частные решения без явного интегрирования уравнений движения. Работа [1] содержит подробный анализ динамики диска на горизонтальной плоскости и список литературы по данной тематике.

На *наклонной* плоскости построить аналогичную дискриптивную функцию и аналитически определить критические параметры невозможно. Ранее динамика диска (цилиндрического тела очень малой высоты с круговым сплошным основанием) чисто аналитически рассматривалась в работах [3, 4], где были указаны некоторые закономерности движения (достаточно очевидные, появление которых, как правило, ожидаемо в системах с трением). В частности, в [3, 4] показано, что если коэффициент трения больше тангенса угла наклона плоскости, то тело останавливается за конечное время. На основании предельных свойств функций, описывающих движение диска, определены некоторые движения, явно не достаточные для представления полной картины. Более того, некоторые результаты, полученные в данных работах, противоречат друг другу.

В данной работе мы выполнили систематический анализ движения шайбы с круглым сплошным основанием (в том числе ненулевой высоты) на *наклонной* плоскости, используя аналитические, геометрические и компьютерные методы, что позволило, с одной стороны, верифицировать полученные ранее результаты, а с другой стороны, обнаружить совершенно новые неочевидные динамические эффекты.

## 1. Уравнения движения

Рассмотрим скольжение по наклонной плоскости однородного сбалансированного цилиндрического тела массы  $m$ , центр масс которого лежит на высоте  $h$  (см. рис. 1). Здесь мы приведем лишь краткий вывод уравнений движения, поскольку в предыдущей работе [1] они были подробно выведены для случая горизонтальной плоскости.

Пусть  $\mathbf{v}$  — абсолютная скорость центра масс, а  $\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{e}_3$  — угловая скорость тела, где  $\mathbf{e}_3$  — орт вертикали. В неподвижной системе координат уравнения движения (выражающие закон изменения импульса и момента импульса относительно центра масс) имеют вид,

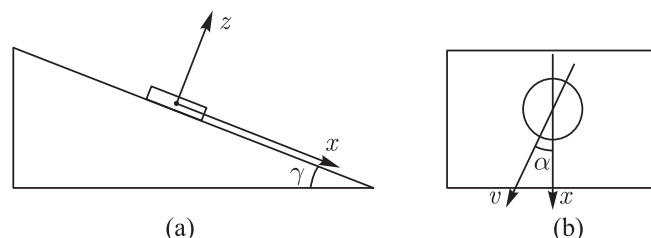


Рис. 1. Скольжение по наклонной плоскости ( $\gamma$  — угол наклона плоскости скольжения к горизонтальной плоскости): а) вид сбоку, б) вид сверху.

аналогичный случаю движения по горизонтальной плоскости,

$$m\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{F}^f + \mathbf{N} + m\mathbf{g}, \quad (\mathbf{I}\boldsymbol{\omega})\dot{=} \mathbf{M}^f + \mathbf{M}^n, \quad (1)$$

где  $\mathbf{F}^f$  — сила трения,  $\mathbf{N}$  — реакция опоры,  $\mathbf{M}^f$  — момент силы трения,  $\mathbf{M}^n$  — момент реакции опоры (параллелен плоскости опоры).

Запишем эти уравнения в скалярной форме при помощи подвижного репера Серре–Френе, связанного с (плоской) траекторией центра масс тела. Обозначим через  $\boldsymbol{\xi}(t)$  радиус-вектор центра масс в неподвижной (инерциальной) системе отсчета, тогда его абсолютная скорость и ускорение могут быть представлены как

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = \mathbf{v} = v\boldsymbol{\tau}, \quad \ddot{\boldsymbol{\xi}} = \dot{v}\boldsymbol{\tau} + v^2\rho\mathbf{n},$$

где  $v$  — модуль скорости,  $\boldsymbol{\tau}$  — единичный касательный вектор к траектории,  $\mathbf{n}$  — нормаль к траектории,  $\rho$  — ее кривизна. Для плоской кривой репер  $\boldsymbol{\tau}$ ,  $\mathbf{n}$  допускает естественную параметризацию

$$\boldsymbol{\tau} = (\cos \alpha, \sin \alpha), \quad \mathbf{n} = (-\sin \alpha, \cos \alpha),$$

где  $\alpha$  — угол поворота вектора скорости относительно неподвижных осей (см. рис. 1b). Отсюда при помощи соотношений Серре–Френе ( $\dot{\boldsymbol{\tau}} = v\rho\mathbf{n}$ ,  $\dot{\mathbf{n}} = -v\rho\boldsymbol{\tau}$ ) получим

$$\dot{\alpha} = v\rho.$$

Пользуясь этими соотношениями, перепишем уравнения (1) в проекциях на оси, задаваемые ортами  $\boldsymbol{\tau}$ ,  $\mathbf{n}$ ,  $\mathbf{e}_3$ :

$$\begin{aligned} M_\tau^n + M_\tau^f &= M_n^n + M_n^f = 0, & N - mg \cos \gamma &= 0, \\ \dot{v} &= \frac{F_\tau^f}{m} + g \sin \gamma \cos \alpha, & v\dot{\alpha} &= \frac{F_n^f}{m} - g \sin \gamma \sin \alpha, & \dot{\omega} &= \frac{M_3^f}{I_3}, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $I_3$  — момент инерции шайбы относительно оси динамической симметрии, проходящей через центр масс перпендикулярно площадке контакта.

Дополняя эти уравнения кинематическими соотношениями для радиус-вектора траектории  $\boldsymbol{\xi}$  и угла поворота тела  $\varphi$ ,

$$\dot{\xi}_1 = v \cos \alpha, \quad \dot{\xi}_2 = v \sin \alpha, \quad \dot{\varphi} = \omega, \quad (3)$$

получим полную систему (2) и (3) уравнений движения тела.

Для вычисления входящих в уравнения движения силы и момента трения в системе координат, связанной с геометрическим центром  $O$  площадки контакта и осями, направленными вдоль ортов  $\boldsymbol{\tau}$ ,  $\mathbf{n}$ , параметризуем радиус-вектор  $\mathbf{r}$  элемента площади  $dS$  безразмерными декартовыми координатами

$$\mathbf{r} = (Rx_\tau, Rx_n),$$

безразмерный элемент площади обозначим как  $ds = dx_\tau dx_n = R^{-2} dS$ .

Распределение давления по площадке контакта представим в виде

$$p(\mathbf{r}) = p_0(1 + a_\tau x_\tau + a_n x_n), \quad p_0 = \frac{mg \cos \gamma}{\pi R^2}, \quad (4)$$

при этом заведомо выполнено уравнение для  $N$  в системе (2).



Пользуясь введенными обозначениями, запишем силу реакции и силу трения элемента площади  $ds$ :

$$\mathbf{e}_3 dN = \mathbf{e}_3 R^2 p(\mathbf{r}) ds, \quad d\mathbf{F} = R^2 p(\mathbf{r}) \frac{\mathbf{v} + \omega \mathbf{e}_3 \times \mathbf{r}}{|\mathbf{v} + \omega \mathbf{e}_3 \times \mathbf{r}|} ds, \quad \mathbf{e}_3 dM_3^f = \mathbf{r} \times d\mathbf{F}. \quad (5)$$

Замечая, что при интегрировании по симметричной области основания шайбы все нечетные по  $x_\tau$  слагаемые сокращаются, представим компоненты силы трения и момент  $M_3^f$  в форме

$$\begin{aligned} F_\tau^f &= -fp_0 R^2 \int_{\overline{D}} (1 + a_n x_n) \frac{v - ux_n}{\sqrt{(v - ux_n)^2 + u^2 x_\tau^2}} ds, \\ F_n^f &= -fp_0 R^2 a_\tau \int_{\overline{D}} \frac{ux_\tau^2}{\sqrt{(v - ux_n)^2 + u^2 x_\tau^2}} ds, \\ M_3^f &= -fp_0 R^3 \int_{\overline{D}} (1 + a_n x_n) \frac{ux_\tau^2 - x_n(v - ux_n)}{\sqrt{(v - ux_n)^2 + u^2 x_\tau^2}} ds, \quad u = R\omega, \end{aligned} \quad (6)$$

где  $\overline{D}$  — область интегрирования по безразмерным переменным  $x_\tau, x_n$  (круг единичного радиуса).

Чтобы найти неизвестные коэффициенты  $a_\tau, a_n$ , воспользуемся оставшимися алгебраическими уравнениями в (2). Из (5) следует, что проекции момента сил трения и реакции на плоскость движения можно представить в форме

$$M_\tau^f \boldsymbol{\tau} + M_n^f \mathbf{n} = -h \mathbf{e}_3 \times \int d\mathbf{F}, \quad M_\tau^n \boldsymbol{\tau} + M_n^n \mathbf{n} = -\mathbf{e}_3 \times \int \mathbf{r} dN.$$

Отсюда, исключая при интегрировании нечетные по  $x_\tau$  слагаемые, находим

$$hF_\tau^f = -R^3 p_0 J a_\tau, \quad hF_n^f = -R^3 p_0 J a_n, \quad J = \int_{\overline{D}} x_\tau^2 ds. \quad (7)$$

Подставляя (6) и приведя подобные, получим систему уравнений для  $a_\tau, a_n$ :

$$\begin{aligned} a_\tau - \eta A_{12} a_n &= \eta B, \quad -\eta A_{21} a_\tau + a_n = 0, \\ A_{12} &= \int_{\overline{D}} \frac{x_n(v - ux_n)}{\sqrt{(v - ux_n)^2 + u^2 x_\tau^2}} ds, \quad A_{21} = \int_{\overline{D}} \frac{ux_\tau^2}{\sqrt{(v - ux_n)^2 + u^2 x_\tau^2}} ds, \\ B &= \int_{\overline{D}} \frac{v - ux_n}{\sqrt{(v - ux_n)^2 + u^2 x_\tau^2}} ds, \end{aligned} \quad (8)$$

где  $\eta = \frac{fh}{RJ}$  — безразмерный параметр, для круга  $J = \frac{\pi}{4}$ .

Разрешая эти уравнения и подставляя в (7), для компонент силы трения получим:

$$F_\tau^f = -fp_0 R^2 \frac{B}{1 - \eta^2 A_{12} A_{21}}, \quad F_n^f = -fp_0 R^2 \frac{\eta A_{21} B}{1 - \eta^2 A_{12} A_{21}}. \quad (9)$$

Из (6) находим момент силы трения в виде

$$M_3^f = -fp_0R^3 \left( A_{21} - A_{12} + \frac{\eta^2 A_{21} BC}{1 - \eta^2 A_{12} A_{21}} \right),$$

$$C = \int_{\overline{D}} \frac{x_n (ux_\tau^2 - x_n(v - ux_n))}{\sqrt{(v - ux_n)^2 + u^2 x_\tau^2}} ds. \tag{10}$$

Подставляя найденные выражения в (2) и (3) и производя необходимые упрощения, получим уравнения движения сбалансированного тела, опирающегося на наклонную шероховатую плоскость осесимметричной площадкой, в виде

$$\dot{v} = g_0 \left( \cos \alpha - \frac{\kappa}{\pi} \frac{B}{1 - \eta^2 A_{12} A_{21}} \right), \quad v\dot{\alpha} = -g_0 \left( \sin \alpha + \frac{\kappa}{\pi} \frac{\eta A_{21} B}{1 - \eta^2 A_{12} A_{21}} \right),$$

$$\dot{u} = -\frac{2\kappa g_0}{\pi} \left( A_{21} - A_{12} + \frac{\eta^2 A_{21} BC}{1 - \eta^2 A_{12} A_{21}} \right), \quad \dot{\varphi} = \frac{u}{R},$$

$$\dot{\xi}_1 = v \cos \alpha, \quad \dot{\xi}_2 = v \sin \alpha,$$

где  $g_0 = g \sin \gamma$ ,  $\kappa = f \operatorname{ctg} \gamma$ .

Функции  $A_{ij}$ ,  $B$ ,  $C$  зависят от  $k = v/u$  и для случая сплошного круглого основания выражаются через полные эллиптические интегралы [1]:

$$A_{12}(k) = \frac{2}{45k^2} \left( (k+1)(8k^4 - 13k^2 + 3)\mathbf{E}(k_e) - (k-1)(8k^4 - 5k^2 - 3)\mathbf{K}(k_e) \right),$$

$$A_{21}(k) = \frac{2(k+1)}{45k^2} \left( (2k^2 - 3)(k-1)^2 \mathbf{K}(k_e) - (2k^4 - 7k^2 - 3)\mathbf{E}(k_e) \right),$$

$$B(k) = \frac{2(k+1)}{3k} \left( (k^2 + 1)\mathbf{E}(k_e) - (k-1)^2 \mathbf{K}(k_e) \right),$$

$$C(k) = \frac{4}{15k} \left( (k^5 - k^4 - k + 1)\mathbf{K}(k_e) - (k^5 + k^4 - k^3 - k^2 + k + 1)\mathbf{E}(k_e) \right).$$

Из (11) видно, что, аналогично случаю горизонтальной плоскости, отделяется система, описывающая эволюцию переменных  $v$ ,  $u$ , по решениям которой остальные переменные получаются в виде последовательных квадратур.

Полученная редуцированная система (11) относительно переменных  $v$ ,  $u$ ,  $\alpha$ , приводится к системе двух уравнений, если ввести безразмерную величину  $k$  и выполнить замену времени  $g_0 dt = u d\tau$ :

$$\frac{dk}{d\tau} = \cos \alpha - \frac{\kappa}{\pi} \frac{B}{1 - \eta^2 A_{12} A_{21}} + 2k \frac{\kappa}{\pi} \left( A_{21} - A_{12} + \frac{\eta^2 A_{21} BC}{1 - \eta^2 A_{12} A_{21}} \right),$$

$$k \frac{d\alpha}{d\tau} = -\sin \alpha - \frac{\kappa}{\pi} \frac{\eta A_{21} B}{1 - \eta^2 A_{12} A_{21}}. \tag{12}$$

Таким образом, анализ динамики сводится к исследованию системы (12) на полуцилиндре  $S^2 = \{(\alpha, k) \mid 0 \leq \alpha \leq 2\pi, 0 \leq k\}$ . Отметим, что после замены времени правые части (12) зависят только от параметров  $\eta$  и  $\kappa$ .

ЗАМЕЧАНИЕ. Для анализа динамики системы при  $k = v/u \rightarrow \infty$  мы будем обращаться к первоначальной системе (11), поскольку замена времени  $g_0 dt = u d\tau$  не позволяет из (12) явным образом определить характер приближения функции  $u \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ .

Так как рассматривается система с трением, мера не сохраняется, следовательно, все траектории стремятся к различным инвариантным многообразиям (неподвижным точкам, циклам и т.п.). Поэтому для качественного анализа динамики прежде всего необходимо исследовать особые точки системы (12).



### 1.1. Случай плоского диска

В случае скольжения бесконечно тонкого диска ( $\eta = 0$ ) уравнения (12) значительно упрощаются и зависят от одного параметра  $\kappa$ :

$$\begin{aligned} \frac{dk}{d\tau} &= \tilde{V}(k, \alpha), & k \frac{d\alpha}{d\tau} &= -\sin \alpha, \\ \tilde{V} &= \cos \alpha + V(k), & V(k) &= \frac{\kappa}{\pi} (2k(A_{21} - A_{12}) - B). \end{aligned} \quad (13)$$

Здесь  $V(k)$  с точностью до умножения на  $g_0$  совпадает с дескриптивной функцией при движении шайбы по горизонтальной плоскости, явные выражения для которой в случае основания в виде сплошного круга приведены в [1].

Исследование динамики этой системы будем выполнять при помощи метода фазовых портретов. Для этого проанализируем, какие качественно различные типы фазовых портретов на  $\mathcal{C}^2$  возможны в зависимости от параметра  $\kappa$ . И прежде всего найдем неподвижные точки (13).

Отметим, что если в начальный момент  $\alpha = 0$  или  $\alpha = \pi$ , то эти величины сохраняются в процессе движения, а следовательно, на плоскости  $(\alpha, k)$  имеется два инвариантных многообразия  $\{(\alpha, k) \mid \alpha = 0\}$  и  $\{(\alpha, k) \mid \alpha = \pi\}$ . Как будет видно ниже, первое из них устойчивое, а второе неустойчивое.

Из второго уравнения (13) видно, что неподвижные точки системы лежат на инвариантных многообразиях  $\alpha = 0$  и  $\alpha = \pi$  ( $\alpha = 0$  — устойчивое,  $\alpha = \pi$  — неустойчивое). Поэтому значения  $k$ , соответствующие неподвижным точкам системы, определяются из уравнений

$$\begin{aligned} V(k) + 1 &= 0 \quad \text{при } \alpha = 0, \\ V(k) - 1 &= 0 \quad \text{при } \alpha = \pi. \end{aligned}$$

Поведение функции  $V(k)$  таково, что существует два критических значения  $\kappa$ , при которых происходит перестройка фазового портрета, связанная с изменением количества неподвижных точек (см. рис. 2):

$$\kappa_1 = 2, \quad \kappa_2 \approx 12.42.$$

Будем изображать траектории системы (13) на плоскости  $(\alpha, \arctg k)$ . При этом возможно четыре различных качественных портрета системы.

1. При  $\kappa > \kappa_2$  (рис. 2а) система имеет три неподвижные точки: устойчивая точка  $(0, k_0)$  и две точки  $(\pi, k_1), (\pi, k_2)$ , причем  $k_1 < k_2 < k_0$ . Точка  $(\pi, k_1)$  — неустойчивая, а  $(\pi, k_2)$  — устойчивая.
2. При  $\kappa = \kappa_2$  (рис. 2б) система имеет две неподвижные точки: одна устойчивая точка  $(0, k_0)$  и одна вырожденная неустойчивая точка  $(\pi, k_3)$ , возникшая в результате слияния точек  $(\pi, k_1)$  и  $(\pi, k_2)$ .
3. При  $\kappa \in (\kappa_1, \kappa_2)$  (рис. 2с) система имеет одну особую устойчивую точку  $(0, k_0)$ .
4. При  $\kappa \leq \kappa_1$  (рис. 2д)  $k_0 \rightarrow \infty$ . Все траектории притягиваются к  $\alpha = 0$ , при этом  $k \rightarrow \infty$ , то есть  $u \rightarrow 0$ .

Для анализа динамики при  $k \rightarrow \infty$  будем использовать первоначальную систему (11) в виде

$$\dot{v} = g_0 \left( 1 - \frac{\kappa B}{\pi} \right), \quad \dot{u} = -\frac{2\kappa g_0}{\pi} (A_{21} - A_{12}). \quad (14)$$



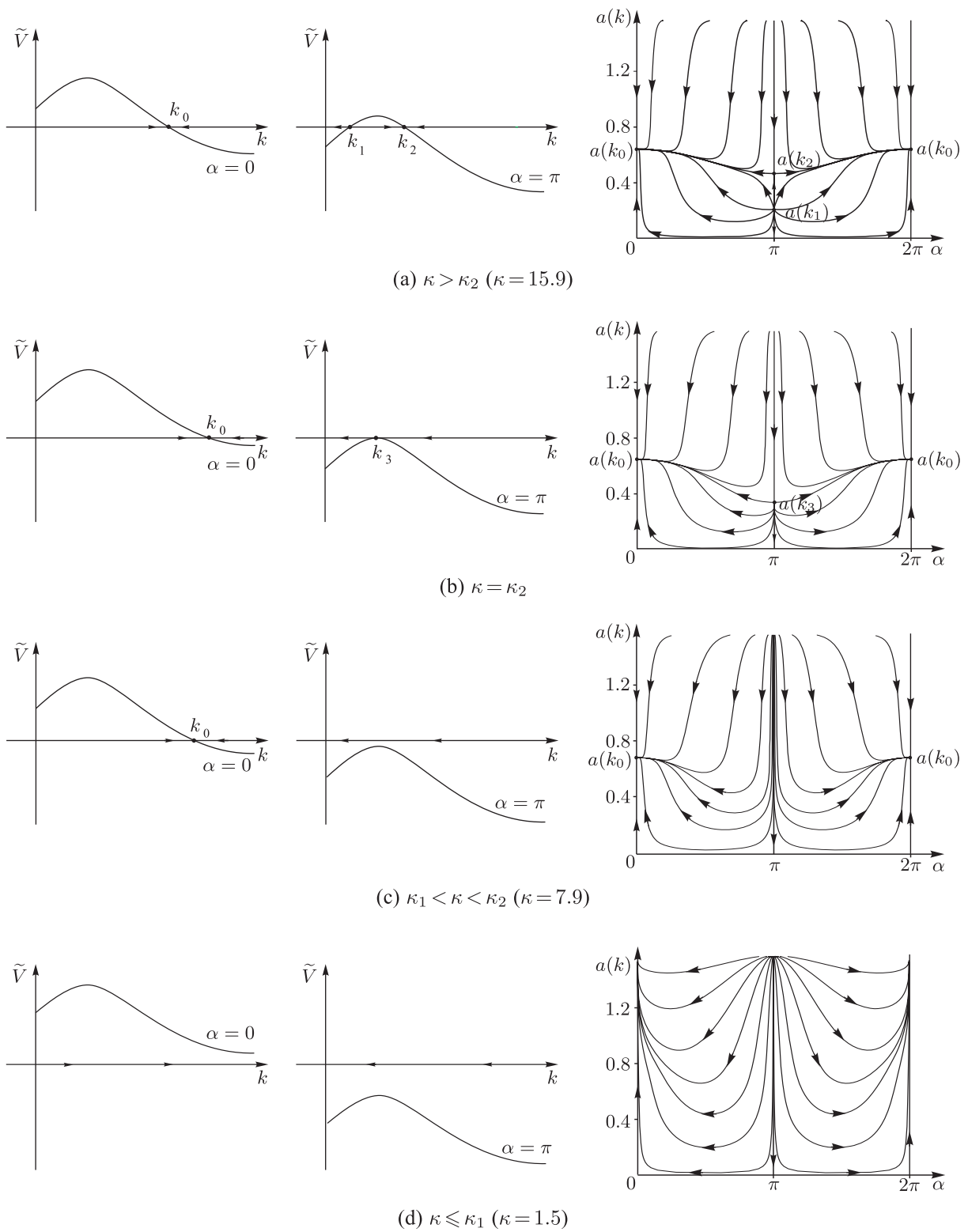


Рис. 2. Графики функции  $\tilde{V}(k, \alpha)$  при условии  $\alpha = 0$  и  $\alpha = \pi$  с указанием направления эволюции  $k$  и соответствующие фазовые портреты при различных значениях  $\kappa$ . Для сокращения обозначено  $a(k) = \arctg k$ .

Прежде чем анализировать фазовые портреты приведенной системы (13) отметим, что в исходной системе существует еще одна неподвижная точка  $u = 0, v = 0, \alpha = 0$ , которая является решением системы (11)  $\dot{v} = \dot{\alpha} = \dot{u} = 0$  только при  $\kappa > 1$ . Таким образом, существует еще одно критическое значение

$$\kappa_0 = 1 \quad (f = \operatorname{tg} \gamma),$$

хорошо известное в теории трения: оно соответствует минимальному углу, при котором начинается скольжение тела по наклонной плоскости. В данном случае при  $\kappa = \kappa_0$  происходит изменение закона движения по фазовой траектории, но не меняется качественный вид фазового портрета. Замечание о том, почему данную особенность невозможно увидеть на плоскости  $\operatorname{arctg} k(\alpha)$ , будет приведено ниже.

**1. Случай  $\kappa < \kappa_0$**  (см. рис. 2d, 3a). Система не имеет особых точек, движение продолжается бесконечно долго. В случае  $\alpha(0) \neq \pi$  при  $\alpha \rightarrow 0, k \rightarrow \infty$ , то есть через некоторое конечное время линейная скорость будет направлена вдоль линии наименьшего ската. Угловая скорость убывает, асимптотически приближаясь к нулю.

Так как при  $k \rightarrow \infty$  функция  $B(k) \rightarrow \pi$ , из первого уравнения (14) находим  $\dot{v} = g_0(1 - \kappa)$ , то есть, начиная с некоторого момента времени, движение центра масс становится равноускоренным с ускорением

$$a_0 = g_0(1 - \kappa) > 0.$$

При  $\alpha(0) = \pi$  скорость центра масс диска за конечное время обращается в нуль при ненулевой угловой скорости, затем начинается равноускоренное движение вниз при  $u \rightarrow 0, \alpha \rightarrow 0$ .

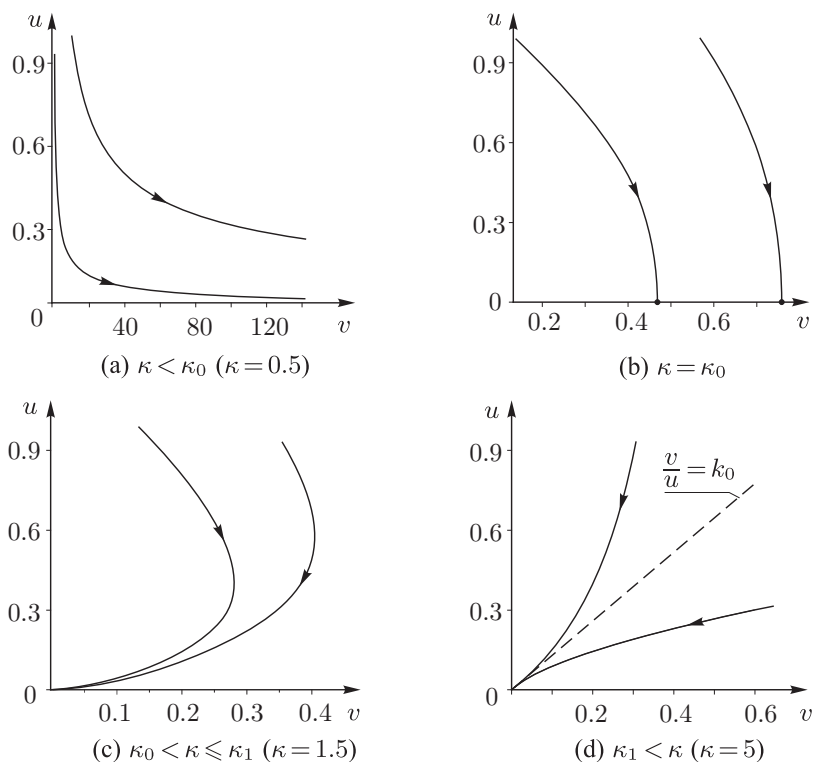


Рис. 3. Проекция на плоскость  $(u, v)$  траекторий системы (14), описывающей движение диска по наклонной плоскости при различных значениях  $\kappa$ .



**2. Случай  $\kappa = \kappa_0$**  (см. рис. 2d, 3b). Аналогично предыдущему случаю движение происходит бесконечно долго. Если  $\alpha(0) \neq \pi$ , то  $\alpha \rightarrow 0$ ,  $u \rightarrow 0$ . Отличие состоит в том, что, начиная с некоторого момента времени, центр масс движется равномерно ( $a_0 = 0$ ). Если  $\alpha(0) = \pi$ , то, аналогично случаю  $\kappa < \kappa_0$ , подъем центра масс до верхней точки произойдет за конечное время при ненулевой угловой скорости. Далее центр масс начнет двигаться вниз ( $\alpha = 0$ ) при  $u \rightarrow 0$  бесконечно долго, и, начиная с некоторого момента времени, равномерно.

**3. Случай  $\kappa_0 < \kappa \leq \kappa_1$**  (см. рис. 2d, 3c). Как было отмечено выше, при любых  $\kappa > \kappa_0$  существует особая точка  $u = v = \alpha = 0$ , то есть любое движение прекращается за конечное время. При этом линейная и угловая скорость обращаются в нуль одновременно.

Если  $\alpha(0) \neq \pi$ , то  $\alpha \rightarrow 0$ . Так как других неподвижных точек нет, то при  $\alpha(0) = \pi$  диск за конечное время поднимется до наивысшей точки при ненулевой угловой скорости, затем начнется движение вниз (при  $\alpha \rightarrow 0$ ), после чего он остановится за конечное время.

**ЗАМЕЧАНИЕ 1.** При  $\kappa \leq \kappa_1$  мы наблюдаем три различных типа движения и выделяем критическое значение  $\kappa_0$ . Но на фазовой плоскости  $\arctg k(\alpha)$  (см. рис. 2) мы не наблюдаем каких-либо качественных различий во всем рассматриваемом интервале значений  $\kappa$ . Это связано с тем, что при  $t \rightarrow \infty$  функция  $u \rightarrow 0$  и  $k = v/u \rightarrow \infty$ , но характер этого приближения различен во всех рассмотренных выше трех случаях.

Так как при  $k \rightarrow \infty$  функции  $A_{21}(k) - A_{12}(k) \sim \pi/(4k)$ , систему (14) можно представить в виде

$$\dot{v} = a_0, \quad \dot{u} = -\frac{q\pi u}{2v}. \tag{15}$$

Интегрируя, получим

$$u \sim (v_0 + a_0 t)^{-\beta}, \quad v \sim (v_0 + a_0 t), \quad \beta = \frac{\kappa}{2(1 - \kappa)},$$

где  $v_0$  — некоторая произвольная константа. Следовательно,

$$k \sim (v_0 + a_0 t)^{\beta+1}.$$

При  $\kappa < \kappa_0$  константы  $a_0 > 0$ ,  $\beta > 0$ , следовательно,  $k \rightarrow +\infty$  как обычная степенная функция при  $t \rightarrow \infty$ .

В случае  $\kappa = 1$  ускорение  $a_0 = 0$ , поэтому (15) представим в виде  $\dot{u} = -\frac{q\pi u}{2v_0}$ . Интегрируя, получим

$$u \sim e^{-\lambda t}, \quad v \sim v_0, \quad k = v/u \sim e^{\lambda t}, \quad \lambda = \frac{fg \cos \gamma}{2v_0} > 0,$$

то есть  $k \rightarrow +\infty$  экспоненциально.

При  $\kappa_0 < \kappa \leq \kappa_1$  константы  $a_0 < 0$ ,  $\beta < -1$ , следовательно, при приближении к моменту остановки  $t_0$  ( $v_0 + a_0 t_0 = 0$ ) имеем  $k \rightarrow \infty$ .

Таким образом, несмотря на различное поведение функций  $u$  и  $v$  (см. рис. 4), во всех трех случаях  $k \rightarrow \infty$ , что и отражено на фазовом портрете при  $\kappa \leq \kappa_1$  (см. рис 2d).

**4. Случай  $\kappa_1 < \kappa < \kappa_2$**  (см. рис. 2c, 3d). В отличие от всех вышерассмотренных случаев, здесь существует устойчивая неподвижная точка  $k_0 < \infty$  при  $\alpha = 0$ . Поэтому если  $\alpha(0) \neq \pi$ , то  $\alpha \rightarrow 0$ , при этом линейная и угловая скорости убывают до нуля пропорционально ( $v = k_0 u$  — наклонная асимптота, см. рис. 3d), движение останавливается за конечное время. Аналогичное движение наблюдается при всех  $\kappa > \kappa_1$ , поэтому при дальнейшем описании будем рассматривать только особенности движения при  $\alpha(0) = \pi$ . В данном случае при  $\alpha = \pi$  особых точек нет, поэтому движение аналогично случаю  $\kappa_0 < \kappa \leq \kappa_1$ .

**5. Случай  $\kappa = \kappa_2$**  (см. рис. 3b, 4d). При  $\alpha = \pi$  имеется одна неустойчивая особая точка  $k_3$ . Следовательно, при  $\alpha(0) = \pi$  и  $k(0) > k_3$  (малая угловая скорость) центр масс



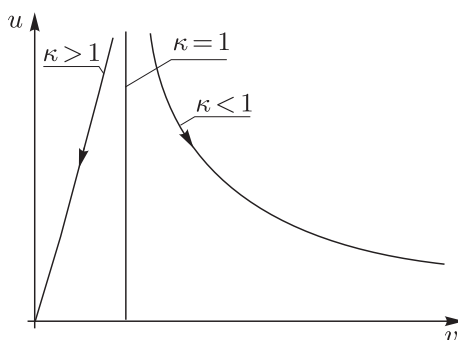


Рис. 4. Графики, демонстрирующие качественное поведение функции  $u(v)$  при  $u \rightarrow 0$  при различных значениях  $\kappa$ .

диска будет подниматься до момента остановки в верхней точке подъема, при этом угловая скорость будет убывать до нуля пропорционально линейной ( $u = k_3 v$ ). Если же  $\alpha(0) = \pi$  и  $k(0) < k_3$  (*большая угловая скорость*), центр масс сначала поднимется до верхней точки при ненулевой угловой скорости, затем начнет двигаться вниз вдоль линии наименьшего ската до момента остановки, при этом  $u = k_0 v$ .

**6. Случай  $\kappa_2 < \kappa$**  (см. рис. 3а, 4d). При  $\alpha = \pi$  имеется две неподвижные точки: неустойчивая  $k_1$  и устойчивая  $k_2$ ,  $k_1 < k_2$ . Как и в предыдущем случае, движение определяется значением  $k(0)$  относительно  $k_1$  и  $k_2$ :

- если  $k > k_1$  (*малая угловая скорость*), движение центра масс остановится одновременно с вращением ( $u = k_2 v$ ) за конечное время  $t_*$ ,  $\alpha(t_*) = \pi$ .
- если  $k < k_1$  (*большая угловая скорость*), центр масс поднимется до верхней точки при ненулевой угловой скорости, далее начнется движение вниз ( $u = k_0 v$ ), которое остановится за конечное время  $t_*$ ,  $\alpha(t_*) = 0$ .

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Все полученные результаты о перестройках фазовых портретов и соответствующие изменения характера движения диска на наклонной плоскости впервые указаны в этой работе. Они обобщают результаты, полученные в работе [4], и в некоторых утверждениях противоречат результатам работы [3]. В частности, для  $\kappa \leq \kappa_0$  в [3] утверждается, что при  $\alpha(0) = \pi$  в верхней точке траектории угловая скорость  $\omega$  обращается в нуль, тогда как в работе [4] и нами показано, что  $\omega \neq 0$  в момент начала движения вниз.

## 1.2. Случай цилиндра конечной высоты

При  $h \neq 0$  для качественного анализа системы мы также используем метод фазовых портретов. При построении фазовых портретов для определенности без уменьшения общности выберем  $\eta = 0.25$ ,  $f = 0.5$ ,  $h = \pi/2$  см (напомним, что в случае круглого основания условие положительной определенности давления соответствует  $\eta < 1/\pi$ ).

Как видно из рисунка 5, в данном случае симметрия относительно  $\alpha = \pi$  нарушается. Выделим еще несколько особенностей рассматриваемой системы при изменении  $\kappa$ .

- При  $\kappa_1 \approx 1.74$  появляется одна устойчивая неподвижная точка с ординатой  $\arctg k_0$  (рис. 5f).
- При  $\kappa_2 \approx 7.25$  появляется еще одна вырожденная неустойчивая неподвижная точка с ординатой  $\arctg k_3$  (рис. 5e), которая расслаивается на неустойчивую с ординатой  $\arctg k_1$  и устойчивую с ординатой  $\arctg k_2$  (рис. 5d).

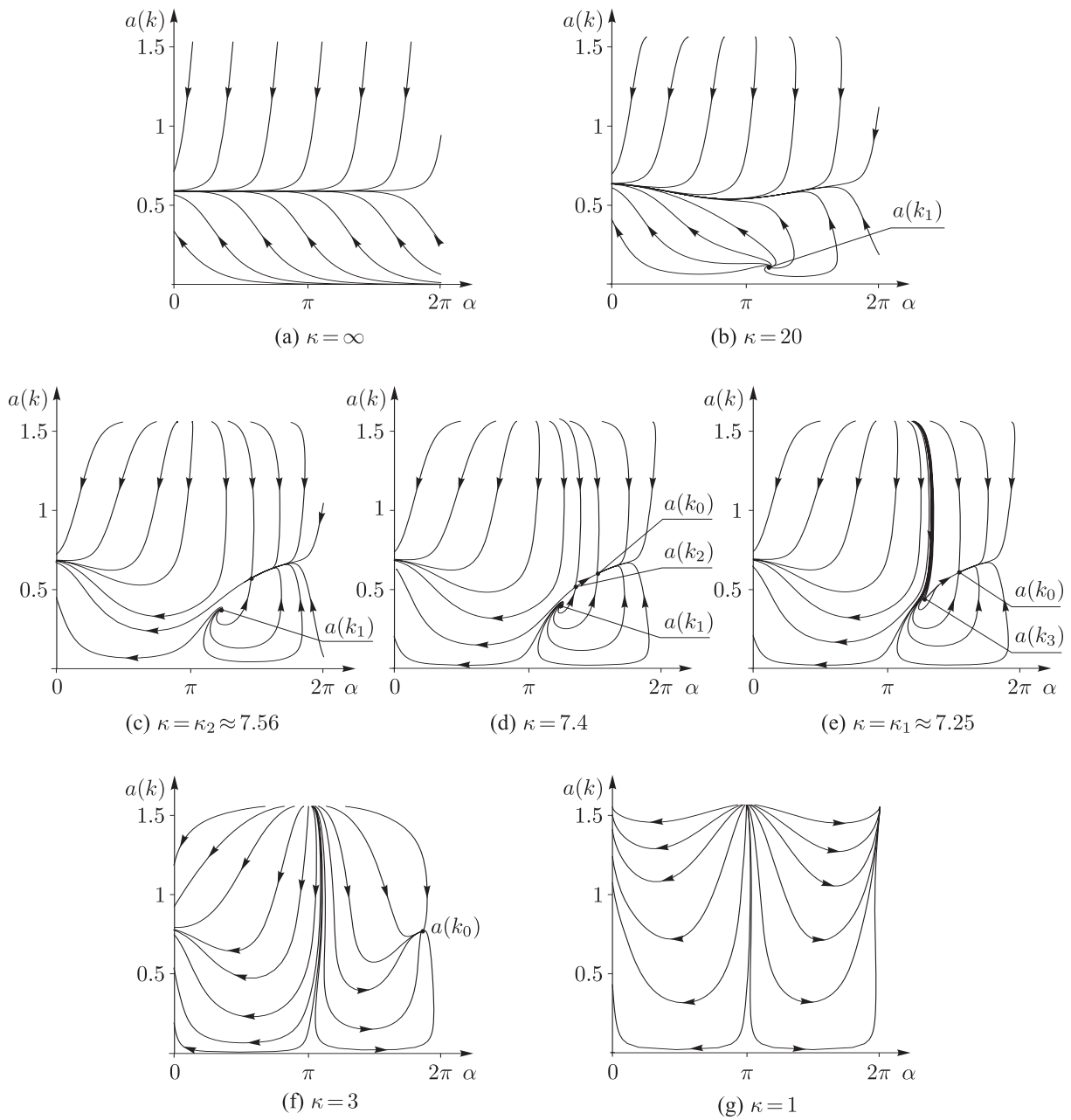


Рис. 5. Фазовые портреты системы (12) при  $\eta = 0.25$ ,  $f = 0.5$ ,  $h = \pi/2$  см и различных значениях  $\kappa$ . Движение по горизонтальной плоскости ( $\gamma = 0$ ,  $\kappa = \infty$ ) при любых начальных условиях стремится к  $k = 0.67$ . Для сокращения обозначено  $a(k) = \text{arctg } k$ .

– В отличие от случая плоского диска, при больших  $\kappa$  ( $\kappa > 7.56$ , рис. 5а, б, с) при слиянии двух устойчивых неподвижных точек образуется предельный цикл. Отметим, что данный предельный цикл после обратной замены времени не будет существовать, так как любое движение заканчивается за конечное время.

Приведенные значения  $\kappa$  могут быть определены только численно при фиксированном значении  $\eta$ .

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Исключением является критическое значение  $\kappa_0 = 1$ . Как и в случае диска ( $h = 0$ ), каких-либо качественных изменений в фазовом портрете при  $\kappa = \kappa_0$  не наблюдается (особая устойчивая точка появляется только при  $\kappa = \kappa_1$ , см. рис. 5g), но изменяется характер движения по траекториям.

Проведем рассуждения, аналогичные приведенным в замечании 1. При  $t \rightarrow \infty$  функции  $k = v/u \rightarrow \infty$  ( $u \rightarrow 0$ ),  $\alpha \rightarrow 0$ . При этом  $B(k) \rightarrow \pi$ ,  $A_{21}(k) \rightarrow \pi/(4k)$ ,  $A_{12}(k) \rightarrow 0$ , следовательно, первое и третье уравнения (11) будут иметь вид, аналогичный (15):

$$\dot{v} = a_0, \quad \dot{i} = -\frac{q\pi u}{2v} \left( 1 - \frac{\eta^2 \pi^2}{4} \right), \quad a_0 = g_0(1 - \kappa)$$

(так как  $\eta < 1/\pi$ , выражение в скобках всегда больше нуля). Интегрируя (2) при различных значениях  $\kappa$ , получим результаты, описанные выше для диска (см. случаи 1–3, раздел 1.1).

Аналогично случаю  $\eta = 0$ , при  $\kappa > \kappa_0$  любое движение заканчивается за конечное время, приближаясь к наклонной асимптоте  $v = k_i u$  (значение  $i = 0, \dots, 3$  зависит от типа точки и начальных условий, см. случаи 4–6 в разделе 1.1)

Несмотря на то, что для ненулевой высоты шайбы использование чисто аналитического подхода не дало какого-либо представления о характере движения в различных областях при заданных значениях параметров системы, теоретический анализ с использованием фазовых портретов, построенных численно, оказался наиболее информативным и позволил выявить новые динамические эффекты, обусловленные существованием неподвижных точек (не указанных ранее) и их бифуркациями.

Авторы благодарят А. А. Килина и А. П. Иванова за обсуждения и полезные замечания.

## Список литературы

- [1] Ердакова Н. Н., Мамаев И. С. Динамика тела с осесимметричным основанием, скользящего по шероховатой плоскости // *Нелинейная динамика*, 2013, т. 9, № 3, с. 521–545.
- [2] Иванов А. П. Динамически совместная модель контактных напряжений при плоском движении твердого тела // *ПММ*, 2009, т. 73, № 2, с. 189–203.
- [3] Карапетян А. В., Русинова А. М. Качественный анализ динамики диска на наклонной плоскости с трением // *ПММ*, 2011, т. 75, № 5, с. 731–737.
- [4] Розенблат Г. М. О скольжении диска по шероховатой наклонной плоскости при произвольном законе нормальных напряжений // *МТТ*, 2013, № 5, с. 109–117.
- [5] Shegelski M. R. A., Hostenstein R. Rapidly rotating sliding cylinders: Trajectories with large lateral displacements // *Can. J. Phys.*, 2002, vol. 80, pp. 141–147.

## On the dynamics of a body with an axisymmetric base sliding on a rough plane

Alexey V. Borisov<sup>1</sup>, Nadezhda N. Erdakova<sup>2</sup>, Tatiana B. Ivanova<sup>3</sup>, Ivan S. Mamaev<sup>4</sup>

<sup>1,2,3</sup>Udmurt State University

Universitetskaya st. 1, Izhevsk, 426034, Russia

<sup>3</sup>Moscow Institute of Physics and Technology,  
Institutskii per. 9, Dolgoprudnyi, 141700 Russia

<sup>4</sup>Izhevsk State Technical University

Studencheskaya 7, Izhevsk, 426069 Russia

<sup>1</sup>borisov@rcd.ru, <sup>2</sup>enn@rcd.ru, <sup>3</sup>tbesp@rcd.ru, <sup>4</sup>mamaev@rcd.ru



In this paper we investigate the dynamics of a body with a flat base sliding on a inclined plane under the assumption of linear pressure distribution of the body on the plane as the simplest dynamically consistent friction model. Computer-aided analysis of the system's dynamics on the inclined plane using phase portraits has allowed us to reveal dynamical effects that have not been found earlier.

MSC 2010: 70F40, 70F35, 70E18

Keywords: dry friction, linear pressure distribution, two-dimensional motion, planar motion, Coulomb law

Received November 10, 2014, accepted December 02, 2014

Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2014, vol. 10, no. 4, pp. 483–495 (Russian)