



УДК: 62.529

MSC 2010: 93B18, 93B52

Кинематическая модель управления сферороботом с неуравновешенной омниколесной платформой

А. А. Килин, Ю. Л. Караваев

В статье рассматривается кинематическая модель сфероробота, приводимого в движение расположенной внутри платформой с омниколесами. Представлены особенности управления сферороботом с учетом смещения центра масс внутренней омниколесной платформы. Получены как общие алгоритмы управления сферороботом в рамках кинематической квазистатической модели, так и управления, реализующие простейшие маневры — движение по прямой, движение по окружности. Произведена экспериментальная проверка предложенных алгоритмов.

Ключевые слова: сфероробот, кинематическая модель, неголономная связь, омниколесо, смещение центра масс

1. Введение

Данная статья является продолжением исследований кинематики сфероробота с внутренней омниколесной платформой, представленных в работе [1]. Экспериментальные исследования траектории движения сфероробота с внутренней омниколесной платформой согласно кинематической модели показали существенное отклонение реальной траектории движения от заданной траектории. Следует отметить, что в ходе экспериментальных исследований для других конструкций сферороботов [2–9] были получены похожие результаты.

Получено 19 ноября 2014 года

После доработки 03 декабря 2014 года

Работа Килина А. А. выполнена в рамках базовой части государственного задания вузам. Работа Караваева Ю. Л. выполнена в рамках гранта Российского научного фонда (проект № 14-19-01303).

Килин Александр Александрович

aka@rcd.ru

Удмуртский государственный университет

426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, д. 1

Караваев Юрий Леонидович

karavaev_yury@istu.ru

Ижевский государственный технический университет им. М. Т. Калашникова

426069, Россия, г. Ижевск, ул. Студенческая, д. 7



Авторы большинства работ делают лишь заключения о существенности отклонения реальной траектории движения от заданной, выдвигая предположения, направленные на минимизацию данных отклонений. Однако на практике эти предположения (ввиду их технической или вычислительной сложности) реализованы не были. Для более простых вариантов конструкций мобильных роботов возможные алгоритмы повышения точности перемещения представлены в работе [10].

Одной из возможных причин отклонения сфероробота от заданной траектории является смещение центра масс, что характерно также для колесных мобильных роботов [11]. Напомним, что в рамках модели, рассмотренной в [1], предполагалось, что центр масс подвижной платформы находится на вертикальной оси, проходящей через геометрический центр подвижной платформы. На практике добиться идеального положения центра масс на оси, проходящей через геометрический центр подвижной платформы, невозможно, а следовательно, необходимо уметь определять величину смещения и проводить корректировку управляющих воздействий. Решению данной задачи и посвящена данная работа.

2. Кинематическая модель управления сферороботом с симметричной внутренней омниколесной платформой

Подробное описание конструкции сфероробота с внутренней омниколесной платформой, включая описание и неголономную модель омниколеса, представлено в работе [1]. Для записи кинематических уравнений движения рассмотрим неподвижную систему координат — $OXYZ$ с осями α , β , γ и жестко связанную с платформой, подвижную — $Sxyz$ с осями e_1 , e_2 , e_3 и с началом координат, расположенным в центре сферической оболочки (см. рис. 1, 2). Все векторы, используемые далее в работе, будем рассматривать в проекции на оси подвижной системы координат (если не оговаривается иного). Условие отсутствия проскальзывания в точках контакта каждого из колес со сферической оболочкой накладывает следующие связи на рассматриваемую систему [12]:

$$(\mathbf{v}_{ci} - \tilde{\mathbf{v}}_{ci}, \boldsymbol{\alpha}_i) = 0, \quad (2.1)$$

где $\boldsymbol{\alpha}_i$ — единичный вектор, направленный вдоль оси закрепления роликов (см. рис. 1), \mathbf{v}_{ci} — скорость точки контакта i -го колеса, $\tilde{\mathbf{v}}_{ci}$ — скорость точки контакта сферы с i -м колесом. Векторы \mathbf{v}_{ci} , $\tilde{\mathbf{v}}_{ci}$ можно представить в виде

$$\mathbf{v}_{ci} = \mathbf{v} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i \left(\frac{R}{R - R_i} \right) + \dot{\chi}_i \mathbf{n}_i \times \mathbf{r}_i \frac{R_i}{R - R_i}, \quad \tilde{\mathbf{v}}_{ci} = \mathbf{v} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_i \frac{R}{R - R_i}, \quad (2.2)$$

где $\boldsymbol{\omega}$ — вектор угловой скорости платформы, \mathbf{v} — вектор линейной скорости центра сферы, $\boldsymbol{\Omega}$ — вектор угловой скорости сферы, \mathbf{r}_i — радиус-вектор, направленный от центра сферы до центра i -го колеса, \mathbf{n}_i — единичный вектор нормальный к плоскости колеса (см. рис. 1, 2), R — радиус сферы, R_i — радиус i -го колеса, $\dot{\chi}_i$ — скорость вращения i -го колеса. Подставив выражения (2.2) в уравнение (2.1), получаем

$$((\boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\omega}) \times \mathbf{r}_i, \boldsymbol{\alpha}_i) = \frac{R_i}{R} ((\mathbf{n}_i \times \mathbf{r}_i), \boldsymbol{\alpha}_i) \dot{\chi}_i. \quad (2.3)$$

Введя вектор $\mathbf{s}_i = \mathbf{r}_i \times \boldsymbol{\alpha}_i$, и угловую скорость оболочки относительно платформы $\tilde{\boldsymbol{\omega}} = \boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\omega}$, уравнение связи (2.3) можно представить в виде

$$(\mathbf{s}_i, \tilde{\boldsymbol{\omega}}) = \frac{R_i}{R} (\mathbf{s}_i, \mathbf{n}_i) \dot{\chi}_i. \quad (2.4)$$

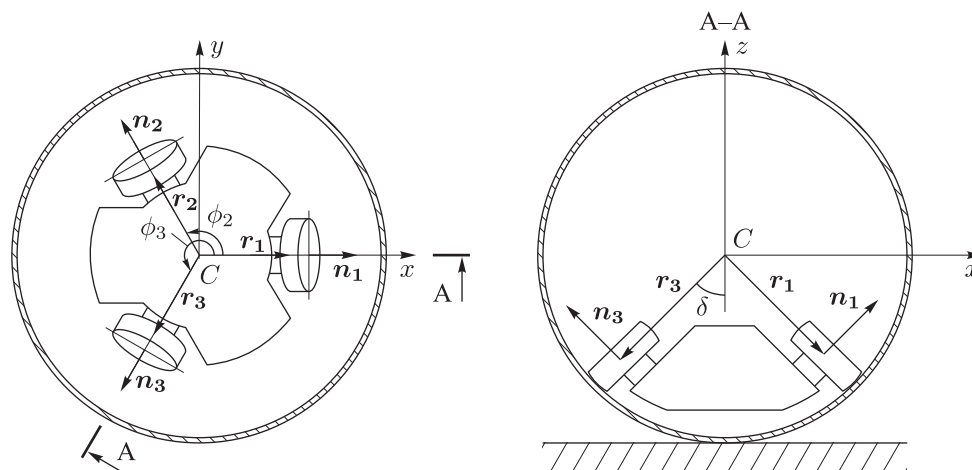


Рис. 1. Схема сфероробота с обозначением некоторых углов и векторов.

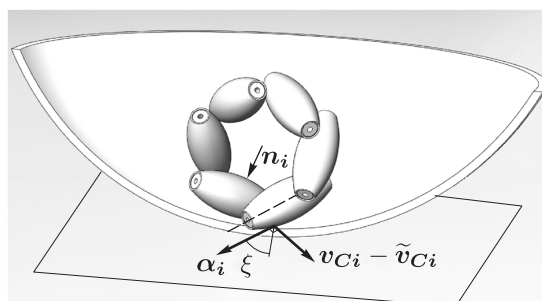


Рис. 2. Модель омниколеса в сферической оболочке.

Решение уравнения (2.4) относительно $\dot{\chi}_i$ позволяет определить скорости вращения каждого из колес при движении по траектории, определяемой вектором $\tilde{\omega}$.

Заметим, что векторы $\mathbf{n}_i, \mathbf{r}_i, \mathbf{s}_i, \boldsymbol{\alpha}_i$ являются постоянными в подвижной системе координат и их значения зависят только от конструкции сфероробота. Далее мы будем рассматривать конструкцию платформы с тремя одинаковыми колесами (то есть $R_1 = R_2 = R_3 = R_w$), расположенными в углах правильного треугольника. В этом случае векторы $\mathbf{n}_i, \mathbf{r}_i, \mathbf{s}_i, \boldsymbol{\alpha}_i$ принимают вид

$$\mathbf{r}_i = \begin{bmatrix} (R - R_w) \cdot \sin \delta \cdot \cos \phi_i \\ (R - R_w) \cdot \sin \delta \cdot \sin \phi_i \\ -(R - R_w) \cdot \cos \delta \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\alpha}_i = \begin{bmatrix} \cos \delta \cdot \cos \phi_i \cdot \cos \xi - \sin \phi_i \cdot \sin \xi \\ \cos \delta \cdot \sin \phi_i \cdot \cos \xi + \cos \phi_i \cdot \sin \xi \\ \sin \delta \cdot \cos \xi \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{n}_i = \begin{bmatrix} \cos \delta \cdot \cos \phi_i \\ \cos \delta \cdot \sin \phi_i \\ \sin \delta \end{bmatrix}, \quad \mathbf{s}_i = \begin{bmatrix} (R - R_w) \cdot (\sin \phi_i \cdot \cos \xi + \cos \phi_i \cdot \cos \delta \cdot \sin \xi) \\ -(R - R_w) \cdot (\cos \phi_i \cdot \cos \xi - \cos \delta \cdot \sin \phi_i \cdot \sin \xi) \\ (R - R_w) \cdot \sin \delta \cdot \sin \xi \end{bmatrix}, \quad i = 1, \dots, 3,$$

где δ — угол наклона осей колес платформы относительно горизонтали, $\phi_i = \frac{2\pi}{3}(i - 1)$ — угол между осью Cx и проекцией вектора \mathbf{r}_i на плоскость Cxy , ξ — угол между осями роликов и осью вращения омниколеса (см. рис. 1, 2).

ЗАМЕЧАНИЕ. Уравнение (2.4) соответствует идеальным меканум-колесам, у которых в каждый момент времени одна точка контакта с поверхностью и отсутствует проскальзывание. В реальности, в момент перехода от одного ролика к другому, колесо может иметь две точки контакта, что требует отдельного рассмотрения.

2.1. Управление в рамках кинематической модели

Решение задачи управления рассматриваемым сферороботом заключается в определении зависимости скорости вращения каждого колеса от траектории, заданной в виде

$$\mathbf{r}_c(t) = (x(t), y(t), 0)^T. \quad (2.5)$$

Скорости вращения колес $\dot{\chi}_i$ в соответствии с уравнением (2.4) определяются вектором $\tilde{\omega} = \Omega - \omega$. Для определения зависимости компонент данного вектора от траектории рассмотрим условие непроскальзывания сферической оболочки:

$$\mathbf{v} + \Omega \times \mathbf{R} = 0, \quad (2.6)$$

где $\mathbf{R} = -R\boldsymbol{\gamma}$ — радиус-вектор из центра сферы в точку контакта сферической оболочки с плоскостью. Тогда вектор угловой скорости сферической оболочки в подвижной системе координат $Cxyz$ можно записать в виде

$$\Omega = \frac{1}{R} \mathbf{v} \times \boldsymbol{\gamma} + \Omega_\gamma \boldsymbol{\gamma}, \quad (2.7)$$

где Ω_γ — скалярная величина, характеризующая вращение оболочки вокруг вертикали. Из (2.7) следует, что реализовать движение с заданной скоростью \mathbf{v} можно произвольным числом способов, которые будут отличаться друг от друга различным вращением оболочки вокруг вертикали. Отметим, что в некоторых моделях качения полагается строгое равенство $\Omega_\gamma \equiv 0$ — так называемая модель качения резинового тела [14–18].

Для записи условия непроскальзывания в неподвижной системе координат $OXYZ$ (рис. 3) введем матрицу поворота, которая связывает подвижную систему координат с неподвижной [13]:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \cos \theta \sin \psi & \cos \varphi \sin \psi + \sin \varphi \cos \theta \cos \psi & \sin \varphi \sin \theta \\ -\sin \varphi \cos \psi - \cos \varphi \cos \theta \sin \psi & -\sin \varphi \sin \psi + \cos \varphi \cos \theta \cos \psi & \cos \varphi \sin \theta \\ \sin \theta \sin \psi & -\sin \theta \cos \psi & \cos \theta \end{bmatrix}, \quad (2.8)$$

где φ, θ, ψ — углы Эйлера, определяющие ориентацию платформы в неподвижной системе координат. Проекции скорости сферической оболочки на оси подвижной системы координат связаны с проекциями на оси абсолютной системы координат очевидным соотношением $\mathbf{v} = \mathbf{Q}^T \dot{\mathbf{r}}_c$. Подставив уравнения связи (2.7) с учетом данного соотношения в (2.4), получим зависимость угловых скоростей колес от заданной траектории и угловых скоростей ω, Ω_γ :

$$\dot{\chi}_i = \frac{1}{R_i} \frac{(\mathbf{s}_i, \mathbf{Q}^T \dot{\mathbf{r}}_c \times \boldsymbol{\gamma} + R \Omega_\gamma \boldsymbol{\gamma} - R \boldsymbol{\omega})}{(\mathbf{s}_i, \mathbf{n}_i)}. \quad (2.9)$$

При этом угловые скорости ω, Ω_γ и углы φ, θ, ψ необходимо определять либо из анализа полной динамической модели системы, либо сделав некоторые предположения о характере движения. В рамках данной статьи мы ограничимся рассмотрением кинематической (квазистатической) модели. При этом сделаем следующие предположения о характере движения рассматриваемой системы.

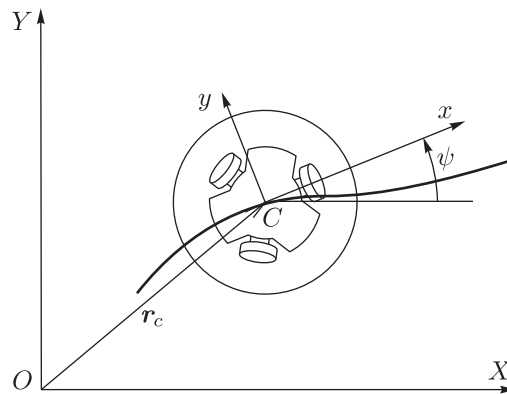


Рис. 3. Движение по траектории.

Предположение. В рамках кинематической (квазистатической) модели будем считать, что при движении сфероробота центр масс платформы всегда находится в наименьшем возможном положении. При этом радиус-вектор центра масс можно представить в виде

$$\mathbf{r}_m = -R_m \boldsymbol{\gamma}, \quad (2.10)$$

где R_m — расстояние от начала подвижной системы координат до центра масс подвижной платформы. Данное предположение в случае симметричности платформы ($\mathbf{r}_m = -R_m \mathbf{e}_3$) приводит к ряду следствий:

1. Оси OZ неподвижной системы координат и Cz системы координат, связанной с подвижной платформой совпадают, то есть $\mathbf{e}_3 \parallel \boldsymbol{\gamma}$, а матрица \mathbf{Q} примет вид

$$\mathbf{Q}_\psi = \begin{bmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad (2.11)$$

2. угловая скорость $\boldsymbol{\omega}$ перпендикулярна плоскости, по которой движется сфероробот, то есть $\boldsymbol{\omega} = (0, 0, \omega_z)^T$, причем компонента ω_z определяет вращение подвижной платформы вокруг вертикальной оси и равна производной угла прецессии, то есть $\omega_z = \dot{\psi}$.

С учетом данного предположения, подставив равенство $\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{e}_3$ в (2.9), можно получить зависимость угловых скоростей колес, реализующих движение по заданной траектории. Как было сказано выше, движение по заданной траектории \mathbf{r}_c с заданным вращением платформы $\psi(t)$ можно реализовать различными способами, которые будут отличаться друг от друга вращением сферической оболочки. Однако эксперименты показали, что при движении на малых скоростях вращение сферы вокруг вертикальной оси практически не происходит; мы будем рассматривать движение в рамках модели качения резинового тела [14–18], то есть будем полагать $\Omega_\gamma = 0$. Тогда выражение для определения угловых скоростей колес $\dot{\chi}_i$ можно записать в виде

$$\dot{\chi}_i = \frac{(\mathbf{s}_i, \mathbf{Q}_\psi^T \dot{\mathbf{r}}_c \times \mathbf{e}_3 - R \dot{\psi} \mathbf{e}_3)}{R_i(\mathbf{s}_i, \mathbf{n}_i)}. \quad (2.12)$$

Далее будем считать ориентацию платформы во время движения заданной, то есть $\psi(t)$ — известная функция времени. В частности, в качестве примеров можно рассмотреть движение платформы без вращения, при котором $\psi(t) = \text{const}$, или такое, при котором скорость подвижной платформы сохраняет постоянное направление в подвижной системе координат

$$\psi = \text{arctg} \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)} + \text{const}. \quad (2.13)$$

3. Учет смещения центра масс

На практике добиться расположения центра масс омниколесной платформы на ее оси симметрии чрезвычайно сложно. Результаты экспериментальных исследований, представленные в работе [1], показали, что даже при незначительной асимметрии подвижной платформы происходит отклонение от заданной траектории движения.

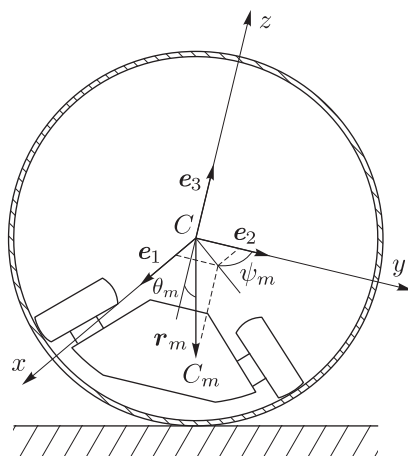


Рис. 4. Расположение осей подвижной системы координат с учетом смещения центра масс.

Для описания данного эффекта выберем оси подвижной системы координат Cx , Cy , Cz в соответствии с геометрической симметрией, при этом они могут не совпадать с осями инерции подвижной платформы. В этой системе положение центра масс подвижной платформы задается вектором \mathbf{r}_m (рис. 4), компоненты которого определяются соотношением

$$\mathbf{r}_m = R_m \mathbf{M} \mathbf{e}_z = R_m \begin{pmatrix} \sin(\theta_m) \sin(\psi_m) \\ \sin(\theta_m) \cos(\psi_m) \\ \cos(\theta_m) \end{pmatrix}^T, \quad (3.1)$$

где матрица

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \cos(\psi_m) & -\sin(\psi_m) & 0 \\ \cos(\theta_m) \sin(\psi_m) & \cos(\theta_m) \cos(\psi_m) & -\sin(\theta_m) \\ \sin(\theta_m) \sin(\psi_m) & \sin(\theta_m) \cos(\psi_m) & \cos(\theta_m) \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

связывает систему координат $Cxyz$ с системой координат, у которой в качестве одной из осей выступает вектор \mathbf{r}_m , а углы ψ_m , θ_m определяют положение радиус-вектора центра масс подвижной платформы в системе координат $Cxyz$ относительно осей Cz и Cy соответственно. Нетрудно показать, что в этом случае справедливо следующее утверждение.

Утверждение 1. Пусть смещение центра масс платформы относительно центра сферы задается соотношением (3.1), тогда в рамках кинематической модели ($\mathbf{r}_m = -R_m \boldsymbol{\gamma}$) неголономного качения резинового тела ($\Omega_\gamma = 0$) движение вдоль заданной траектории $\mathbf{r}_c(t)$ с заданным вращением $\psi(t)$ реализуется управляющими воздействиями

$$\dot{\chi}_i = \frac{1}{R_i} \frac{(\mathbf{M}^T \mathbf{s}_i, \mathbf{Q}_\psi^T \dot{\mathbf{r}}_c \times \mathbf{e}_3 - R \dot{\psi} \mathbf{e}_3)}{(\mathbf{s}_i, \mathbf{n}_i)}. \quad (3.3)$$

Доказательство данного утверждения проводится непосредственной подстановкой ограничений, налагаемых моделью, и выражения (3.1) в уравнения (2.9).

3.1. Анализ траектории движения сфероробота при постоянных управляющих воздействиях

Рассмотрим движение сфероробота при постоянных управляющих воздействиях, то есть

$$\dot{\chi}_i = \text{const}. \quad (3.4)$$

Из уравнения связей (2.4) следует, что при постоянном управлении вектор относительной угловой скорости также остается постоянным

$$\tilde{\boldsymbol{\omega}} = \boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\omega} = \text{const}. \quad (3.5)$$

Принимая во внимание квазистатичность рассматриваемого движения $\mathbf{r}_m \parallel \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\omega} \parallel \boldsymbol{\gamma}$, условия непроскальзывания сферической оболочки (2.6) можно представить в виде

$$\mathbf{v} = \frac{R_0}{R_m} \mathbf{r}_m \times \tilde{\boldsymbol{\omega}}. \quad (3.6)$$

Кроме того, учитывая модель резинового тела ($\Omega_\gamma = 0$), нетрудно показать, что

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{R_m^2} (\mathbf{r}_m, \tilde{\boldsymbol{\omega}}) \mathbf{r}_m.$$

Таким образом, векторы скорости сфероробота и угловой скорости платформы в подвижной системе координат остаются постоянными.

Запишем теперь ускорение центра сферы в неподвижной системе координат:

$$\ddot{\mathbf{r}}_c = \dot{\mathbf{Q}}^T \mathbf{v} = \mathbf{Q}^T (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}). \quad (3.7)$$

Здесь матрица $\dot{\mathbf{Q}}^T$ связана с вектором угловой скорости кинематическими уравнениями Эйлера [13]. Используя полученные выражения, а также перпендикулярность векторов $\boldsymbol{\omega}$ и \mathbf{v} (следующую из условия квазистатичности), можно вычислить радиус кривизны траектории, по которой движется сфероробот:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{|\mathbf{V} \times \dot{\mathbf{V}}|}{|\mathbf{V}|^3} = \frac{|\mathbf{Q}^T \mathbf{v} \times \mathbf{Q}^T (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v})|}{|\mathbf{Q}^T \mathbf{v}|^3} = \frac{1}{R} \frac{(\tilde{\boldsymbol{\omega}}, \mathbf{r}_m)}{\sqrt{\tilde{\boldsymbol{\omega}}^2 r_m^2 - (\tilde{\boldsymbol{\omega}}, \mathbf{r}_m)^2}}. \quad (3.8)$$

Как видно из выражения (3.8), радиус кривизны данной траектории движения является постоянным. Таким образом, с учетом однородности выражения (3.8) по $\tilde{\boldsymbol{\omega}}$ и линейной зависимости $\tilde{\boldsymbol{\omega}}$ от χ_i , справедливо следующее утверждение.

Утверждение 2. При постоянных управляющих воздействиях $\chi_i = \text{const}$ сфероробот равномерно движется по окружности, радиус которой задается выражением (3.8) и зависит только от соотношения управляющих воздействий χ_i/χ_j .

Анализируя выражение (3.8), можно сделать вывод, что движение по прямой ($\rho = \infty$) возможно в случае $\omega = 0$, что выполнимо при перпендикулярности векторов $\tilde{\omega} \perp \mathbf{r}_m$. Данное условие можно представить в виде

$$(\mathbf{r}_m, \omega - \Omega) = 0. \quad (3.9)$$

Совместное решение уравнений (3.9) и (2.3) относительно скоростей вращения колес $\dot{\chi}_i$ позволяет определить управления, реализующие движение сфероробота по прямой. В случае, когда движение по прямой не изменяет ориентацию подвижной платформы ($\psi = 0$), выражение для управляющих воздействий можно записать в виде

$$\dot{\chi}_i = \frac{(\mathbf{M}^T \mathbf{s}_i, \mathbf{V} \times \mathbf{e}_3)}{R_i(\mathbf{s}_i, \mathbf{n}_i)}, \quad (3.10)$$

где $\mathbf{V} = (V \cos(\varepsilon), V \sin(\varepsilon), 0)^T$ — линейная скорость центра сферической оболочки при ее движении под углом ε к оси OX .

3.2. Определение положения центра масс подвижной платформы сфероробота

Заметим, что для вычисления управляющих воздействий (3.3), (3.10) необходимо знать положение центра масс платформы. Задача его определения требует разработки технически сложной установки и приспособлений, имеющих высокий класс точности. В то же время для движения сфероробота без датчиков обратной связи необходимо обеспечить либо определение данных параметров, либо балансировку подвижной платформы. Используя результаты, полученные в предыдущем разделе, можно вычислить смещение центра масс платформы, проведя несколько пробных экспериментов по движению сфероробота с постоянными управляющими воздействиями.

Действительно, радиусы окружностей, по которым движется сфероробот при постоянных управлениях, связаны с радиус-вектором центра масс соотношением (3.8). Данные соотношения зависят только от направления смещения (углов ψ_m, θ_m) и не зависят от величины смещения. Следовательно, системы двух уравнений типа (3.8) для различных управляющих воздействий достаточно для того, чтобы определить направление смещения центра масс подвижной платформы. Таким образом, проведя два эксперимента по движению сфероробота с разными постоянными управляющими воздействиями и измерив радиусы окружностей, по которым при этом движется сфероробот, можно вычислить направления смещения центра масс (углы ψ_m, θ_m).

4. Экспериментальная оценка кинематической модели

Для проведения проверки теоретических моделей управления проведены экспериментальные исследования движения сфероробота с внутренней омниколесной платформой. Задачей данных исследований являлось определение отклонения реальной траектории движения сфероробота от заданной траектории, по которой рассчитывались управляющие воздействия. Для решения поставленной задачи необходимо в процессе движения уметь

определять координаты центра сферического робота и ориентацию внутренней подвижной платформы, что достигалось использованием системы захвата движения (СЗД) (Motion Capture). Используемая нами система обеспечивает точность определения ориентации объекта ± 1 градус, погрешность определения положения — 10 мм, при частоте съемки 100 Гц.

4.1. Экспериментальное определение положения центра масс подвижной платформы

Для проведения экспериментов в первую очередь необходимо определить смещение центра масс подвижной платформы. Для этого воспользуемся методом, описанным в предыдущем разделе.

В качестве управлений, по которым будем определять направление смещения центра масс, выберем управляющие воздействия (2.9), соответствующие движению сфероробота по прямой в различных направлениях и рассчитанные без учета смещения центра масс.

Первое управляющее воздействие соответствует движению сфероробота с уравновешенной платформой по прямой под углом $\varepsilon = 0$ к оси OY с линейной скоростью $v = 0.2$ м/с ($\psi = 0$, $\dot{\mathbf{r}} = (0.2, 0, 0)^T$) и, согласно выражению (2.12), задается постоянными угловыми скоростями омниколес

$$\dot{\chi}_1 = 4.8774, \quad \dot{\chi}_2 = -4.1884, \quad \dot{\chi}_3 = -0.6891. \quad (4.1)$$

Второе управляющее воздействие соответствует движению сфероробота с уравновешенной платформой по прямой под углом наклона $\varepsilon = 20^\circ$ ($\psi = 0$, $\mathbf{V} = (0.188, 0.07, 0)^T$) и задается угловыми скоростями

$$\dot{\chi}_1 = 3.8923, \quad \dot{\chi}_2 = -5.035, \quad \dot{\chi}_3 = 1.1427. \quad (4.2)$$

Траектории движения для управляющих воздействий (4.1), (4.2) представлены на рисунке 5а. Средние значения радиусов окружностей, вычисленные по результатам десяти экспериментов методом наименьших квадратов, составили $\rho_0 = 3234 \pm 644$ мм и $\rho_{20} = 2194 \pm 308$ мм. Соответствующие части окружностей изображены на рисунке 5 жирными линиями.

Используя значения угловых скоростей колес (4.1) и (4.2) для определения относительных угловых скоростей согласно выражению (2.4) и решив систему уравнений для соответствующих радиусов окружностей (3.8) относительно углов θ_m и ψ_m , исключая мнимые корни и значения, при которых центр масс физически располагается вне подвижной платформы, получим:

$$\psi_m = 1.521 \pm 0.018, \quad \theta_m = 0.0535 \pm 0.0075. \quad (4.3)$$

Для проверки полученных значений рассмотрим движение с угловыми скоростями колес

$$\dot{\chi}_1 = 0.6891, \quad \dot{\chi}_2 = -4.8774, \quad \dot{\chi}_3 = 4.1884, \quad (4.4)$$

соответствующими движению сфероробота с уравновешенной платформой под углом $\varepsilon = 60^\circ$ к оси OY . Радиус окружности, вычисленный для данного управления с учетом смещения центра масс (4.3), равен $\rho_{60} = 6152$ мм. Экспериментально определенное значение данного радиуса составляет $\rho_{60} = 5779 \pm 844$ мм (см. рис. 5а). Таким образом, расчетное значение принадлежит доверительному интервалу экспериментально измеренного радиуса окружности, что подтверждает правильность разработанной методики и возможность

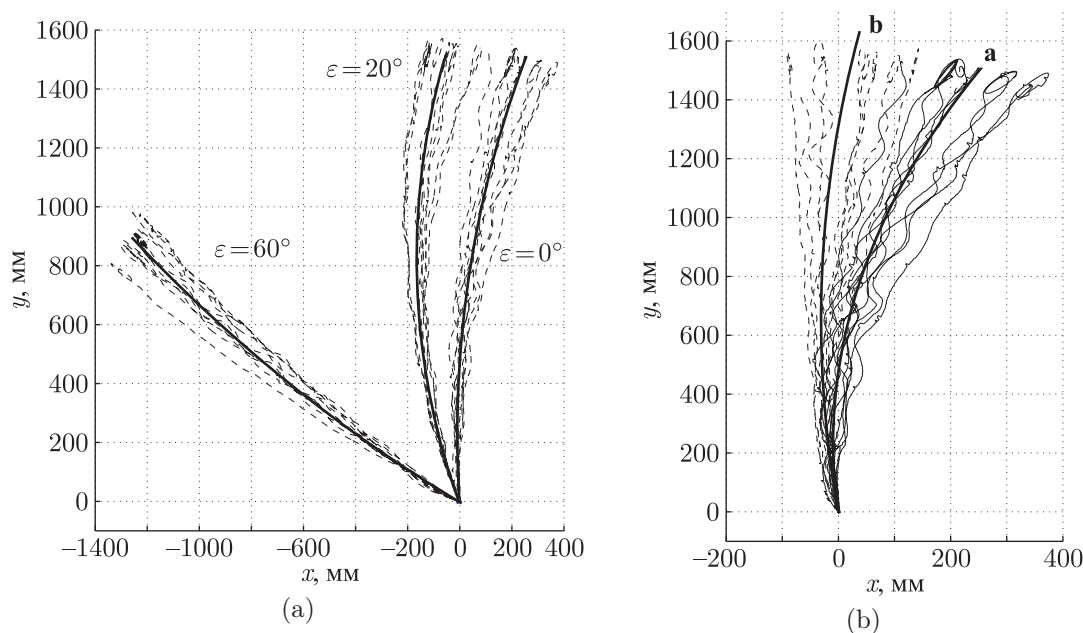


Рис. 5. а) Траектории сфероробота при управляющих воздействиях (4.1), (4.2), (4.4). б) Траектории сфероробота при управлениях, рассчитанных для прямолинейного движения: **а** — без учета смещения центра масс, **б** — с учетом смещения центра масс.

ее использования для определения смещения центра масс подвижной платформы сфероробота.

На рисунке 5б представлены экспериментальные траектории движения сфероробота при управлениях (2.12) и (3.10), рассчитанных для прямолинейного движения в рамках модели без смещения центра масс и с учетом смещения соответственно. Жирными линиями на рисунке изображены окружности с усредненными по результатам десяти экспериментов радиусами для обоих вариантов управления со скоростью $|V| = 0.2$ м/с и направлением $\varepsilon = 0$. Данные радиусы составляют $\rho_b = 6965 \pm 2105$ мм и $\rho_a = 3234 \pm 644$ мм. Следует отметить существенность влияния отклонения положения центра масс от его идеального расположения в центре симметрии подвижной платформы. Так, учет смещения центра масс для разработанной конструкции сфероробота примерно на 3 градуса от вертикальной оси геометрической симметрии платформы приводит к более чем двукратному уменьшению радиуса кривизны траектории. С другой стороны, зная положение центра масс подвижной платформы, можно определить более устойчивое направление движения сфероробота и использовать данное движение как основное, дополняя его, при необходимости, операцией поворота на месте.

4.2. Результаты экспериментальных исследований движения сфероробота по прямой

Рассмотрим результаты экспериментов в зависимости от скорости движения для кинематической модели с учетом смещения центра масс, заданного углами (4.3).

На рисунке 6 представлены три серии траектории движения, соответствующих скоростям $V = 0.1$ м/с, $V = 0.2$ м/с, $V = 0.3$ м/с. В каждой серии проводилось десять экспериментов с одинаковыми начальными условиями. Радиусы средних аппроксимиру-

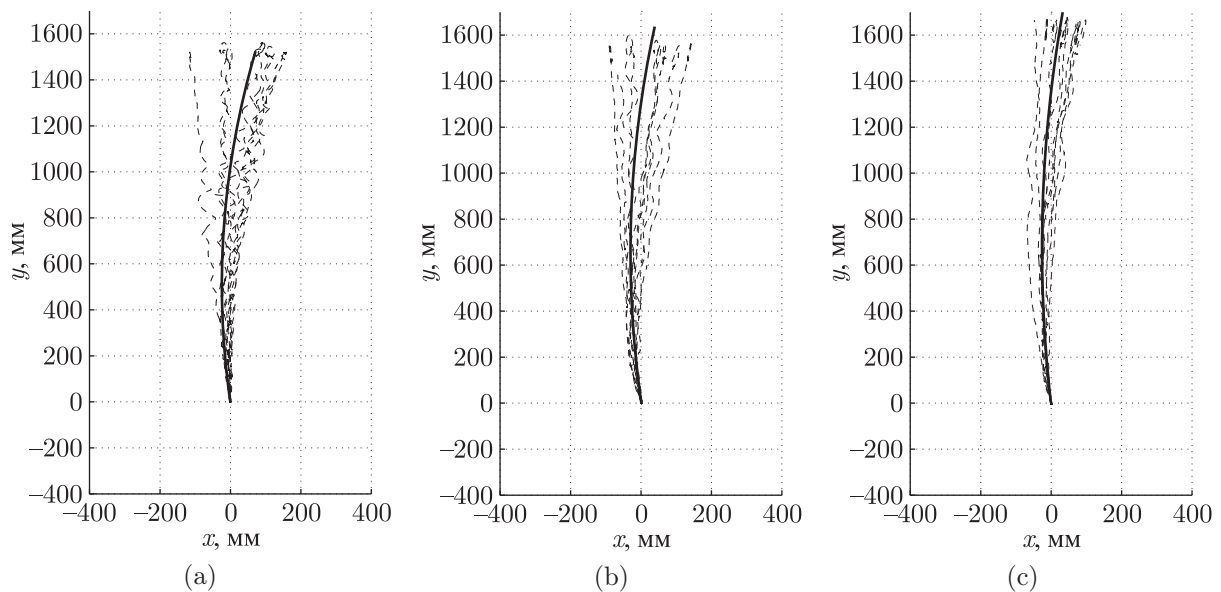


Рис. 6. Траектории движения сфероробота при $\varepsilon = 0$ для скоростей а) $V = 0.1$ м/с, б) $V = 0.2$ м/с, в) $V = 0.3$ м/с.

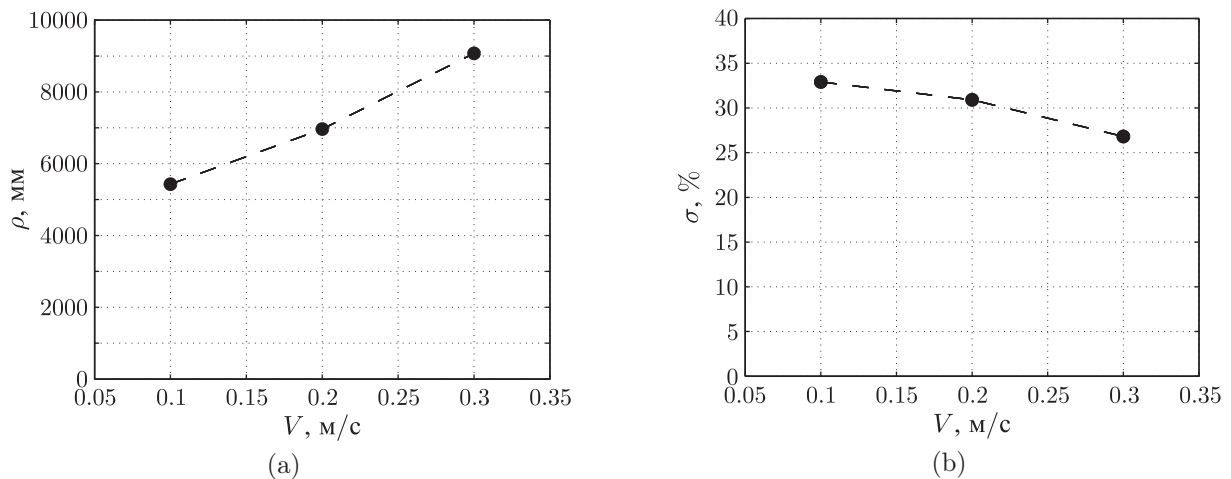


Рис. 7. а) Зависимость радиуса кривизны траектории от скорости движения при $\varepsilon = 0$. б) Зависимость среднеквадратичного отклонения радиуса кривизны траектории от скорости движения при $\varepsilon = 0$.

ющих окружностей, показанных на рисунке жирной линией, составляют, соответственно, $\rho_a = 5430$ мм, $\rho_b = 6965$ мм, $\rho_c = 9073$ мм (см. рис. 7а).

Как видно из рисунка 7, радиус траектории растет при увеличении скорости движения. Кроме того, с увеличением скорости повышается плавность хода, сокращаются колебательные процессы, сопровождающие движение сфероробота. Это отражается на уменьшении среднеквадратичного отклонения радиуса аппроксимирующей окружности от среднего значения, вычисленного для десяти экспериментов (рис. 7б). Все это говорит об эффекте динамической стабилизации при движении по прямой.

4.3. Результаты экспериментальных исследований движения сфероробота по окружности

Как указано выше, траекторией движения с постоянными управляющими воздействиями в общем случае является окружность, радиус которой определяется соотношением угловых скоростей колес сфероробота и смещением центра масс. В рамках кинематической модели отсутствует зависимость радиуса от абсолютных значений управляющих воздействий (от них зависит только скорость прохождения по траектории).

Исследуем зависимость радиуса траектории от абсолютных значений управляющих воздействий. В качестве базового выберем движение с управляющими воздействиями

$$\dot{\chi}_1 = -14.28, \quad \dot{\chi}_2 = 28.57, \quad \dot{\chi}_3 = 57.14. \quad (4.5)$$

Соответствующий радиус кривизны траектории, рассчитанный по формуле (3.8) с учетом смещения центра масс (4.3), составит

$$\rho = 100.08 \text{ мм}. \quad (4.6)$$

Нами были проведены пять серий экспериментов с управляющими воздействиями, увеличенными относительно базовых (см. (4.5)) в κ раз. На рисунке 8 приведены результаты данных экспериментов. Жирными линиями на рисунке изображены окружности с усредненными по результатам пяти экспериментов в каждой серии радиусами.

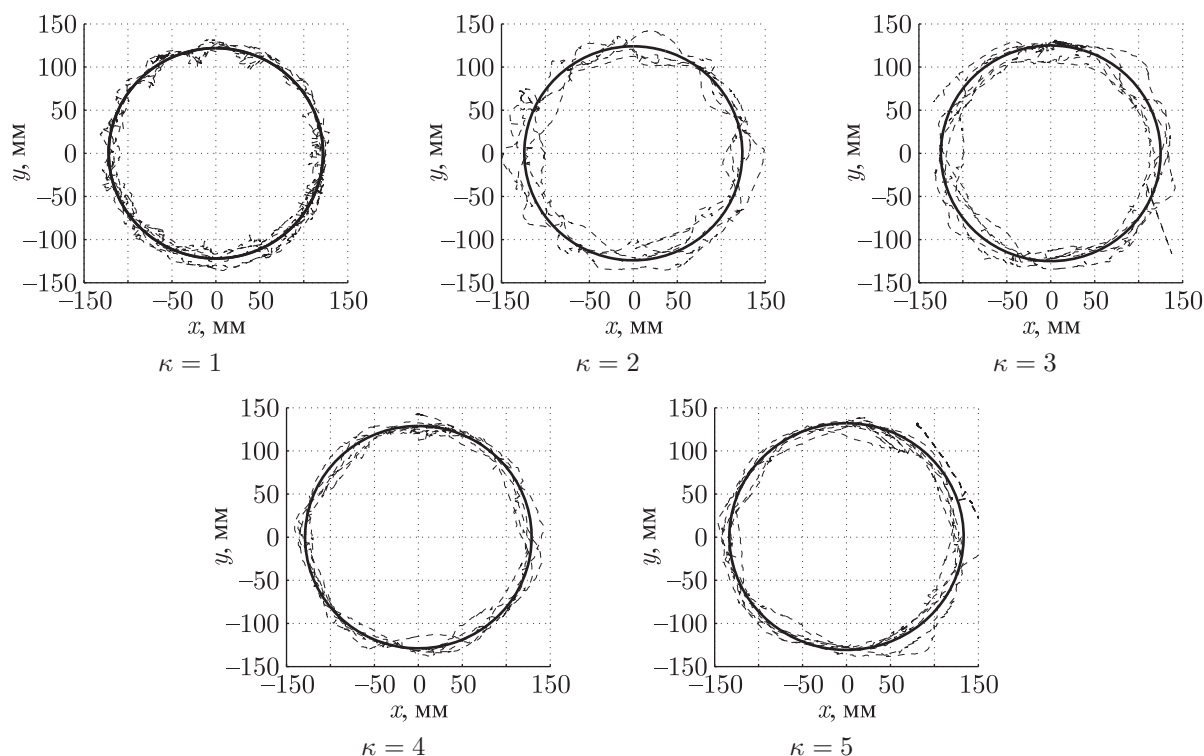


Рис. 8. Траектории движения сфероробота при постоянных управляющих воздействиях.

На рисунке 9 приведена зависимость радиуса траектории от коэффициента κ с доверительными интервалами для средних величин полученных радиусов. Горизонтальная прямая соответствует теоретическому значению радиуса окружности (4.6) при движении

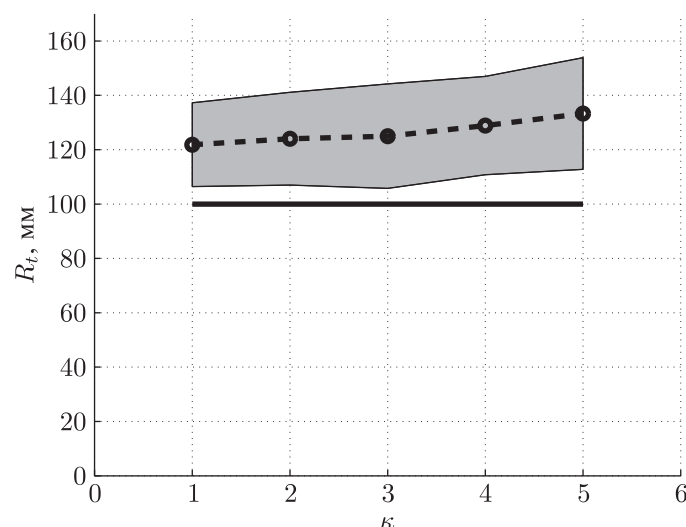


Рис. 9. Зависимость радиуса кривизны траектории от угловой скорости движения по траектории в виде окружности.

с постоянными управляющими воздействиями, с которыми проводились эксперименты. Областью, выделенной серым цветом, показаны доверительные интервалы для экспериментальных данных с вероятностью 95 %.

Как видно из рисунка 9, с увеличением скорости движения отклонение от теоретической кинематической модели возрастает, что ограничивает возможности ее применения. Для реализации более скоростного режима движения необходимо исследование динамической модели.

5. Заключение

На практике идеальная симметричность, то есть расположение центра масс на геометрической оси симметрии внутренней подвижной платформы сфероробота, является труднодостижимой, требующей применения технически сложного оборудования для проведения балансировки. Как показали результаты экспериментальных исследований, представленные в данной работе, даже незначительное смещение центра масс способствует существенному отклонению от заданной траектории в процессе движения. Для минимизации данного эффекта разработана кинематическая модель, учитывающая смещение центра масс, проведены эксперименты, подтверждающие адекватность разработанной модели. Приведем основные результаты, полученные в данной работе:

- Доказано, что в рамках кинематической (квазистатической) модели траектория сфероробота с внутренней омниколесной платформой при постоянных управляющих воздействиях (скоростях вращения омниколес) является окружностью.
- Для определения положения центра масс омниколесной платформы с достаточной точностью можно использовать методику, основанную на экспериментальном определении радиусов кривизны траекторий при движении с двумя различными постоянными управляющими воздействиями. Это, в частности, позволяет создать теорию управления сферороботом, учитывающую возможное перераспределение масс внутри сфероробота (например, при смене полезной нагрузки и т. п.).

- При увеличении скорости движения по прямой происходит динамическая стабилизация движения. Интересно было бы проверить это экспериментальное наблюдение в рамках динамической модели движения сфероробота.
- Увеличение скорости движения по окружности приводит к увеличению радиуса кривизны траектории, что связано с проявлением динамических эффектов.

Отметим в заключение, что зависимость траектории движения от скорости говорит о невозможности использования кинематической модели (даже с учетом смещения центра масс) для точного движения по заданной траектории. Для реализации такого движения необходима разработка динамической модели сфероробота и его оснащение внутренней инерциальной навигационной системой для стабилизации омникопесной платформы в процессе движения.

6. Благодарности

Авторы благодарят Борисова А. В., Мамаева И. С. за плодотворные обсуждения полученных результатов.

Список литературы

- [1] Килин А. А., Караваев Ю. Л., Клековкин А. В. Кинематическая модель управления высокомааневренным мобильным сферороботом с внутренней омникопесной платформой // Нелинейная динамика, 2014, т. 10, № 1, с. 113–126.
- [2] Мобильные роботы: робот-колесо и робот-шар / А. В. Борисов, И. С. Мамаев, Ю. Л. Караваев (ред.). Москва – Ижевск: «Институт компьютерных исследований», 2013. 532 с.
- [3] Borisov A. V., Kilin A. A., Mamaev I. S. How to control Chaplygin's sphere using rotors // Regul. Chaotic Dyn., 2012, vol. 17, nos. 3–4, pp. 258–272. *См. также:* Борисов А. В., Килин А. А., Мамаев И. С. Как управлять шаром Чаплыгина при помощи роторов // Нелинейная динамика, 2012, т. 8, № 2, с. 289–307.
- [4] Borisov A. V., Kilin A. A., Mamaev I. S. How to control the Chaplygin ball using rotors: 2 // Regul. Chaotic Dyn., 2013, vol. 18, nos. 1–2, pp. 144–158. *См. также:* Борисов А. В., Килин А. А., Мамаев И. С. Как управлять шаром Чаплыгина при помощи роторов. II // Нелинейная динамика, 2013, т. 9, № 1, с. 59–76.
- [5] Kabała M., Wnuk M. Design and construction of RoBall, a spherical, nonholonomic mobile robot: Raport serii PRE nr 48/2004, Wrocław: Instytut Cybernetyki Technicznej, 2004.
- [6] Alves J., Dias J. Design and control of a spherical mobile robot // J. Syst. Control Eng., 2003, vol. 217, pp. 457–467.
- [7] Jia Q., Zheng Y., Sun H., Cao H., Li H. Motion control of a novel spherical robot equipped with a flywheel // ICIA'09: Internat. Conf. on Information and Automation (Zhuhai, Macau, 2009), pp. 893–898.
- [8] Joshi V. A., Banavar R. N. Motion analysis of a spherical mobile robot // Robotica, 2009, vol. 27, no. 3, pp. 343–353.
- [9] Chen W.-H., Chen Ch.-P., Yu W.-Sh., Lin Ch.-H., Lin P.-Ch. Design and implementation of an omnidirectional spherical robot Omnicron // IEEE/ASME Internat. Conf. on Advanced Intelligent Mechatronics (Kachsiung, Taiwan, 2012), pp. 719–724.
- [10] Бурдаков С. Ф., Мирошник И. В., Стельмаков Р. Э. Системы управления движением колесных роботов. СПб: Наука, 2001. 227 с.

- [11] Мартыненко Ю. Г. Устойчивость стационарных движений мобильного робота с роликонесущими колесами и смещенным центром масс // ПММ, 2010, т. 74, № 4, с. 610–619.
- [12] Borisov A. V., Kilin A. A., Mamaev I. S. An omni-wheel vehicle on a plane and a sphere // *Nonlinear Dynamics & Mobile Robotics*, 2013, vol. 1, no. 1, pp. 33–50.
- [13] Борисов А. В., Мамаев И. С. Динамика твердого тела: гамильтоновы методы, интегрируемость, хаос. Москва–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2005. 576 с.
- [14] Борисов А. В., Мамаев И. С. Качение неоднородного шара по сфере без верчения и кручения // *Нелинейная динамика*, 2006, т. 2, № 4, с. 445–452.
- [15] Borisov A. V., Mamaev I. S. Rolling of a non-homogeneous ball over a sphere without slipping and twisting // *Regul. Chaotic Dyn.*, 2007, vol. 12, no. 2, pp. 153–159.
- [16] Borisov A. V., Mamaev I. S., Bizyaev I. A. The hierarchy of dynamics of a rigid body rolling without slipping and spinning on a plane and a sphere // *Regul. Chaotic Dyn.*, 2013, vol. 8, no. 3, pp. 277–328. *См. также:* Борисов А. В., Мамаев И. С., Бизяев И. А. Иерархия динамики при качении твердого тела без проскальзывания и верчения по плоскости и сфере // *Нелинейная динамика*, 2013, т. 9, № 2, с. 141–202.
- [17] Bolsinov A. V., Borisov A. V., Mamaev I. S. Rolling of a ball without spinning on a plane: the absence of an invariant measure in a system with a complete set of integrals // *Regul. Chaotic Dyn.*, 2012, vol. 17, no. 6, pp. 571–579. *См. также:* Болсинов А. В., Борисов А. В., Мамаев И. С. Качение без верчения шара по плоскости: отсутствие инвариантной меры в системе с полным набором интегралов // *Нелинейная динамика*, 2012, т. 8, № 3, с. 605–616.
- [18] Koiller J., Ehlers K. M. Rubber rolling over a sphere // *Regul. Chaotic Dyn.*, 2007, vol. 12, no. 2, pp. 127–152.
- [19] Каретин А. Н. МНК для аппроксимации данных окружностью. <http://mykaralw.narod.ru/articles/index.html> (2010).

The kinematic control model for a spherical robot with an unbalanced internal omniwheel platform

Alexander A. Kilin¹, Yury L. Karavaev²

¹Udmurt State University

Universitetskaya 1, Izhevsk, 426034 Russia

²M. T. Kalashnikov Izhevsk State Technical University

Studencheskaya st. 7, Izhevsk, 426069, Russia

¹aka@rcd.ru, ²karavaev_yury@istu.ru

The kinematic control model for a spherical robot with an internal omniwheel platform is presented. We consider singularities of control of spherical robot with an unbalanced internal omniwheel platform. The general algorithm of control of spherical robot according to the kinematical quasi-static model and controls for simple trajectories (a straight line and in a circle) are presented. Experimental investigations have been carried out for all introduced control algorithms.

MSC 2010: 93B18, 93B52

Keywords: spherical robot, kinematic model, nonholonomic constraint, omniwheel, displacement of center of mass

Received November 19, 2014, accepted December 03, 2014

Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2014, vol. 10, no. 4, pp. 497–511 (Russian)