



УДК: 531.01
MSC 2010: 70E50

Об устойчивости положения равновесия дискретной модели заправочного шланга под действием реактивной силы

А. Е. Байков, А. Ю. Майоров

Рассмотрена дестабилизация устойчивого положения равновесия неконсервативной системы с тремя степенями свободы под действием линейных сил вязкого трения. Диссипация предполагается полной. Задача решена стандартными методами теории устойчивости. Устойчивость положения равновесия исследуется в линейном приближении. Коэффициенты характеристического полинома построены с помощью алгоритма Ляпунова. Условия эффекта Циглера и критерий устойчивости получены с помощью теории возмущений. Исследована устойчивость положения равновесия трехзвенной стержневой системы в отсутствие диссипативных сил. В случае малых диссипативных сил построены зона Циглера и критерий устойчивости положения равновесия системы с тремя степенями свободы. Исследовано влияние сил трения произвольных по величине на устойчивость положения равновесия. Результаты исследований могут быть применены для анализа устойчивости неконсервативных систем с тремя степенями свободы. Также трехзвенная стержневая система может быть рассмотрена как дискретная модель заправочного шланга, находящегося под действием реактивной силы истечения жидкости.

Ключевые слова: заправочный шланг, дискретная модель, стержневая система, следящая сила, диссипативные силы, асимптотическая устойчивость, эффект Циглера, зона Циглера, критерий устойчивости

Получено 06 декабря 2014 года
После доработки 28 января 2015 года

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 14-21-00068).

Байков Александр Евгеньевич
alexbaikov16@gmail.com
Майоров Андрей Юрьевич
yam123@gmail.com

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)
125993, Россия, г. Москва, Волоколамское шоссе, д. 4



Введение

В настоящее время все большее внимание исследователей привлекают неконсервативные механические системы. Так называется широкий класс голономных систем, в которых действуют неконсервативные позиционные силы, разной природы диссипативные силы и гироскопические силы.

Неконсервативные системы исследованы недостаточно хорошо, несмотря на большое количество прикладных задач, где действуют неконсервативные силы. Можно указать целые области, где при моделировании возникают неконсервативные системы. Это проектирование конструкций в машиностроении, авиации, ракетной техники. Особенности приложения системы с неконсервативными силами нашли в строительной механике.

Моделирование динамики ракетносителей (РН) непосредственно связано с исследованием механических систем, в которых действуют неконсервативные силы. Одной из важных задач в динамике РН представляется задача о влиянии диссипативных сил на устойчивость (относительного) положения равновесия РН, когда в системе также действуют следящие силы. Следящими называются силы, которые во все время движения составляют постоянный угол с осями тел, к которым они приложены. Например, совокупное влияние сил аэродинамического сопротивления и реактивной силы тяги двигателя может привести к усилению поперечных колебаний РН. Сила сопротивления и реактивная сила истечения жидкого топлива из конца заправочного шланга, соединяющего летательные аппараты во время их дозаправки в полете, также может вызвать сильные поперечные колебания шланга.

В настоящей статье исследуется дискретная модель заправочного шланга. Она представляет собой трехзвенную стержневую систему, которая находится под действием следящей силы. Следящая сила отвечает равномерно вытекающему из шланга топливу. Мы оставляем без обсуждения вопрос о том, насколько адекватна данная модель, отсылая к [2], где обсуждаются подобные дискретные модели.

Наибольшую известность среди неконсервативных задач получил парадокс дестабилизации, называемый также эффектом Циглера [3]. Изучению этого явления посвящен целый ряд работ [2–5]. В монографии [5] эффект Циглера рассматривается как частный случай проблемы устойчивости по первому приближению положения равновесия механической системы с конечным числом степеней свободы, находящейся под действием потенциальных сил, неконсервативных позиционных сил и линейных сил вязкого трения.

Отсутствие явного критерия устойчивости объясняется алгебраической сложностью задачи. Так как характеристический полином содержит все ненулевые коэффициенты при всех степенях λ , то неравенства из критерия Рауса – Гурвица имеют весьма сложный вид. Их трудно исследовать на совместность, открытым остается вопрос о приведении этих неравенств к простейшему виду.

Исследование устойчивости положения равновесия предлагается выполнить в два этапа:

1. в отсутствие диссипации,
2. при наличии диссипации.

На первом этапе условия устойчивости сводятся к анализу корней характеристического полинома. Для системы с тремя степенями свободы эти условия эквивалентны (с точностью до соотношений типа равенства) положительности коэффициентов полинома и дискриминанта [6]. Алгебраическая сложность заключается в громоздкости выражения для дискриминанта. Как следствие, построение областей устойчивости — нетривиальная задача.

Во втором случае, при наличии трения в пружинах, асимптотическую устойчивость равновесия можно исследовать разными способами. Традиционным методом получения условий устойчивости является теорема Рауса–Гурвица. Однако для систем с малым числом степеней свободы система неравенств, следующая из теоремы Рауса–Гурвица, сильно переопределена. В препринте [7] предложено построить критическое многообразие \mathcal{F} в пространстве параметров системы. Оно соответствует таким значениям параметров, при которых характеристический полином системы имеет по крайней мере один корень на мнимой оси. Критическое многообразие разбивает пространство параметров на области, число n_- корней с отрицательной действительной частью полинома $\tilde{\theta}$ постоянно. В области асимптотической устойчивости число n_- максимально.

Отметим, что в работе [7] многообразие \mathcal{F} алгебраично, и для его построения применяются методы компьютерной алгебры. Для трехзвенной стержневой системы критическое многообразие трансцендентно. По этой причине его практически невозможно построить, отсутствуют эффективные численные методы.

Для решения этой проблемы в дипломной работе мы уточняем постановку задачи следующим образом: трение в пружинах считается малым. Это дает возможность применить теорию возмущений. В качестве малого параметра выбираем безразмерный коэффициент трения ε . В работе [4] показано, что при известных частотах явный критерий асимптотической устойчивости имеет простой вид. Мы применяем результат статьи [4] для системы с тремя степенями свободы.

Наконец, мы исследуем влияние больших диссипативных сил на устойчивость положения равновесия. Критическое значение ε_* коэффициента трения находится численным методом при фиксировании всех остальных параметров. Изменяя эти параметры, можно выявить области, где критическое значение ε_* существует, и области, где оно отсутствует.

1. Уравнения движения и положение равновесия

Трехзвенная стержневая система находится на гладкой горизонтальной плоскости (рис. 1). На свободный конец стержня CD действует следящая сила F ; в процессе движения угол между \vec{DC} и \vec{F} равен α ($\alpha \in [0, \pi]$). Твердые стержни, имеющие одинаковую длину l и массу m , соединены идеальными сферическими шарнирами. Стержень AB прикреплен таким шарниром к неподвижной стенке в точке A . Кроме шарниров, стержни соединены одинаковыми спиральными пружинами с коэффициентом жесткости s . Спиральные пружины подчиняются закону Гука и создают момент демпфирования с коэффициентом b . Формула для проекции M_{BZ} момента демпфирования спиральной пружины B имеет вид $M_{BZ} = -b(\omega_{BC} - \omega_{AB})$, где ω_{BC} , ω_{AB} — угловые скорости стержней BC и AB соответственно. Выражение для проекции M_{CZ} момента демпфирования спиральной пружины C аналогичное. Проекция момента демпфирования пружины A находится по формуле $M_{AZ} = -b\omega_{AB}$. Таким образом, если на систему не действует следящая сила, тривиальное положение равновесия соответствует расположению стержней вдоль оси AX .

Введем обобщенные координаты $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ (углы, которые образуют, соответственно, векторы \vec{AB} , \vec{BC} и \vec{CD} с осью AX). С точки зрения аналитической механики, исследуется голономная механическая система с идеальными стационарными связями и следующими активными силами: силами упругости в спиральных пружинах A, B и C , силами демпфирования в пружинах и следящей силой F . Движение системы описывается уравнениями

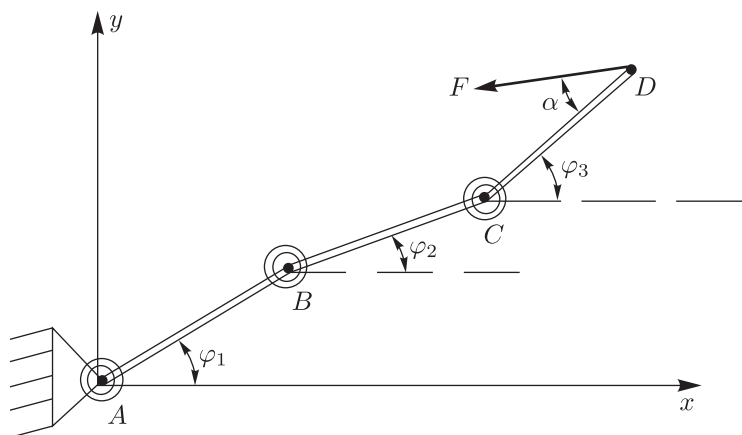


Рис. 1. Трехзвенная стержневая система.

Лагранжа второго рода

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi_j} = -\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_j} - \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{\varphi}_j} + Q_j, \quad j = 1, 2, 3. \quad (1.1)$$

Здесь T — кинетическая энергия системы, Π — потенциальная энергия консервативных сил упругости, Φ — диссипативная функция Рэля сил демпфирования, Q_j — обобщенные силы, соответствующие следящей силе F . Отметим, что следящая сила — неконсервативная позиционная сила, что проверяется неравенством $\text{rot } F \neq 0$.

Стандартным способом получаются следующие явные выражения для T , Π , Φ и Q_j :

$$\begin{aligned} T &= \frac{7}{6} ml^2 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{2}{3} ml^2 \dot{\varphi}_2^2 + \frac{1}{6} ml^2 \dot{\varphi}_3^2 + \frac{3}{2} ml^2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) + \\ &+ \frac{1}{2} ml^2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_3 \cos(\varphi_3 - \varphi_1) + \frac{1}{2} ml^2 \dot{\varphi}_2 \dot{\varphi}_3 \cos(\varphi_3 - \varphi_2), \\ \Pi &= \frac{c}{2} (\varphi_1^2 + (\varphi_2 - \varphi_1)^2 + (\varphi_3 - \varphi_2)^2), \quad \Phi = \frac{b}{2} (\dot{\varphi}_1^2 + (\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_1)^2 + (\dot{\varphi}_3 - \dot{\varphi}_2)^2), \\ Q_1 &= -Fl \sin(\varphi_3 - \varphi_1 - \alpha), \quad Q_2 = -Fl \sin(\varphi_3 - \varphi_2 - \alpha), \quad Q_3 = Fl \sin(\alpha). \end{aligned}$$

Подставим эти выражения в уравнения (1.1) и запишем систему уравнений Лагранжа:

$$\begin{aligned} \frac{7}{3} ml^2 \ddot{\varphi}_1 + \frac{3}{2} ml^2 \ddot{\varphi}_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) + \frac{1}{2} ml^2 \ddot{\varphi}_3 \cos(\varphi_3 - \varphi_1) - \frac{3}{2} ml^2 \dot{\varphi}_2^2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1) - \\ - \frac{1}{2} ml^2 \dot{\varphi}_3^2 \sin(\varphi_3 - \varphi_1) &= c(\varphi_2 - 2\varphi_1) + b(\dot{\varphi}_2 - 2\dot{\varphi}_1) - Fl \sin(\varphi_3 - \varphi_1 - \alpha), \\ \frac{3}{2} ml^2 \ddot{\varphi}_1 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) + \frac{4}{3} ml^2 \ddot{\varphi}_2 + \frac{1}{2} ml^2 \ddot{\varphi}_3 \cos(\varphi_3 - \varphi_2) + \frac{3}{2} ml^2 \dot{\varphi}_1^2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1) - \\ - \frac{1}{2} ml^2 \dot{\varphi}_3^2 \sin(\varphi_3 - \varphi_2) &= c(\varphi_3 + \varphi_1 - 2\varphi_2) + b(\dot{\varphi}_3 + \dot{\varphi}_1 - 2\dot{\varphi}_2) - Fl \sin(\varphi_3 - \varphi_2 - \alpha), \\ \frac{1}{2} ml^2 \ddot{\varphi}_1 \cos(\varphi_3 - \varphi_1) + \frac{1}{2} ml^2 \ddot{\varphi}_2 \cos(\varphi_3 - \varphi_2) + \frac{1}{3} ml^2 \ddot{\varphi}_3 + \frac{1}{2} ml^2 \dot{\varphi}_1^2 \sin(\varphi_3 - \varphi_1) + \\ + \frac{1}{2} ml^2 \dot{\varphi}_2^2 \sin(\varphi_3 - \varphi_2) &= c(\varphi_2 - \varphi_3) + b(\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_3) + Fl \sin \alpha. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Положения равновесия системы (1.2) определяются системой уравнений

$$-\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_j} + Q_j = 0, \quad j = 1, 2, 3,$$

или, в развернутом виде,

$$\begin{aligned} \varphi_2 - 2\varphi_1 &= \frac{Fl}{c} \sin(\varphi_3 - \varphi_1 - \alpha), \\ \varphi_3 + \varphi_1 - 2\varphi_2 &= \frac{Fl}{c} \sin(\varphi_3 - \varphi_2 - \alpha), \\ \varphi_2 - \varphi_3 &= -\frac{Fl}{c} \sin \alpha. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Введем безразмерный параметр $\gamma = \frac{Fl}{c}$. Несмотря на трансцендентность, система (1.3) допускает явное решение. Выразим из третьего уравнения величину $\varphi_2 - \varphi_3$ и подставим полученное выражение в аргумент синуса и левую часть второго уравнения. Далее, из второго уравнения выражаем величину $\varphi_1 - \varphi_2$ и подставляем в первое уравнение. В результате получится система

$$\begin{aligned} \gamma \sin \alpha - \gamma \sin(\gamma \sin \alpha - \alpha) - \varphi_1 &= \gamma \sin(\varphi_3 - \varphi_1 - \alpha), \\ \varphi_1 - \varphi_2 &= \gamma \sin(\gamma \sin \alpha - \alpha) - \gamma \sin \alpha, \\ \varphi_2 - \varphi_3 &= -\gamma \sin \alpha. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Теперь складываем второе и третье уравнение системы (1.4) и выражение для $\varphi_1 - \varphi_3$ подставляем в аргумент синуса первого уравнения. Отсюда уже можно найти корень φ_1^* . Второе и третье уравнения системы (1.4) линейны относительно φ_2 и φ_3 и однозначно разрешимы. Таким образом, трехзвенная стержневая система имеет единственное положение равновесия; явные формулы имеют вид

$$\begin{aligned} \varphi_1^* &= \gamma \sin \alpha - \gamma \sin(\gamma \sin \alpha - \alpha) - \gamma \sin(2\gamma \sin \alpha - \alpha - \gamma \sin(\gamma \sin \alpha - \alpha)), \\ \varphi_2^* &= 2\gamma \sin \alpha - 2\gamma \sin(\gamma \sin \alpha - \alpha) - \gamma \sin(2\gamma \sin \alpha - \alpha - \gamma \sin(\gamma \sin \alpha - \alpha)), \\ \varphi_3^* &= 3\gamma \sin \alpha - 2\gamma \sin(\gamma \sin \alpha - \alpha) - \gamma \sin(2\gamma \sin \alpha - \alpha - \gamma \sin(\gamma \sin \alpha - \alpha)). \end{aligned} \quad (1.5)$$

В частности, при $\alpha = 0$ или $\alpha = \pi$ (следящая сила направлена вдоль стержня) имеем $\varphi_1^* = \varphi_2^* = \varphi_3^* = 0$. Этот случай был рассмотрен Г. Циглером в известной работе [3], но только для двухзвенной стержневой системы. Далее, для краткости, случай $\alpha = 0$ или $\alpha = \pi$ называется *случаем Циглера*.

Нам будет удобно ввести новые параметры u, v , связанные с параметрами γ, α соотношениями

$$u = \gamma \cos \alpha, \quad v = \gamma \sin \alpha.$$

Перепишем формулы (1.5) в новых параметрах u, v :

$$\begin{aligned} \varphi_1^* &= v - u \sin v + v \cos v - \cos(u \sin v - v \cos v) \cdot (u \sin 2v - v \cos 2v) + \\ &\quad + \sin(u \sin v - v \cos v) \cdot (u \cos 2v + v \sin 2v), \\ \varphi_2^* &= 2v - 2u \sin v + 2v \cos v - \cos(u \sin v - v \cos v) \cdot (u \sin 2v - v \cos 2v) + \\ &\quad + \sin(u \sin v - v \cos v) \cdot (u \cos 2v + v \sin 2v), \\ \varphi_3^* &= 3v - 2u \sin v + 2v \cos v - \cos(u \sin v - v \cos v) \cdot (u \sin 2v - v \cos 2v) + \\ &\quad + \sin(u \sin v - v \cos v) \cdot (u \cos 2v + v \sin 2v). \end{aligned} \quad (1.6)$$

Составим уравнения возмущенного движения в окрестности положения равновесия (1.6). Рассмотрим возмущения $\varphi_1 = \varphi_1^* + \beta_1$, $\varphi_2 = \varphi_2^* + \beta_2$, $\varphi_3 = \varphi_3^* + \beta_3$. Обезразмерим уравнения возмущенного движения. В качестве единицы измерения углов рассмотрим единицу размерности, единицы измерения времени — характерное значение $T^* = m^{1/2}lc^{-1/2}$. После всех упрощений обезразмеренные уравнения возмущенного движения можно записать в виде

$$\begin{aligned}
 & \frac{7}{3} \ddot{\beta}_1 + \frac{3}{2} \ddot{\beta}_2 \cos(\beta_2 - \beta_1 + v - u \sin v + v \cos v) + \frac{1}{2} \ddot{\beta}_3 \cos(\beta_3 - \beta_1 + 2v - u \sin v + v \cos v) - \\
 & - \frac{3}{2} \dot{\beta}_2^2 \sin(\beta_2 - \beta_1 + v - u \sin v + v \cos v) - \frac{1}{2} \dot{\beta}_3^2 \sin(\beta_3 - \beta_1 + 2v - u \sin v + v \cos v) = \\
 & = \beta_2 - 2\beta_1 + (1 - \cos(\beta_3 - \beta_1)) \cdot (u \sin(2v - u \sin v + v \cos v) - \\
 & - v \cos(2v - u \sin v + v \cos v)) - \sin(\beta_3 - \beta_1) \cdot (u \cos(2v - u \sin v + v \cos v) + \\
 & + v \sin(2v - u \sin v + v \cos v)) + \varepsilon(\dot{\beta}_2 - 2\dot{\beta}_1), \\
 & \frac{3}{2} \ddot{\beta}_1 \cos(\beta_2 - \beta_1 + v - u \sin v + v \cos v) + \frac{4}{3} \ddot{\beta}_2 + \frac{1}{2} \ddot{\beta}_3 \cos(\beta_3 - \beta_2 + v) + \\
 & + \frac{3}{2} \dot{\beta}_1^2 \cos(\beta_2 - \beta_1 + v - u \sin v + v \cos v) - \frac{1}{2} \dot{\beta}_3^2 \sin(\beta_3 - \beta_2 + v) = \\
 & = \beta_3 + \beta_1 - 2\beta_2 + (u \sin v - v \cos v) \cdot (1 - \cos(\beta_3 - \beta_2)) - \\
 & - \sin(\beta_3 - \beta_2) \cdot u \cos(v + v \sin u) + \varepsilon(\dot{\beta}_3 + \dot{\beta}_1 - 2\dot{\beta}_2), \\
 & \frac{1}{2} \ddot{\beta}_1 \cos(\beta_3 - \beta_1 + 2v - u \sin v + v \cos v) + \frac{1}{2} \ddot{\beta}_2 \cos(\beta_3 - \beta_2 + v) + \frac{1}{3} \ddot{\beta}_3 + \\
 & + \frac{1}{2} \dot{\beta}_1^2 \sin(\beta_3 - \beta_1 + 2v - u \sin v + v \cos v) + \frac{1}{2} \dot{\beta}_2^2 \sin(\beta_3 - \beta_2 + v) = \\
 & = \beta_2 - \beta_3 + \varepsilon(\dot{\beta}_2 - \dot{\beta}_3).
 \end{aligned} \tag{1.7}$$

Здесь $\varepsilon = bm^{-1/2}l^{-1}c^{-1/2}$ — безразмерный коэффициент демпфирования, производная по безразмерному времени снова обозначена точкой.

В этой статье мы ограничимся линейным анализом устойчивости, делая, где это возможно, выводы об устойчивости по Ляпунову или асимптотической устойчивости тривиального положения равновесия системы (1.7). Линеаризованные уравнения возмущенного движения в векторно-матричной форме имеют вид

$$A\ddot{\beta} + \varepsilon B\dot{\beta} + C\beta = 0, \tag{1.8}$$

где $\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)^T$, A, B, C — матрицы третьего порядка. Для сокращения записи введем обозначение $\delta = 2v - u \sin v + v \cos v$. Приведем выражения для матриц линейной системы (1.8):

$$\begin{aligned}
 A &= \begin{pmatrix} \frac{7}{3} & \frac{3}{2} \cos(\delta - v) & \frac{1}{2} \cos(\delta) \\ \frac{3}{2} \cos(\delta - v) & \frac{4}{3} & \frac{1}{2} \cos(v) \\ \frac{1}{2} \cos(\delta) & \frac{1}{2} \cos(v) & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, & B &= \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \\
 C &= \begin{pmatrix} 2 - u \cos(\delta) - u \sin(\delta) & -1 & u \cos(\delta) + v \sin(\delta) \\ -1 & 2 - u \cos(v) - v \sin(v) & -1 + u \cos(v) + u \sin(v) \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

2. Характеристический полином

Об устойчивости тривиального положения равновесия системы (1.1) можно судить по характеристическому полиному

$$\theta(\lambda; \varepsilon) = \det(A\lambda^2 + B\lambda + C). \quad (2.1)$$

Если все корни характеристического полинома имеют отрицательные вещественные части, то положение равновесия системы (1.1) асимптотически устойчиво. Следовательно, по теореме Ляпунова об устойчивости по линейному приближению, положение равновесия системы (1.1) также асимптотически устойчиво.

Для нахождения коэффициентов характеристического полинома воспользуемся алгоритмом Леверье, описание которого приводится в следующей теореме.

Теорема 1. *Рассмотрим постоянную матрицу A размерности $n \times n$ с характеристическим полиномом*

$$\det(\lambda I - A) = \lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + \alpha_1\lambda + \alpha_0 \quad (2.2)$$

(I — единичная матрица порядка n). Тогда резольвента матрицы A может быть записана в виде

$$(\lambda I - A)^{-1} = \frac{1}{\det(\lambda I - A)} \sum_{k=0}^n \lambda^k R_k.$$

Матрицы R_k ($k = 1, \dots, n$) определяются следующим образом:

$$R_k = \sum_{j=1}^n \alpha_j A^{j-k}, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

$\alpha_n = 1$. Коэффициенты α_k и матрицы R_k , $k = 1, 2, \dots, n$ могут быть найдены с помощью следующего итерационного алгоритма.

Положим

$$\alpha_n = 1, \quad R_n = I.$$

Тогда

$$\alpha_{n-k} = -\frac{1}{k} \operatorname{tr}(AR_{n-k+1}),$$

$$R_{n-k} = \alpha_{n-k}I + AR_{n-k+1}$$

для $k = 1, 2, \dots, n$. При $k = n$ имеем $R_0 = 0$.

(Доказательство теоремы 1 см. в [8].)

Чтобы воспользоваться теоремой 1, приведем систему (1.8) к стандартной форме Коши:

$$\dot{\beta} = y,$$

$$A\dot{y} + \varepsilon By + C\beta = 0,$$

или

$$\dot{\beta} = y,$$

$$\dot{y} = -\varepsilon A^{-1}By - A^{-1}C\beta. \quad (2.3)$$

Запишем систему (2.3) в векторно-матричном виде

$$\dot{x} = Mx.$$

Здесь $x = (\beta^T, y^T)^T$, M — блочная матрица размерности 6×6 , имеющая вид

$$M = \left(\begin{array}{c|c} 0 & E \\ \hline -A^{-1}C & -\varepsilon A^{-1}B \end{array} \right).$$

Через E мы обозначили единичную матрицу третьего порядка, а через I — единичную матрицу шестого порядка. Установим связь характеристического полинома (2.1) с характеристическим полиномом (2.2) из теоремы 1. Пусть $\tilde{\theta}(\lambda; \varepsilon) = \det(\lambda I - M) = \lambda^6 + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + \alpha_1\lambda + \alpha_0$. Тогда $\theta(\lambda; \varepsilon) = \det(A)\tilde{\theta}(\lambda; \varepsilon)$. Предположив, что $A = E$, получим выражения для коэффициентов полинома $\tilde{\theta}$ с помощью алгоритма Леверье:

$$\alpha_6 = 1,$$

$$R_6 = I,$$

$$\alpha_5 = \varepsilon \operatorname{tr} B,$$

$$R_5 = \left(\begin{array}{c|c} \varepsilon \operatorname{tr}(B)E & E \\ \hline -C & \varepsilon(\operatorname{tr}(B)E - B) \end{array} \right),$$

$$\alpha_4 = \operatorname{tr} C + \frac{1}{2} \varepsilon^2 (\operatorname{tr} B - \operatorname{tr} B^2),$$

$$R_4 = \left(\begin{array}{c|c} -C + \left(\operatorname{tr} C + \frac{1}{2} \varepsilon^2 (\operatorname{tr}^2(B) - \operatorname{tr}(B^2)) \right) E & \varepsilon(\operatorname{tr}(B)E - B) \\ \hline \varepsilon(BC - C \operatorname{tr} B) & -C + \operatorname{tr}(C)E + \\ & + \frac{1}{2} \varepsilon^2 ((\operatorname{tr}^2(B) - \operatorname{tr}(B^2))E - 2B \operatorname{tr} B + 2B^2) \end{array} \right).$$

В силу громоздкости матриц R_k , $k < 4$, в дальнейшем мы не будем выписывать выражения для них, ограничившись лишь выражениями для коэффициентов. Продолжаем:

$$\alpha_3 = \varepsilon(\operatorname{tr} C \operatorname{tr} B - \operatorname{tr}(BC)) + \varepsilon^3 \det B,$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{2} (\operatorname{tr}^2(C) - \operatorname{tr}(C^2)) + \frac{\varepsilon^2}{2} (\operatorname{tr} C \operatorname{tr}^2 B - \operatorname{tr} C \operatorname{tr}(B^2) + 2 \operatorname{tr}(B^2 C) - 2 \operatorname{tr}(BC) \operatorname{tr} B) + \\ + \frac{\varepsilon^4}{2} (\operatorname{tr}(B^2) \operatorname{tr}^2(B) - \operatorname{tr}^2(B^2) - 2 \operatorname{tr}(B^3) \operatorname{tr} B + 2 \operatorname{tr}(B^4) - 2 \operatorname{tr}(B) \det B).$$

Отметим, что коэффициент при ε^4 в последнем выражении равен нулю для любых квадратных матриц порядка 3. Поэтому выражение для α_2 имеет вид

$$\alpha_2 = \frac{1}{2} (\operatorname{tr}^2(C) - \operatorname{tr}(C^2)) + \frac{\varepsilon^2}{2} (\operatorname{tr} C \operatorname{tr}^2 B - \operatorname{tr} C \operatorname{tr}(B^2) + 2 \operatorname{tr}(B^2 C) - 2 \operatorname{tr}(BC) \operatorname{tr} B).$$

Выражение для α_1 имеет вид

$$\alpha_1 = \frac{\varepsilon}{2} (\operatorname{tr}^2(C) \operatorname{tr}(B) - \operatorname{tr}(BC) \operatorname{tr}(C) + \operatorname{tr}(C^2 B) - \operatorname{tr}(B) \operatorname{tr}(C^2)).$$



Мы отбросили коэффициенты при ε^3 и ε^5 , которые равны нулю для любых матриц третьего порядка. Наконец,

$$\alpha_0 = \det C.$$

Если $A \neq E$, то следует заменить в выражениях для коэффициентов α_k , $k = 0, \dots, 6$, матрицы B , C матрицами $A^{-1}B$ и $A^{-1}C$ соответственно.

При выводе коэффициентов α_k мы воспользовались формулой, выражающей определитель матрицы третьего порядка через ее след:

$$\det B = \frac{1}{6} (\text{tr}^3(B) - 3 \text{tr}(B^2) \text{tr}(B) + 2 \text{tr}(B^3)).$$

Приведем выражения для коэффициентов характеристического полинома (2.1). Напомним, что мы ввели обозначение $\delta = 2v - u \sin v + v \cos v$. Коэффициент при λ^6 :

$$\frac{3}{16} \cos(2v - 2\delta) + \frac{169}{432} + \frac{1}{48} \cos 2\delta - \frac{5}{48} \cos 2v = \det A.$$

Коэффициент при λ^5 :

$$\varepsilon \left(\frac{3}{4} \cos(v - \delta) - \frac{1}{4} \cos(v + \delta) - \frac{9}{8} \cos(2v - 2\delta) - \right. \\ \left. - \frac{1}{4} \cos 2\delta - \frac{1}{4} \cos 2v - \frac{3}{4} \cos(v - 2\delta) + \frac{19}{12} \cos v + \frac{283}{72} \right).$$

Коэффициент при λ^4 :

$$- \frac{13}{24} u + \frac{3}{4} \cos(v - \delta) - \frac{1}{4} \cos(\delta + v) - \frac{47}{72} u \cos v - \frac{9}{8} \cos(2v - 2\delta) - \frac{1}{4} \cos 2\delta - \frac{1}{4} \cos 2v + \\ + \frac{1}{24} v \sin 2\delta - \frac{5}{24} v \sin 2v + \frac{1}{16} u \cos(2v - \delta) + \frac{1}{16} u \cos(2v + \delta) + \frac{1}{16} \cos(v - 2\delta) + \\ + \frac{1}{16} u \cos(v + 2\delta) + \frac{1}{16} v \sin(2v + \delta) - \frac{1}{16} v \sin(2v - \delta) + \frac{1}{16} v \sin(v + 2\delta) + \\ + \frac{1}{16} v \sin(v - 2\delta) - \frac{3}{4} \cos(v - 2\delta) - \frac{23}{72} u \cos \delta - \frac{23}{72} v \sin \delta - \frac{47}{72} v \sin v + \\ + \frac{19}{12} \cos v + \frac{283}{72} + \frac{1}{24} u \cos 2\delta - \frac{5}{24} u \cos 2v + \frac{3}{8} u \cos(2v - 2\delta).$$

Коэффициент при λ^3 :

$$\varepsilon^3 + \left(12 - u - \cos(v - \delta)u + 6 \cos(v - \delta) - u \cos(\delta + v) - v \sin(\delta + v) + \right. \\ + \frac{1}{2} v \sin(v - \delta) - \frac{3}{4} u \cos(v - 2\delta) - \frac{17}{12} u \cos v - \frac{1}{2} \sin 2\delta - \frac{1}{2} v \sin 2v - 2v \sin \delta + \\ \left. + \frac{3}{4} v \sin(v - 2\delta) + 2 \cos \delta - 2u \cos 2v - \frac{17}{12} v \sin v + 4 \cos v - \frac{1}{2} u \cos 2\delta \right) \varepsilon.$$

Коэффициент при λ^2 :

$$\begin{aligned} & 3\varepsilon^2 + 6 - u + \frac{1}{3} uv \sin(v + \delta) - u \cos(v - \delta) + 3 \cos(v - \delta) - u \cos(v + \delta) - v \sin(v + \delta) + \\ & + \frac{1}{2} v \sin(v - \delta) + \frac{1}{4} u^2 \cos \delta + \frac{1}{8} u^2 \cos(2v - \delta) + \frac{1}{8} u^2 \cos(2v + \delta) + \frac{1}{4} u^2 \cos v + \\ & + \frac{1}{8} u^2 \cos(v - 2\delta) + \frac{1}{8} u^2 \cos(v + 2\delta) + \frac{1}{8} v^2 \cos(2v - \delta) - \frac{1}{8} v^2 \cos(\delta + 2v) - \\ & - \frac{1}{8} v^2 \cos(v + 2\delta) + \frac{1}{8} v^2 \cos(v - 2\delta) + \frac{1}{6} u^2 \cos(v - \delta) + \frac{1}{6} u^2 \cos(v + \delta) - \frac{17}{12} u \cos v + \\ & + \frac{1}{4} uv \sin \delta - \frac{1}{2} v \sin 2\delta - \frac{1}{2} v \sin 2v - \frac{3}{4} u \cos(v - 2\delta) + \frac{3}{4} v \sin(v - 2\delta) + \cos \delta - 2u \cos \delta - \\ & - 2v \sin \delta - \frac{17}{12} v \sin v + \frac{1}{4} uv \sin(2v + \delta) + \frac{1}{4} uv \sin(v + 2\delta) + 2 \cos v - \\ & - \frac{1}{2} u \cos 2\delta - \frac{1}{2} u \cos 2v + \frac{1}{2} v^2 \cos(v - \delta) - \frac{1}{6} v^2 \cos(v + \delta) + \frac{1}{4} uv \sin v. \end{aligned}$$

Коэффициент при λ :

$$3\varepsilon.$$

Коэффициент при λ^0 :

$$1.$$

3. Устойчивость в отсутствие диссипации

Для получения условий устойчивости в отсутствие диссипации воспользуемся методом, изложенным в [6]. Пусть задана обратимая система линейных дифференциальных уравнений

$$\frac{dX}{dt} = A(p)X, \quad X = (Y, Z)^T, \quad Y, Z \in R^m \quad (3.1)$$

с постоянной матрицей $A(p)$, где $p = (p_1, \dots, p_n)$ — вектор параметров. Здесь m — число степеней свободы, а n — число независимых параметров. Характеристический полином

$$\tilde{f}(\mu) := \sum_{k=0}^{2m} \tilde{f}_k(p) \mu^k, \quad \tilde{f}_{2m} = 1$$

матрицы $A(p)$ содержит только четные степени λ , поэтому для анализа его корней вводится полином от $\mu = \lambda^2$:

$$f(\mu) = \sum_{k=0}^m f_{2k}(p) \mu^k, \quad f_{2m} = 1. \quad (3.2)$$

Изолированное положение равновесия $X = 0$ системы (3.1) является устойчивым тогда и только тогда, когда все корни характеристического полинома (3.2) μ_1, \dots, μ_m вещественны и отрицательны.

Теорема 2. Если $m = 2$ или $m = 3$, то условия

$$f_0(p) > 0, \quad f_k(p) \geq 0, \quad k = 1, \dots, m - 1,$$

и

$$D(f) \geq 0$$

необходимы и достаточны для устойчивости. Здесь $D(f)$ — дискриминант полинома.



Рассмотрим случай $\alpha = 0$ (случай Циглера). Тогда параметры системы u, v задаются формулой

$$u = \gamma, \quad v = 0.$$

Сделаем замену $\lambda = \sqrt{\mu}$ и запишем следующее алгебраическое уравнение:

$$1 + \frac{13}{108} \mu^3 + \left(-\frac{19}{18} u + \frac{131}{36} \right) \mu^2 + \left(12 + \frac{49}{6} u + \frac{4}{3} u^2 \right) \mu = 0.$$

Дискриминант D имеет вид

$$D(u) = \frac{5\,693\,549}{5832} - \frac{7\,492\,171}{3888} u + \frac{70\,924\,849}{46\,656} u^2 - \frac{7\,273\,067}{11\,664} u^3 + \frac{1\,650\,937}{11\,664} u^4 - \frac{1\,373}{81} u^5 + \frac{68}{81} u^6,$$

и условия теоремы 2 принимают вид

$$\frac{131}{36} - \frac{19}{18} u \geq 0, \quad 12 - \frac{49}{6} u + \frac{4}{3} u^2 \geq 0, \quad D(u) \geq 0.$$

Решим полученную в предыдущем пункте систему неравенств графически (рис. 2).

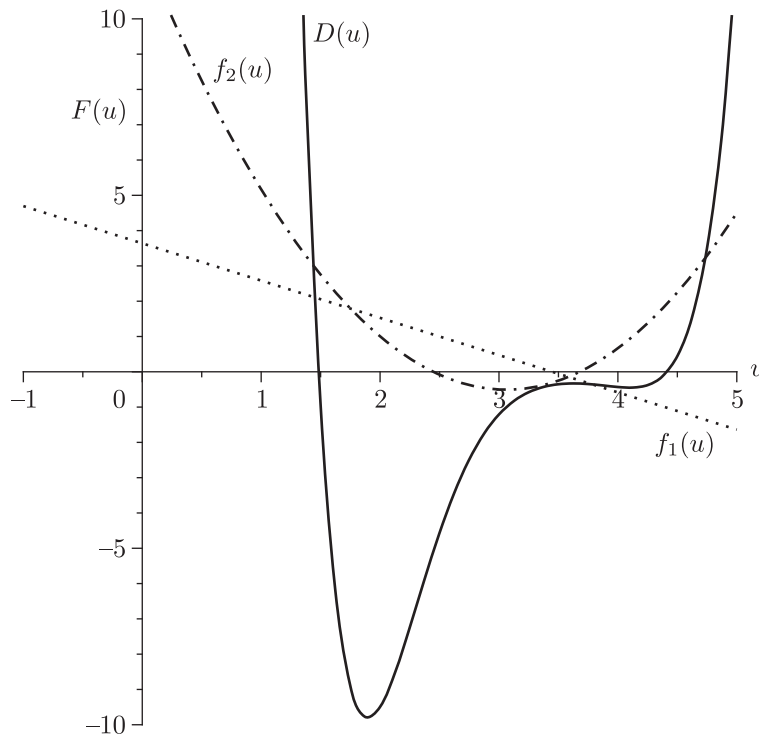


Рис. 2. График коэффициентов и дискриминанта характеристического полинома, если $v = 0$.

Все условия теоремы 2 одновременно выполняются в интервале $(-\infty; u^*)$. Чтобы определить значение u^* , воспользуемся методом Ньютона нахождения корней нелинейных уравнений. Уравнение, из которого определяется u^* , имеет вид

$$D(u) = 0.$$

В качестве начальной точки возьмем $u = 0.5$ и зададим точность $\delta = 0.000000001$. Метод Ньютона сошелся за 8 итераций к точке $u^* = 1.483549109$.



Мы получили следующий результат: устойчивость трехзвенной стрержневой системы в отсутствие диссипации возможна лишь при значении параметра $u \leq u^* = 1.483549109$.

Рассмотрим случай, когда $|v| \neq 0$, но мало. Построим графики дискриминанта и коэффициентов полинома частот. Отметим, что для $v \neq 0$ дискриминант и коэффициенты не являются полиномами относительно u , и поэтому могут иметь бесконечное (счетное) число корней.

Продемонстрируем это на примере, когда v принимает значение $v = 0.001$. Построим графически условия устойчивости для этого случая (рис. 3).

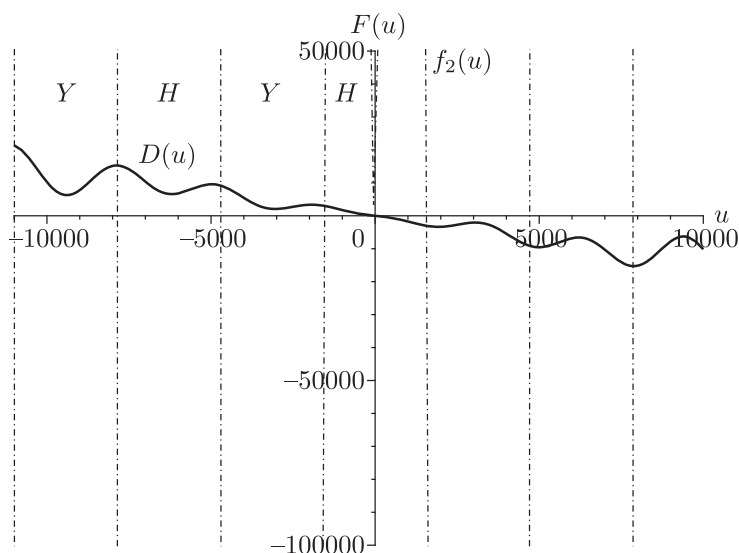


Рис. 3. Условия для коэффициентов и дискриминанта характеристического полинома, если v мало.

Действительно, коэффициенты имеют бесконечное число корней в отрицательной области (при $u < 0$). Отсюда имеем неожиданный результат: следящая сила действует почти вдоль стержня с незначительной поперечной составляющей. Когда $v = 0$, то равновесие устойчиво при любом отрицательном u , и это очевидно, поскольку сила F растягивает систему. Однако даже если v ничтожно мало, но не равно нулю, существуют такие значения следящей силы, растягивающей систему, при которых положение равновесия неустойчиво. Данный результат не следует из интуитивных соображений.

4. Построение зон Циглера

В настоящем параграфе мы исследуем влияние малой диссипации на устойчивость тривиального положения равновесия линеаризованной системы (1.8). Разумеется, в некритическом случае можно сделать вывод и об устойчивости положения равновесия системы (1.7). Следуя [4], дадим определение эффекта Циглера.

Определение 1. Пусть тривиальное положение равновесия системы уравнений возмущенного движения (1.7) устойчиво в линейном приближении при $\varepsilon = 0$. Будем говорить, что в системе имеет место эффект Циглера (эффект дестабилизации малыми диссипативными силами), если тривиальное положение равновесия системы линеаризованной системы (1.8) (или, эквивалентно, положение равновесия системы (1.7)) неустойчиво при сколь угодно малом $\varepsilon > 0$.

В предыдущем параграфе мы отметили, что устойчивость положения равновесия системы (1.7) при $\varepsilon = 0$ возможна лишь в критическом случае, когда все корни характеристического полинома (2.1) принадлежат положительной части вещественной оси. Пусть $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ — положительные корни полинома частот. При наличии малой диссипации эффект Циглера возможен, если существует корень $\lambda = \lambda(\varepsilon)$ характеристического полинома $\theta(\lambda; \varepsilon)$, такой, что $\text{Re } \lambda(\varepsilon) > 0$. При этом $\lambda(\varepsilon) \rightarrow i\omega_j, \varepsilon \rightarrow +0$ при некоторой $j = 1, 2, 3$. Как выяснится чуть позже, возможны два сценария дестабилизации (рис. 4).

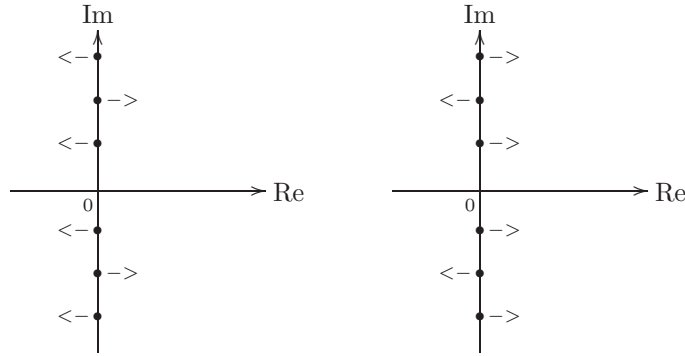


Рис. 4. Сценарии дестабилизации.

	$\text{Re } \lambda_1(\varepsilon) < 0$		$\text{Re } \lambda_1(\varepsilon) > 0$
Сценарий I	$\text{Re } \lambda_2(\varepsilon) > 0$	Сценарий II	$\text{Re } \lambda_2(\varepsilon) < 0$
(рис. 4 слева)	$\text{Re } \lambda_3(\varepsilon) < 0$	(рис. 4 справа)	$\text{Re } \lambda_3(\varepsilon) > 0$

Согласно теории возмущений, для анализа бифуркации корней характеристического полинома необходимо разложить функции $\lambda_j = \lambda_j(\varepsilon)$ в ряд по степеням ε :

$$\lambda_j = i\omega_j + \lambda_j^{(1)}\varepsilon + \lambda_j^{(2)}\varepsilon^2 + \dots, \quad j = 1, 2, 3.$$

Будем удерживать члены до первого порядка включительно. Подставим вместо λ выражение $i\omega_j + \lambda_j^{(1)}\varepsilon + \dots$ в характеристический полином $\theta(\lambda; \varepsilon)$ и приравняем коэффициенты при ε^0 и ε^1 к нулю:

$$\begin{aligned} \varepsilon^0: \det(-\omega_j^2 A + C) &= 0, \\ \varepsilon^1: F(\lambda_j^{(1)}) &= 0. \end{aligned}$$

Здесь функция $F(\lambda_j^{(1)})$ линейна относительно $\lambda_j^{(1)}$, а ее коэффициенты зависят от коэффициентов характеристического полинома и частот.

Если решить уравнение $F(\lambda_j^{(1)}) = 0$ относительно $\lambda_j^{(1)}$, то можно найти выражение для коэффициентов $\lambda_j^{(1)}$ разложения корней и сделать вывод о стабилизации или дестабилизации положения равновесия.

Запишем характеристический полином в общем виде

$$\theta(\lambda; \varepsilon) = \lambda^6 + \alpha_5\lambda^5 + \alpha_4\lambda^4 + \alpha_3\lambda^3 + \alpha_2\lambda^2 + \alpha_1\lambda + \alpha_0$$

(мы опять-таки считаем, что $A = E$). Выражение для частотного полинома имеет вид

$$\tilde{\Delta}(\omega) = -\omega^6 + \alpha_4|_{\varepsilon=0} \omega^4 - \alpha_2|_{\varepsilon=0} \omega^2 + \det(C).$$

После подстановки выражений для коэффициентов и замены $\omega^2 = \mu$ имеем

$$\Delta(\mu) = -\mu^3 + \operatorname{tr}(C)\mu^2 - \frac{1}{2}(\operatorname{tr}^2(C) - \operatorname{tr}(C^2))\mu + \det(C).$$

Из теоремы о неявной функции следует формула для коэффициентов $\lambda_j^{(1)}$:

$$\lambda_j^{(1)} = - \left. \frac{\partial \theta / \partial \varepsilon}{\partial \theta / \partial \lambda} \right|_{\varepsilon=0, \lambda=i\omega_j}, \quad j = 1, 2, 3. \quad (4.1)$$

Вычислим производную по малому параметру характеристического полинома в нуле:

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = \left. \frac{\partial \alpha_5}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \lambda^5 + \left. \frac{\partial \alpha_3}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \lambda^3 + \left. \frac{\partial \alpha_1}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \lambda.$$

Введем следующие обозначения:

$$\left. \frac{\partial \alpha_5}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = \beta_5, \quad \left. \frac{\partial \alpha_3}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = \beta_3, \quad \left. \frac{\partial \alpha_1}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = \beta_1.$$

Выражение для числителя в формуле (4.1) имеет вид

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0, \lambda=i\omega_j} = i\omega_j (\beta_5 \omega_j^4 - \beta_3 \omega_j^2 + \beta_1).$$

Теперь запишем выражение для знаменателя в формуле (4.1):

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial \lambda} \right|_{\varepsilon=0, \lambda=i\omega_j} = 6i\omega_j^5 - 4i \operatorname{tr}(C)\omega_j^3 + i(\operatorname{tr}^2(C) - \operatorname{tr}(C^2))\omega_j.$$

Заодно вычислим производную полинома Δ по μ : $\Delta'(\mu) = 3\mu^2 + 2 \operatorname{tr}(C)\mu - \frac{1}{2}(\operatorname{tr}^2(C) - \operatorname{tr}(C^2))$.

Нетрудно заметить, что

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial \lambda} \right|_{\varepsilon=0, \lambda=i\omega_j} = -2i\omega_j \Delta'(\omega_j^2).$$

Таким образом, мы получили явное выражение для коэффициента разложения корней характеристического полинома

$$\lambda_j^{(1)} = \frac{\beta_5 \omega_j^4 - \beta_3 \omega_j^2 + \beta_1}{2\Delta'(\omega_j^2)}, \quad j = 1, 2, 3. \quad (4.2)$$

После подстановки выражений для коэффициентов $\beta_5, \beta_3, \beta_1$ формула (4.2) принимает вид

$$\lambda_j^{(1)} = \frac{1}{2} \frac{\operatorname{tr}(B)\omega_j^4 - (\operatorname{tr}(C)\operatorname{tr}(B) - \operatorname{tr}(BC))\omega_j^2 + \frac{1}{2}(\operatorname{tr}^2(C)\operatorname{tr}(B) - \operatorname{tr}(BC)\operatorname{tr}(C) + \operatorname{tr}(C^2B) - \operatorname{tr}(B)\operatorname{tr}(C^2))}{-3\omega_j^4 + 2 \operatorname{tr}(C)\omega_j^2 - \frac{1}{2}(\operatorname{tr}^2(C) - \operatorname{tr}(C^2))}.$$

В условиях стабилизации или эффекта Циглера полином третьей степени Δ имеет три различных вещественных положительных корня μ_1, μ_2, μ_3 (мы не рассматриваем вырожденные случаи, когда есть нулевой корень или кратные положительные корни). Необходимое и достаточное условие существования трех положительных корней дает система неравенств $D > 0, \det(C) > 0$, где D — дискриминант (см. §3). При этом выполняются следующие неравенства (см. рис. 5):

$$\Delta'(\mu_1) < 0, \quad \Delta'(\mu_2) > 0, \quad \Delta'(\mu_3) < 0. \quad (4.3)$$

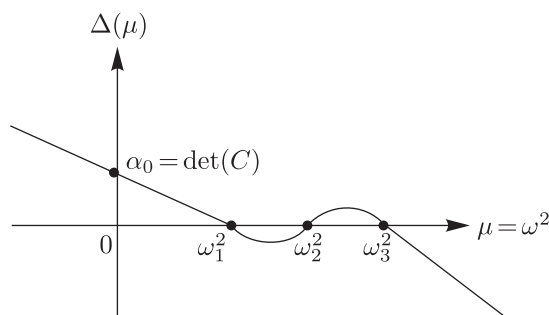


Рис. 5. Схематическое изображение графика полинома Δ .

Для асимптотической устойчивости все коэффициенты разложения корней характеристического полинома должны быть отрицательны. Поэтому, согласно системе неравенств (4.3) и формуле (4.2) для $\lambda_j^{(1)}$, необходимое и достаточное условие асимптотической устойчивости положения равновесия системы (1.8) имеет вид

$$\begin{aligned} \beta_5 \omega_1^4 - \beta_3 \omega_1^2 + \beta_1 &> 0, \\ \beta_5 \omega_2^4 - \beta_3 \omega_2^2 + \beta_1 &< 0, \\ \beta_5 \omega_3^4 - \beta_3 \omega_3^2 + \beta_3 &> 0. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Для решения неравенств (4.4) рассмотрим квадратное уравнение

$$\beta_5 \omega^2 - \beta_3 \mu + \beta_1 = 0. \quad (4.5)$$

Корни этого уравнения имеют вид

$$\mu_* = \frac{\beta_3 - \sqrt{\beta_3^2 - 4\beta_1\beta_5}}{2\beta_5}, \quad \mu^* = \frac{\beta_3 + \sqrt{\beta_3^2 - 4\beta_1\beta_5}}{2\beta_5}.$$

Таким образом, для асимптотической устойчивости необходимо и достаточно выполнение неравенств

$$\mu_1 < \mu_* < \mu_2 < \mu^* < \mu_3,$$

где μ_j — корни полинома Δ , $j = 1, 2, 3$ (см. рис. 6).

Итак, сформулируем критерий асимптотической устойчивости положения равновесия системы (1.8), если диссипативные силы малы.

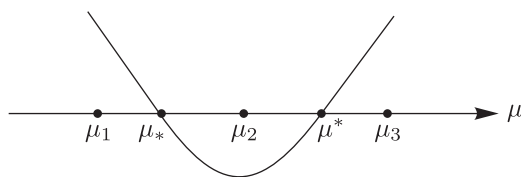


Рис. 6. Графическое изображение условия устойчивости положения равновесия.

Теорема 3. Пусть положение равновесия системы (1.7) устойчиво в линейном приближении. Тогда для асимптотической устойчивости положения равновесия системы (1.8) или, в силу теоремы Ляпунова об устойчивости по линейному приближению, положения равновесия системы (1.7) с точностью до вырожденных случаев, когда полином Δ имеет кратные положительные корни или нулевой корень, необходимо и достаточно выполнения следующей цепочки неравенств:

$$\mu_1 < \mu_* < \mu_2 < \mu^* < \mu_3, \quad (4.6)$$

где μ_* , μ^* — корни уравнения (4.5), $\mu_j = \omega_j^2$, ω_j — частоты малых колебаний.

Вернемся к трехзвенной стержневой системе. Вновь рассмотрим частный случай, когда следящая сила F действует вдоль стержня, то есть $\alpha = 0$. Параметры системы имеют вид

$$u = \gamma, \quad v = 0.$$

Подставляя значения u , v в выражение для коэффициентов $\lambda_j^{(1)}$ разложения корней характеристического полинома $\theta(\lambda; \varepsilon)$, получаем формулу

$$\lambda_j^{(1)} = \frac{5\omega_j^4 - (5u - 12)\omega_j^2 + 5u^2 - 25u + \frac{131}{4}}{-3\omega_j^4 + (10 - 4u)\omega^2 - u^2 - 5u - 6}.$$

Коэффициенты β_5 , β_3 , β_1 имеют вид

$$\beta_5 = \frac{131}{6}, \quad \beta_3 = 24 - \frac{49}{6}u, \quad \beta_1 = 3.$$

Корни квадратного уравнения (4.5) вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} \mu^* &= \frac{432}{131} - \frac{147}{131}u + \frac{3}{131}\sqrt{19164 - 14112u + 2401u^2}, \\ \mu_* &= \frac{432}{131} - \frac{147}{131}u - \frac{3}{131}\sqrt{19164 - 14112u + 2401u^2}. \end{aligned}$$

Условия асимптотической устойчивости записываются в виде (4.6).

Построим графики зоны асимптотической устойчивости и зоны Циглера, полученные в предыдущем пункте. Сначала построим график условия асимптотической устойчивости, если $\alpha = 0$. Полином $\Delta(\mu)$ имеет вид

$$\Delta(\mu) = 1 + \frac{13}{108}\mu^3 + \left(-\frac{19}{18}u + \frac{131}{36}\right)\mu^2 + \left(12 + \frac{49}{6}u + \frac{4}{3}u^2\right)\mu.$$

Графики корней характеристического полинома и корней вспомогательного полинома Δ представлены на рисунке 7.

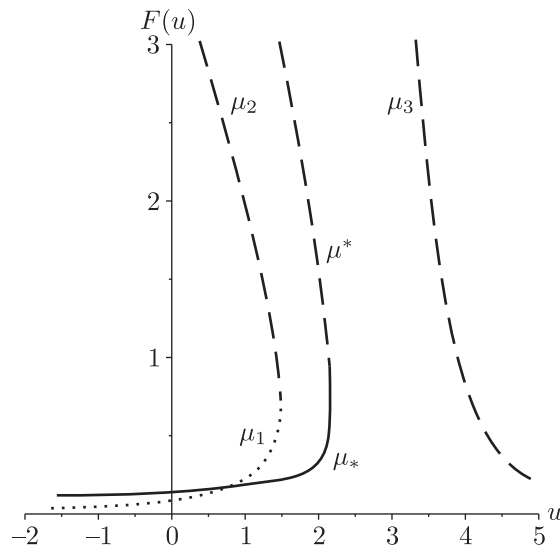


Рис. 7. Корни характеристического полинома.

Как видно из рисунка 7, корни удовлетворяют условиям $\mu_2 < \mu^*$, $\mu_1 < \mu_2$ в некоторой области. Чтобы ее определить, найдем точку пересечения графиков корней μ_1 и μ_* . Для этого воспользуемся методом Ньютона.

Метод Ньютона сошелся за 15 итераций к точке $u^{**} = 0.86897465$ с точностью $\varepsilon = 0.00000001$.

Таким образом, мы получили область асимптотической устойчивости положения равновесия:

$$0.86897465 = u^{**} < u < u^* = 1.483549109.$$

5. Влияние большой диссипации. Критерий устойчивости

Метод, который мы предлагаем для анализа устойчивости положения равновесия при наличии произвольной диссипации, связан с понятием критического значения коэффициента диссипации.

Определение 2. Критическим называется такое значение коэффициента диссипации, при котором характеристический полином θ имеет по крайней мере один корень на мнимой оси.

Пусть все параметры фиксированы, кроме коэффициента диссипации ε . Если $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ — два критических коэффициента трения, между которыми нет других (при этом $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2$), то при $\varepsilon \in (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ количество n_- корней характеристического полинома с отрицательной вещественной частью постоянно. Это следует из теоремы о неявной функции. В частности, если n_- максимально, то положение равновесие асимптотически устойчиво при $\varepsilon \in (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$.

Пусть $\theta(\lambda; \varepsilon, p)$ — характеристический полином системы (1.8), где p — вектор параметров u, v . Сделаем подстановку $\lambda = i\omega$ и перепишем характеристическое уравнение в виде

$$A(\omega^2; \varepsilon, p) + i\omega B(\omega^2; \varepsilon, p) = 0. \tag{5.1}$$

Сделаем подстановку $\omega^2 = \mu$ и приравняем действительную и мнимую части уравнения к нулю. Получим систему уравнений

$$\begin{aligned} A(\mu; \varepsilon, p) &= 0, \\ B(\mu; \varepsilon, p) &= 0, \end{aligned} \quad (5.2)$$

где A, B — полиномы относительно ε, p . Если исключить из системы (5.2) μ , то получится алгебраическое уравнение относительно ε :

$$\text{Res}_\mu(A, B, \varepsilon; p) = 0. \quad (5.3)$$

Критические значения коэффициента диссипации принадлежат множеству положительных корней уравнения (5.3). Положительный корень ε_* уравнения (5.3) тогда и только тогда есть критическое значение, когда найдется положительное значение μ_* , такое, что (μ_*, ε_*) — корень системы (5.2).

Можно, наоборот, исключить из системы (5.2) ε и получить алгебраическое уравнение относительно μ :

$$\text{Res}_\varepsilon(A, B, \mu; p) = 0. \quad (5.4)$$

Выбор альтернатив зависит от того, какое из уравнений ((5.3) или (5.4)) легче решить.

Вернемся к системе Циглера (следящая сила направлена вдоль стержня). Выражения для полиномов A и B имеют вид

$$\begin{aligned} A &= (12\mu^2 - 3\mu)\varepsilon^2 + 112\mu - \frac{13}{108}\mu^3 - \frac{4}{3}u^2\mu + \frac{131}{36}\mu^2 - \frac{19}{18}u\mu^2 + \frac{49}{6}u\mu, \\ B &= \frac{131}{36}\mu^2\varepsilon + \left(\frac{49}{6}\varepsilon u - \varepsilon^3 - 24\varepsilon\right)\mu + 3\varepsilon. \end{aligned}$$

Укажем выражение для ε :

$$\varepsilon^2 = \frac{1}{6\omega} \sqrt{131\omega^4 + 294u\omega^2 - 864\omega^2 + 108}.$$

Далее подставляем выражение для ε в полином B и сделаем замену $\omega^2 = \mu$. Имеем следующее кубическое уравнение относительно μ :

$$-8 + \frac{4703}{108}\mu^3 + \left(-\frac{5315}{18} + \frac{1745}{18}u\right)\mu^2 + \left(-\frac{49}{3}u + 96 - \frac{4}{3}u^2\right)\mu = 0.$$

Сделаем замену, чтобы упростить выражения для корней получившегося кубического уравнения:

$$P = -\frac{5315}{18} + \frac{1745}{18}u, \quad Q = -\frac{49}{3}u + 96 - \frac{4}{3}u^2.$$

Уравнение для определения μ имеет вид

$$-8 + \frac{4703}{108}\mu^3 + P\mu^2 + Q\mu = 0.$$

Корни этого уравнения можно найти по формуле Кардано, но мы опускаем соответствующие выражения из-за их громоздкости.

Выражение для ε получается после подстановки в формулу полученных выражений для корней μ_i , $i = 1, 2, 3$. Укажем также, что выражения для ε должны принимать только положительные значения.

Таким образом, вычисления показывают, что второй способ предпочтительнее.

В этой задаче есть один свободный параметр u (не считая ε). Напомним результаты исследований из предыдущих параграфов.

1. При $-\infty < u < u_*$ и $\varepsilon = 0$ равновесие системы устойчиво в линейном приближении, а при $u > u_*$, $\varepsilon = 0$ равновесие неустойчиво (см. §3).
2. Если $-\infty < u < u_{**}$ и $\varepsilon > 0$, но мало, то равновесие асимптотически устойчиво.
3. Если $u_{**} < u < u_*$ и $\varepsilon > 0$, но мало, то равновесие неустойчиво (зона Циглера).
4. Если $u > u_*$ и $\varepsilon > 0$, но мало, то равновесие неустойчиво.

Имеем выражение для ε :

$$\varepsilon^2 = \frac{\frac{131}{36} \mu^2 - \mu \left(24 - \frac{49}{6} u \right) + 3}{\mu}.$$

Нас интересует только знак ε , поэтому мы опустили знак радикала в формуле и отбросили отрицательный корень.

1. Пусть $-\infty < u < u_{**}$. Можно подтвердить численными испытаниями, что асимптотическая устойчивость имеет место не только при малых $\varepsilon > 0$, но и при всех положительных.
2. Теперь пусть $u_{**} < u < u_*$ (параметр u принадлежит зоне Циглера). Тогда для каждого параметра u существует единственное критическое значение $\varepsilon_* > 0$, такое, что при $0 < \varepsilon < \varepsilon_*$ равновесие системы неустойчиво, а при $\varepsilon > \varepsilon_*$ равновесие асимптотически устойчиво.
3. Наконец, пусть $u > u_*$. В этом случае критического значения коэффициента трения не существует, поскольку уравнение имеет единственный положительный корень μ , но после подстановки его в функцию для ε получается отрицательное значение.

Список литературы

- [1] Рабинович Б. И. Введение в динамику ракет-носителей космических аппаратов. Москва: Машиностроение, 1975. 416 с.
- [2] Циглер Г. Основы теории устойчивости конструкций. Москва: Мир, 1971. 192 с.
- [3] Ziegler H. Die Stabilitätskriterien der Elastomechanik // Ing. Arch., 1952, vol. 20, no. 1, pp. 49–56.
- [4] Байков А. Е., Красильников П. С. Об эффекте Циглера в неконсервативной механической системе // ПММ, 2010, т. 74, № 1, с. 74–88.
- [5] Меркин Д. Р. Введение в теорию устойчивости движения. Москва: Наука, 1976. 319 с.
- [6] Брюно А. Д. Множество устойчивости многопараметрических задач: Препринт. Москва: ИПМ им. М. В. Келдыша РАН, 2010. 14 с.
- [7] Брюно А. Д., Батхин А. Б., Варин В. П. Множество устойчивости одной гироскопической задачи: Препринт. Москва: ИПМ им. М. В. Келдыша РАН, 2010. 30 с.
- [8] Квакернаак Х., Сиван Р. Линейные оптимальные системы управления. Москва: Мир, 1977. 650 с.



On the equilibrium position stability of discrete model of filling hose under the action of reactive force

Alexander E. Baikov¹, Andrey Yu. Mayorov²

^{1,2}Moscow Aviation Institute (National Research University)

Volokolamskoe Shosse, 4, GSP-3, A-80, Moscow, 125993, Russia

¹alexbaikov16@gmail.com, ²ylam123@gmail.com

The destabilization of the stable equilibrium position of a non-conservative system with three degrees of freedom under the action of a linear viscous friction force is considered. The dissipation is assumed to be completed. The standard methods of the stability theory are using for solving problem. Stability of equilibrium position is studied in the linear approximation. The coefficients of characteristic polynomial are constructed by using Le Verrier's algorithm. Ziegler's effect condition and criterion for the stability are constructed by using perturbation theory. Stability of the three-link rod system's equilibrium position is investigated, when there is no dissipative force. Ziegler's area and criterion for the stability of the equilibrium position of a system with three degrees of freedom, in which the friction forces take small values, are constructed. The influence of large friction forces is investigated. The results of the study may be used for the analysis of stability of a non-conservative system with three degrees of freedom. Also, the three-link rod system may be used as discrete model of filling hose under the action of reactive force.

MSC 2010: 70E50

Keywords: filling hose, discrete model, three-link rod system, tracking force, dissipative forces, asymptotically stability, Ziegler's effect, Ziegler's areas, criterion for the stability

Received December 06, 2014, accepted January 28, 2015

Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2015, vol. 11, no. 1, pp. 127–146 (Russian)

