



УДК: 531.36

MSC 2010: 70E17, 70E20, 70H14

Об устойчивости частных движений тяжелого твердого тела, обусловленных быстрыми вертикальными вибрациями одной из его точек

О. В. Холостова

Рассматривается движение тяжелого твердого тела, одна из точек которого совершает заданные высокочастотные гармонические колебания вдоль вертикали. В рамках приближенной автономной системы дифференциальных уравнений движения найдены два новых типа перманентных вращений тела вокруг вертикали, обусловленных наличием быстрых вибраций и не существующих в случае тела с неподвижной точкой. Исследован вопрос об устойчивости этих движений.

Ключевые слова: твердое тело, быстрые вибрации, перманентные вращения, устойчивость, резонанс

1. Введение

Начало изучению влияния высокочастотных вибраций на движение твердого тела и системы твердых тел положила работа [1], где были получены условия устойчивости перевернутого маятника с вибрирующим подвесом. Последующие исследования по данной тематике составляют обширную библиографию. Еще до недавнего времени такие исследования касались, в основном, маятниковых систем при различных вариантах вибрации точек подвеса. Рассматривались математический [2–7], физический [8], сферический [9] маятники, двойные маятники [7, 10, 11]. Изучалась динамика волчка Лагранжа с вибрирующим подвесом [12]. Большое число ссылок можно найти в работах [7, 13].

Получено 22 октября 2014 года

После доработки 16 декабря 2014 года

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 14-21-00068) в Московском авиационном институте (национальном исследовательском университете).

Холостова Ольга Владимировна

kholostova_o@mail.ru

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)

125993, Россия, г. Москва, А-80, ГСП-3, Волоколамское ш., д. 4.



В недавних работах [14, 15] получены приближенные автономные дифференциальные уравнения типа уравнений Эйлера – Пуассона, описывающие движение твердого тела с произвольной геометрией масс в предположении, что одна из точек тела (точка подвеса) совершает произвольные периодические или условно периодические вибрации высокой частоты и малой амплитуды. В рамках этой приближенной системы был исследован ряд частных движений твердого тела. Для случая вертикальных вибраций точки подвеса решена задача о существовании и устойчивости относительных равновесий тела с произвольной геометрией масс, для которых прямая, содержащая центр масс и точку подвеса, вертикальна или наклонена к вертикали [15, 16]. Исследовано влияние быстрых периодических и условно-периодических вибраций точки подвеса на существование и устойчивость известных частных движений волчка Лагранжа — стационарных вращений вокруг вертикали и регулярных прецессий [17].

Еще один класс частных движений тела с неподвижной точкой составляют перманентные вращения вокруг вертикали, впервые описанные в работах [18, 19]. Наибольшее число работ посвящено изучению устойчивости перманентных вращений вокруг главной оси, содержащей центр масс тела. Различные аспекты линейного и нелинейного анализа устойчивости этих движений рассмотрены в работах [20–27]. Полное решение задачи во всем диапазоне параметров осуществлено в монографии [27], здесь же приводится подробная библиография.

Другой аспект исследуемой проблемы — вопросы существования и устойчивости новых типов стационарных режимов, возникающих вследствие вибраций и отсутствующих у тела с неподвижной точкой. В данной работе, в рамках приближенной системы, рассматриваются два новых типа стационарных движений твердого тела, обусловленных наличием быстрых вертикальных гармонических вибраций точки подвеса. Первый тип представляет коническое движение вокруг вертикали несимметричного тела с центром масс на главной оси инерции. Второй тип движения — перманентное вращение вокруг (вертикальной) главной оси инерции в случае, когда центр масс тела не лежит на этой оси. Такие движения для тела с неподвижной точкой невозможны: конические движения вокруг вертикали могут совершать только динамически симметричные тела с геометрией масс, соответствующей случаям Эйлера и Лагранжа; главная ось инерции тела служит осью перманентного вращения только тогда, когда она содержит центр масс тела. Проведен линейный и нелинейный анализ устойчивости соответствующих найденным решениям положений равновесия приведенной (по Раусу) системы с двумя степенями свободы.

2. Постановка задачи

Рассмотрим движение тяжелого твердого тела, предполагая, что одна из его точек O , называемая далее точкой подвеса, совершает заданные гармонические вибрации вдоль вертикали. Введем поступательно движущуюся систему координат $OXYZ$ с осью OZ , направленной вертикально вверх, и связанную с телом систему координат $Oxyz$, оси которой совпадают с главными осями инерции тела для точки O . Ориентацию системы координат $Oxyz$ относительно $OXYZ$ будем задавать при помощи углов Эйлера ψ, θ, φ .

Пусть m и A, B, C — масса тела и его главные моменты инерции для точки O . Обозначим через x_G, y_G, z_G координаты центра масс G тела в связанных осях, полагая, что хотя бы одна из этих координат, например, z_G , отлична от нуля.

Считаем также, что амплитуда h вибраций точки подвеса мала по сравнению с характерной длиной $\ell = A/(mz_G)$ тела, а частота Ω велика по сравнению с характерной

частотой $\sqrt{g/\ell}$. Введем малый параметр ε ($0 < \varepsilon \ll 1$) и положим

$$\frac{h}{\ell} \sim \varepsilon, \quad \frac{\sqrt{g/\ell}}{\Omega} \sim \varepsilon, \quad h\Omega \sim 1.$$

При помощи методов теории возмущений ранее в работах [14, 15] для случая произвольных периодических или условно-периодических быстрых вибраций точки подвеса получена приближенная система дифференциальных уравнений относительного (в системе координат $OXYZ$) движения тела типа уравнений Эйлера–Пуассона, в которой время исключено из слагаемых до порядка ε^2 включительно. В рассматриваемом здесь случае вертикальных гармонических вибраций эта приближенная автономная система уравнений может быть записана в канонической форме с функцией Гамильтона

$$\begin{aligned} H &= \frac{(A \cos^2 \varphi + B \sin^2 \varphi)(p_\psi - p_\varphi \cos \theta)^2}{2AB \sin^2 \theta} + \frac{A \sin^2 \varphi + B \cos^2 \varphi}{2AB} p_\theta^2 + \\ &+ \frac{(B - A) \sin \varphi \cos \varphi (p_\psi - p_\varphi \cos \theta)}{AB \sin \theta} p_\theta + \frac{p_\varphi^2}{2C} + \Pi_g + \Pi_v, \\ \Pi_g &= mg(x_G \gamma_1 + y_G \gamma_2 + z_G \gamma_3), \\ \Pi_v &= \frac{s}{2} \left[\frac{1}{A} (y_G \gamma_3 - z_G \gamma_2)^2 + \frac{1}{B} (x_G \gamma_3 - z_G \gamma_1)^2 + \frac{1}{C} (x_G \gamma_2 - y_G \gamma_1)^2 \right], \\ \gamma_1 &= \sin \theta \sin \varphi, \quad \gamma_2 = \sin \theta \cos \varphi, \quad \gamma_3 = \cos \theta; \quad s = \frac{1}{2} m^2 h^2 \Omega^2. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Здесь $p_\psi, p_\theta, p_\varphi$ — импульсы, сопряженные с координатами ψ, θ, φ , а $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ — проекции орта оси OZ на оси связанной системы координат. Последние два слагаемые в (2.1) представляют собой гравитационный и вибрационный потенциалы тела [13, 14]. Как в исходной, так и в преобразованной приближенной системе координата ψ циклическая и соответствующий ей импульс p_ψ постоянен.

Существуют частные решения системы с гамильтонианом (2.1), соответствующие равномерным вращениям тела вокруг оси, неподвижной в теле и в системе координат $OXYZ$ (перманентные вращения). Для тела с неподвижной точкой такие движения подробно исследованы [20–27]. В случае вертикальных вибраций точки подвеса тела, как и в случае тела с неподвижной точкой, перманентные вращения могут происходить только вокруг вертикально расположенных осей. Наличие быстрых вибраций существенно влияет и на совокупность осей перманентных вращений, и на характер устойчивости. В частности, при наличии вибраций существуют перманентные вращения, невозможные для тела с неподвижной точкой. Укажем два типа таких вращений.

1.1. Пусть центр масс тела находится на одной из главных осей инерции, например, на оси Oz , и при этом $A \neq B$. При выполнении условия

$$s \geq \frac{mgAB}{Cz_G} \quad (2.2)$$

имеется частное решение приведенной системы с двумя степенями свободы с гамильтонианом (2.1) — положение равновесия, для которого

$$\begin{aligned} \theta &= \theta_0 = \text{const}, \quad \varphi = \varphi_0 = \text{const}, \\ p_\theta &= p_{\theta_0} = (A - B) \sin \theta_0 \sin \varphi_0 \cos \varphi_0 \omega, \quad p_\varphi = p_{\varphi_0} = C \cos \theta_0 \omega, \\ p_\psi &= p_{\psi_0} = [(A \sin^2 \varphi_0 + B \cos^2 \varphi_0) \sin^2 \theta_0 + C \cos^2 \theta_0] \omega, \end{aligned} \quad (2.3)$$

где константы θ_0 и ω задаются соотношениями

$$\cos \theta_0 = \frac{mgAB}{sCz_G}, \quad \omega = \sqrt{\frac{sz_G^2}{AB}}. \quad (2.4)$$

Описанному решению отвечает коническое движение тела, при котором его ось Oz наклонена к вертикали под углом θ_0 и вращается вокруг нее с постоянной угловой скоростью ω .

Заметим, что при отсутствии вибрации (случай $s = 0$) данное решение не существует; в этом случае коническое движение может совершать только динамически симметричное тело с геометрией масс, соответствующей случаям Эйлера или Лагранжа.

1.2. Найдем случаи, когда ось перманентного вращения — одна из главных осей инерции тела, например, Ox . Тогда имеем условие $\gamma_1 = \pm 1$, а из канонических уравнений движения системы с гамильтонианом (2.1) получаем равенства

$$y_G \left(mg\gamma_1 - \frac{sx_G}{C} \right) = 0, \quad z_G \left(mg\gamma_1 - \frac{sx_G}{B} \right) = 0. \quad (2.5)$$

Для тела с неподвижной точкой ($s = 0$) эти равенства удовлетворяются только при условии $y_G = z_G = 0$. При этом величина γ_1 может принимать значения 1 и -1 , а центр масс тела лежит на оси вращения Ox , располагаясь выше или ниже точки O соответственно. Аналогичные перманентные вращения тела существуют и при наличии вертикальных вибраций точки O .

При $s \neq 0$ равенства (2.5) удовлетворяются также, если $\gamma_1 = 1$ и выполнено одно из следующих условий:

$$y_G = 0, \quad x_G = mgB/s \quad (z_G - \text{любое}), \quad (2.6)$$

$$z_G = 0, \quad x_G = mgC/s \quad (y_G - \text{любое}), \quad (2.7)$$

$$B = C, \quad x_G = mgB/s \quad (y_G, z_G - \text{любые}). \quad (2.8)$$

В случаях (2.6) и (2.7) центр масс тела лежит в одной из главных плоскостей инерции тела, содержащих ось вращения Ox (но не на самой оси), при этом абсцисса x_G центра масс фиксирована. В случае (2.8) тело динамически симметрично, центр масс занимает произвольное положение в плоскости, параллельной экваториальной плоскости инерции Oyz . Поворотом последней вокруг оси динамической симметрии можно добиться того, чтобы центр масс оказался в главной плоскости инерции, и свести этот случай к случаям (2.6) или (2.7).

Для перманентных вращений в случаях (2.6)–(2.8) соответствующие положения равновесия приведенной системы описываются соотношениями (ω — угловая скорость вращения)

$$\theta_0 = \frac{\pi}{2}, \quad \varphi_0 = \frac{\pi}{2}, \quad p_{\psi_0} = A\omega, \quad p_{\theta_0} = p_{\varphi_0} = 0. \quad (2.9)$$

Цель работы — исследование устойчивости положений равновесия (2.3) и (2.9) приведенной системы с гамильтонианом (2.1) по отношению к возмущениям координат θ , φ и отвечающих им импульсов при фиксированном значении постоянной циклического интеграла.

3. О неустойчивости конического движения несимметричного тела

Для исследования устойчивости решения (2.3), отвечающего коническому движению, гамильтониан системы удобнее привести к безразмерному виду. Обезразмерим импульсы и время при помощи множителей $A\Omega_1$ и Ω_1 соответственно, где

$$\Omega_1 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}, \quad \ell = \frac{A}{mz_G}, \quad (3.1)$$

и введем безразмерные параметры

$$\alpha = \frac{A}{B}, \quad \beta = \frac{A}{C}, \quad \xi = \frac{mz_G h^2 \Omega^2}{2Ag}, \quad \eta = \omega/\Omega_1. \quad (3.2)$$

Инерционные параметры α и β должны удовлетворять неравенствам, следующим из неравенств треугольника для осевых моментов инерции:

$$\alpha\beta + \beta - \alpha \geq 0, \quad \alpha\beta + \alpha - \beta \geq 0, \quad \alpha + \beta - \alpha\beta \geq 0. \quad (3.3)$$

Параметры ξ и η характеризуют, соответственно, частоту вибрации точки подвеса тела и угловую скорость его перманентного вращения.

Соотношения (2.2) и (2.4) в безразмерных параметрах имеют вид

$$\xi \geq \frac{\beta}{\alpha}, \quad \cos \theta_0 = \frac{\beta}{\alpha\xi}, \quad \eta = \sqrt{\alpha\xi}, \quad (3.4)$$

а постоянные значения безразмерных импульсов $\tilde{p}_\psi, \tilde{p}_\theta, \tilde{p}_\varphi$ для рассматриваемого движения на основании формул (2.3) выражаются как

$$\begin{aligned} \tilde{p}_{\psi_0} &= \left[\left(\sin^2 \varphi_0 + \frac{1}{\alpha} \cos^2 \varphi_0 \right) \sin^2 \theta_0 + \frac{1}{\beta} \cos^2 \theta_0 \right] \eta, \\ \tilde{p}_{\theta_0} &= \frac{\alpha - 1}{\alpha} \sin \theta_0 \sin \varphi_0 \cos \varphi_0 \eta, \quad \tilde{p}_{\varphi_0} = \frac{1}{\beta} \cos \theta_0 \eta. \end{aligned}$$

В обезразмеренном гамильтониане \tilde{H} положим $\tilde{p}_\psi = \tilde{p}_{\psi_0}$ и введем возмущения x_1, x_2, y_1, y_2 по формулам

$$\theta = \theta_0 + x_1, \quad \varphi = \varphi_0 + x_2, \quad \tilde{p}_\theta = \tilde{p}_{\theta_0} + y_1, \quad \tilde{p}_\varphi = \tilde{p}_{\varphi_0} + y_2. \quad (3.5)$$

Отбрасывая аддитивную постоянную, получим $\tilde{H} = \tilde{H}_2 + \dots$, где многоточие означает совокупность слагаемых не менее третьей степени относительно возмущений, а квадратичная часть \tilde{H}_2 имеет вид

$$\begin{aligned} \tilde{H}_2 &= a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_3 y_1^2 + a_4 y_2^2 + a_5 x_1 x_2 + \\ &+ a_6 x_1 y_1 + a_7 x_1 y_2 + a_8 x_2 y_1 + a_9 x_2 y_2 + a_{10} y_1 y_2, \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{2\alpha^3 \xi} [\beta^2 (\alpha - 1)^3 \cos^6 \varphi_0 - \beta (\alpha - 1)^2 (2\alpha\beta - 2\alpha - \beta) \cos^4 \varphi_0 + \\ &+ \alpha (\alpha - 1) (\alpha\beta^2 - 5\beta^2 - 2\alpha\beta + \alpha + 2\beta) \cos^2 \varphi_0 + \alpha^2 (2\beta - 1)^2], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_2 &= \frac{1}{2\alpha^3\xi} (\alpha - 1)^2 (\alpha^2\xi^2 - \beta^2) (\alpha \sin^2 \varphi_0 + \cos^2 \varphi_0), \\
a_3 &= \frac{1}{2} (\alpha \sin^2 \varphi_0 + \cos^2 \varphi_0), \quad a_4 = \frac{\beta[\alpha^2\xi^2 - \beta^2 + \beta(\sin^2 \varphi_0 + \alpha \cos^2 \varphi_0)]}{2\alpha^2\xi^2 \sin^2 \theta_0}, \\
a_5 &= -\frac{(\alpha - 1) \cos \varphi_0 \sin \varphi_0 \sin \theta_0}{\alpha^2} [\beta(\alpha^2 - 1) \cos^2 \varphi_0 - \alpha(\alpha\beta - \alpha + 3\beta - 1)], \\
a_6 &= -\frac{\alpha - 1}{\alpha^2\xi} \sqrt{\alpha\xi} \sin \varphi_0 \cos \varphi_0 [\beta(\alpha - 1) \cos^2 \varphi_0 - \alpha(\beta - 1)], \\
a_7 &= -\frac{\sqrt{\alpha\xi}}{\alpha^3\xi^2 \sin \theta_0} [\beta^2(\alpha - 1)^2 \cos^4 \varphi_0 - \beta(\alpha - 1)(\alpha\beta - \alpha - \beta) \cos^2 \varphi_0 - \\
&\quad - \alpha(\alpha^2\xi^2 + \beta^2 - \beta)], \quad a_8 = -\frac{\alpha - 1}{\alpha} \sqrt{\alpha\xi} \sin \theta_0 (\cos^2 \varphi_0 - \alpha \sin^2 \varphi_0), \\
a_9 &= \frac{(\alpha^2 - 1)\beta\sqrt{\alpha\xi} \sin \varphi_0 \cos \varphi_0}{\alpha^2\xi}, \quad a_{10} = \frac{(\alpha - 1)\beta \sin \varphi_0 \cos \varphi_0}{\alpha\xi \sin \theta_0}.
\end{aligned}$$

Характеристическое уравнение соответствующей гамильтониану (3.6) линеаризованной системы уравнений возмущенного движения записывается в виде

$$\lambda^4 + a\lambda^2 + b = 0. \quad (3.7)$$

Здесь, как показывают расчеты,

$$b = -\frac{4(\alpha - 1)^2 (\alpha^2\xi^2 - \beta^2)^3 \sin^2 \varphi_0 \cos^2 \varphi_0}{\alpha^5 \xi^4 \sin^2 \theta_0}.$$

В области существования конического движения, задаваемого первым условием (3.4), $b < 0$, и, значит, уравнение (3.7) имеет корень с положительной вещественной частью. Следовательно, рассматриваемое решение неустойчиво в силу теоремы Ляпунова об устойчивости по первому приближению.

4. Исследование устойчивости перманентного вращения вокруг главной оси инерции

Решим теперь вопрос об устойчивости решения (2.9), соответствующего перманентному вращению тела вокруг главной оси инерции в случае, когда центр масс не лежит на этой оси. Будем считать, что геометрия масс тела удовлетворяет условию (2.6).

Используя формулы (3.2) и (3.1), в которых величина z_G заменена на x_G , введем безразмерные параметры α , β , ξ , η и обезразмерим импульсы и время при помощи множителей $A\Omega_1$ и Ω_1 . Введем также величину $\sigma = z_G/x_G$. В силу второго условия случая (2.6) имеем соотношение $\xi = 1/\alpha$. Независимыми будем считать параметры α , β , σ , η ; первые три из них характеризуют геометрию масс тела, последний — угловую скорость перманентного вращения.

Положим в обезразмеренном гамильтониане $\tilde{p}_\psi = \tilde{p}_{\psi_0} = \eta$ и введем возмущения x_1 , x_2 , y_1 , y_2 по формулам (3.5) при учете соотношений (2.9). Гамильтониан \tilde{H} возмущенного движения запишется в виде

$$\tilde{H} = \tilde{H}_2 + \tilde{H}_3 + \tilde{H}_4 + \dots, \quad (4.1)$$



$$\begin{aligned}\tilde{H}_2 &= \frac{1}{2}(\eta^2 - \sigma^2)x_1^2 + \frac{1}{2\alpha}[(\sigma^2 - \eta^2\alpha)(1 - \alpha) + \beta - \alpha]x_2^2 + \\ &+ \frac{1}{2}\alpha y_1^2 + \frac{1}{2}\beta y_2^2 + \eta x_1 y_2 - (1 - \alpha)\eta x_2 y_1, \\ \tilde{H}_3 &= -\frac{1}{2}\sigma x_1^3 - \frac{1}{2}\sigma x_1 x_2^2, \\ \tilde{H}_4 &= \frac{8\eta^2 + 4\sigma^2 - 3}{24}x_1^4 + \frac{5}{6}\eta x_1^3 y_2 + \frac{2(\alpha - 1)(\sigma^2 + \alpha\eta^2) + \alpha - 2\beta}{4\alpha}x_1^2 x_2^2 + \\ &+ \frac{1}{2}x_1^2 y_2^2 + \frac{(\alpha - 1)\eta}{2}x_1^2 x_2 y_1 + (\alpha - 1)\eta x_1 x_2^2 y_2 + (\alpha - 1)x_1 x_2 y_1 y_2 - \\ &- \frac{\alpha - 1}{2}x_2^2 y_1^2 - \frac{2(\alpha - 1)\eta}{3}x_2^3 y_1 + \frac{4(\alpha - 1)(\sigma^2 - \alpha\eta^2) + \alpha - 4\beta}{24\alpha}x_2^4,\end{aligned}$$

где многоточие означает совокупность слагаемых не менее пятой степени относительно величин x_j, y_j ($j = 1, 2$).

4.1. Достаточные условия устойчивости

Достаточные условия устойчивости исследуемого движения будем искать как условия положительной определенности квадратичной формы \tilde{H}_2 из (4.1). Последние задаются системой неравенств вида

$$\eta^2 > \sigma^2, \quad (\sigma^2 - \eta^2\alpha)(1 - \alpha) > \alpha - \beta, \quad (4.2)$$

$$(\sigma^2 - \eta^2)(1 - \alpha) > \alpha - \beta, \quad (\beta - 1)\eta^2 > \beta\sigma^2. \quad (4.3)$$

Результаты исследования условий устойчивости здесь и далее будем представлять следующим образом. Проводится разбиение допустимой части плоскости параметров α, β , задаваемой условиями (3.3), на ряд областей (см. рис. 1). Для каждой точки (α, β) выбранной области указывается диапазон изменения параметра σ с границами — функциями величин α и β . Границы изменения четвертого параметра η для каждой точки (α, β, σ) из выделенной части трехмерного пространства этих параметров есть функции координат этой точки.

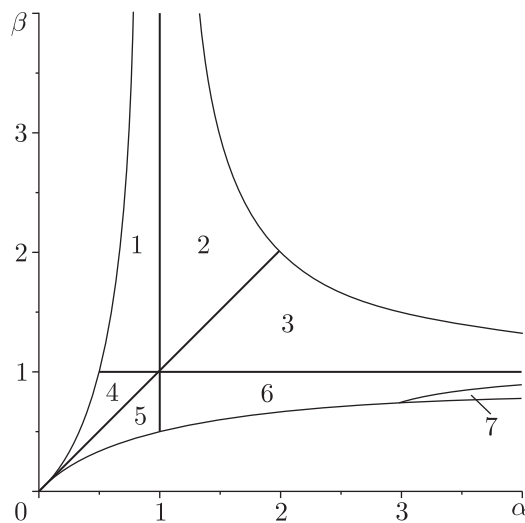


Рис. 1

Из второго неравенства (4.3) сразу следует условие $\beta > 1$. Соответствующую часть плоскости (α, β) разделяем на области 1–3, границами которых служат отрезки прямых $\alpha = 1$, $\beta = 1$ и $\alpha = \beta$ (рис. 1).

Введем обозначения

$$\sigma_0^2 = \frac{(\beta - 1)(\alpha - \beta)}{\alpha - 1}, \quad \eta_0^2 = \frac{\beta}{\beta - 1} \sigma^2, \quad \eta_1^2 = \sigma^2 + \frac{\alpha - \beta}{\alpha - 1}. \quad (4.4)$$

Несложный анализ показывает, что в области 1 неравенства (4.2), (4.3) сводятся к условиям $\sigma < \sigma_0$, $\eta_0 < \eta < \eta_1$. В области 2 параметр σ может принимать произвольные значения, а $\eta > \eta_0$. В области 3 для случаев $\sigma < \sigma_0$ и $\sigma > \sigma_0$ имеем, соответственно, $\eta > \eta_1$ и $\eta > \eta_0$.

Отметим, что при выполнении выписанных достаточных условий исследуемое решение устойчиво и по отношению к малому возмущению величины \tilde{p}_ψ , что следует из дополнения Ляпунова к теореме Рауса [28].

4.2. Необходимые условия устойчивости

Пусть форма \tilde{H}_2 не является положительно определенной. Рассмотрим линеаризованную систему дифференциальных уравнений возмущенного движения, отвечающую гамильтониану \tilde{H}_2 . Характеристическое уравнение этой системы имеет вид (3.7), где

$$\begin{aligned} a &= (2 - \alpha - \beta + \alpha\beta)\eta^2 - \frac{1}{\alpha} [\sigma^2(\alpha^2 + \alpha\beta - \beta) + \beta(\alpha - \beta)], \\ b &= [\eta^2(1 - \beta) + \beta\sigma^2][(\eta^2 - \sigma^2)(1 - \alpha) + \alpha - \beta]. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Дискриминант $d = a^2 - 4b$ уравнения (3.7) равен

$$\begin{aligned} d &= d_2\eta^4 + d_1\eta^2 + d_0, \\ d_2 &= (\alpha + \beta - \alpha\beta)^2, \quad d_0 = \frac{1}{\alpha^2} [\sigma^2(\alpha - \alpha\beta + \beta) - \beta(\alpha - \beta)]^2, \\ d_1 &= \frac{2}{\alpha} (\alpha + \beta - \alpha\beta)[\sigma^2(\alpha^2 + \alpha\beta - 4\alpha - \beta + 2) + (\alpha - \beta)(\beta - 2)]. \end{aligned} \quad (4.6)$$

При выполнении условий

$$a > 0, \quad b > 0, \quad d > 0 \quad (4.7)$$

корни $\pm i\omega_j$ ($j = 1, 2$) уравнения (3.7) чисто мнимые, и исследуемое движение устойчиво в линейном приближении. Таким образом, соотношения (4.7) задают необходимые условия устойчивости.

Условия (4.7) представляют собой систему одного линейного и двух квадратичных неравенств относительно величины η^2 . Ее анализ, несложный, но довольно громоздкий, здесь не приводится. Выпишем полученные результаты.

Все найденные выше достаточные условия устойчивости являются одновременно и необходимыми условиями. Кроме того, могут быть выполнены только необходимые условия устойчивости. Для их описания добавим к величинам (4.4) следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \sigma_1^2 &= \frac{(\alpha - \beta)u}{(1 - \alpha)^2(2\alpha + \beta - \alpha\beta)}, \quad \sigma_2^2 = \frac{\alpha - \beta}{(1 - \alpha)^2}, \quad u = \beta(1 - \alpha)^2 + \alpha(2 - \alpha), \\ \sigma_3^2 &= \frac{\beta(\alpha - \beta)(\beta - 1)}{\alpha^2(\beta - 1)^2 + \beta(\beta - 1) + \alpha\beta(3 - 2\beta)}. \end{aligned}$$

Пусть, кроме того, $\eta_{(1)}^2$ и $\eta_{(2)}^2$ ($0 < \eta_{(1)}^2 < \eta_{(2)}^2$) — вещественные корни квадратного относительно η^2 трехчлена (4.6), в областях существования и положительности этих корней.

Помимо областей 1–3, рассмотрим еще области 4–7 (для которых $\beta < 1$) с теми же прямолинейными границами и криволинейной границей $u = 0$ между областями 6 и 7 (рис. 1).

В области 1 только необходимые условия устойчивости определяются неравенством $\eta_1 < \eta < \eta_0$ при $\sigma > \sigma_0$. В области 2 все решения системы (4.7) составляют достаточные условия устойчивости, указанные в разделе 4.1. В области 3 только необходимые условия устойчивости выполняются в интервалах $\sigma_3 < \sigma \leq \sigma_0$ и $\sigma_0 < \sigma < \sigma_1$ изменения параметра σ и имеют, соответственно, вид $\eta_{(2)} < \eta < \eta_0$ и $\eta_{(2)} < \eta < \eta_1$.

В области 4 эти условия задаются неравенством $\eta > \eta_1$, а величина σ может принимать произвольные значения. В области 5 только необходимые условия устойчивости определяются интервалом $\eta > \eta_{(2)}$ при $0 < \sigma \leq \sigma_1$, совокупностью двух интервалов $\eta_1 < \eta < \eta_{(1)}$ и $\eta > \eta_{(2)}$ при $\sigma_1 < \sigma \leq \sigma_2$ и условием $\eta > \eta_1$ при $\sigma > \sigma_2$. В области 6 исследуемые условия задаются неравенством $\eta_{(2)} < \eta < \eta_1$ при $0 < \sigma < \sigma_1$.

Для невыписанных здесь и в разделе 4.1 значений параметров σ и η , относящихся к областям 1–6, необходимые условия устойчивости (4.7) не выполняются. В этих случаях исследуемые решения неустойчивы, причем не только в линейном приближении, но и в полной нелинейной постановке.

В области 7 условия (4.7) несовместны при любых значениях параметров σ и η , и исследуемые решения неустойчивы.

4.3. Нелинейный анализ устойчивости

Проведем дальнейший, нелинейный анализ устойчивости исследуемых решений для тех значений параметров, для которых выполнены только необходимые условия устойчивости. С этой целью нормализуем гамильтониан возмущенного движения (4.1) в членах до четвертого порядка включительно относительно возмущений.

Сначала осуществим в (4.1) линейное унивалентное каноническое преобразование $x_j, y_j \rightarrow q_j, p_j$ ($j = 1, 2$) по формулам

$$\begin{aligned} x_1 &= n_{11}q_1 + n_{12}q_2, & x_2 &= n_{23}p_1 + n_{24}p_2, \\ y_1 &= n_{33}p_1 + n_{34}p_2, & y_2 &= n_{41}q_1 + n_{42}q_2, \end{aligned} \quad (4.8)$$

$$\begin{aligned} n_{1j} &= \kappa_j \eta \omega_j \alpha (\alpha + \beta - \alpha \beta), & n_{4j} &= \kappa_j \omega_j \alpha (\omega_j^2 - \eta^2 + \alpha \sigma^2), \\ n_{2,j+1} &= (-1)^{j+1} \kappa_j \alpha [(\eta^2 - \sigma^2) \alpha \beta - \eta^2 \alpha - \omega_j^2 \beta], \\ n_{3,2+j} &= (-1)^{j+1} \kappa_j \alpha \eta [\omega_j^2 + (1 - \alpha)(\beta(\eta^2 - \sigma^2) - \eta^2)], \end{aligned} \quad (4.9)$$

$$\begin{aligned} \kappa_j &= \left\{ \alpha \omega_j \left[\alpha(\beta - 1)(\alpha - 2)(\alpha\beta - \alpha - \beta)\eta^4 + \right. \right. \\ &\quad + \alpha[(\beta + \alpha^2 - 3\alpha\beta - 3\beta^2 + 4\alpha\beta^2 - \alpha^2\beta^2)\sigma^2 + \\ &\quad + (\beta - 2)(\alpha\beta - \alpha - \beta)\omega_j^2 + \beta(\beta - 1)(\alpha - \beta)]\eta^2 + \\ &\quad \left. \left. + \beta((\beta + \alpha^2 - \alpha\beta)\sigma^2 - \beta(\alpha - \beta))(\sigma^2\alpha + \omega_j^2) \right] \right\}^{-1/2}, \quad j = 1, 2. \end{aligned}$$

Здесь $\omega_j = \sqrt{2(a \pm \sqrt{d})}/2$ ($\omega_1 > \omega_2$) — частоты малых линейных колебаний системы, величины a и d определены в соотношениях (4.5), (4.6).

В результате преобразования (4.8), (4.9) квадратичная часть \tilde{H}_2 гамильтониана (4.1) приводится к нормальной форме вида

$$\tilde{H}_2 = \frac{1}{2} \omega_1 (q_1^2 + p_1^2) - \frac{1}{2} \omega_2 (q_2^2 + p_2^2).$$

Далее проведем нелинейную нормализацию. Здесь необходимо различать нерезонансный и резонансный случаи. Если $\omega_1 \neq 2\omega_2$ и $\omega_1 \neq 3\omega_2$, то есть в системе отсутствуют резонансы третьего и четвертого порядков, то нормализованный до членов четвертого порядка включительно гамильтониан возмущенного движения имеет вид

$$\tilde{H} = \omega_1 r_1 - \omega_2 r_2 + c_{20} r_1^2 + c_{11} r_1 r_2 + c_{02} r_2^2 + O(r_j^{5/2}). \quad (4.10)$$

Здесь введены «полярные» координаты φ_j и r_j , задаваемые формулами $q_j = \sqrt{2r_j} \sin \varphi_j$, $p_j = \sqrt{2r_j} \cos \varphi_j$ ($j = 1, 2$). Постоянные коэффициенты c_{ij} в силу громоздкости не выписаны.

Если выполнено условие

$$\Delta = c_{20} \omega_2^2 + c_{11} \omega_1 \omega_2 + c_{02} \omega_1^2 \neq 0,$$

то исследуемое решение устойчиво по Ляпунову на основании теоремы Арнольда–Мозера [29]. Случай вырождения $\Delta = 0$ требует рассмотрения в гамильтониане слагаемых более высоких порядков и в данной работе не исследуется.

Пусть в системе реализуется резонанс третьего или четвертого порядка. Соответствующие им резонансные соотношения $\omega_1 = 2\omega_2$ и $\omega_1 = 3\omega_2$ эквивалентны уравнениям $R_3 = 0$ и $R_4 = 0$, где

$$\begin{aligned} R_3 := & -4\alpha^2 [4(\alpha\beta - \alpha - \beta) + 3](\alpha\beta - \alpha - \beta - 3)\eta^4 + \\ & + 4\alpha [[8(\alpha - 1)^2 \beta^2 + 2(\alpha - 1)(4\alpha^2 - 29\alpha + 8)\beta - \alpha(8\alpha^2 - 41\alpha + 25)] \sigma^2 + \\ & + [(8\alpha - 8)\beta^2 + (-33\alpha + 16)\beta + 25\alpha](\alpha - \beta)] \eta^2 - \\ & - 4[(4\beta - 4\alpha\beta + \alpha^2)\sigma^2 - 4\beta(\alpha - \beta)] [(\beta - \alpha\beta + 4\alpha^2)\sigma^2 - \beta(\alpha - \beta)], \\ R_4 := & -\alpha^2 [[9(\alpha\beta - \alpha - \beta) + 8](\alpha\beta - \alpha - \beta - 8)\eta^4 + \\ & + 2\alpha [[9(\alpha - 1)^2 \beta^2 + (\alpha - 1)(9\alpha^2 - 109\alpha + 18)\beta - \alpha(9\alpha^2 - 68\alpha + 50)] \sigma^2 + \\ & + [(9\alpha - 9)\beta^2 + (18 - 59\alpha)\beta + 50\alpha](\alpha - \beta)] \eta^2 - \\ & - [(\beta - \alpha\beta + 9\alpha^2)\sigma^2 - \beta(\alpha - \beta)] [(9\beta - 9\alpha\beta + \alpha^2)\sigma^2 - 9\beta(\alpha - \beta)]. \end{aligned}$$

Таким образом, в исследуемых областях четырехмерного пространства параметров задачи может существовать либо две, либо одна, либо ни одной резонансной поверхности каждого типа.

При исследовании устойчивости в резонансных случаях будем пользоваться соответствующими критериями, имеющимися для автономных гамильтоновых систем с двумя степенями свободы [30]. Если в системе имеется резонанс третьего порядка, то нормализованный гамильтониан имеет вид (4.10), в правую часть которого следует добавить резонансное слагаемое $k_3 \sqrt{r_1} r_2 \cos(\varphi_1 + 2\varphi_2)$ ($k_3 \geq 0$). При $k_3 \neq 0$ рассматриваемое решение неустойчиво. Если же $k_3 = 0$ и выполнено условие $c_{20} + 2c_{11} + 4c_{02} \neq 0$ отсутствия вырождения, то имеет место устойчивость по Ляпунову.

В случае резонанса четвертого порядка в правую часть (4.10) добавляется резонансное слагаемое $k_4 r_2 \sqrt{r_1 r_2} \cos(\varphi_1 + 3\varphi_2)$ ($k_4 \geq 0$). Если выполняется условие

$$|c_{20} + 3c_{11} + 9c_{02}| < 3\sqrt{3}k_4, \quad (4.11)$$

то имеем неустойчивость. При выполнении неравенства с противоположным знаком исследуемое решение устойчиво по Ляпунову.

Явный вид резонансных коэффициентов k_3 и k_4 весьма громоздок и здесь не приводится.

4.4. Результаты нелинейного анализа

Нелинейный анализ устойчивости был проведен для ряда частных случаев геометрии масс тела: трех вариантов динамической симметрии $\alpha = \beta$, $\alpha = 1$, $\beta = 1$ и случаев $\alpha = 1/2$ и $\alpha = 2$. В соответствующей каждому случаю области трехмерного пространства параметров строились сечения $\alpha = \text{const}$ или $\beta = \text{const}$ при различных допустимых значениях инерционного параметра, и в плоскости величин σ , η изучалась эволюция картины устойчивости.

Результаты анализа описаны и проиллюстрированы ниже. На всех рисунках области выполнения только необходимых условий устойчивости не закрашены, остальная часть плоскости заштрихована. Кривые резонансов третьего и четвертого порядков показаны, соответственно, «точечными» и жирными сплошными линиями. Области неустойчивости на кривых резонанса четвертого порядка описаны в тексте; на рисунках они не показаны. Кривые вырождения и границы исследуемой области изображены тонкими сплошными линиями.

Случай $\alpha = \beta$ (ось вращения тела совпадает с осью динамической симметрии). В этом случае область выполнения только необходимых условий устойчивости существует в диапазоне $0 < \alpha < 1$ и задается неравенством $\eta > \sigma$. При фиксированном значении α сечения поверхностей резонансов третьего и четвертого порядков (в тех случаях, когда они существуют) представляют собой прямые, задаваемые, соответственно, уравнениями $R_3 = 0$ и $R_4 = 0$, где

$$R_3 = (3-\alpha)(3-2\alpha)(1-2\alpha)(\alpha+1)\eta^4 - (1-2\alpha)(8\alpha^2 - 41\alpha + 41)\sigma^2\eta^2 + (3\alpha+1)(3\alpha-4)\sigma^4,$$

$$R_4 = (4-\alpha)(4-3\alpha)(2-3\alpha)(\alpha+2)\eta^4 - 2(1-2\alpha)(9\alpha^2 - 68\alpha + 68)\sigma^2\eta^2 + (8\alpha+1)(8\alpha-9)\sigma^4.$$

Анализ этих соотношений показывает, что при $0 < \alpha < 1/2$ в исследуемой области имеется одна резонансная прямая третьего порядка, а при $1/2 \leq \alpha < 1$ такие прямые отсутствуют. Кроме того, имеются одна или две прямые резонанса четвертого порядка, если $0 < \alpha \leq 2/3$ или $2/3 < \alpha < 1$ соответственно.

Вид кривой вырождения меняется в зависимости от параметра α , ее эволюция в исследуемой области и взаимное расположение с резонансными прямыми показаны на рисунке 2 для случаев $0 < \alpha < 0.324$ (а), $0.324 \leq \alpha < 1/2$ (б), $\alpha = 1/2$ (с), $1/2 < \alpha \leq 2/3$ (д), $2/3 < \alpha < 1$ (е).

При $0 < \alpha < 0.324$ (рис. 2а) имеются три ветви кривой вырождения, одна из которых начинается на оси ординат, другая в начале координат и третья на нижней границе области. Последняя пересекается с прямой резонанса четвертого порядка и идет вдоль прямой резонанса третьего порядка, неограниченно приближаясь к ней. При $\alpha = 0.324$ две другие ветви кривой вырождения соединяются в общую ветвь (рис. 2б). С ростом α она постепенно «съезжается» и при $\alpha = 1/2$ исчезает (одновременно с прямой резонанса третьего порядка, см. рис. 2с); оставшаяся ветвь кривой вырождения имеет вертикальную асимптоту

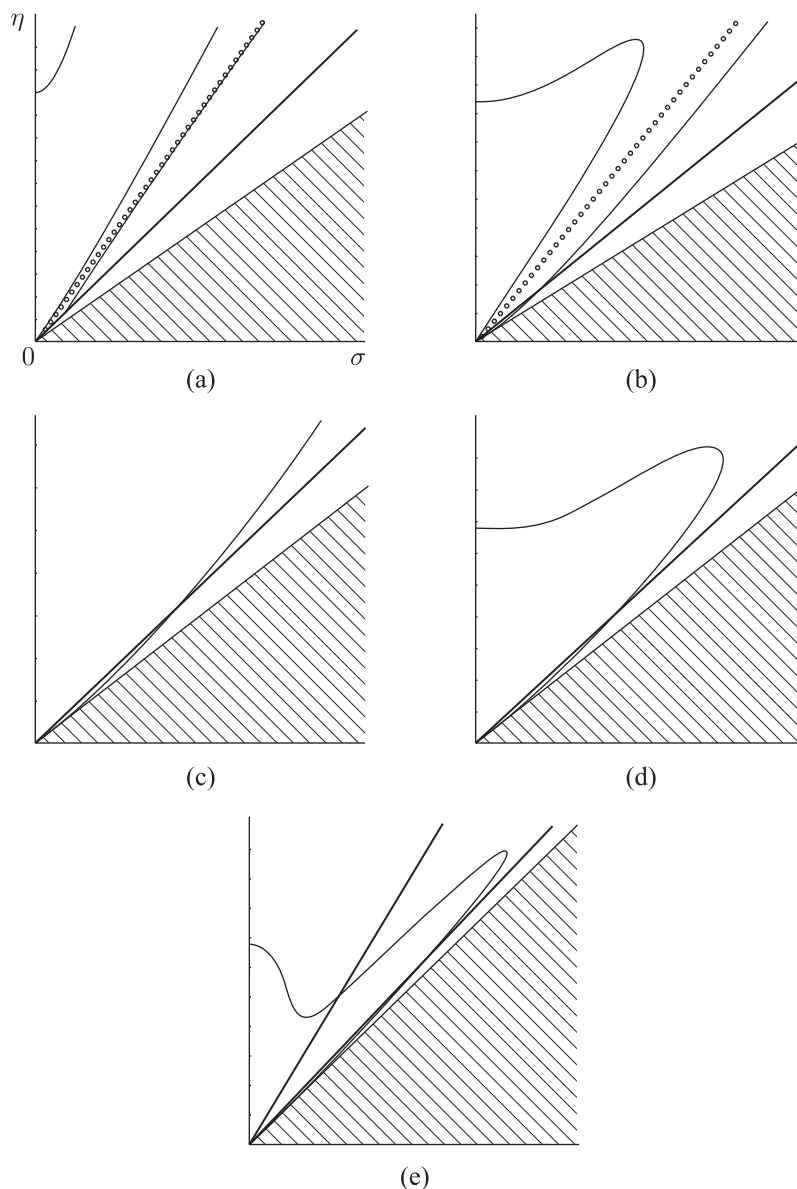


Рис. 2

$\sigma = 6\sqrt{10}/5$. При переходе через точку $\alpha = 1/2$ кривая вырождения становится ограниченной, с концевыми точками на оси ординат и нижней границе области, и пересекает одну или две имеющиеся прямые резонанса четвертого порядка (рис. 2d, e).

Расчеты показывают, что для всех значений параметра α на прямых резонанса четвертого порядка имеются участки неустойчивости, задаваемые неравенством (4.11), при этом точка пересечения резонансных прямых с кривой вырождения находится внутри этих участков.

Случай $\alpha = 1$ (центр масс лежит в главной плоскости инерции, содержащей ось динамической симметрии тела). В этом случае только необходимые условия устойчивости исследуемых движений выполняются в диапазоне $1/2 \leq \beta < 1$ изменения параметра β при условии $\eta > \eta_{(2)}$. Для каждого значения β в этой области имеется по одной кривой

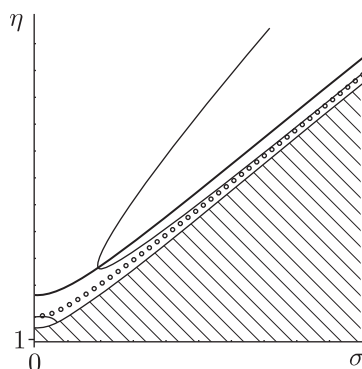


Рис. 3

резонансов третьего и четвертого порядков (рис. 3), на последней имеется ограниченный участок неустойчивости. В области существуют также две ветви кривой вырождения. Первая выходит из общей точки с кривой резонанса третьего порядка на оси ординат и заканчивается на нижней границе области. Вторая ветвь, начинаясь в бесконечно удаленной точке, пересекает кривую резонанса четвертого порядка (в области неустойчивости на последней) и при $\sigma \rightarrow \infty$ неограниченно приближается к кривой резонанса третьего порядка.

Случай $\beta = 1$ (центр масс находится в экваториальной плоскости инерции тела). Если $1/2 \leq \alpha < 1$, то исследуемая область задается условием $\eta > \sqrt{\sigma^2 + 1}$. Расчеты показывают, что в этой области отсутствуют кривые резонанса третьего порядка и кривые вырождения, а при $1/2 \leq \alpha \leq 9/16$ нет и кривых резонанса четвертого порядка. В случае $9/16 < \alpha < 1$ в области имеется кривая резонанса четвертого порядка (рис. 4а), на которой изучаемое движение устойчиво.

При переходе через точку $\alpha = 1$ область выполнения только необходимых условий устойчивости меняет свою конфигурацию и приобретает вид криволинейного треугольника с границами $\eta = \eta_{(2)}$, $\eta = \eta_1$ и отрезком оси ординат, при этом параметр σ меняется в диапазоне $0 < \sigma < (\alpha^2 - 1)^{-1}$ (рис. 4б).

Расчеты были проведены до $\alpha = 3$. Исследование показало, что в этой области имеется по одной кривой резонансов третьего и четвертого порядков, эти кривые имеют общие концы в угловых точках области. Имеется также (не показанная на рис. 4б) кривая вырождения, соединяющая те же угловые точки. При $\alpha \in [1.66; 2.28]$ она целиком заключена

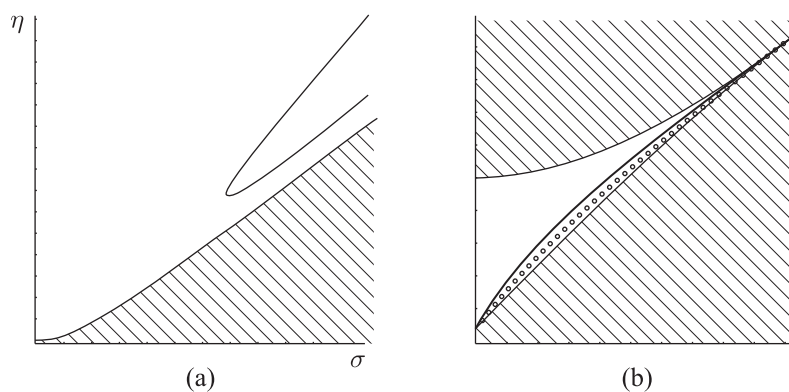


Рис. 4

в области между двумя резонансными кривыми. Для значений α вне этого интервала кривая вырождения имеет с кривой резонанса четвертого порядка две точки пересечения, выходя и снова входя в указанную область. Для всех рассмотренных значений α на большей части кривой резонанса четвертого порядка имеет место неустойчивость, при этом точки ее пересечения с кривой вырождения (если они имеются) лежат в области неустойчивости.

Случай $\alpha = 1/2$. В этом случае $1/3 \leq \beta \leq 1$. Нижняя граница исследуемой области при $1/3 \leq \beta \leq 1/2$ составная (рис. 5а), ее образуют гладко переходящие одна в другую кривые $\eta = \eta_{(2)}$ и $\eta = \eta_{(1)}$, а также стыкующаяся с последней кривая $\eta = \eta_1$ (имеющая с $\eta = \eta_{(1)}$ общую касательную в точке с абсциссой $\sigma = \sigma_2$). В области имеются кривые резонансов третьего и четвертого порядков, выходящие из «угловой» точки нижней границы, а также две ветви кривой вырождения. Одна ветвь соединяет точки на оси ординат и на левой части нижней границы области. Вторая начинается в точке правой части нижней границы, пересекает кривую резонанса четвертого порядка (в области неустойчивости на ней) и уходит в бесконечность.

В точке $\beta = 1/2$ происходит перестройка картины: исчезают левая часть нижней границы области, кривая резонанса третьего порядка и левая ветвь кривой вырождения; кривая резонанса четвертого порядка выходит из начала координат (см. рис. 2с).

При переходе через эту точку кривая резонанса четвертого порядка берет начало на оси ординат, а кривая вырождения становится ограниченной с концами на той же оси. Эти две кривые имеют точку пересечения в области неустойчивости на резонансной кривой (рис. 5b). Такая картина наблюдается для значений β из интервала $1/2 < \beta < 7/9$.

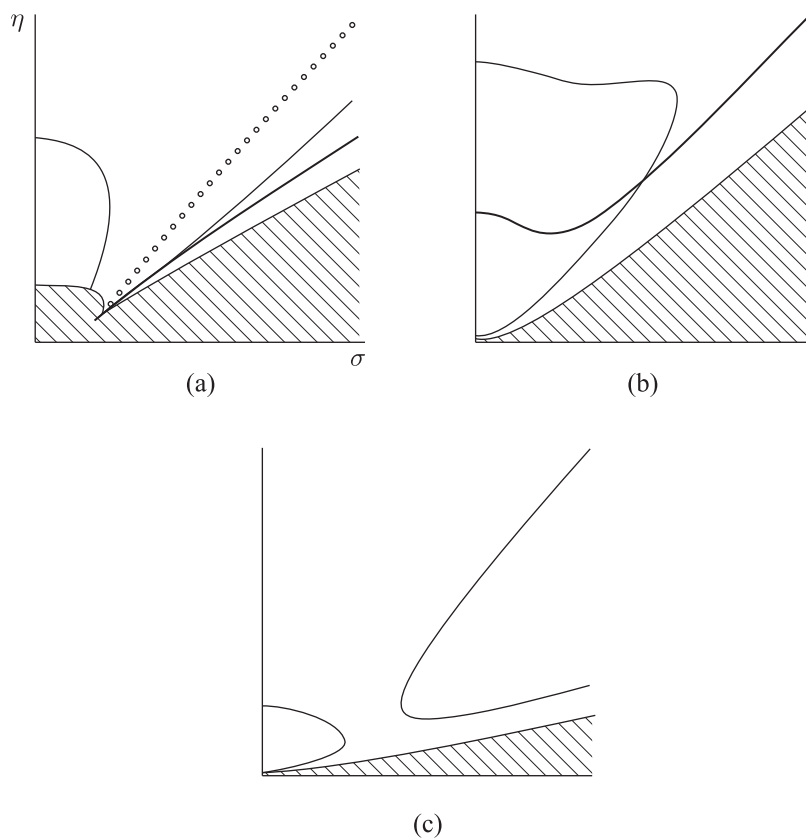


Рис. 5

В точке $\beta = 7/9$ кривая резонанса четвертого порядка пропадает, а при $7/9 < \beta < 1$ появляется вновь, меняя свой вид (рис. 5с); точек пересечения с кривой вырождения нет. На всей резонансной кривой исследуемое решение устойчиво. При $\beta = 1$ резонансная кривая и кривая вырождения исчезают (этот случай рассмотрен выше).

Случай $\alpha = 2$ ($1/2 \leq \beta \leq 2$). При $2/3 \leq \beta < 1$ область выполнения только необходимых условий устойчивости имеет вид криволинейного треугольника. В случае $\beta \in [2/3; 0.73)$ (рис. 6а) в этой области имеются кривые резонанса третьего порядка и вырождения с общими концами на оси ординат и в угловой точке области. Имеется также кривая резонанса четвертого порядка, на которой реализуется устойчивость.

При $\beta = 0.73$ появляется вторая ветвь кривой вырождения (рис. 6б), с ростом β ее левый конец «ползет» вверх по оси ординат. При $\beta = 0.767$ обе ветви кривой вырождения и кривая резонанса третьего порядка имеют общую точку на оси ординат. С дальнейшим ростом β кривая резонанса третьего порядка в начальной точке «приклеивается» к нижней ветви кривой вырождения, верхняя ветвь отделяется. При $\beta = 0.772$ вблизи левой границы кривой резонанса четвертого порядка появляется участок неустойчивости.

При $\beta = 0.808$ левые концы резонансной кривой и верхней ветви кривой вырождения совпадают, с последующим ростом β две кривые пересекаются внутри области в зоне неустойчивости на резонансной кривой (рис. 6с). При $\beta = 0.837$ вблизи левой границы резонансной кривой появляется малый участок устойчивости. Такая картина наблюдается вплоть до $\beta = 1$; этот граничный случай рассмотрен выше.

При $\beta > 1$ (рис. 6д) вид исследуемой области представляет собой криволинейный треугольник другой конфигурации. Эта область содержит кривые резонансов третьего

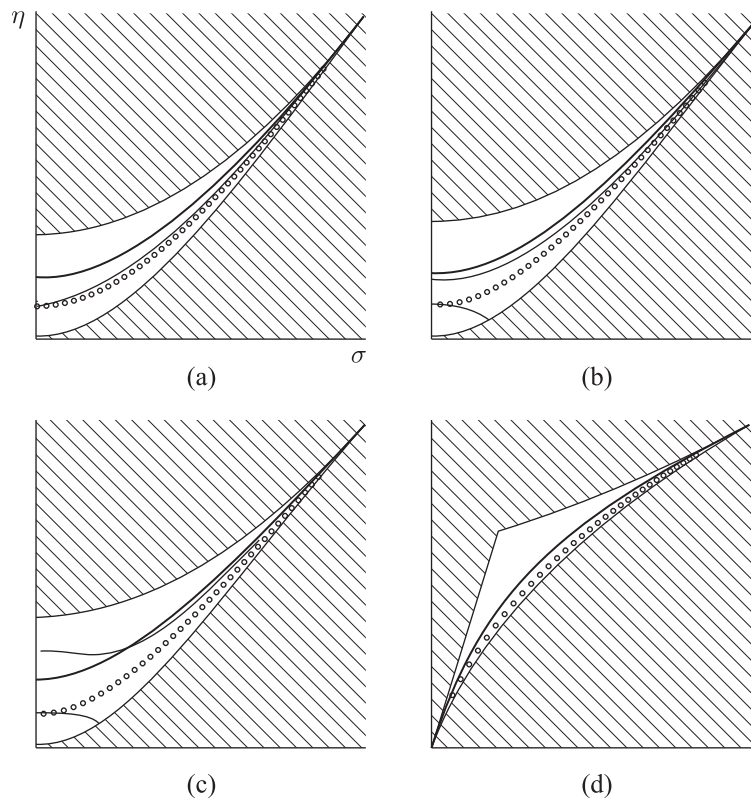


Рис. 6

и четвертого порядков, соединяющие две угловые точки области, и заключенную между ними (не показанную на рисунке) кривую вырождения с теми же концами. Для всех рассмотренных значений β на кривой резонанса четвертого порядка имеется участок неустойчивости. С ростом β описанная область уменьшается и при $\beta = 2$ исчезает.

5. Заключение

В работе, в рамках приближенной системы автономных канонических дифференциальных уравнений, исследуется движение тяжелого твердого тела при наличии быстрых вертикальных гармонических вибраций одной из его точек. Найдены два новых типа движения тела, обусловленных вибрациями и не существующих в случае тела с неподвижной точкой. Первый тип — коническое движение вокруг вертикали несимметричного тела с центром масс на главной оси инерции. Второй тип движения — перманентное вращение вокруг вертикальной главной оси инерции в случае, когда центр масс тела не лежит на этой оси.

Проведено исследование устойчивости указанных частных движений, рассматриваемой как устойчивость соответствующих положений равновесия приведенной (по Раусу) системы с двумя степенями свободы. Показано, что коническое движение неустойчиво в области своего существования.

Для перманентного вращения вокруг главной оси инерции в четырехмерном пространстве двух инерционных параметров и двух параметров, характеризующих частоту вибрации и угловую скорость перманентного вращения, полностью решена линейная задача об устойчивости. В части областей найденные условия являются одновременно достаточными условиями устойчивости. В тех областях, где выполнены только необходимые условия устойчивости, для ряда фиксированных значений инерционных параметров проведен нелинейный анализ устойчивости, при этом рассмотрены нерезонансный случай, случаи резонансов третьего и четвертого порядков, а также случаи вырождения гамильтониана.

Список литературы

- [1] Stephenson A. On a new type of dynamical stability // Proc. Manchester Literary Philos. Soc., 1908, vol. 52, pt. 2, no. 8, pp. 1–10.
- [2] Капица П. Л. Маятник с вибрирующим подвесом // УФН, 1951, т. 44, № 5, с. 7–20.
- [3] Капица П. Л. Динамическая устойчивость маятника при колеблющейся точке подвеса // ЖЭТФ, 1951, т. 21, № 5, с. 588–597.
- [4] Бардин Б. С., Маркеев А. П. Об устойчивости равновесия маятника при вертикальных колебаниях точки подвеса // ПММ, 1995, т. 59, № 6, с. 922–929.
- [5] Холостова О. В. Об устойчивости периодических движений маятника с горизонтально вибрирующей точкой подвеса // МГТ, 1997, № 4, с. 35–39.
- [6] Холостова О. В. О движениях маятника с вибрирующей точкой подвеса // Теоретическая механика: Вып. 24: Сб. науч.-метод. ст. Москва: МГУ, 2003. С. 157–167.
- [7] Стрижак Т. Г. Методы исследования динамических систем типа «маятник». Алма-Ата: Наука, 1981. 253 с.

- [8] Боголюбов Н. Н. Теория возмущений в нелинейной механике // Сб. тр. Ин-та строит. мех. АН УССР, 1950, № 14, с. 9–34.
- [9] Маркеев А. П. О динамике сферического маятника с вибрирующим подвесом // ПММ, 1999, т. 63, № 2, с. 213–219.
- [10] Холостова О. В. О движениях двойного маятника с вибрирующей точкой подвеса // МГТ, 2009, № 2, с. 25–40.
- [11] Вишенкова Е. А., Холостова О. В. К динамике двойного маятника с горизонтально вибрирующей точкой подвеса // Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки, 2012, № 2, с. 114–129.
- [12] Холостова О. В. Динамика волчка Лагранжа с неподвижной и вибрирующей точкой подвеса. Москва: МАИ, 2000. 84 с.
- [13] Юдович В. И. Вибродинамика и виброгеометрия механических систем со связями // Успехи механики, 2006, т. 4, № 3, с. 26–158.
- [14] Маркеев А. П. К теории движения твердого тела с вибрирующим подвесом // Докл. РАН, 2009, т. 427, № 6, с. 771–775.
- [15] Маркеев А. П. Об уравнениях приближенной теории движения твердого тела с вибрирующей точкой подвеса // ПММ, 2011, т. 75, № 2, с. 193–203.
- [16] Холостова О. В. Об устойчивости равновесий твердого тела с вибрирующей точкой подвеса // Вестн. РУДН. Матем. Информатика. Физика, 2011, № 2, с. 111–122.
- [17] Маркеев А. П. О движении тяжелого динамически симметричного твердого тела с вибрирующей точкой подвеса // МГТ, 2012, № 4, с. 3–10.
- [18] Staude O. Über permanente Rotationsachsen bei der Bewegung eines schweren Körpers um einen festen Punkt // J. Reine Angew. Math., 1894, vol. 113, no. 4, pp. 318–334.
- [19] Млодзеевский Б. К. О перманентных осях в движении тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки // Тр. отд. физ. наук Общества любителей естествознания, 1894, т. 7, № 1, с. 46–48.
- [20] Граммель Р. Гироскоп, его теория и применения: В 2-х тт. Москва: ИЛ, 1952. 351 с.; 318 с.
- [21] Румянцев В. В. Об устойчивости вращения тяжелого твердого тела с одной неподвижной точкой в случае С. В. Ковалевской // ПММ, 1954, т. 18, № 4, с. 457–458.
- [22] Румянцев В. В. Устойчивость перманентных вращений тяжелого твердого тел // ПММ, 1956, т. 20, № 1, с. 51–66.
- [23] Магнус К. Гироскоп. Теория и применения. Москва: Мир, 1974. 526 с.
- [24] Ковалев А. М., Савченко А. Я. Устойчивость равномерных вращений твердого тела вокруг главной оси // ПММ, 1975, т. 39, № 4, с. 650–660.
- [25] Сергеев В. С. Об устойчивости перманентных вращений тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки // ПММ, 1976, т. 40, № 3, с. 408–416.
- [26] Ковалев А. М., Савченко А. Я. Устойчивость стационарных движений гамильтоновых систем при наличии резонанса четвертого порядка // Механика твердого тела, 1977, № 9, с. 40–44.
- [27] Холостова О. В. Исследование устойчивости перманентных вращений Штауде. Москва–Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2008. 128 с.
- [28] Карапетян А. В., Румянцев В. В. Устойчивость консервативных и диссипативных систем. (Итоги науки и техники. Сер. Общая механика, т. 6.) Москва: ВИНТИ, 1983. 132 с.
- [29] Арнольд В. И., Козлов В. В., Нейштадт А. И. Математические аспекты классической и небесной механики. Москва: Едиториал УРСС, 2009. 416 с.
- [30] Маркеев А. П. Точки либрации в небесной механике и космодинамике. Москва: Наука, 1978. 312 с.



On the stability of the specific motions of a heavy rigid body due to fast vertical vibrations of one of its points

Olga V. Kholostova

Moscow Aviation Institute (National Research University)
Volokolamskoe Shosse, 4, GSP-3, A-80, Moscow, 125993, Russia
kholostova_o@mail.ru

We consider the motion of a heavy rigid body with one point performing the specified high-frequency harmonic oscillations along the vertical. In the framework of an approximate autonomous system of differential equations of motion two new types of permanent rotations of the body about the vertical are found. These motions are affected by presence of fast vibrations and do not exist in the case of a body with a fixed point. The problem of stability of the motions is investigated.

MSC 2010: 70E17, 70E20, 70H14

Keywords: rigid body, fast vibrations, permanent rotations, stability, resonance

Received October 22, 2014, accepted December 16, 2014

Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2015, vol. 11, no. 1, pp. 99–116 (Russian)