Министерство образования и науки Российской Федерации
ФГБОУ «Удмуртский государственный университет»
Математический факультет
Кафедра алгебры и топологии

Грызлов А. А., Бастрыков Е. С., Головастов Р. А.

ПРОСТРАНСТВА СТОУНА НЕКОТОРЫХ БУЛЕВЫХ АЛГЕБР

Учебное пособие

Ижевск
2015 г.

ББК 22.151.11я.73
УДК 515.17 (0.75.8)
Г 917

Рекомендовано к изданию редакционно-издательским советом УдГУ

Рецензенты: Пыткеев Е. Г., д. ф.-м. н. вед. науч. сотр. УрО РАН,
Петров Н. Н., д. ф.-м. н., профессор

Грызлов А. А., Бастрыков Е. С., Головастов Р. А.
Г 917 Пространства Стоуна некоторых булевых алгебр: учебное издание. — Ижевск: Изд-во «Удмуртский университет», 2015 г.. — 89 с.

ISBN ???

Пособие предназначено для студентов-математиков магистратуры и старших курсов бакалавриата, а также для аспирантов и научных работников, занимающихся общей топологией.

В пособии рассматриваются различные способы построения булевых алгебр и свойства пространств Стоуна этих алгебр.

ББК 22.151.11я.73
УДК 515.17 (0.75.8)

Содержание

Предисловие

Одной из основных тем в общей топологии является теория бикомпактных расширений, в частности бикомпактных расширений дискретных пространств. Данное пособие посвящено изучению свойств таких пространств, построенных как пространство Стоуна некоторых булевых алгебр подмножеств счетного множества.

Пособие состоит из введения и двух глав. Во введении приводятся основные сведения, конструкции и основные свойства рассматриваемых пространств. Первая глава посвящена пространству Белла, которое является первым бикомпактным расширением, построенным как пространство Стоуна некоторой булевой алгебры, существенно отличающееся по своим свойствам от максимального бикомпактного расширения счетного дискретного пространства $\beta\omega$. Во второй главе рассматриваются основные модификации пространства Белла. Глава состоит из трех параграфов, каждый из которых посвящен отдельной группе пространств.

Новизна пособия состоит в рассмотрении связи структуры булевых алгебр подмножеств и свойств пространства Стоуна данных булевых алгебр. Доказательство основных теорем основано на оригинальном сочетании методов теории множеств, общей топологии и комбинаторики.

Пособие предназначено для магистрантов и студентов старших курсов бакалавриата направлений 02.03.01 и 02.04.01 маткматика и компьтерные науки, а также для аспирантов и научных работников, занимающихся общей топологией. Данное пособие поможет студентам развить навыки научного исследования и выбрать направление своей дальнейшей научной деятельности.

Работа с пособием предполагает последовательное изучение материала, хотя для перехода к изучению второй главы, прочтение параграфов 1.3 и 1.4 не обязательно. Более подробно о булевых алгебрах и их пространствах Стоуна читатель может ознакомиться, обратившись к изданиям, указанным в списке литературы.

Введение

Понятие пространства Стоуна булевой алгебры имеет важное значение в теории бикомпактных расширений.

Максимальное бикомпактное расширение топологического простраства, называемое расширением Стоуна – Чеха, основано на конструкции пространства Стоуна. Особое место в теории бикомпактных расширений занимают максимальные бикомпактные расширения Стоуна – Чеха дискретных пространств, являющиеся пространствами Стоуна булевых алгебр подмножеств дискретных пространств.

Развитие теории бикомпактных расширений вызвало потребность в рассмотрении и изучении бикомпактных расширений дискретных пространств, являющихся пространствами Стоуна других булевых алгебр.

М. Белл [1] построил пространство Стоуна булевой алгебры, для которого подространство свободных ультрафильтров несепарабельно, но удовлетворяет условию Суслина. Это пространство является бикомпактным расширением счетного дискретного пространства.

Используя расширение построенное М. Белла, Я. ван Милл [2] и А. А. Грызлов [3] доказали существование новых типов точек в пространстве $\beta\omega$, тем самым решив несколько важных проблем теории бикомпактных расширений.

Исследованию расширения М. Белла посвящен ряд работ А. А. Грызлова, Е. С. Бастрыкова и Р. А. Головастова [4—8]. В этих работах изучена внутренняя структура этого пространства, получены различные типы его точек и их свойства.

Мы будем рассматривать компактификации пространств, построенные как пространства Стоуна некоторых будевых алгебр, в число которых входит оригинальное пространство Белла.

В разделе 1 даны общие определения, обозначения и другие факты, используемые в дальнейшем, а также ссылки на источники, где можно более подробно ознакомиться с используемыми понятиями.

1 Общие понятия и факты

Большинство обозначений и терминов этой работы взяты из книг Р. Энгелькинга [9], А. В. Архангельского и В. И. Пономарёва [10] и Р. Сикорского [11].

Множество всех подмножеств X обозначим $\exp X$. Через ω обозначается вполне упорядоченное множество $\{0, 1, 2, \ldots\}$ неотрицательных целых чисел, а также мощность этого множества. Множество, имеющее мощность ω, называется счётным. Под n в зависимости от контекста будем понимать и натуральное число, и множество $\{0, 1, \ldots, n-1\}$.

Для множества $A \subseteq X$ обозначим:

$|A|$ мощность множества A;

$[A]$ замыкание множества A в пространстве X;

A^* нарост, то есть $[A] \setminus A$.

Приведем определения основных кардинальных инвариантов, используемых нами в работе.

Определение 1 *Базой* пространства X называется семейство открытых множеств B удовлетворяющее следующему условию: для произвольной точки $x \in X$ и произвольной её окресности Ox найдется $U \in B$ такое, что $x \in U \subseteq Ox$. Наименьшее кардинальное число вида $|B|$, где B — база пространства X, называется *весом* пространства X и обозначается $\mathrm{w}(X)$.

Определение 2 Подмножество A пространства X называется *всюду плотным* если $[A] = X$. Наименьшее кардинальное число вида $|A|$, где A — всюду плотное подмножество пространства X, называется *плотностью* пространства X и обозначается $\mathrm{d}(X)$. Пространства со счетной плотностью называют *сепарабельными*.

Определение 3 Наименьшее кардинальное число τ такое, что любое семейство попарно непересекающихся непустых открытых подмножеств пространства X имеет мощность не превосходящую τ, называется *числом Суслина* пространства X и обозначается $\mathrm{c}(X)$. Если $\mathrm{c}(X) = \omega$, то говорят, что пространство X удовлетворяет *условию Суслина.*

Определение 4 *Теснотой в точке* x пространства X $\mathrm{t}(x, X)$ называется такое наименьшее кардинальное τ, что для любого $A \subseteq X$, такого что $x \in [A]$, найдётся $A' \subseteq A$, такое что $x \in [A']$ и $|A'| \leqslant \tau$. *Теснота* всего пространства определяется как

$$\sup_{x \in X} \mathrm{t}(x, X)$$

и обозначается $\mathrm{t}(X)$.

Более подробно о кардинальных инвариантах написано в [12].

Определение 5 Пространство называется *компактным* (*бикомпактным, компактом*), если из любого открытого покрытия этого пространства можно выделить конечное подпокрытие.

Замечание 1 Часто мы будем использовать эквивалентное определение компактности: пространство является компактным тогда и только тогда, когда пересечение любой центрированной системы замкнутых множеств не пусто.

Определение 6 Пространство Y называется *бикомпактным расширением* или *компактификацией* пространства X, если Y — бикомпакт и X гомеоморфно некоторому всюду плотному подмножеству Y.

Определение 7 *Бикомпактным расширением* (*компактификацией*) *Стоуна – Чеха* пространства X (обозначаем βX) будем называть максимальное бикомпактное расширение пространства X, что означает, что для любого бикомпактного расширения bX пространства X существует непрерывное отображение $f\colon \beta X \to bX$, тождественное на X.

Замечание 2 Для нормального пространства X, его расширение bX является пространством Чеха–Стоуна, если для любых непересекающихся замкнутых множеств $F, G \subseteq X$ следует, что $[F]_{bX} \cap [G]_{bX} = \varnothing$ (доказательство можно найти в [9]). В дальнейшем мы нередко будем использовать этот факт.

Если в качестве расширяемого пространства взять ω, то получим пространство $\beta\omega$, которое играет особую роль в теории компактификаций, а также данной работе, поэтому приведём некоторые его свойства.

1. $\mathrm{w}(\beta\omega) = \mathrm{w}(\beta\omega \setminus \omega) = 2^\omega$;

2. $\mathrm{c}(\beta\omega \setminus \omega) = 2^\omega$;

3. $\mathrm{t}(\beta\omega) = 2^\omega$;

4. $|\beta\omega| = 2^{2^\omega}$.

Определение 8 Непрерывное отображение $\varphi\colon X \to Y$ называется *гомеоморфизмом*, если φ взаимно однозначно отображает X на Y и обратное отображение ϕ^{-1} из Y в X непрерывно. Два топологических пространства X и Y называются *гомеоморфными*, если существует гомеоморфизм пространства X на простраснтво Y.

В работе рассматриваются различные частично упорядоченные множества. Введём понятие цепи и антицепи.

Определение 9 *Цепью* в пространстве называется линейно упорядоченное множество.

Определение 10 *Антицепью* в пространстве называется множество, элементы которого попарно несравнимы.

Определение 11 Булевой алгеброй называется непустое множество $\mathfrak{B}$ с тремя операциями $A \cup B$, $A \cap B$, $\overline{A}$ удовлетворяющим следующим аксиомам:

1. $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$;
2. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$, $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$;
3. $(A \cap B) \cup B = B$, $(A \cup B) \cap B = B$;
4. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$, $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;
5. $(A \cap \overline{A}) \cup B = B$, $(A \cup \overline{A}) \cap B = B$.

Мы будем рассматривать булевы алгебры $\mathfrak{B} = \{U \subseteq X\}$ в множестве $\exp X$ с теоретико множественными операциями объединение, пересечение и дополнение.

На множестве булевых алгебр из $\exp X$ можно ввести отношение порядка по включению, и соответственно говорить о наименьшем элементе. Заметим, что пересечение любого числа алгебр вновь будет алгеброй. Тогда для произвольного множества $G \subseteq \exp X$ существует наименьшая алгебра $\mathfrak{B}$, содержащая множество G. Очевидно $\mathfrak{B}$ может быть определено как пересечение всех алгебр, содержащих множество G.

Определение 12 Будем говорить, что алгебра $\mathfrak{B}$ порождается множеством G. Если $\mathfrak{B}$ — наименьшая алгебра, содержащая множество G.

Для алгебры порожденной множеством справедливо следующее утверждение.

Предложение 1 *Если $G \subseteq \exp X$ — непусто, тогда $A \subseteq X$ принадлежит алгебре $\mathfrak{B}$, порожденной G, в том и только в том случае, когда его можно представить в виде*

$$A = (A_{1,1} \cap \ldots \cap A_{1,r_1}) \cup \ldots \cup (A_{s,1} \cap \ldots \cap A_{s,r_s}), \qquad (1)$$

где или $A_{m,n} \in G$, или $\overline{A}_{m,n} \in G$ для любых m и n.

Доказательство. Заметим, что класс элементов вида (1) замкнут относительно операции объединения. По формулам Моргана, дополнение к элементу A также может быть представлено в виде (1). Тогда класс элементов вида (1) замкнут и относительно опреции дополнения, а этого достаточно, чтобы соответсвующий класс образовывал алгебру $\mathfrak{B}$, содержащую G.

С другой стороны, каждый элемент A вида (1) принадлежит любой алгебре, содержащей G. Поэтому $\mathfrak{B}$ является наименьшей алгеброй, содержащей G. □

Для определения пространства Стоуна нам необходимо ввести понятие фильтра и ультрафильтра.

Определение 13 Семейство ξ непустых элементов булевой алгебры $\mathfrak{B}$ называется *фильтром*, если выполнены условия:

1. если $A, B \in \xi$, то $A \cap B \in \xi$;

2. если $A \in \xi$ и $A \subseteq B$, то $B \in \xi$.

Определение 14 *Ультрафильтром* в булевой алгебре $\mathfrak{B}$ будем называть такой фильтр $\xi \subseteq \mathfrak{B}$, что он не содержится ни в одном отличном от ξ фильтре в булевой алгебре $\mathfrak{B}$.

С другой стороны, ультрафильтр также можно определить как максимальную центрированную систему.

Определение 15 Система множеств $\lambda \subseteq \exp X$ называется *центрированной*, если для любой конечной подсистемы $\lambda' \subseteq \lambda$ выполнено $\cap\{U : U \in \lambda'\}$ не пусто.

Определение 16 Центрированную систему α будем называть *центрированной системой в семействе* μ, если $\alpha \subseteq \mu$.

Мы будем рассматривать прежде всего максимальные центрированные системы различных семейств, состоящих из элементов булевой алгебры B. Заметим, что максимальная центрированная система в семействе подмножеств необязательно замкнута относительно конечных пересечений.

Определение 17 Будем говорить, что центрированная система α *вписана* в центрированную систему α', если для любого элемента $F \in \alpha$ найдётся $G \in \alpha'$ такой, что $F \subseteq G$.

Определение 18 Ультрафильтр ξ будем называть *фиксированным*, если $\cap\{A\colon A \in \xi\} \neq \varnothing$, в противном случае ультрафильтр называется *свободным*.

Определение 19 Булеву алгебру $\mathfrak{B} \subseteq expX$ будем называть *приведенной*, если для двух различных точек $x, y \in X$ найдется $A \in \mathfrak{B}$ такое, что $x \in A$ и $y \notin A$.

Для фиксированных ультрафильтров справедливо следующее утверждение.

Предложение 2 *Если булева алгебра $\mathfrak{B} \subseteq \exp X$ является приведенной. Тогда каждый фиксированный ультрафильтр ξ на $\mathfrak{B}$ определяется одной точкой $x \in X$ и $\cap\{A\colon A \in \xi\} = \{x\}$.*

Доказательство. Предположим, что найдутся две различные точки $x, y \in \cap\{A\colon A \in \xi\}$. В силу приведенности $\mathfrak{B}$ найдется $A_x \in \mathfrak{B}$ такое, что $x \in A_x$ и $y \notin A_x$. Каждый элемент ξ содержит точку y, то есть $A_x \notin \xi$. Тогда система $\{A\colon A \in \xi\} \cup \{A_x\}$ является фильтром (все её элементы пересекаются по точке x), а это притиворечит максимальности ξ. $\square$

В дальнейшем мы будем рассматривать только приведенные булевы алгебры.

Фиксированный ультрафильтр в точке $x \in X$ будем обозначать, как $\widehat{x}$, а множество всех фиксированных ультрафильтров обозначим $\widehat{X}$.

Определение 20 Пространством Стоуна $S\mathfrak{B}$ булевой алгебры $\mathfrak{B}$ называется множество ультрафильтров в $\mathfrak{B}$ с топологией, задаваемой базой состоящей их открыто-замкнутых подмножеств $[A]$

следующего вида:

$$[A] = \{\xi \in S\mathfrak{B} \colon A \in \xi\}, \quad \text{для} \quad A \in \mathfrak{B}.$$

Множество свободных ультрафильтров из $[A]$ будем обозначать $A^* = [A] \setminus \widehat{A}$. Множество всех свободных ультрафильтров будем обозначать $S\mathfrak{B}^*$.

Определение 21 *Базисом* ультрафильтра ξ называется подсемейство $\sigma \subseteq \xi$ удовлетворяющее следующему условию: для произвольного $F \in \xi$ найдется $F' \in \sigma$ такое, что $F' \subseteq F$.

Отметим, что в пространстве Стоуна если σ базис ультрафильтра ξ, то семейство $\widetilde{\sigma} = \{[F] \colon F \in \sigma\}$ является базой в точке ξ, как точке пространства Стоуна. То есть, для любой окрестности U точки ξ найдётся $F \in \sigma$ такое, что $\xi \in [F] \subseteq U$.

Теорема 1 ([11]) *Пространство Стоуна $S\mathfrak{B}$ является бикомпактным.*

Доказательство. Пусть $S\mathfrak{B}$ пространство Стоуна некоторой булевой алгебры $\mathfrak{B}$. Рассмотрим центрированную систему замкнутых множеств $\{F_r \colon r \in R\}$ в пространстве $S\mathfrak{B}$.

Тогда по определению топологии $S\mathfrak{B}$ для каждого $r \in R$ найдется набор $\{A_q \colon A_q \in \mathfrak{B}, q \in Q_r\}$ такой,что $F_r = \bigcap\limits_{q \in Q_r} [A_q]$. Получим центрированную систему множеств

$$\{[A_q] \colon q \in Q\}, \quad \text{где} \quad Q = \bigcup_{r \in R} Q_r.$$

Но тогда центрированной является и система $\{A_q \colon q \in Q\} \subseteq \mathfrak{B}$, а значит её можно дополнить до некоторого ультрафильтра

$$\xi \in \bigcap_{q \in Q} [A_q] = \bigcap_{r \in R} F_r.$$

$\square$

Докажем некоторые свойства пространства Стоуна $S\mathfrak{B}$ произвольной булевой алгебры $\mathfrak{B} \subseteq \exp X$, необходимые в дальнейшем.

Предложение 3 *Если $U, V \subseteq X$, V — элемент булевой алгебры и $U \cap V = \varnothing$, тогда $[U] \cap [V] = \varnothing$.*

Предложение 4 *Если $U, V \subseteq X$ и V — элемент булевой алгебры, тогда $[U \cap V] = [U] \cap [V]$.*

Доказательство. Действительно, $U = (U \cap V) \cup (U \setminus V)$ тогда, учитывая предложение 3,

$$\begin{gathered}[U] \cap [V] = [(U \cap V) \cup (U \setminus V)] \cap [V] = \\ = ([U \cap V] \cup [U \setminus V]) \cap [V] = \\ = ([U \cap V] \cap [V]) \cup ([U \setminus V] \cap [V]) = [U \cap V].\end{gathered}$$

□

Предложение 5 *Для любого открыто-замкнутого $U \subseteq S\mathfrak{B}^*$ найдётся $V \subseteq X$ такое, что $[V] \cap S\mathfrak{B}^* = U$.*

Доказательство. Так как U открытое множество, то для каждой точки $x \in U$ найдётся окрестность $Ox = [V_x]$ ($V_x \in \mathfrak{B}$) такая, что $Ox \cap S\mathfrak{B}^* \subseteq U$.

Таким образом, семейство

$$\lambda = \{\, Ox \cap S\mathfrak{B}^* \colon x \in U \,\}$$

является открытым покрытием множества U.

С другой стороны, так как U замкнутое подмножество бикомпактного пространства $S\mathfrak{B}^*$, можно выделить λ' конечное подпокрытие λ

$$\lambda' = \{\, Ox_i \cap S\mathfrak{B}^* \colon i \leqslant n \,\}.$$

То есть

$$U = \cup\{\,[V_{x_i}]\colon i \leqslant n\,\} \cap S\mathfrak{B}^* = \bigl[\cup\{\,V_{x_i}\colon i \leqslant n\,\}\bigr] \cap S\mathfrak{B}^*.$$

Множество $V = \cup\{\,V_{x_i}\colon i \leqslant n\,\}$ есть элемент $\mathfrak{B}$ и $U = [V] \cap S\mathfrak{B}^*$. $\square$

Заметим, что максимальное бикомпактное расширение Стоуна – Чеха дискретного пространства X можно рассматривать, как пространства Стоуна булевой алгебры множества всех подмножеств пространства X. А одноточечное расширение Александрова бесконечного дискретного пространства X рассматривать, как пространство Стоуна булевой алгебры порожденной семейством конечных подмножеств пространства X.

2 Конструкция рассматриваемых пространств

Определим множества функций

$$P_1 = \{\, f \in \omega^\omega\colon 0 \leqslant f(n) \leqslant n+1 \text{ для всех } n \in \omega \,\},$$
$$P_2 = \{\, f \in \omega^\omega\colon 0 \leqslant f(n) \leqslant 1 \text{ для всех } n \in \omega \,\},$$
$$P_3 = \{\, f \in \omega^\omega\colon 0 \leqslant f(n) < \omega \text{ для всех } n \in \omega \,\}.$$

В качестве множеств на которых будем строить булевы алгебры, возьмем сужения данных функций.

$$\mathfrak{N}_1 = \{\, f|_n\colon f \in P_1, n \subseteq \omega \,\},$$
$$\mathfrak{N}_2 = \{\, f|_n\colon f \in P_2, n \subseteq \omega \,\},$$
$$\mathfrak{N}_3 = \{\, f|_n\colon f \in P_3, n \subseteq \omega \,\}.$$

Каждое $\mathfrak{N}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ можно рассматривать как частично упорядоченное множество со следующим отношением порядка: для $s, t \in \mathfrak{N}_i$ считаем, что $s < t$, если t является продолжением s (то есть $t|_{\operatorname{dom} s} = s$). Дополним понятия цепи и антицепи следующими определениями.

Определение 22 Антицепь $A \subseteq \mathfrak{N}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ будем называть *строгой* антицепью, если для любых различных $s, t \in A$ выполнено $\operatorname{dom} s \neq \operatorname{dom} t$.

Определение 23 Цепь (антицепь) $A \subseteq \mathfrak{N}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ будем называть *полной* цепью (антицепью), если для всякого $n \in \omega \setminus \{0\}$ найдется $s \in A$ такое, что $\operatorname{dom} s = n$.

Для каждого $s \in \mathfrak{N}_1$ количество его продолжений на следующий шаг растет с ростом $\operatorname{dom} s$. Для $s \in \mathfrak{N}_2$ количество его продолжений на следующий шаг всегда равно 2, а для $s \in \mathfrak{N}_3$ оно всегда счетно.

Для произвольного $s \in \mathfrak{N}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ определим

$$C_s = \big\{\, t \in \mathfrak{N}_i \colon t \in \mathfrak{N}_i, t \text{ является продолжением } s \,\big\}.$$

Рассмотрим два класса булевых алгебр на множествах $\mathfrak{N}_i$ $(i = 1, 2, 3)$. Булевы алгебры первого класса определим на $\mathfrak{N}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ следующим образом.

Определим множество

$$T_i = \big\{\, \pi \in \mathfrak{N}_i^{\omega} \colon \operatorname{dom} \pi(n) = n + 1 \text{ для всех } n \in \omega \,\big\}.$$

Для каждого $\pi \in T_i$ $(i = 1, 2, 3)$ обозначим

$$C_\pi = \cup \big\{\, C_{\pi(n)} \colon n \in \omega \,\big\}.$$

Обозначим через $\mathfrak{B}_{1,i}$ $(i = 1, 2, 3)$ булеву алгебру, порождённую семейством

$$\mathfrak{B}'_i = \big\{\, C_\pi \colon \pi \in T_i \,\big\}.$$

Определим пространство $S\mathfrak{B}_{1,i}$ как пространство Стоуна булевой алгебры $\mathfrak{B}_{1,i}$ $(i = 1, 2, 3)$.

Докажем несколько лемм общих, для данных пространств.

Предложение 6 *Для каждого* $s \in \mathfrak{N}_i$ *справедливо* $C_s \in \mathfrak{B}_{1,i}$ $(i = 1, 2, 3)$.

Доказательство. Пусть $s \in \mathfrak{N}_i$, докажем, что $C_s \in \mathfrak{B}_{1,i}$.

Построим $\pi_0, \pi_1 \in T_i$ следующим образом:
рассмотрим $f_0, f_1 \in P_2 \subseteq P_1 \subseteq P_3$ такие, что $f_j \equiv j$ $(j = 0,1)$. Определим

$$\pi_j(n) = \begin{cases} f_j|_{n+1}, & \text{для } n \neq \operatorname{dom} s - 1; \\ s, & \text{для } n = \operatorname{dom} s - 1, \end{cases} \qquad j = 0, 1.$$

Так как f_0 и f_1 различны, то, очевидно, ни одно продолжение $\pi_0(n)$ не может являться продолжением никакого $\pi_1(m)$ для $n, m \in \omega$, $n \neq \operatorname{dom} s - 1$, $m \neq \operatorname{dom} s - 1$.

Таким образом, пересечение $C_{\pi_0} \cap C_{\pi_1}$ состоит из элемента $\pi_0(\operatorname{dom} s - 1) = \pi_1(\operatorname{dom} s - 1) = s$ и всех его продолжений. То есть,

$$C_{\pi_0} \cap C_{\pi_1} = C_s.$$

Таким образом, $C_s \in \mathfrak{B}_{1,i}$. □

Предложение 7 *Для каждого $s \in \mathfrak{N}_i$ справедливо $\{s\} \in \mathfrak{B}_{1,i}$ $(i = 1, 2)$.*

Доказательство. Поскольку для всякого $s \in \mathfrak{N}_i$ при $i = 1, 2$ количество продолжений его на следующий шаг конечно, то нетрудно показать, что для всякого $s \in \mathfrak{N}_i$ справедливо

$$\{s\} = C_s \setminus \cup\{C_t \colon t \in \mathfrak{N}_i, s < t, \operatorname{dom} t = \operatorname{dom} s + 1\} \in \mathfrak{B}_{1,i}.$$

□

Таким образом подространства фиксированных ультрафильтров $\widehat{\mathfrak{N}}_1$ и $\widehat{\mathfrak{N}}_2$ в пространствах Стоуна булевых алгебр $\mathfrak{B}_{1,1}$ и $\mathfrak{B}_{1,2}$ являются дискретными. Подпространства $\widehat{\mathfrak{N}}_1$ и $\widehat{\mathfrak{N}}_2$ можно отождествить с дискретными пространствами $\mathfrak{N}_1$ и $\mathfrak{N}_2$ соответсвенно, а сами пространства Стоуна $S\mathfrak{B}_{1,1}$ и $S\mathfrak{B}_{1,2}$ рассматривать как бикомпактные расширения счетных дискретных пространств $\mathfrak{N}_1$ и $\mathfrak{N}_2$.

В пространстве $S\mathfrak{B}_{1,3}$ подпространство фиксированных ультрафильтров $\widehat{\mathfrak{N}}_3$ не является дискретным.

Предложение 8 *Семейство множеств вида*

$$\Big[\Big(\bigcap_{\pi\in T'} C_\pi\Big)\cap\Big(\bigcap_{\pi\in T''} \mathfrak{N}_i\setminus C_\pi\Big)\Big], \quad \textit{где} \quad T', T'' \subset T_i, |T'|<\omega, |T''|<\omega$$

есть база пространства $S\mathfrak{B}_{1,i}$ $(i=1,2,3)$.

Доказательство. Рассмотрим произвольную окресность произвольной точки $x\in U_A\subseteq S\mathfrak{B}_{1,i}$. Точка x является ультрафильтром, состоящим из элементов булевой алгебры $\mathfrak{B}_{1,i}$.

Согласно предположению 1, каждый элемент A булевой алгебры $\mathfrak{B}_{1,i}$ представим в виде

$$A=(A_{0,0}\cap\ldots\cap A_{0,r_0})\cup(A_{1,0}\cap\ldots\cap A_{1,r_1})\cup\ldots\cup(A_{q,0}\cap\ldots\cap A_{q,r_q}),$$

где либо $A_{j,k}\in\mathfrak{B}'_i$, либо $\overline{A_{j,k}}\in\mathfrak{B}'_i$ для всех $k\leqslant r_j$, $j\leqslant q$. А значит найдётся $j\leqslant q$ такое, что $A_{j,0}\cap\ldots\cap A_{j,r_j}$ есть элемент ультрафильтра x и, следовательно,

$$x\in[(A_{j,0}\cap\ldots\cap A_{j,r_j})]\subseteq[A]=U_A.$$

$\square$

Данные базы довольно громоздки и неудобны в работе. Рассмотрим другие базы для данных пространств. Для их построения приведем ряд вспомогательных результатов.

Для произвольного $\pi\in T_i$ $(i=1,2,3)$ и $M\subseteq\omega$ определим множество $C_{\pi|M}=\bigcup_{n\in M}C_{\pi(n)}$.

Предложение 9 *Для каждого* $\pi\in T_i$ $(i=1,2,3)$ *и* $M\subseteq\omega$ *найдутся* $\pi_1,\pi_2\in T_i$ *такие, что* $C_{\pi|M}=C_{\pi_1}\cap C_{\pi_2}$.

Доказательство. Пусть $M=\{k_1,k_2,\ldots,k_j,\ldots\}$. Построим π_1 и $\pi_2\in T_i$ следующим образом. Для всех $0\leqslant n<k_1$ опрелелим $\pi_1(n)$ как тождественный 0 на множестве n, а $\pi_2(n)$ как тождественная 1 на множестве n. Для $k_j\leqslant n<k_{j+1}$ $\pi_1(n)$ и $\pi_2(n)$ определим как произвольные продолжения $\pi(k_j)$ на n (при $n=k_j$ они будут совпадать с $\pi(k_j)$).

Из построения π_1 и π_2 следует, что $C_{\pi|M} = C_{\pi_1} \cap C_{\pi_2}$. Таким образом, для произвольных $\pi \in T_i$ и $M \subseteq \omega$ справедливо $C_{\pi|M} \in \mathfrak{B}_{1,i}$. □

Лемма 1 *Пусть* $\{\pi_j : j \leqslant n\} \subseteq T_i$ *(*$i = 1, 2, 3$*),* $n \in \omega$*. Тогда для всякого семейства* $\{C_{\pi_j|M_j} : j \leqslant n\}$ *верно следующее:*

$$\bigcap_{j\leqslant n} C_{\pi_j|M_j} = \bigcup_{j\leqslant n} C_{\pi_j|M'_j} \quad \textit{для некоторых } M'_j \subseteq M_j \ (j \leqslant n).$$

Доказательство. Докажем по индукции по n. Пусть $n = 1$. Построим множества M'_0 и M'_1 такие, что

$$C_{\pi_0|M_0} \cap C_{\pi_1|M_1} = C_{\pi_0|M'_0} \cup C_{\pi_1|M'_1}.$$

Определим

$$M'_0 = \left\{ k \in M_0 \colon \pi_0(k) \in C_{\pi_1|M_1} \right\},$$
$$M'_1 = \left\{ k \in M_1 \colon \pi_1(k) \in C_{\pi_0|M_0} \right\}.$$

Заметим, что для любых s и t из $\mathfrak{N}_i$, C_s либо содержит C_t, либо содержится в C_t (в частности, они могут быть равны), или эти множества не пересекаются. Отсюда следует, что

$$C_{\pi_0|M'_0} \cup C_{\pi_1|M'_1} = C_{\pi_0|M_0} \cap C_{\pi_1|M_1}.$$

Далее по индукции, предположим, что $\bigcap\limits_{j\leqslant n} C_{\pi_j|M_j} = \bigcup\limits_{j\leqslant n} C_{\pi_j|M'_j}$. Тогда

$$\Big(\bigcap_{j\leqslant n} C_{\pi_j|M_j}\Big) \cap C_{\pi_{n+1}|M_{n+1}} =$$
$$= \Big(\bigcup_{j\leqslant n} C_{\pi_j|M'_j}\Big) \cap C_{\pi_{n+1}|M_{n+1}} = \bigcup_{j\leqslant n} (C_{\pi_j|M'_j} \cap C_{\pi_{n+1}|M_{n+1}}) =$$
$$= \bigcup_{j\leqslant n} (C_{\pi_j|M''_j} \cup C_{\pi_{n+1}|M^i_{n+1}}) = \bigcup_{j\leqslant n+1} C_{\pi_j|M''_j},$$

где $M''_{n+1} = \bigcup\limits_{j \leqslant n} M^j_{n+1}$. □

Следствие 1 *Пусть* $x \in S\mathfrak{B}^*_{1,i}$ $(i = 1, 2, 3)$ *и* $x \in \Big[\bigcap\limits_{j \leqslant n} C_{\pi_j | M_j}\Big]$, *тогда найдутся* π *и* $M \subseteq \omega$ *такие, что* $x \in [C_{\pi|M}] \subseteq \Big[\bigcap\limits_{j \leqslant n} C_{\pi_j | M_j}\Big]$.

Определим

$$\Gamma_i = \Big\{ C_{\pi|M} \setminus \bigcup_{\pi \in T'} C_\pi \colon \pi \in T_i, T' \subset T, |T'| < \omega, M \subseteq \omega \Big\} \qquad (i = 1, 2, 3),$$

$$\Theta_3 = \Big\{ \mathfrak{N}_3 \setminus \Big(\bigcup_{\pi \in T'} C_\pi \Big) \colon T' \subset T_3, |T'| < \omega \Big\}.$$

Теперь по предложению 9 и следствию 1 мы получаем

Теорема 2 *Семейства*

$$\widetilde{\mathfrak{B}}_{1,1} = \{ [U] \colon U \in \Gamma_1 \} \quad \widetilde{\mathfrak{B}}_{1,2} = \{ [U] \colon U \in \Gamma_2 \}$$
$$\widetilde{\mathfrak{B}}_{1,3} = \{ [U] \colon U \in \Gamma_3 \cup \Theta_3 \}$$

являются базами пространств $S\mathfrak{B}_{1,1}$, $S\mathfrak{B}_{1,2}$ *и* $S\mathfrak{B}_{1,3}$ *соответсвенно.*

Теперь рассмотрим булевы алгебры второго типа на наших частично упорядоченных множествах $\mathfrak{N}_1$, $\mathfrak{N}_2$ и $\mathfrak{N}_3$, порожденные другими семействами множеств.

Обозначим $\mathfrak{B}_{2,i}$ булеву алгебру порожденную семейством множеств

$$\{C_s \colon s \in \mathfrak{N}_i\} \cup \{\mathfrak{N}_i \setminus C_s \colon s \in \mathfrak{N}_i\}.$$

Соответсвенно $S\mathfrak{B}_{2,i}$ пространство Стоуна булевой алгебры $\mathfrak{B}_{2,i}$ $(i = 1, 2, 3)$. Анналогично предложению 8 определяются базы пространств $S\mathfrak{B}_{2,i}$.

Предложение 10 *Семейство*

$$\Big\{\Big[\Big(\bigcap_{s\in N'} C_s\Big)\cap\Big(\bigcap_{s\in N''}\mathfrak{N}_i\setminus C_{t_k}\Big)\Big]\colon N',N''\subset\mathfrak{N}_i, |N'|<\omega, |N''|<\omega\Big\}$$

есть база пространства $S\mathfrak{B}_{2,i}$ $(i=1,2,3)$.

Доказательство данного предложения основывается на предположении 1 и повторяет доказательство предложения 8.

Предложение 11 *Если* $\{s_j\colon j\leqslant n\}\subseteq\mathfrak{N}_i$, *то* $\bigcap\limits_{j\leqslant n} C_{s_j}\neq\varnothing$ *тогда и только тогда, когда* $\{s_j\colon j\leqslant n\}$ *является цепью.*

Доказательство. Непосредственно из определения C_s следует, что $C_s\cap C_t$ непусто, тогда и только тогда, когда s и t сравнимы (т.е. один является продолжением другого). Отсюда и следует данное предложение. □

Следствие 2 *Если* $\bigcap\limits_{j\leqslant n} C_{s_j}\neq\varnothing$ *для* $\{s_j\colon j\leqslant n\}\subseteq\mathfrak{N}_i$, *то*

$$\bigcap_{j\leqslant n} C_{s_j}=C_{s_{j_0}},$$

где $\mathrm{dom}\ s_{j_0}=\max\{\mathrm{dom}\, s_j\colon j\leqslant n\}$.

Определим

$$\Gamma'_i=\Big\{\, C_s\setminus\bigcup_{t\in N'} C_t\colon s\in\mathfrak{N}_i, N'\subset\mathfrak{N}_i, |N'|<\omega\,\Big\}\qquad (i=1,2,3),$$

$$\Theta'_3=\Big\{\,\mathfrak{N}_3\setminus\bigcup_{t\in N'} C_t\colon N'\subset\mathfrak{N}_3, |N'|<\omega\,\Big\}.$$

Из вышеперечисленного вытекает следующая теорема.

Теорема 3 *Семейства*

$$\widetilde{\mathfrak{B}}_{2,1}=\{\,[U]\colon U\in\Gamma'_1\,\},\quad \widetilde{\mathfrak{B}}_{2,2}=\{\,[U]\colon U\in\Gamma'_2\,\},$$
$$\widetilde{\mathfrak{B}}_{2,3}=\{\,[U]\colon U\in\Gamma'_3\cup\Theta'_3\,\}$$

являются базами пространств $S\mathfrak{B}_{2,1}$, $S\mathfrak{B}_{2,2}$ и $S\mathfrak{B}_{2,3}$ соответсвенно.

3 Общие свойства

В данном параграфе рассмотрим свойства, общие для пространств $S\mathfrak{B}_{i,1}$ и $S\mathfrak{B}_{i,2}$ $(i = 1, 2, 3)$. Если утверждение верно для T_j $(j = 1, 2, 3)$ вне зависимости от индекса, будем обозначать это множество просто как T. Прежде всего рассмотрим свойства центрированных систем.

Лемма 2 *Пусть ξ максимальная центрированная система в семействе множеств $\{C_{\pi|M} \colon \pi \in T, M \subseteq \omega\}$, и множество $C_{\pi'|M'}$ такое, что $C_{\pi'|M'} \cap C_{\pi|M}$ бесконечно для всякого $C_{\pi|M} \in \xi$. Тогда $C_{\pi'|M'} \in \xi$.*

Доказательство. Рассмотрим произвольный конечный набор элементов ξ, $\{C_{\pi_k|M_k} \colon k \leqslant n\} \subseteq \xi$. Найдётся (см. лемму 1) набор $\{M'_k \colon k \leqslant n\}$ такой, что $M'_k \subseteq M_k$ для каждого $k \leqslant n$ и

$$\bigcap_{k\leqslant n} C_{\pi_k|M_k} = \bigcup_{k\leqslant n} C_{\pi_k|M'_k}.$$

Докажем, что найдётся $k_0 \leqslant n$ такое, что $C_{\pi_{k_0}|M'_{k_0}} \in \xi$.

Предположим противное. Пусть для каждого $k \leqslant n$ найдётся конечный набор $\{C_{\pi^k_\ell|M^k_\ell} \colon \ell \leqslant n_k\}$ такой, что

$$C_{\pi_k|M'_k} \cap \left(\bigcap_{\ell\leqslant n_k} C_{\pi^k_\ell|M^k_\ell}\right) \quad \text{конечно.}$$

Тогда

$$\left(\bigcup_{k\leqslant n} C_{\pi_k|M'_k}\right) \cap \left(\bigcap_{k\leqslant n}\bigcap_{\ell\leqslant n_k} C_{\pi^k_\ell|M^k_\ell}\right) = \\ = \left(\bigcap_{k\leqslant n} C_{\pi_k|M_k}\right) \cap \left(\bigcap_{k\leqslant n}\bigcap_{\ell\leqslant n_k} C_{\pi^k_\ell|M^k_\ell}\right)$$

конечно, что противоречит центрированности ξ.

Из максимальности ξ следует, что найдётся $C_{\pi_{k_0}|M'_{k_0}} \in \xi$, тем более $C_{\pi_{k_0}|M_{k_0}} \in \xi$. По условиям леммы $C_{\pi_{k_0}|M_{k_0}} \cap C_{\pi'|M'}$ бесконечно, следовательно, $\bigcap\limits_{k\leqslant n} C_{\pi_k|M_k} \cap C_{\pi'|M'} = \bigcup\limits_{k\leqslant n} C_{\pi_k|M'_k} \cap C_{\pi'|M'}$ бесконечно, а значит $C_{\pi'|M'} \in \xi$. □

Лемма 3 *Пусть α' — максимальная центрированная система в семействе $\{C_{\pi|M}\colon \pi \in T, M \subseteq \omega\}$. Тогда $\alpha = \{C_\pi\colon C_{\pi|M} \in \alpha'\}$ является максимальной центрированной системой в семействе множеств $\{C_\pi\colon \pi \in T\}$.*

Доказательство. Пусть α' максимальная центрированная система в семействе множеств $\{C_{\pi|M}\colon \pi \in T, M \subseteq \omega\}$. Предположим, что $\alpha = \{C_\pi\colon C_{\pi|M} \in \alpha'\}$ не максимальна. Тогда найдётся $\pi' \in T$ такое, что $C_{\pi'} \cup (\bigcap\limits_{i\leqslant n} C_{\pi_i})$ бесконечно для любого конечного набора $\{C_{\pi_i}\colon i \leqslant n\} \subseteq \alpha$, но $C_{\pi'} \notin \alpha'$.

В силу леммы 2 найдётся $C_{\pi_0|M_0} \subseteq \alpha'$ такое, что $C_{\pi'} \cap C_{\pi_0|M_0}$ конечно. По предложению 9 найдутся множества $C_{\widehat{\pi}_0}$ и $C_{\widehat{\pi}_1}$ такие, что $C_{\widehat{\pi}_0} \cap C_{\widehat{\pi}_1} = C_{\pi_0|M_0}$. Отсюда следует, что $(C_{\widehat{\pi}_0} \cap C_{\widehat{\pi}_1}) \cap C_{\pi'}$ конечно. С другой стороны $C_{\widehat{\pi}_0}, C_{\widehat{\pi}_1} \in \alpha$, это следует из того, что $C_{\pi_0|M_0} \in \alpha'$ и $\alpha \subseteq \alpha'$. Противоречие. Таким образом, система $\alpha = \{C_\pi\colon C_{\pi|M} \in \alpha'\}$ максимальна. □

Непосредственными вычислениями доказывается

Лемма 4

1. *Если α максимальная центрированная система в семействе множеств $\{C_\pi\colon \pi \in T\}$, то $\alpha' = \{\bigcap\limits_{i\leqslant n} C_{\pi_i}\colon n \in \omega, \pi_i \in \alpha\}$ максимальная центрированная система в семействе множеств $\{\bigcap\limits_{i\leqslant n} C_{\pi_i}\colon n \in \omega, \pi_i \in T\}$.*

2. *Если α' максимальная центрированная система в семействе множеств*
$$\Big\{ C = \bigcap_{i\leqslant n} C_{\pi_i}\colon n \in \omega, \pi_i \in T \Big\},$$

то

$$\left\{ C_\pi \colon C_\pi = C_{\pi_i} \text{ для некоторого } C = \bigcap_{i \leqslant n} C_{\pi_i}, C \in \alpha' \right\}$$

максимальная центрированная система в семействе множеств $\{C_\pi \colon \pi \in T\}$.

Из леммы 1 следует следующая

Лемма 5 *Если* α *максимальная центрированная система в семействе множеств* $\{C_{\pi|M} \colon \pi \in T, M \subseteq \omega\}$, *то для всякого конечного набора множеств* $\alpha' \subseteq \alpha$ *найдётся* $C_{\pi_0|M_0} \in \alpha$ *такое, что* $C_{\pi_0|M_0} \subseteq \cap\{C_{\pi|M} \colon C_{\pi|M} \in \alpha'\}$.

Лемма 6 *Для максимальной центрированной системы* α *в семействе* $\{C_{\pi|M} \colon \pi \in T, M \subseteq \omega\}$ *существует максимальная центрированная система* α'' *в семействе* $\{C = \bigcap_{i \leqslant n} C_{\pi_i} \colon n \in \omega, \pi_i \in T\}$ *такая, что* α'' *вписана в* α.

Доказательство. Пусть α максимальная центрированная система в семействе

$$\left\{ C_{\pi|M} \colon \pi \in T, M \subseteq \omega \right\}.$$

В силу леммы 3 система $\alpha' = \{C_\pi \colon C_{\pi|M} \in \alpha\}$ максимальная центрированная система в семействе множеств $\{C_\pi \colon \pi \in T\}$. В силу леммы 4 всевозможные конечные пересечения элементов из α' образуют максимальную центрированную систему α'' в семействе $\{C = \bigcap_{i \leqslant n} C_{\pi_i} \colon n \in \omega, \pi_i \in T\}$. Покажем, что система α'' вписана в α. Действительно, пусть $C_{\pi|M} \in \alpha$. По предложению 9 $C_{\pi|M} = C_{\pi_1} \cap C_{\pi_2}$ для некоторых $\pi_1, \pi_2 \in T$. Тогда $\pi_1, \pi_2 \in \alpha'$, а их пересечение $C_{\pi|M} = C_{\pi_1} \cap C_{\pi_2} \in \alpha''$. Таким образом α'' вписана в α. □

Лемма 7 *Для максимальной центрированной системы α в семействе*
$$\Big\{\, C = \bigcap_{i \leqslant n} C_{\pi_i} \colon n \in \omega, \pi_i \in T \,\Big\}$$
существует максимальная центрированная система α' в семействе
$$\big\{\, C_{\pi|M} \colon \pi \in T, M \subseteq \omega \,\big\},$$
вписанная в α.

Доказательство. Пусть α максимальная центрированная система в семействе
$$\Big\{\, C = \bigcap_{i \leqslant n} C_{\pi_i} \colon n \in \omega, \pi_i \in T \,\Big\}.$$
Рассмотрим семейство множеств α', состоящиее из множеств $C_{\pi|M}$, центрированных с α. Покажем, что α' искомая. По предложению 9 всякое множество $C_{\pi|M} = C_{\pi_1} \cap C_{\pi_2}$. Так как $C_{\pi|M}$ центрирована с α следует, что $C_{\pi_1}, C_{\pi_2} \in \alpha$. Таким образом, всякий элемент $C_{\pi|M} \in \alpha'$ есть и элемент системы α. Следовательно система $\alpha' = \{C_{\pi|M} \colon C_{\pi|M}$ центрировано с $\alpha\}$ центрирована. Докажем максимальность α' и то, что α' вписана в α.

Пусть C произвольный элемент α, то есть $C = \bigcap_{i \leqslant n} C_{\pi_i}$. По лемме 1
$$C = \bigcap_{i \leqslant n} C_{\pi_i} = \bigcup_{i \leqslant n} C_{\pi_i|M_i}.$$
В силу центрированности α, среди множеств $C_{\pi_i|M_i}$ $(i \leqslant n)$ найдётся $C_{\pi_{i_0}|M_{i_0}}$, центрированное с α, то есть $C_{\pi_{i_0}|M_{i_0}} \in \alpha'$. Отсюда следует, что α' вписано в α. Отсюда же легко выводится и максимальность системы α'. Лемма доказана. □

1 Пространство Белла

М. Белл в работе [1] построил бикомпактное расширение счётного дискретного пространства, нарост которого несепарабелен, но обладает счётным числом Суслина. Вопрос о существовании такого расширения был поставлен Я. ван Миллом в [2]. Компактификация Белла позволила решить ряд важных вопросов теории бикомпактных расширений счётных дискретных пространств. Я. ван Милл [13; 14] и А. Грызлов [15; 16] получили несколько новых типов точек в классе слабых p-точек, являющихся предельными для различных подмножеств ω^* со счётным числом Суслина.

В параграфе 1.1 рассмотрена оригинальная конструкция, описанная Беллом. Пространство Белла — это пространство $S\mathfrak{B}_{1,1}$. Так как в этом разделе рассматривается только пространство Белла, то есть $S\mathfrak{B}_{1,1}$, будем обозначать его через BN, а пространство $\mathfrak{N}_1$ через N, как сложилось в ряде статей [4—8; 17—19]. В следующем же разделе мы вернёмся к начальным обозначениям.

Компактификация BN была построена М. Беллом как пространство Стоуна некоторой булевой алгебры, состоящей из подмножеств частично упорядоченного множества N. Свойства расширения BN, доказанные М. Беллом, являются следствием существования базы пространства BN, представляющей собой объединением счётного числа 2-сцепленных семейств.

1.1 Конструкция, свойства и базы расширения Белла

Рассмотрим построение расширения Белла [1].

Определим множество функций

$$P = \left\{ f \in \omega^\omega \colon 0 \leqslant f(n) \leqslant n+1 \text{ для всех } n \in \omega \right\}.$$

В качестве счётного дискретного пространства N возьмём множество всех сужений функций множества P:

$$N = \left\{ f|_n \colon f \in P, n \subseteq \omega \right\}.$$

Определим множество

$$T = \left\{ \pi \in N^\omega \colon \operatorname{dom} \pi(n) = n + 1 \text{ для всех } n \in \omega \right\}.$$

Для каждой точки $s \in N$ пусть $C_s = \{t \in N \colon t|_{\operatorname{dom} s} = s\}$. А для каждого $\pi \in T$ обозначим

$$C_\pi = \cup \left\{ C_{\pi(n)} \colon n \in \omega \right\}.$$

Обозначим через B булеву алгебру, порождённую семейством

$$B' = \left\{ C_\pi \colon \pi \in T \right\} \cup \left\{ N \setminus C_\pi \colon \pi \in T \right\}.$$

Положим $B'' = \{U \in B \colon |U| = \omega \}$.

Определим пространство BN как пространство Стоуна булевой алгебры B.

Пусть $n \in \omega$, $s \in N$ такие, что $\operatorname{dom} s \leqslant n$. Определим

$$\Gamma(s) = \Big\{ C_{\pi|M} \setminus \bigcup_{i \leqslant m} C_{\pi_i} \colon \pi(\min M) = s, s \notin \bigcup_{i \leqslant m} C_{\pi_i}, \\ (m+1)(n+1) < \operatorname{dom} s + 1 \Big\}.$$

М. Беллом было показано [1]

Теорема 1.1 *Семейство B'' представимо в виде счётного объединения 2-сцепленных семейств.*

Из этой теоремы непосредственно вытекает

Следствие 1.1 *Пространство $BN \setminus N$ удовлетворяет условию Суслина, но несепарабельно.*

А. Грызловым в [15] был доказано следующее свойство пространства Белла.

Теорема 1.2 *Для любого натурального m существует система множеств $B_m \subseteq B''$ такая, что*

1. *семейство дополнений до элементов системы* B_m — m*-сцеплено;*

2. *для любого счётного множества точек* $\{p_k\colon k \in \omega\} \subseteq BN \setminus N$ *найдётся множество* $U \in B_m$ *такое, что* $\{p_k\colon k \in \omega\} \subseteq [U]$.

Следующая теорема объединяет свойства, доказанные М. Беллом и А. Грызловым.

Теорема 1.3

1. *Пусть* $n \in \omega$ *и* $s \in N$ *такие, что* $\operatorname{dom} s \geqslant n$. *Тогда для* $\Gamma(s)$ *следующее верно:*

   a) $\Gamma(s)$ — n*-сцепленно;*

   b) *семейство дополнений до элементов* $\Gamma(s)$ — n*-сцепленно;*

   c) *для любого счётного множества точек* $\{p_i\colon i \in \omega\} \subseteq BN\setminus N$ *найдётся множество* $U \in \Gamma(s)$ *такое, что* $\{p_i\colon i \in \omega\} \subseteq [U]$.

2. *Для всякого* $n \in \omega$ *семейство*

$$\Gamma_n = \big\{\, [U] \setminus N \colon U \in \cup\big\{\, \Gamma(s)\colon \operatorname{dom} s \geqslant n \,\big\} \,\big\}$$

является базой пространства $BN \setminus N$.

Доказательство. **1.a** Доказательство этого пункта является модификацией доказательство Белла (см. [1]). Пусть $n \in \omega$ и $s \in N$ такие, что $\operatorname{dom} s \geqslant n$. Пусть $U_0, \ldots, U_n \in \Gamma(s)$. Тогда

$$s \in U_j = C_{\pi_j|M_j} \setminus \bigcup_{i \leqslant m_j} C_{\pi_i^j} \qquad (j \leqslant n).$$

Мы построим $h \in P$ такое, что $\big\{\, h|_k \colon k \geqslant \operatorname{dom} s\big\} \subseteq U_0 \cap \ldots \cap U_n$, по индукции по $k \geqslant \operatorname{dom} s$. Пусть $h|_{\operatorname{dom} s} = s \in U_0 \cap \ldots \cap U_n$. Если $h|_k \in U_0 \cap \ldots \cap U_n$ для $k \geqslant \operatorname{dom} s$ определено, мы можем определить $h|_{k+1} \notin \{\pi_i^j(k)\colon i \leqslant m_j, j \leqslant n\}$ поскольку

$$\big|\big\{\, (i,j)\colon j \leqslant n, i \leqslant m_j \,\big\}\big| \leqslant (n+1)\cdot(\max m_j + 1) < k+2,$$

и существует $k+2$ продолжения $h|_k$ на $k+1$.

1.b Пусть $U_j = C_{\pi_j|M_j} \setminus \bigcup_{i\leqslant m_j} C_{\pi_i^j} \in \Gamma(s)$ $(j \leqslant n)$. Построим $h \in P$ такое, что $\{h|_k\colon k \geqslant \operatorname{dom} s\} \subseteq N \setminus \bigcup_{j\leqslant n} C_{\pi_j|M_j}$.

Пусть $h|_{\operatorname{dom} s} \neq s$, тогда $h|_{\operatorname{dom} s} \notin \bigcup_{j\leqslant n} C_{\pi_j|M_j}$.

Если $h|_k \notin \bigcup_{j\leqslant n} C_{\pi_j|M_j}$ для $k \geqslant \operatorname{dom} s$ определено, мы можем определить $h|_{k+1} \notin \bigcup_{j\leqslant n} C_{\pi_j|M_j}$, поскольку

$$\bigl|\{\,\pi_j(k)\colon j \leqslant n\,\}\bigr| \leqslant n+1 \leqslant \operatorname{dom} s < k+2,$$

и существует $k+2$ продолжения $h|_k$ на $k+1$.

Легко увидеть, что $\Gamma(s)$ удовлетворяет условию **1.c**.

2 Пусть точка $x \in BN \setminus N$, $Ox = C_{\pi|M} \setminus \bigcup_{i\leqslant m} C_{\pi_i}$ и ℓ_0 такое, что $(m+1)(n+1) < \ell_0 - 1$ и $\ell_0 \geqslant n$. Существует s_0 такое, что $\operatorname{dom} s_0 = \ell_0$ и $x \in [C_{s_0}]$. Мы имеем

$$C_{s_0} \cap \Bigl(C_{\pi|M} \setminus \bigcup_{i\leqslant m} C_{\pi_i}\Bigr) = C_{\pi|M'} \setminus \bigcup_{i\leqslant m} C_{\pi_i},$$

где $M' = \{\ell\colon \ell \in M$ и $\pi(\ell)$ продолжение $s_0\}$.

Таким образом $\min M' \geqslant \ell_0$, тогда $(m+1)(n+1) < \min M' + 1$ и $\min M' \geqslant n$. В итоге, для $s = \pi(\min M')$ мы имеем

$$U = C_{\pi|M'} \setminus \bigcup_{i\leqslant m} C_{\pi_i} \in \Gamma(s).$$

Итак, U — искомая окрестность. □

1.2 Замыкания счётных подмножеств N и кардинальные инварианты пространства Белла

Напомним, что в пространстве $\beta\omega$ замыкание любого бесконечного подмножества ω гомеоморфно $\beta\omega$. Мы покажем, что существуют бесконечные подмножества N, замыкания которых в BN гомеоморфны $\beta\omega$, и бесконечные подмножества N, которые являются сходящимися последовательностями в BN.

Теорема 1.4 *Пусть $\pi(M)$ — строгая бесконечная антицепь, и множество $X = \{x_i \colon i \in M\}$ такое, что $x_i \in [C_{\pi(i)}]$. Тогда $[X]$ гомеоморфно $\beta\omega$.*

Доказательство. Рассмотрим семейство $\lambda = \{C_{\pi(i)} \colon i \in M\}$. Для ультрафильтра $\xi \in \beta M \setminus M$ и $F \in \xi$ определим:

$$\begin{aligned} W_F &= \big[\cup\big\{\, C_{\pi(i)} \colon i \in F \,\big\}\big], \\ \lambda_\xi &= \big\{\, W_F \colon F \in \xi \,\big\}, \\ L_\xi &= \cap\big\{\, [W_F] \colon W_F \in \lambda_\xi \,\big\}. \end{aligned}$$

Легко видеть, что

1. $L_\xi \cap L_\eta = \varnothing$ для $\xi \neq \eta$;

2. $\{X \cap W_F \colon F \in \xi\,\}$ — ультрафильтр на множестве X;

3. $|L_\xi \cap [X]| = 1$.

Пусть $x_\xi = \cap\{[X \cap W_F] \colon F \in \xi\}$. Из конструкции следует, что $X \cup \{x_\xi \colon \xi \in \beta M \setminus M\} = [X]$ гомеоморфно $\beta\omega$. □

В случае нароста эту теорему можно обобщить.

Теорема 1.5 *Пусть $\{s_i \colon i \in \omega\}$ — антицепь, и $X = \{x_i \colon i \in \omega\}$ такое множество, что $x_i \in (C_{s_i})^*$. Тогда $[X]$ гомеоморфно $\beta\omega$.*

Доказательство этой теоремы вытекает из того, что

$$C_s^* = \cup\big\{\, C_t^* \colon \operatorname{dom} t = \operatorname{dom} s + 1,\ s \leqslant t \,\big\} \quad \text{для любого } s \in N.$$

Таким образом, мы можем построить строгую антицепь $\{s_i' \colon i \in \omega\}$ такую, что $x_i \in C^*_{s_i'} \subseteq C^*_{s_i}$.

Из этой теоремы и свойств пространства $\beta\omega$ мы получаем

Следствие 1.2

1. $\mathrm{w}(BN) = 2^\omega$;

2. $\mathrm{s}(BN) = 2^\omega$;

3. $\mathrm{t}(BN) = 2^\omega$;

4. $|BN| = 2^{2^\omega}$.

Естественно возникает вопрос о существовании подмножеств N, замыкания которых не гомеоморфны $\beta\omega$. Рассмотрим два примера антицепей из N, замыкания которых не гомеоморфны $\beta\omega$. Для доказательства того, что замыкание счётного дискретного множества не гомеоморфно $\beta\omega$, воспользуемся тем фактом, что для любых $A, B \subseteq \omega$, если $A \cap B = \varnothing$, то $[A]_{\beta\omega} \cap [B]_{\beta\omega} = \varnothing$.

Для $s \in N$ обозначим:

$$C'_s = \{t \in N \colon \operatorname{dom} t = \operatorname{dom} s + 1, t|_{\operatorname{dom} s} = s\}.$$

Пример 1.1 Пусть $f \in P$ и $\{s_n = f|_{n+1} \colon n \in \omega\}$ и множества $A_n, B_n \subseteq C'_{s_n} \setminus \{s_{n+1}\}$ такие, что $A_n \cap B_n = \varnothing$ и $|A_n| = |B_n| = \lfloor n/2 \rfloor$ (где $\lfloor n/2 \rfloor$ — целая часть числа $n/2$) для всех $n \in \omega$. Обозначим $A = \cup\{A_n \colon n \in \omega\}$ и $B = \cup\{B_n \colon n \in \omega\}$.

Множество $A \cup B$ является антицепью. Но при этом замыкание этого множества не гомеоморфно $\beta\omega$.

Пусть $x = \lim\limits_{n\to\infty} s_n$ и $Ox = [C_{\pi|M} \setminus \bigcup\limits_{i\leqslant k} C_{\pi_i}]$ — некоторая окрестность точки x. Так как x — предел $\{s_n \colon n \in \omega\}$, то существует $n_0 \in \omega$ такое, что для любого $n > n_0$ точка $s_n \in O_x$ и $|A_n| > k$, $|B_n| > k$. Множество $\bigcup\limits_{i\leqslant k} C_{\pi_i}$ содержит не более чем k точек из C'_{s_n}, следовательно, $Ox \cap A_n \neq \varnothing$ и $Ox \cap B_n \neq \varnothing$. Таким образом, $x \in [A] \cap [B] \neq \varnothing$, а следовательно, $[A \cup B]$ не гомеоморфно $\beta\omega$.

Пример 1.2 Пусть $\{\pi(n)\colon n\in\omega\}$ — строгая антицепь и множества $A_n, B_n\subseteq C'_{\pi(n)}$ такие, что $A_n\cap B_n=\varnothing$ и $|A_n|=|B_n|=\lfloor n/2\rfloor$. Обозначим $A=\cup\{A_n\colon n\in\omega\}$ и $B=\cup\{B_n\colon n\in\omega\}$.

Как и в предыдущем примере, множество $A\cup B$ является антицепью и его замыкание не гомеоморфно $\beta\omega$.

Рассмотрим точку $x\in[\{\pi(n)\colon n\in\omega\}]$. По теореме 1.4 замыкание антицепи гомеоморфно $\beta\omega$. Таким образом можно рассматривать x, как свободный ультрафильтр на нашей антицепи. Рассмотрим произвольную окрестность $Ox=[C_{\pi'|M'}\setminus\bigcup\limits_{i\leqslant k}C_{\pi_i}]$ точки x. Так как x — свободный ультрафильтр на нашей антицепи, то

$$\bigl|Ox\cap\bigl\{\,\pi(n)\colon n\in\omega\,\bigr\}\bigr|=\omega.$$

Тогда найдётся бесконечно много $n\in\omega$ таких, что $\pi(n)\in Ox$ и $|A_n|>k$, $|B_n|>k$. Множество $\bigcup\limits_{i\leqslant k}C_{\pi_i}$ содержит не более чем k точек из C'_{s_n}, следовательно $Ox\cap A_n\neq\varnothing$ и $Ox\cap B_n\neq\varnothing$. Таким образом, $x\in[A]\cap[B]\neq\varnothing$, а следовательно, $[A\cup B]$ не гомеоморфно βN.

С другой стороны, как уже было сказано выше, в N существуют бесконечные множества, являющиеся сходящимися последовательностями в BN.

Теорема 1.6 *Пусть $A=\{s_i\colon i\in\omega\}$ — бесконечная цепь из N. Тогда A является сходящейся последовательностью в BN.*

Доказательство. Пусть $A=\{s_i\colon i\in\omega\}$ — бесконечная цепь в N, то есть $s_i<s_{i+1}$ для всех $i\in\omega$. Пусть $x\in[A]\setminus A$ и

$$O_x=\Bigl[C_{\pi|M}\setminus\bigcup_{i\leqslant n}C_{\pi_i}\Bigr]$$

базисная окрестность точки x.

Найдётся точка $s_{i_0}\in A$ такая, что $s_{i_0}\in C_{\pi|M}$ и, следовательно, $s_i\in C_{\pi|M}$ для всех $i\geqslant i_0$. С другой стороны, мы имеем:

$$\bigcup_{i\leqslant n}C_{\pi_i}\cap A=\varnothing,$$

так как в противном случае $\bigcup\limits_{i\leqslant n} C_{\pi_i}$ содержало бы всё множество A, за исключением конечного числа точек.

Итак, x предел сходящейся последовательности $A = \{s_i : i \in \omega\}$. $\square$

Следующая теорема показывает насколько много в BN пределов цепей и копий $\beta\omega$.

Теорема 1.7 *Пусть*

$$Q = \left\{\, x\colon x \textit{ предел сходящейся последовательности точек } N \,\right\},$$
$$\mu = \left\{\, A^*\colon A \subseteq N, [A] \textit{ гомеоморфно } \beta\omega \,\right\}.$$

Тогда Q всюду плотно в $BN \setminus N$ и μ образует π-сеть в $BN \setminus N$.

Доказательство. Пусть $V = C_{\pi|M} \setminus \bigcup\limits_{i\leqslant m} C_{\pi_i}$ — бесконечный элемент Γ. По индукции построим две последовательности $\{s_k : k \in \omega\}$ и $\{t_k : k \in \omega\}$ в V такие, что

1. $\{s_k : k \in \omega\}$ — цепь в N;

2. $\{t_k : k \in \omega\}$ — строгая антицепь в N;

3. $s_k < t_{k+1}$ для всех $k \in \omega$.

Пусть n_0 и $s \in N$ такие, что $n_0 \geqslant m + 1$ и $\operatorname{dom} s = n_0 + 1$, $s \in C_{\pi|M} \setminus \bigcup\limits_{i\leqslant m} C_{\pi_i}$. Определим $s_0 = t_0 = s$.

Пусть мы определили $\{s_k : k \leqslant \ell\}$ и $\{t_k : k \leqslant \ell\}$, удовлетворяющие условиям 1–3. Поскольку $\ell \geqslant n_0 \geqslant m+1$, существует не менее двух продолжений s_ℓ, лежащих в $C_{\pi|M} \setminus \bigcup\limits_{i\leqslant m} C_{\pi_i}$. мы определим одно из них как $s_{\ell+1}$, а другое, как $t_{\ell+1}$.

Итак, мы имеем $\{s_k : k \in \omega\}$ и $\{t_k : k \in \omega\}$. По конструкции, $\{s_k : k \in \omega\} \subseteq V$, $\{s_k : k \in \omega\}$ — сходящаяся последовательность и $\lim\limits_{k\to\infty} s_k \in V^*$, $\{t_k : k \in \omega\} \subseteq V$, $[\{t_k : k \in \omega\}]$ гомеоморфно $\beta\omega$ и $(\{t_k : k \in \omega\})^* \subseteq V^*$. $\square$

В пространстве $\beta\omega$ наросты любых двух почти не пересекающихся множеств из ω не пересекаются. В случае пространства Белла ситуация другая.

Теорема 1.8 *Существуют семейства почти не пересекающихся подмножеств N:*

1. $\lambda_1 = \{A_\alpha\colon \alpha \in 2^\omega\}$ *такое, что* $[A_\alpha]$ *гомеоморфно* $\beta\omega$ *для всех* $\alpha \in 2^\omega$, $A^*_\alpha \cap A^*_\beta = \varnothing$ *для* $\alpha \neq \beta$;

2. $\lambda_2 = \{A_\alpha\colon \alpha \in 2^\omega\}$ *такое, что* $|A^*_\alpha| = 1$ *и* $A^*_\alpha = A^*_\beta$ *для всех* $\alpha, \beta \in 2^\omega$;

2′. $\lambda'_2 = \{A_\alpha\colon \alpha \in 2^\omega\}$ *такое, что* $|A^*_\alpha| = 1$ *для всех* $\alpha \in 2^\omega$, $A^*_\alpha \cap A^*_\beta = \varnothing$ *для* $\alpha \neq \beta$;

3. $\lambda_3 = \{A_\alpha\colon \alpha \in 2^\omega\}$ *такое, что* $A^*_\alpha = BN \setminus N$ *для всех* $\alpha \in 2^\omega$.

Доказательство. Пусть $\theta = \{F_\alpha\colon \alpha \in 2^\omega\}$ — семейство почти не пересекающихся бесконечных подмножеств ω.

1 Пусть $A_1 = \{s_i\colon i \in \omega\}$ такое, что $[A_1]$ гомеоморфно $\beta\omega$. Определим $A_1(F_\alpha) = \{s_i\colon i \in F_\alpha\}$.

Семейство $\lambda_1 = \{A_1(F_\alpha)\colon \alpha \in 2^\omega\}$ удовлетворяет условию 1.

2 Аналогичным образом из сходящейся последовательности $A_2 = \left\{ s_i : i \in \omega \right\}$ мы можем получить семейство

$$\lambda_2 = \left\{ A_2(F_\alpha) : \alpha \in 2^\omega \right\},$$

удовлетворяющее условию 2.

2′ Для доказательства этого мы можем рассмотреть почти не пересекающееся семейство сходящихся последовательностей в N. Его мощность совпадает с мощностью множества

$$P = \{f \in \omega^\omega\colon f(n) \leqslant n + 1\}$$

и равна 2^ω.

3 Пусть $A_\alpha = \{s \in N\colon \operatorname{dom} s = n \text{ для всех } n \in F_\alpha\}$. Очевидно, что $\lambda_3 = \{A_\alpha\colon \alpha \in 2^\omega\}$ удовлетворяет условию 3. □

А. Грызловым в [6] были доказаны следующие теоремы.

Теорема 1.9 *Если множество $A \subseteq N$ такое, что $|[A] \setminus A| = 1$, тогда существует конечное множество $K \subseteq A$ такое, что $A \setminus K$ — цепь.*

Теорема 1.10 *Если замыкание $[A]$ множества $A \subseteq N$ — копия $\beta\omega$, тогда A — объединение конечного числа антицепей.*

Следствие 1.3 *Если замыкание $[A]$ множества $A \subseteq N$ — копия $\beta\omega$, тогда длины всех цепей, входящих в A ограничены одной константой.*

Исходя из этого, для изучения свойств сходящихся последовательностей, лежащих в N, достаточно рассматривать только цепи. Поэтому в дальнейшей работе мы будем рассматривать цепи и антицепи.

1.3 ℓ-точки и их свойства, u-точки

Как видно из конструкции пространства Белла, точка нароста $BN \setminus N$ — это свободный ультрафильтр булевой алгебры B, базу которого образуют бесконечные множества вида

$$\Big(\bigcap_{i\leqslant n} C_{\pi_i}\Big) \cap \Big(N \setminus \bigcup_{j\leqslant m} C_{\pi'_j}\Big).$$

Базой каждого ультрафильтра также является и семейство множеств вида

$$C_{\pi|M} \cap \Big(N \setminus \bigcup_{j\leqslant m} C_{\pi_j}\Big).$$

Возникает вопрос, что из себя представляют максимальные центрированные семейства состоящие из множеств вида $C_{\pi|M}$, или $\bigcap_{j\leqslant n} C_{\pi_i}$, или множеств вида $N \setminus \bigcup_{j\leqslant m} C_{\pi_j}$.

Теорема 1.11 *Если ξ максимальная центрированная система в семействе*

$$\mathcal{M}_L = \Big\{\, G = N \setminus \bigcup_{i\leqslant n} C_{\pi_i} \colon n \in \omega, \pi_i \in T \,\Big\},$$

то $|\cap \{G^* \colon G \in \xi\}| = 1$.

Доказательство. Из центрированности системы ξ и бикомпактности пространства BN следует, что $\cap\{G^* \colon G \in \xi\} \neq \varnothing$. Предположим, что найдутся $x, y \in \cap\{G^* \colon G \in \xi\}$, $x \neq y$. Рассмотрим некую окрестность $Ox = [C_{\pi_0|M_0} \setminus \bigcup_{i\leqslant n} C_{\pi_i}]$ точки x такую, что $y \notin Ox$. Заметим, что

$$\Big[C_{\pi_0|M_0} \setminus \bigcup_{i\leqslant n} C_{\pi_i}\Big] = \big[C_{\pi_0|M_0}\big] \setminus \Big[\bigcup_{i\leqslant n} C_{\pi_i}\Big] = \big[C_{\pi_0|M_0}\big] \setminus \Big(\bigcup_{i\leqslant n} [C_{\pi_i}]\Big).$$

Тогда $[C_{\pi_0|M_0}]$ и $\bigcap_{i\leqslant n}[N \setminus C_{\pi_i}]$ — открыто-замкнутые множества, содержащие точку x. Отсюда и из максимальности системы ξ следует, что $\bigcap_{i\leqslant n}(N \setminus C_{\pi_i}) \in \xi$, из этого вытекает, что $y \in \bigcap_{i\leqslant n}[N \setminus C_{\pi_i}]$. Так как $y \notin Ox$ получаем, что $y \notin [C_{\pi_0|M_0}]$. По предложению 9 существуют $\pi_1, \pi_2 \in T$ такие, что $C_{\pi_0|M_0} = C_{\pi_1} \cap C_{\pi_2}$. Имеем $y \notin [C_{\pi_1} \cap C_{\pi_2}] = [C_{\pi_1}] \cap [C_{\pi_2}]$.

Пусть $y \notin [C_{\pi_1}]$. Тогда $y \in [N \setminus C_{\pi_1}]$. Из открыто-замкнутости множества $[N \setminus C_{\pi_1}]$ и максимальности ξ следует, что $N \setminus C_{\pi_1} \in \xi$. Отсюда $[N \setminus C_{\pi_1}] \ni x$, следовательно, $[C_{\pi_1}] \not\ni x$, что противоречит тому, что

$$\big[C_{\pi_1}\big] \supseteq \big[C_{\pi_0|M_0}\big] \ni x.$$

Это противоречие доказывает теорему. □

Определение 1.1 Точку $x \in BN \setminus N$ назовём *ℓ-точкой*, если

$$x \in \cap\big\{\, G^* \colon G \in \xi \,\big\}$$

для некоторой максимальной центрированной системы ξ в семействе множеств $\mathcal{M}_L$.

Следующая теорема показывает основное свойство ℓ-точек.

Теорема 1.12 *Для точки $x \in BN \setminus N$ следующие утверждения эквивалентны:*

a. *точка x есть предел некоторой цепи $\{s_k : k \in \omega\}$ элементов N;*

b. *из того, что $x \in [C_{\pi|M}]$ для некоторых $\pi \in T$ и $M \subseteq \omega$ следует, что существует $i \in M$ такое, что $x \in [C_{\pi(i)}]$;*

c. *точка x имеет базу открыто-замкнутых окрестностей вида*

$$\Big[N \setminus \bigcup_{i \leqslant n} C_{\pi_i}\Big],$$

то есть, x — ℓ-точка.

Доказательство. **a** $\Rightarrow$**b** Для произвольной окрестности

$$Ox = \Big(C_{\pi|M} \setminus \bigcup_{k \leqslant m} C_{\pi_k}\Big)^*$$

точки x рассмотрим

$$O'x = \Big[C_{\pi|M} \setminus \bigcup_{k \leqslant m} C_{\pi_k}\Big].$$

Так как $x = \lim\limits_{n\to\infty} f|_n$, то для $O'x$ найдётся номер $n_0 \in \omega$, такой что для всех $n \geqslant n_0$ выполняется $f|_n \in O'x$.

Также отметим, что

$$C_{\pi|M} = \cup\big\{\, C_s : s = \pi(n) \text{ для всех } n \in M \,\big\},$$

а, следовательно, $f|_{n_0} \in C_{s_0}$ для некоторого $C_{s_0} \subseteq C_{\pi|M}$, и, очевидно, $C_{f|_{n_0}} \subseteq C_{s_0} \subseteq C_{\pi|M}$.

Более того, несложно видеть, что C_{s_0} содержит и $f|_n$ для всех $n \geqslant n_0$, а значит в замыкании содержит и точку x. Таким образом,

$$x \in \left[C_{s_0} \setminus \bigcup_{k \leqslant m} C_{\pi_k}\right] \subseteq O'x,$$

а значит и

$$x \in \left(C_{s_0} \setminus \bigcup_{k \leqslant m} C_{\pi_k}\right)^* \subseteq Ox.$$

b $\Rightarrow$**c** Очевидно, что для любого $s \in N$ можно найти такие n и π_i $(i \leqslant n)$, что

$$C_s^* = \left(N \setminus \bigcup_{j \leqslant r} C_{\pi_j}\right)^*.$$

Тогда мы можем преобразовать окрестность, полученную в предыдущем пункте доказательства

$$x \in \left(C_{s_0} \setminus \bigcup_{k \leqslant m} C_{\pi_k}\right)^* =$$
$$= \left(\left(N \setminus \bigcup_{j \leqslant r} C_{\pi_j}\right) \setminus \bigcup_{k \leqslant m} C_{\pi_k}\right)^* =$$
$$= \left(N \setminus \bigcup_{i \leqslant n} C_{\pi_i}\right)^* \subseteq Ox.$$

Таким образом, множества вида

$$\left(N \setminus \bigcup_{i \leqslant n} C_{\pi_i}\right)^*$$

образуют базу точки x.

c $\Rightarrow$**a** Отметим, что весь нарост N^* представим в виде объединения непересекающихся множеств вида

$$F_f = \bigcap_{n \in \omega} C^*_{f|_n} \quad \text{для } f \in P.$$

Пусть точка $x \in BN \setminus N$ и $x \in F_f$ для некоторого $f \in P$.

По условиям теоремы, множества вида

$$\left(N \setminus \bigcup_{i \leqslant n} C_{\pi_i}\right)^*.$$

образуют базу этой точки в наросте.

Отметим, что $N \setminus \bigcup_{i \leqslant n} C_{\pi_i} \supseteq \{f|_n : n \in \omega\}$. Действительно, если найдётся $n_0 \in \omega$ такое, что $f|_{n_0} \notin N \setminus \bigcup_{i \leqslant n} C_{\pi_i}$, то, очевидно, что все продолжения $f|_{n_0}$ также не лежат в $N \setminus \bigcup_{i \leqslant n} C_{\pi_i}$. То есть

$$N \setminus \bigcup_{i \leqslant n} C_{\pi_i} \not\supseteq C_{f|_{n_0}}.$$

Но

$$x \in F_f \subseteq C^*_{f|_{n_0}} \not\subseteq \Big(N \setminus \bigcup_{i \leqslant n} C_{\pi_i}\Big)^*$$

противоречит тому, что $(N \setminus \bigcup_{i \leqslant n} C_{\pi_i})^*$ — окрестность точки x.

Таким образом,

$$\cap\Big\{\Big[N \setminus \bigcup_{i \leqslant n} C_{\pi_i}\Big]\Big\} \supseteq [\{f|_n : n \in \omega\}].$$

Отсюда

$$\{x\} = \cap\Big\{\Big(N \setminus \bigcup_{i \leqslant n} C_{\pi_i}\Big)^*\Big\}.$$

То есть $x = \lim_{n \to \infty} f|_n$. □

Отсюда получаем, что каждое из условий (a) или (b) является необходимым и достаточным для того, чтобы точка $x \in BN \setminus N$ была ℓ-точкой. То есть множество ℓ-точек есть в точности множество пределов цепей.

Также для ℓ-точек верна следующая

Лемма 1.1 *Если $X = \{x_i : i \in \omega\} \subseteq BN \setminus N$ счётное множество, состоящее из ℓ-точек, то X дискретно.*

Доказательство. Для всякой точки $x_i \in X$ существует функция $f_i \in P$ такая, что

$$x_i \in F_{f_i} = \bigcap_{n \in \omega} [C_{f_i|_n}]$$

Заметим, что семейство $\{[C_{f_i|_n}]\colon n\in\omega\}$ образует базу F_{f_i}.

Так как x_i $(i\in\omega)$ являются ℓ-точками, то $F_{f_i}\cap F_{f'_i}=\varnothing$ для $i\neq i'$. Пусть $x_{i_0}\in X$. Покажем, что найдётся окрестность Ox_{i_0} такая, что $Ox_{i_0}\cap(X\setminus\{x_{i_0}\})=\varnothing$.

Для всякой точки $x_i\in X$, $i\neq i_0$ рассмотрим множество $C_{f_i|_{n_i}}$ такое, что $x_i\in F_{f_i}\subseteq[C_{f_i|_{n_i}}]$ и $x_{i_0}\notin[C_{f_i|_{n_i}}]$. Можно считать, что $n_i\neq n_{i'}$, если $i\neq i'$. Для множества

$$\cup\big\{\,C_{f_i|_{n_i}}: i\in\omega, i\neq i_0\,\big\}$$

имеем:

$$x_{i_0}\notin\big[\cup\big\{\,C_{f_i|_{n_i}}: i\in\omega, i\neq i_0\,\big\}\big].$$

Пусть $f_{i_0}(0)=0$, построим π следующим образом:

$$\pi(n)=\begin{cases} f_i|_{n_i} & \text{для } n=n_i-1,\ i\neq i_0;\\ 1 & \text{в ином случае.}\end{cases}$$

Тогда окрестность

$$O_{x_{i_0}}=\big[N\setminus C_\pi\big]$$

не пересекается с $X\setminus\{x_{i_0}\}$ и является искомой. Лемма доказана.

$\square$

Рассмотрим второе подсемейство, образующее булеву алгебру B.

Теорема 1.13 *Если ξ — максимальная центрированная система в семействе*

$$\mathcal{M}_U=\big\{\,C_{\pi|M}\colon \pi\in T, M\subseteq\omega\,\big\},$$

то $|\cap\{C^*_{\pi|M}\colon C_{\pi|M}\in\xi\}|=1$.

Доказательство. Из центрированности системы ξ и бикомпактности пространства BN следует, что $\cap\{C^*_{\pi|M}\colon C_{\pi|M}\in\xi\}\neq\varnothing$. Покажем, что $|\cap\{[C_{\pi|M}]\colon C_{\pi|M}\in\xi\}|=1$. Предположим противное, пусть найдутся две различные точки $x,y\in\cap\{C^*_{\pi|M}\colon C_{\pi|M}\in\xi\}$.

Рассмотрим некую окрестность

$$Ox = \left[C_{\pi_0|M_0} \setminus \bigcup_{i\leqslant n} C_{\pi_i}\right] = \left[C_{\pi_0|M_0}\right] \setminus \left[\bigcup_{i\leqslant n} C_{\pi_i}\right]$$

точки x такую, что $Ox \not\ni y$.

Множество $[C_{\pi_0|M_0}]$ является открыто-замкнутым множеством, содержащим точку x, отсюда $C_{\pi_0|M_0} \cap C_{\pi|M}$ бесконечно для всякого $C_{\pi|M} \in \xi$. Из леммы 2 следует, что $C_{\pi_0|M_0} \in \xi$, тогда $[C_{\pi_0|M_0}] \ni y$. Так как $Ox \not\ni y$ получаем, что $y \in [\bigcup_{i\leqslant n} C_{\pi_i}] = \bigcup_{i\leqslant n}[C_{\pi_i}]$. Тогда найдётся $i_0 \leqslant n$ такое, что $y \in [C_{\pi_{i_0}}]$. Так как $[C_{\pi_{i_0}}]$ является открыто-замкнутым множеством, содержащим y и $y \in \cap\{C^*_{\pi|M} \colon C_{\pi|M} \in \xi\}$ получаем, что $C_{\pi_{i_0}} \cap C_{\pi|M}$ бесконечно для всякого $C_{\pi|M} \in \xi$ и из леммы 2 вытекает, что $C_{\pi_{i_0}} \in \xi$. Но тогда мы имеем:

$$\cap\{C^*_{\pi|M} \colon C_{\pi|M} \in \xi\} \subseteq C^*_{\pi_{i_0}}$$

и следовательно $x \notin \cap\{C^*_{\pi|M} \colon C_{\pi|M} \in \xi\}$. Это противоречие доказывает теорему. □

Из теоремы 1.13 и леммы 7 получаем

Теорема 1.14 *Если ξ — максимальная центрированная система в семействе*

$$\left\{\bigcap_{i\leqslant n} C_{\pi_i|M_i} \colon n \in \omega, \pi_i \in T\right\},$$

то $|\cap\{C^* \colon C \in \xi\}| = 1.$

Определение 1.2 Точку $x \in BN \setminus N$ назовём *u-точкой*, если

$$x = \cap\left\{\, C^*_{\pi|M} \colon C_{\pi|M} \in \xi \,\right\}$$

для некоторой максимальной центрированной системы ξ в семействе множеств $\mathcal{M}_U$.

Множество всех ℓ-точек обозначим $\mathbf{L}$, а множество u-точек — $\mathbf{U}$. Вследствие теоремы 1.12 $\mathbf{L} \cap \mathbf{U} = \varnothing$.

В связи с полученными результатами возникает вопрос: существует ли в $BN \setminus N$ точка общего вида, то есть не u- и не ℓ-точка. Ответ на этот вопрос даёт следующая

Теорема 1.15 *Пусть $\{s_i\colon i \in \omega\}$ — антицепь в N, $x_i \in C_{s_i}$ — ℓ-точка $(i \in \omega)$ и $X = \{x_i\colon i \in \omega\}$. Тогда $[X] \setminus X$ гомеоморфно $\beta\omega \setminus \omega$ и состоит из точек, не являющихся ни ℓ-точками, ни u-точками.*

Доказательство. Множество $[X]$ гомеоморфно βN в силу теоремы 1.4.

Рассмотрим $X = \{x_i\colon i \in \omega\}$. Пусть $x \in [X] \setminus X$. Точка x не является ℓ-точкой, так как в противном случае, в силу леммы 1.1, множество $\{x\} \cup X$ было бы дискретным.

Покажем, что x не является u-точкой. По условиям теоремы, $x_i \in C_{s_i}$ для всякого $i \in \omega$. Пусть $F_{f_i} = \bigcap\limits_{n\in\omega}[C_{f_i|_n}]$, где $f_i \in P$, такое, что $x_i \in F_{f_i} \subseteq C^*_{s_i}$. Отметим, что семейство $\{[C_{f_i|_n}]\colon n \in \omega\}$ является базой множества F_{f_i} в BN.

Покажем, что в N существуют счётные подмножества

$$A = \{\, t(i,n)\colon i,n \in \omega \,\} \qquad \text{и} \qquad B = \{\, q(i,n)\colon i,n \in \omega \,\},$$

обладающие следующими свойствами:

(i) любые два элемента множества $A \cup B$ попарно несравнимы и имеют разные области определения;

(ii) $[A] \cap F_{f_i} \neq \varnothing$ и $[B] \cap F_{f_i} \neq \varnothing$, для любого $i \in \omega$.

Пусть $\{L_i\colon i \in \omega\}$ — разбиение ω на счётное число дизъюнктных бесконечных множеств.

Рассмотрим произвольное $i \in \omega$, C_{s_i} и $F_{f_i} = \bigcap\limits_{n\in\omega}[C_{f_i|_n}] \subseteq C_{s_i}$. Пусть

$$N_i = \min\{\, n\colon [C_{f_i|_n}] \subseteq C_{s_i} \,\}.$$

Нетрудно видеть, что мы можем построить множества

$$A_i = \{\, t(i,n)\colon n \in \omega \,\} \qquad \text{и} \qquad B_i = \{\, q(i,n)\colon n \in \omega \,\},$$

для которых выполнены следующие условия:

1. $t(i,n)$, $q(i,n) \in C_{f_i|_{N_i+n}} \setminus C_{f_i|_{N_i+n+1}}$;

2. область определения различных элементов $A_i \cup B_i$ различны и являются элементами L_i;

3. любые два элемента $A_i \cup B_i$ несравнимы.

Определим $A = \cup\{A_i : i \in \omega\}$, $B = \cup\{B_i : i \in \omega\}$. Множества A и B удовлетворяют условиям (i) и (ii). Условие (ii), очевидно, выполнено по построению. Для проверки (i) достаточно заметить, что если один элемент $A \cup B$ лежит в $A_i \cup B_i$, а другой в $A_j \cup B_j$ и $i \neq j$, то они несравнимы, так как один из них лежит в C_{s_i}, а другой в C_{s_j}, и следовательно один является продолжением s_i, а другой — s_j, и s_i несравним с s_j. Области их определения различны, так как у одного она является элементом L_i, а у другого — L_j и $L_i \cap L_j = \varnothing$.

Итак, A и B построены. Заметим, что в силу условия (i) по теореме 1.4 $[A]$, $[B]$, $[A \cup B]$ гомеоморфны $\beta\omega$, и следовательно $[A] \cap [B] = \varnothing$.

Покажем, что точка $x \in [X] \setminus X$ не является u-точкой. Предположим противное. Рассмотрим произвольную базисную окрестность точки x вида $Ox = [C_{\pi|M}] = [\cup\{C_s : s \in \pi(M)\}]$.

Если $x_i \in X \cap Ox$, то $x_i \in [\cup\{C_s : s \in \pi(M)\}]$ и, так как x_i есть ℓ-точка, найдётся $s_0 \in \pi(M)$ такое, что $x_i \in [C_{s_0}]$, и следовательно $[C_{s_0}]$ является окрестностью F_{f_i}.

Так как $x_i \in F_{f_i} \subseteq \cap\{[C_{f_i|_n}] : n \in \omega\}$ и $\{[C_{f_i|_n}] : n \in \omega\}$ является базой множества F_{f_i}, то $[C_{s_0}]$ является окрестностью F_{f_i}, и, в силу условия (ii), $[C_{s_0}] \cap A \neq \varnothing$ и $[C_{s_0}] \cap B \neq \varnothing$. Следовательно, $Ox \cap A \neq \varnothing$ и $Ox \cap B \neq \varnothing$. Отсюда следует, что $x \in [A]$ и $x \in [B]$, то есть $x \in [A] \cap [B] \neq \varnothing$, что противоречит тому, что $[A] \cap [B] = \varnothing$. Таким образом, $x \in [X] \setminus X$ не u-точка. Теорема доказана. $\square$

1.4 $\boldsymbol{\ell_{\pi|M}}$-точки

Рассмотрим множество $C_{\pi|M}$, которое будем считать приведённым (то есть $\pi(M)$ — строгая антицепь), M счётно и положим:

$$\mathcal{M}'_{\pi|M} = \left\{ C_{\pi|M_i} \colon M_i = M \cap [i;\infty), i \in \omega \right\} \text{ и } \mathcal{M}_{\pi|M} = \mathcal{M}_L \cup \mathcal{M}'_{\pi|M}.$$

Определение 1.3 Центрированную систему ξ в семействе $\mathcal{M}_{\pi|M}$ будем называть *$\pi|M$-центрированной для* $C_{\pi|M}$, если $\mathcal{M}'_{\pi|M} \subseteq \xi$.

Всякую $\pi|M$-центрированную систему можно дополнить до максимальной $\pi|M$-центрированной системы.

Теорема 1.16 *Пусть множество $C_{\pi|M}$ приведённое и $|M| = \omega$. Если ξ максимальная $\pi|M$-центрированная система для $C_{\pi|M}$, то*

$$\left| \cap \left\{ G^* \colon G \in \xi \right\} \right| = 1.$$

Доказательство. Доказательство этой теоремы близко к доказательству теоремы для ℓ-точек.

Из центрированности системы ξ и бикомпактности BN следует, что $\cap\{G^* \colon G \in \xi\}$ не пусто. Предположим, что найдутся две различные точки $x, y \in \cap\{G^* \colon G \in \xi\}$. Рассмотрим окрестность $Ox = [C_{\pi_0|M_0} \setminus \bigcup_{i \leqslant n} C_{\pi_i}]$ точки x такую, что $y \notin Ox$. Отметим, что из построения пространства BN следует, что

$$\left[C_{\pi_0|M_0} \setminus \bigcup_{i \leqslant n} C_{\pi_i} \right] =$$
$$= \left[C_{\pi_0|M_0} \right] \cap \left(\bigcap_{i \leqslant n} \left[N \setminus C_{\pi_i} \right] \right) =$$
$$= \left[C_{\pi_0|M_0} \right] \cap \left[N \setminus \bigcup_{i \leqslant n} C_{\pi_i} \right].$$

Множества $[C_{\pi_0|M_0}]$ и $[N \setminus \bigcup_{i \leqslant n} C_{\pi_i}]$ являются открыто-замкнутыми и содержат точку x.

Из открыто-замкнутости множества $[N \setminus \bigcup_{i \leqslant n} C_{\pi_i}]$ следует, что множество $N \setminus \bigcup_{i \leqslant n} C_{\pi_i}$ центрировано с ξ, а из максимальности системы ξ следует, что $N \setminus \bigcup_{i \leqslant n} C_{\pi_i} \in \xi$.

Тогда по предположению $y \notin [C_{\pi_0|M_0}]$. По предложению 9 представим множество $C_{\pi_0|M_0}$ в виде пересечения $C_{\pi'} \cap C_{\pi''}$. Тогда $y \notin [C_{\pi'}]$ или $y \notin [C_{\pi''}]$. Пусть $y \notin [C_{\pi'}]$, тогда $y \in [N \setminus C_{\pi'}]$. Множество $[N \setminus C_{\pi'}]$ является открыто-замкнутой окрестностью точки y, поэтому оно центрировано с ξ. Из максимальности системы ξ и того, что $N \setminus C_{\pi'}$ — элемент системы $\mathcal{M}_{\pi|M}$, следует, что $N \setminus C_{\pi'} \in \xi$. Таким образом, $x \in [N \setminus C_{\pi'}]$, что противоречит $x \in [C_{\pi'}]$. Отсюда следует, что наше предположение $|\cap \{G^* : G \in \xi\}| > 1$ неверно. Теорема доказана. $\square$

Определение 1.4 Пусть η — максимальная $\pi|M$-центрированная система для некоторого множества $C_{\pi|M}$. Точку

$$x = \cap \{ G^* : G \in \eta \}$$

будем называть $\ell_{\pi|M}$*-точкой для* $C_{\pi|M}$, а систему η — *порождающей точку* x.

Лемма 1.2 *Пусть ξ — ультрафильтр на $\pi(M)$. Тогда найдётся база B_ξ этого ультрафильтра такая, что для любого $A \in B_\xi$ найдётся $\pi_A \in T$ такое, что множество*

$$G_A = \cup \{ C_t : t \in A \}$$

представимо в виде

$$G_A = C_{\pi|M} \setminus C_{\pi_A}.$$

Доказательство. Через (0) и (1) обозначим функции, определённые на одноточечном множестве $\{0\}$ и переводящие его в 0 и 1 соответственно.

Пусть $U \in \xi$. Докажем, что найдётся $A \in \xi$ такое, что $A \subseteq U$ и G_A представимо в виде $C_{\pi|M} \setminus C_{\pi_A}$. Через M_U обозначим множество тех n из M, для которых $\pi(n) \in U$. Либо $C_{(0)} \cap \pi(M)$, либо $C_{(1)} \cap \pi(M)$ не принадлежит ξ. Пусть $C_{(0)} \cap \pi(M) \notin \xi$.

Определим $A = U \setminus C_{(0)}$, а $\pi_A \in T$ построим следующим образом:

1. $\pi_A(0) = (0)$;

2. для $n \in M_U \cup (\omega \setminus M)$ пусть $\pi_A(n)$ — некоторое продолжение функции (0);

3. для $n \in M \setminus M_U$ положим $\pi_A(n) = \pi(n)$.

Тогда

$$G_A = C_{\pi|M} \setminus C_{\pi_A}.$$

Из построения π_A следует, что $A \in \xi$ и $A \subseteq U$. Семейство $B_\xi = \{A\}$ и есть искомая база. $\square$

Следующая теорема показывает, что $\ell_{\pi|M}$-точки есть не что иное, как предельные точки строгих антицепей $\pi(M)$.

Теорема 1.17 *Пусть множество $C_{\pi|M}$ приведённое и $|M| = \omega$. Тогда*

$$[\pi(M)] \setminus \pi(M) = \left\{\, x\colon x - \ell_{\pi|M}\text{-}\textit{точка для } C_{\pi|M} \,\right\}.$$

Доказательство. Пусть $x \in BN \setminus N$ — $\ell_{\pi|M}$-точка для некоторого $C_{\pi|M}$. Тогда для любой окрестности Ox точки x имеем

$$\big|Ox \cap \pi(M)\big| = \omega.$$

Действительно, предположим, что существует окрестность

$$Ox = \Big[\Big(N \setminus \bigcup_{j \leqslant n} C_{\pi_j}\Big) \cap C_{\pi|M_i}\Big],$$

содержащая лишь конечное число точек множеств $\pi(M)$. Из вида окрестности следует, что в этом случае Ox пересекает лишь конечное число множеств $C_{\pi(n)}$, где $n \in M$, и, следовательно, $x \in [C_{\pi(m)}]$ для некоторого $m \in M$. Но это противоречит тому, что $x \in \cap\{[C_{\pi|M_i}] \colon i \in \omega\}$.

Докажем теперь, что любая точка из $[\pi(M)] \setminus \pi(M)$ является $\ell_{\pi|M}$-точкой для $C_{\pi|M}$. По теореме 1.4 $[\pi(M)]\setminus\pi(M)$ гомеоморфно $\beta\omega \setminus \omega$. Рассмотрим точку $x \in [\pi(M)] \setminus \pi(M)$. Она представима в виде ультрафильтра на $\pi(M)$. По лемме 1.2 найдётся база этого ультрафильтра B_x такая, что для любого $A \in B_x$ множество G_A имеет вид

$$G_A = \left\{ C_t \colon t \in A \right\} = C_{\pi|M} \setminus C_{\pi_A}.$$

Рассмотрим центрированную систему множеств

$$\left\{ N \setminus C_{\pi_A} : A \in B_x \right\}.$$

Очевидно, что система $\{N \setminus C_{\pi_A} : A \in B_x\} \cup \mathcal{M}'_{\pi|M}$ центрированная и, следовательно, является $\pi|M$-центрированной. Дополним ее до максимальной $\pi|M$-центрированной системы η.

Покажем, что $\cap\{G^* \colon G \in \eta\} = x$. Предположим противное. Пусть $\cap\{G^* \colon G \in \eta\} = y$ и $x \neq y$. Но по первой части доказательства $y \in [\pi(M)]$ и так же, как и точку x, y можно рассматривать как ультрафильтр на $\pi(M)$. Так как $x \neq y$, то существует $F \in y$ такое, что $\pi(M) \setminus F \in x$. Тогда найдётся $A \in B_x$ такое, что $A \subseteq \pi(M) \setminus F$. Множество $N \setminus C_{\pi_A}$, с одной стороны, содержится в η и, следовательно, $y \in [N \setminus C_{\pi_A}]$, а с другой стороны, оно не пересекает G_F, замыкание которого является окрестностью точки y. Противоречие. $\square$

Рассмотрим ряд других важных свойств $\ell_{\pi|M}$-точек.

Определение 1.5 Для $\pi, \pi' \in T$ и $M, M' \subseteq \omega$ будем говорить, что $C_{\pi'|M'}$ *строго вписано в* $C_{\pi|M}$, если для каждого $n' \in M'$ найдётся $n \in M$ такое, что $\pi(n) < \pi'(n')$. Будем обозначать это как $C_{\pi'|M'} \sqsubset C_{\pi|M}$

Теорема 1.18 *Пусть множество $C_{\pi|M}$ приведённое, и M счётно. Тогда*

$$\cap\big\{\, [C_{\pi|M} \setminus C_{\pi'|M'}]\colon C_{\pi'|M'} \sqsubset C_{\pi|M} \,\big\} = [\pi(M)].$$

Доказательство. Из того, что $[C_{\pi|M} \setminus C_{\pi'|M'}] \supseteq [\pi(M)]$ для всех $C_{\pi'|M'}$, строго вписанных в $C_{\pi|M}$, следует, что

$$\cap\big\{\, [C_{\pi|M} \setminus C_{\pi'|M'}]\colon C_{\pi'|M'} \sqsubset C_{\pi|M} \,\big\} \supseteq [\pi(M)].$$

Докажем теперь, что любая точка x из множества

$$D = \cap\big\{\, [C_{\pi|M} \setminus C_{\pi'|M'}]\colon C_{\pi'|M'} \sqsubset C_{\pi|M} \,\big\}$$

также лежит в $[\pi(M)]$. Предположим противное.

Пусть $x \in D \setminus [\pi(M)]$. Пусть $Ox = [C_{\widetilde{\pi}|\widetilde{M}} \setminus \bigcup_{i\leqslant n} C_{\pi_i}]$ — окрестность точки x такая, что $Ox \cap \pi(M) = \varnothing$. Рассмотрим множество

$$\big(C_{\pi|M} \cap C_{\widetilde{\pi}|\widetilde{M}}\big) \setminus \bigcup_{i\leqslant n} C_{\pi_i}.$$

Элемент $s \in N$ лежит в этом множестве тогда и только тогда, когда существуют $n \in M$ и $\widetilde{n} \in \widetilde{M}$ такие, что $\pi(n) \leqslant s$ и $\widetilde{\pi}(\widetilde{n}) \leqslant s$. Это означает, что $\pi(n)$ и $\widetilde{\pi}(\widetilde{n})$ сравнимы (то есть либо $\widetilde{\pi}(\widetilde{n}) \leqslant \pi(n)$, либо $\pi(n) < \widetilde{\pi}(\widetilde{n})$), а s, $\pi(n)$ и $\widetilde{\pi}(\widetilde{n})$ не принадлежат $\bigcup_{i\leqslant n} C_{\pi_i}$. Но так как $Ox \cap \pi(M) = \varnothing$, то пар n, $\widetilde{n}$ таких, что $\widetilde{\pi}(\widetilde{n}) \leqslant \pi(n)$ и $\pi(n), \widetilde{\pi}(\widetilde{n}) \notin \bigcup_{i\leqslant n} C_{\pi_i}$ нет. Положим

$$M' = \big\{\, n'\colon n' \in \widetilde{M} \text{ и найдётся } n \in M \text{ такое, что } \pi(n) < \widetilde{\pi}(n') \,\big\}.$$

Из вышесказанного вытекает равенство

$$\big(C_{\pi|M} \cap C_{\widetilde{\pi}|\widetilde{M}}\big) \setminus \bigcup_{i\leqslant n} C_{\pi_i} = \big(C_{\pi|M} \cap C_{\widetilde{\pi}|M'}\big) \setminus \bigcup_{i\leqslant n} C_{\pi_i}$$

и это множество является окрестностью точки x. В свою очередь,

$$\left(C_{\pi|M} \cap C_{\widetilde{\pi}|M'}\right) \setminus \bigcup_{i\leqslant n} C_{\pi_i} = C_{\widetilde{\pi}|M'} \setminus \bigcup_{i\leqslant n} C_{\pi_i} \subseteq C_{\widetilde{\pi}|M'}.$$

С одной стороны, $x \in [C_{\widetilde{\pi}|M'}]$, с другой стороны, $C_{\widetilde{\pi}|M'}$ строго вписано в $C_{\pi|M}$ и, следовательно, $x \in [C_{\pi|M} \setminus C_{\widetilde{\pi}|M'}]$. Противоречие. □

Из теорем 1.17 и 1.18 вытекает

Следствие 1.4 *Если множество $C_{\pi|M}$ приведённое и M счётно, то*

$$[\pi(M)] \setminus \pi(M) = \left\{\, x\colon x - \ell_{\pi|M}\text{-}\textit{точка для } C_{\pi|M} \,\right\} =$$
$$= \cap\left\{\, [C_{\pi|M} \setminus C_{\pi'|M'}]\colon C_{\pi'|M'} \sqsubset C_{\pi|M} \,\right\} \cap (BN \setminus N).$$

Множество всех $\ell_{\pi|M}$-точек для всех строгих антицепей $\pi(M)$ обозначим через $\mathbf{D}$. Теперь, когда мы выделили уже три класса точек нароста, вновь возникает вопросы: есть ли в наросте точки, отличные от u-, ℓ- и, теперь, $\ell_{\pi|M}$-точек? И может ли $\ell_{\pi|M}$-точка быть u- или ℓ-точкой? Ответы дают следующие теоремы.

Теорема 1.19 *Если $A = \{x_i\colon i \in \omega\,\} \subseteq BN \setminus N$ состоит из ℓ-точек, то $[A]$ не содержит $\ell_{\pi|M}$-точек для всякой бесконечной строгой антицепи $\pi(M)$.*

Доказательство. Предположим противное, пусть $x \in [A]$ — $\ell_{\pi|M}$-точка для бесконечной строгой антицепи $\pi(M)$. Занумеруем все точки A, лежащие в $[C_{\pi|M}]$, получим $\{x_{i_j} : j \in \omega\}$. Рассмотрим x_{i_0}. Так как x_{i_0} ℓ-точка, лежащая в $[C_{\pi|M}]$, то по теореме 1.12 найдётся $n_0 \in M$, такое что $x_{i_0} \in [C_{\pi(n_0)}]$. Пусть s_0 есть элемент сходящейся к x_{i_0} цепи и $\operatorname{dom} s_0 > n_0$. Для x_{i_j} аналогично найдётся $n_j \in M$, такое что $x_{i_j} \in [C_{\pi(n_j)}]$. Пусть s_j — элемент сходящейся к x_{i_j} цепи и $\operatorname{dom} s_j > \max\{\operatorname{dom} s_{j-1}, n_j\}$. Обозначим $\{s_j\colon j \in \omega\} = \pi'(M')$, при этом из построения очевидно, что $C_{\pi'|M'}$ вписано в $C_{\pi|M}$. Таким образом, $x \in [C_{\pi|M} \setminus C_{\pi'|M'}]$ и $[C_{\pi|M} \setminus C_{\pi'|M'}] \cap A = \varnothing$, следовательно $x \notin [A]$. $\square$

Из доказанной теоремы и теоремы 1.15 вытекает следующее.

Следствие 1.5 *В $BN \setminus N$ есть точки не являющиеся ни u-, ни ℓ-, ни $\ell_{\pi|M}$-точками.*

Теорема 1.20 *Для строгой антицепи $D = \pi_0(M_0)$, множество $[D] \setminus D$ не содержит ни u-, ни ℓ-точек.*

Доказательство. Предположим противное.

Пусть найдётся $x \in [D] \setminus D$, являющаяся u-точкой. Рассмотрим множество $C_{\pi'|M'}$, строго вписанное в $C_{\pi_0|M_0}$, тогда по теореме 1.18 $x \in [C_{\pi_0|M_0} \setminus C_{\pi'|M'}]$. Но по определению u-точки, существует база точки x, состоящая из множеств вида $[C_{\pi|M}]$ и, соответственно, найдётся $C_{\pi''|M''}$ такое, что

$$x \in [C_{\pi''|M''}] \subseteq [C_{\pi_0|M_0} \setminus C_{\pi'|M'}].$$

Таким образом, $C_{\pi''|M''}$ строго вписано в $C_{\pi_0|M_0}$, а значит

$$x \in [C_{\pi_0|M_0} \setminus C_{\pi''|M''}].$$

Противоречие.

Предположим, что $x \in [D] \setminus D$ ℓ-точка. Найдётся $n \in M_0$, такое что $x \in [C_{\pi_0(n)}]$. Рассмотрим s, продолжение $\pi_0(n)$, лежащее в сходящейся к x цепи. Тогда, с одной стороны, $x \notin [C_{\pi|M} \setminus C_s]$, с другой стороны C_s строго вписано в $C_{\pi|M}$, а значит $[D] \setminus D \subseteq [C_{\pi|M} \setminus C_s]$. Противоречие. $\square$

Обозначим множество всех $\ell_{\pi|M}$-точек для всевозможных бесконечных строгих антицепей через $\mathbf{D}$. Таким образом, можно сформулировать следующую теорему.

Теорема 1.21 *В наросте $BN \setminus N$ пространства Белла есть точки не лежащие в множестве $\mathbf{L} \cup \mathbf{U} \cup \mathbf{D}$. Множества $\mathbf{L}$, $\mathbf{U}$ и $\mathbf{D}$ не пересекаются.*

Также упомянем следующий факт.

Предложение 1.1 *Если $x \in BN \setminus N$ ℓ-точка и $y \in BN \setminus N$ не ℓ-точка, то не существует гомеоморфизма $f\colon BN \to BN$, естественного на N, при котором $f(x) = y$.*

Это следует из того, что при гомеоморфизме сходящаяся последовательность переходит в сходящуюся последовательность. Таким образом, если такой гомеоморфизм найдётся, то y есть предел сходящейся последовательности, а по теореме, доказанной А. Грызловым в [6], предел некоторой цепи из N, то есть ℓ-точка.

Для u-точек можно усилить теорему 1.20.

Определение 1.6 Для $A, B \subseteq N$ будем говорить, что множество A *мажорируется* множеством B, если для всех $s \in A$ найдётся $t \in B$ такое, что $t \geqslant s$.

Теорема 1.22 *В замыкании любого подмножества N, мажорируемого строгой антицепью, нет u-точек.*

Доказательство. Предположим противное.

Пусть множество $A \subseteq N$ мажорируется строгой антицепью $\pi'(M')$ и $x \in [A] \setminus A$ u-точка. Тогда существует база точки x, состоящая из множеств вида $[C_{\pi|M}]$. Таким образом, для любой окрестности Ox точки x найдётся $\pi \in T$ и $M \subseteq \omega$ такие, что $x \in [C_{\pi|M}] \subseteq Ox$. Так как $x \in [A] \setminus A$, то $|C_{\pi|M} \cap A| = \omega$. Из вида множества $C_{\pi|M}$ следует, что если $s \in C_{\pi|M}$, то для всех $t \geqslant s$ выполняется $t \in C_{\pi|M}$, тогда $|C_{\pi|M} \cap \pi'(M')| = \omega$, то есть $x \in [\pi'(M')]$, что противоречит теореме 1.20. $\square$

Следствие 1.6 *Замыкание объединения конечного числа антицепей из N не содержит u-точек.*

Доказательство. Предположим противное.

Пусть $D = \cup\{D_i\colon i \leqslant k\}$, где D_i антицепь для всех $i \leqslant k$. И пусть $x \in [D]$ u-точка. Тогда найдётся $i \leqslant k$ такое, что $x \in [D_i]$.

Докажем, что любая антицепь мажорируется строгой антицепью. Пусть $D' = \{t_i\colon i \in \omega\}$ антицепь. Пусть $t'_0 = t_0$, а t'_i

продолжение t_i такое, что $\operatorname{dom} t'_i > \max(\operatorname{dom} t_i, \operatorname{dom} t'_{i-1})$. Множество $\widetilde{D} = \{t'_i \colon i \in \omega\}$ является строгой антицепью, мажорирующей антицепь D', и по теореме $[D_i]$ не содержит u-точек. Противоречие. $\square$

Замечание 1.1 По теореме, доказанной А. Грызловым в [6], любое подмножество N, замыкание которого в BN гомеоморфно $\beta\omega$, в силу вышеуказанного следствия не содержит u-точек.

Из определения $\ell_{\pi|M}$-точки следует, что множество

$$\{\, x \colon x\ \ell_{\pi|M}\text{-точка для } C_{\pi|M} \,\}$$

есть подмножество множества $C^*_{\pi|M} = [C_{\pi|M}] \setminus C_{\pi|M}$. По теореме 1.17 имеем

$$\{\, x \colon x\ \ell_{\pi|M}\text{-точка для } C_{\pi|M} \,\} = [\pi(M)] \setminus \pi(M).$$

Множество $\pi(M) \cap C_{\pi(n)}$ состоит из одной точки $\pi(n)$ для всякого $n \in M$. Поэтому, если рассматривать эти множества и операцию замыкания в пространстве βN, имеем

$$[\pi(M)] \cap C^*_{\pi(n)} = \varnothing \text{ для всякого } n \in M,$$

следовательно и $[\pi(M)] \cap [\cup\{C^*_{\pi(n)} \colon n \in M\}] = \varnothing$.

В пространстве BN ситуация совершенно другая, имеем

$$[\pi(M)] \setminus \pi(M) \subseteq \big[\cup\big\{\, C^*_{\pi(n)} \colon n \in M \,\big\}\big],$$

что вытекает из следующих утверждений.

Лемма 1.3 *Пусть x $\ell_{\pi|M}$-точка для некоторого $C_{\pi|M}$ и $C_{\pi'|M'}$ строго вписано в $C_{\pi|M}$. Тогда для всякой окрестности Ox точки x множество $\{n \in M \colon |Ox \cap (C_{\pi(n)} \setminus C_{\pi'|M'})| = \omega\}$ бесконечно.*

Доказательство. Пусть

$$Ox = \Big[C_{\widetilde{\pi}|\widetilde{M}} \setminus \bigcup_{i\leqslant k} C_{\pi_i}\Big].$$

По теореме 1.17 $x \in [\pi(M)]\setminus\pi(M)$ и, следовательно, $Ox\cap\pi(M)$ бесконечно. Обозначим это бесконечное множество через

$$R = \big\{\, n \in M \colon \pi(n) \in Ox \,\big\}.$$

Докажем теперь, что для всякого $n \in R$ такого, что $n > k+1$, где k взято из определения $Ox = [C_{\widetilde{\pi}|\widetilde{M}} \setminus \bigcup_{i\leqslant k} C_{\pi_i}]$, выполняется

$$Ox \cap (C_{\pi(n)} \setminus C_{\pi'|M'}) \quad \text{бескнечно.}$$

Для этого построим по индукции бесконечную цепь $\{s_i \colon i \in \omega\}$, лежащую в пересечении

$$Ox \cap (C_{\pi(n)} \setminus C_{\pi'|M'}),$$

где $n \in R$ и $n > k+1$.

Из того, что $n \in R$, следует, что $\pi(n) \in Ox \cap (C_{\pi(n)} \setminus C_{\pi'|M'})$. Пусть $s_0 = \pi(n)$ база индукции. Предположим, что мы построили s_j. Построим теперь s_{j+1}. Так как $n > k+1$, то s_j имеет не менее $k+2$ продолжений, что означает, что найдётся продолжение s_{j+1}, не лежащее ни в C_{π_i} $(i \leqslant k)$, ни в $C_{\pi'|M'}$, а значит, лежащее в $Ox \cap (C_{\pi(n)} \setminus C_{\pi'|M'})$. Таким образом, мы показали, что $Ox \cap (C_{\pi(n)} \setminus C_{\pi'|M'})$ бесконечно.

Так как это выполнено для любого $n \in R$, $n > k+1$, а множество R в свою очередь бесконечно, то множество

$$\{n \colon |Ox \cap (C_{\pi(n)} \setminus C_{\pi'|M'})| = \omega\}$$

бесконечно. Лемма доказана. □

Следствие 1.7 *Если множество $C_{\pi|M}$ приведённое и M счётно, то*

$$\{\, x\colon x - \ell_{\pi|M}\text{-}\textit{точка для } C_{\pi|M} \,\} =$$
$$= \cap\{\, \big[\cup\{\, C^*_{\pi(n)} \setminus C^*_{\pi'|M'}\colon n \in M \,\}\big]\colon C_{\pi'|M'} \sqsubset C_{\pi|M} \,\}.$$

Доказательство. В силу леммы 1.3 имеем

$$\{\, x\colon x - \ell_{\pi|M}\text{-точка для } C_{\pi|M} \,\} \subseteq$$
$$\subseteq \cap\{\, \big[\cup\{\, C^*_{\pi(n)} \setminus C^*_{\pi'|M'}\colon n \in M \,\}\big]\colon C_{\pi'|M'} \sqsubset C_{\pi|M} \,\} \subseteq$$
$$\subseteq \cap\{\, [C_{\pi|M} \setminus C_{\pi'|M'}]\colon C_{\pi'|M'} \sqsubset C_{\pi|M} \,\}.$$

По следствию 1.4

$$\cap\,\{\, [C_{\pi|M} \setminus C_{\pi'|M'}]\colon C_{\pi'|M'} \sqsubset C_{\pi|M} \,\} =$$
$$= \{\, x\colon x - \ell_{\pi|M}\text{-точка для } C_{\pi|M} \,\}.$$

Следствие доказано. □

Из теоремы 1.17 и следствия 1.7 вытекает

Следствие 1.8

$$[\pi(M)] \setminus \pi(M) \subseteq \big[\cup\{\, C^*_{\pi(n)}\colon n \in M \,\}\big].$$

1.5 Замыкания счётных подмножеств нароста пространства Белла

Определение 1.7 Будем говорить, что $t \in N$ является *строгим* продолжением $s \in N$, если $s < t$.

Приведём несколько утверждений, необходимых в дальнейшем.

Лемма 1.4 *Если* $A = \{t_k\colon k \in \omega\}$ *и* $B = \{s_k\colon k \in \omega\}$ *строгие антицепи, и* s_k *есть строгое продолжение* t_k*, то* $[A] \cap [B] = \varnothing$*.*

Это напрямую вытекает из теоремы 1.18.

Лемма 1.5 *Для всякой* u*-точки* $x \in BN \setminus N$ *и её окрестности* $Ox = [C_{\pi|M}]$ *найдётся окрестность* $Ox' = [C_{\pi'|M'}]$ *этой точки такая, что* $C_{\pi'|M'}$ *строго вписано в* $C_{\pi|M}$*.*

Это следует из следствия 1.4 и того, что классы u- и $\ell_{\pi|M}$-точек не пересекаются.

Напомним известное свойство регулярного пространства.

Лемма 1.6 *Пусть* $A = \{x_i\colon i \in \omega\}$ *счётное дискретное множество в регулярном пространстве* X*. Тогда существует дизъюнктное семейство окрестностей* $\{Ox_i\colon i \in \omega\}$*.*

Доказательство. Семейство окрестностей будем строить следующим образом. Для x_0 найдётся окрестность Ox_0 и открытое множество $U_0 \supseteq [\{x_i\colon i > 0\}]$, такие что $Ox_0 \cap U_0 = \varnothing$, это вытекает из того, что A дискретное множество и X регулярное пространство.

Пусть мы построили окрестности для $i \leqslant r$ $(r \in \omega)$, и U_r — окрестность множества $[\{x_i\colon i > r\}]$, такая что $Ox_r \cap U_r = \varnothing$. В силу регулярности пространства X и того, что A дискретное множество, найдутся Ox'_{r+1} и $U'_{r+1} \supseteq [\{x_i\colon i > r+1\}]$ такие, что $Ox_{r+1} \cap U_{r+1} = \varnothing$. Так как U_r открытое множество, содержащее точку x_{r+1} и множество $[\{x_i\colon i > r+1\}]$, то обозначим:

$$Ox_{r+1} = Ox'_{r+1} \cap U_r \quad \text{и} \quad U_{r+1} = U'_{r+1} \cap U_r.$$

Таким образом мы можем построить дизъюнктную систему окрестностей $\{Ox_i\colon i \in \omega\}$. □

Так как BN нормальное пространство, то мы можем пользоваться этим свойством для счётных дискретных его подмножеств.

Теорема 1.23 *Пусть $A = \{x_i : x_i \in F_{f_i}, i \in \omega\} \subseteq BN \setminus N$ такое, что $f_i \neq f_j$ $(i \neq j)$, то найдётся $A' \subseteq A$ такое, что $[A']$ гомеоморфно $\beta\omega$.*

Доказательство. Пусть $x \in [A] \setminus A$ и $f \in P$ такое, что $x \in F_f$. Рассмотрим систему окрестностей $\{[C_{f|_n}] : n \in \omega\}$ точки x. Так как $x \in [A] \setminus A$, то для любого $n \in \omega$ следует, что $|[C_{f|_n} \cap A]| = \omega$. Но из строения множества A следует, что $|F_f \cap A| = 1$. Тогда найдётся бесконечное $I \subseteq \omega$, такое что $|[C_{f|_n} \setminus C_{f|_{n+1}}] \cap A| \neq \varnothing$ для $n \in I$. Для каждого $n \in I$ зафиксируем $y_n \in A$ из $[C_{f|_n} \setminus C_{f|_{n+1}}]$. Таким образом можно построить строгую антицепь $\pi(M)$, такую что $y_n \in [C_{\pi(n)}]$, из чего следует, что $[\{y_n : n \in \omega\}]$ гомеоморфно $\beta\omega$. □

Следствие 1.9 *Из любого множества ℓ-точек можно выделить подмножество, замыкание которого гомеоморфно $\beta\omega$.*

Это следует из того факта, что для любого $f \in P$ множество F_f содержит единственную ℓ-точку.

Пример 1.3 Множество в $BN \setminus N$, являющееся сходящейся последовательностью.

Рассмотрим семейство строгих антицепей $D_n = \{t_k^n : k \in \omega\}$ таких, что t_k^{n+1} есть строгое продолжение t_k^n для всяких $n \in \omega$ и $k \in \omega$.

Пусть ξ свободный ультрафильтр на ω, то есть $\xi \in \beta\omega \setminus \omega$. Для всяких $F \in \xi$ и $n \in \omega$ обозначим $F_n = \{t_k^n : k \in F\}$. Тогда $\xi_n = \{F_n : F \in \xi\}$ является свободным ультрафильтром на множестве D_n.

Обозначим $\overline{\xi}_n = \cap\{[F_n] : F_n \in \xi_n\}$. Имеем $\overline{\xi}_n \in [D_n] \setminus D_n$ и $[D_n]$ гомеоморфно $\beta\omega$ по теореме 1.4.

Заметим, что по лемме 1.4 следует, что $\overline{\xi}_n \neq \overline{\xi}_m$ для $n, m \in \omega$, $n \neq m$.

I Покажем, что последовательность $\{\overline{\xi}_n : n \in \omega\}$ является сходящейся. Пусть $y \in BN \setminus N$ предельная точка для множества $\{\overline{\xi}_n : n \in \omega\}$ и $Oy = [C_{\pi|M} \setminus \bigcup_{i \leqslant n} C_{\pi_i}]$ базисная окрестность точки y. Тогда множество $Oy \cap \{\overline{\xi}_n : n \in \omega\}$ бесконечно. Рассмотрим некоторое $\overline{\xi}_n \in Oy$. Так как ξ_n ультрафильтр на множестве D_n, найдётся $F_n \in \xi_n$, $F_n \subseteq D_n$, такое что $F_n \setminus Oy$ конечно, следовательно $F_n \setminus (C_{\pi|M} \setminus \bigcup_{i \leqslant n} C_{\pi_i})$ конечно. Отсюда множества $F_n \setminus C_{\pi|M}$ и $F_n \cap (\bigcup_{i \leqslant n} C_{\pi_i})$ конечны (на самом деле найдётся $F_n \in \xi_n$ такое, что $F_n \subseteq C_{\pi|M}$ и $F_n \cap (\bigcup_{i \leqslant n} C_{\pi_i}) = \varnothing$).

Покажем, что для любого $m > n$ выполняется $\overline{\xi}_m \in Oy$. По определению, ξ_m ультрафильтр на D_m. Предположим, что $\overline{\xi}_m \notin Oy$. Тогда найдётся $F'_m \in \xi_m$, $F'_m \subseteq F_m$ такое, что $F'_m \cap (C_{\pi|M} \setminus \bigcup_{i \leqslant n} C_{\pi_i})$ конечно, в противном случае множество $(C_{\pi|M} \setminus \bigcup_{i \leqslant n} C_{\pi_i})$ есть элемент ультрафильтра ξ_m и следовательно $\overline{\xi}_m \in Oy$.

Так как $F'_m \subseteq F_m$ и $F_m \setminus C_{\pi|M}$ конечно, то $F'_m \setminus C_{\pi|M}$ тоже конечно. Но тогда $F'_m \setminus \bigcup_{i \leqslant n} C_{\pi_i}$ конечно. Так как y предельная точка для $\{\overline{\xi}_n : n \in \omega\}$, найдётся $m' \in \omega$, $m' < m$ такое, что $\xi_{m'} \in Oy$. Рассмотрим множество $F'_{m'} = \{t_k^{m'} : t_k^m \in F'_m\}$. По определению, $t_k^{m'}$ есть строгое продолжение t_k^m, и поскольку $F'_m \subseteq \bigcup_{i \leqslant n} C_{\pi_i}$, за исключением, быть может, конечного числа точек, имеем $F'_{m'} \setminus \bigcup_{i \leqslant n} C_{\pi_i}$ конечно. Но тогда $F'_{m'} \cap (C_{\pi|M} \setminus \bigcup_{i \leqslant n} C_{\pi_i}) = F'_{m'} \cap Oy$ конечно, что противоречит тому, что $\overline{\xi}_{m'} \in Oy$.

Таким образом, мы показали, что $\{\overline{\xi}_n : n \in \omega\}$ сходится к точке y, обозначим $\overline{\xi} = y = \lim\limits_{n \to \infty} \overline{\xi}_n$. Заметим, что всякая $\overline{\xi}_n$ является $\ell_{\pi|M}$-точкой.

II Докажем ещё несколько интересных свойств построенного множества.

Обозначим $R = \{\overline{\xi} : \xi \in \beta\omega \setminus \omega\}$. Покажем, что точка $\overline{\xi}$ не является ℓ-точкой.

Действительно, $\overline{\xi} \in [\cup\{C_{t_k^0} : k \in \omega\}]$, где $\{t_k^0 : k \in \omega\} = D_0$ и $\overline{\xi} \notin [C_{t_k^0}]$ для всех $k \in \omega$. По теореме 1.12, $\overline{\xi}$ не является ℓ-точкой.

Рассмотрим произвольное $k \in \omega$ и множество $Q_k = \{t_k^n : n \in \omega\}$. Это множество является цепью, и, следовательно, $|[Q_k] \setminus Q_k| = 1$, то есть $Q_k = \{t_k^n \colon n \in \omega\}$ является сходящейся последовательностью в BN, пусть $q_k = \lim\limits_{n\to\infty} t_k^n$.

Рассмотрим множество $\{q_k \colon k \in \omega\}$. Докажем, что $[\{q_k \colon k \in \omega\}]$ гомеоморфно $\beta\omega$. Рассмотрим семейство множеств $\{C_{t_k^k} \colon k \in \omega\}$. Имеем $q_k \in [C_{t_k^k}]$ для всякого $k \in \omega$, и множество $\cup\{C_{t_k^k} \colon k \in \omega\}$ есть элемент булевой алгебры B.

По теореме 1.4, имеем $[\{q_k \colon k \in \omega\}]$ гомеоморфно $\beta\omega$.

Покажем, что $[\{q_k \colon k \in \omega\}] \cap \{\overline{\xi} \colon \xi \in \beta\omega \setminus \omega\} = \varnothing$. По построению, $[\{q_k \colon k \in \omega\}] \subseteq [\cup\{C_{t_k^k} \colon k \in \omega\}]$. Покажем, что для всякого $\overline{\xi} = \lim\limits_{m\to\infty} \overline{\xi}_m$ $(\xi \in \beta\omega \setminus \omega)$ выполняется $\overline{\xi} \notin [\cup\{C_{t_k^k} \colon k \in \omega\}]$. Действительно, для всякого $m \in \omega$ имеем $\overline{\xi}_m \notin [\cup\{C_{t_k^k} \colon k \in \omega\}]$, так как $\cup\{C_{t_k^k} \colon k \in \omega\} \cap D_m = \{t_n^m \colon n \leqslant m\}$. Так как множество $[\cup\{C_{t_k^k} \colon k \in \omega\}]$ открыто-замкнуто в BN и $\overline{\xi} = \lim\limits_{n\to\infty} \overline{\xi}_n$, то $\overline{\xi} \notin [\cup\{C_{t_k^k} \colon k \in \omega\}]$.

Известным фактом является то, что в $\beta\omega$ нет точек со счётным характером. Для пространства Белла ситуация аналогична.

Теорема 1.24 *В $BN \setminus N$ нет точек со счётным характером.*

Доказательство. Предположим противное, пусть $x \in BN \setminus N$ и $\{U_i \colon i \in \omega\}$ база точки x. Тогда легко построить последовательность точек из N, сходящуюся к x, и по теореме, доказанной А. Грызловым в [6], x ℓ-точка. Тогда существует база $\{O_i \colon i \in \omega\}$ точки x состоящая из множеств вида $[N \setminus \bigcup\limits_{j\leqslant k} C_{\pi_j}]$.

Для каждого O_i найдётся $s_i \in N$, такое что $x \notin [C_{s_i}] \subseteq O_i$. Для полученного множества $\{\, s_i \,:\, i \in \omega \,\}$ пусть $s'_1 = s_1$, s'_i — продолжение s_i, такое что $\operatorname{dom} s'_i > \operatorname{dom} s'_{i-1}$. Рассмотрим π такое, что $x \notin [C_\pi]$, и построим π':

$$\pi' = \begin{cases} s'_i, & \text{если } n = \operatorname{dom} s'_i, \\ \pi(n), & \text{иначе.} \end{cases}$$

Очевидно, что $[N \setminus C_{\pi'}]$ окрестность точки x и $O_i \setminus [N \setminus C_{\pi'}] \neq \varnothing$ для всех $i \in \omega$, что противоречит тому, что $\{O_i \colon i \in \omega\}$ база точки x. □

2 Пространства Стоуна других булевых алгебр

В данной главе рассматриваются свойства пространств Стоуна нескольких булевых алгебр. Основное внимание уделяется рассмотрение замыканий различных счетных подмножеств подпространств фиксированных ультрафильтров исследуемых пространств Стоуна.

В параграфе 2.1 рассматривается пространство $S\mathfrak{B}_{1,2}$. Доказано, что оно вложимо в $S\mathfrak{B}_{1,1}$ в качестве нигде не плотного подмножества. Как и в пространстве $S\mathfrak{B}_{1,1}$, замыкания бесконечных антицепей из $\mathfrak{N}_2$ гомеморфны $\beta\omega$, а бесконечные цепи из $\mathfrak{N}_2$ являются сходящимися последовательностями. Однако предельные точки цепей здесь являются изолированными точками подпространства свободных ультрафильтров, а замыкания антицепей являются открыто-замкнутыми копиями $\beta\omega$.

Основным результатом данного параграфа является теорема 2.4, дающая критерий такого подмножества $\mathfrak{N}_2$, замыкание которого является открыто-замкнутой копией $\beta\omega$. Также приведены пример подмножества $\mathfrak{N}_2$, замыкание которого является не открыто-замкнутой копией $\beta\omega$, и пример подмножества $\mathfrak{N}_2$, замыкание которого открыто-замкнуто, не содержит изолированных точек и не гомеоморфно $\beta\omega$.

Параграф 2.2 посвящен пространству $S\mathfrak{B}_{1,3}$. Отличительной его чертой от предыдущих пространств является то, что фиксированный ультрафильтр в данном пространстве не является изолированной точкой, а множество свободных ультрафильтров является всюду плотным. Описаны точки данного пространства как ультрафильтры, обладающие базисами определенного вида. Основными результатами для данного пространства являются теорема 2.10, дающая оценку числа Суслина подпространства свободных ультрафильтров $S\mathfrak{B}^*_{1,3}$, и теорема 2.11 о плотности $S\mathfrak{B}^*_{1,3}$.

В параграфе 2.3 рассматриваются пространства $S\mathfrak{B}_{2,1}$, $S\mathfrak{B}_{2,2}$ и $S\mathfrak{B}_{2,3}$. Описаны точки пространства $S\mathfrak{B}_{2,3}$ как ультрафильтры, обладающие базисами определенного вида. Установлено соотношение данных пространств с канторовым совершенным множеством.

2.1 Пространство $S\mathfrak{B}_{1,2}$

Прежде всего, выясним соотношение пространства $S\mathfrak{B}_{1,1}$ и рассмотренного в предыдущей части $S\mathfrak{B}_{1,2}$.

Лемма 2.1 *Пусть $\mathfrak{B}_{1,1}$ — булева алгебра расширения Белла. Тогда семейство $\{G \cap \mathfrak{N}_2 \colon G \in \mathfrak{B}_{1,1}\}$ — это булева алгебра $\mathfrak{B}_{1,2}$.*

Доказательство. Нетрудно видеть, что семейство

$$\{G \cap \mathfrak{N}_2 \colon G \in \mathfrak{B}_{1,1}\}$$

есть булева алгебра на $\mathfrak{N}_2$. Покажем, что она совпадает с $\mathfrak{B}_{1,2}$. Для этого достаточно заметить, что для всякого $s \in \mathfrak{N}_2$ выполняется:

$$C_s \cap \mathfrak{N}_2 = \{t \in \mathfrak{N}_1 \colon t|_{\operatorname{dom} s} = s\} \cap \mathfrak{N}_2 = \{t \in \mathfrak{N}_2 \colon t|_{\operatorname{dom} s} = s\}.$$

Отметим, что для $s \in \mathfrak{N}_1 \setminus \mathfrak{N}_2$ справедливо $C_s \cap \mathfrak{N}_2 = \varnothing$. $\square$

Теорема 2.1 *Существует гомеоморфизм $\phi \colon [\mathfrak{N}_2]_{S\mathfrak{B}_{1,1}} \to S\mathfrak{B}_{1,2}$ такой, что $\phi|_{\mathfrak{N}_2}$ — тождественное отображение.*

Доказательство. Пусть $x \in [\mathfrak{N}_2]_{S\mathfrak{B}_{1,1}} \setminus \mathfrak{N}_2$.

Точка $x = \{G \in \mathfrak{B}_{1,1} \colon x \in [G]_{S\mathfrak{B}_{1,1}}\}$ это ультрафильтр в булевой алгебре $\mathfrak{B}_{1,1}$. Тогда $\xi_x = \{G \cap \mathfrak{N}_2 \colon G \in x\}$ является ультрафильтром в $\mathfrak{B}_{1,2}$, то есть точкой расширения $S\mathfrak{B}_{1,2}$.

Определим отображение ϕ по правилу:

$\phi(x) = \xi_x$, для $x \in [\mathfrak{N}_2]_{S\mathfrak{B}_{1,1}} \setminus \mathfrak{N}_2$;

на множестве $\mathfrak{N}_2$ отображение ϕ тождественно.

Отображение ϕ является отображением «на».

Пусть ξ — ультрафильтр в $\mathfrak{B}_{1,2}$. Тогда $|\cap\{[G']_{S\mathfrak{B}_{1,1}} : G' \in \xi\}| = 1$. Действительно, если бы нашлись $x, y \in \cap\{[G']_{S\mathfrak{B}_{1,1}} : G' \in \xi\}$, $x \neq y$, то нашлись бы и $G_x \in x$, $G_y \in y$ (x и y можно рассматривать как ультрафильтры на $\mathfrak{B}_{1,1}$) такие, что $G_x \cap G_y = \varnothing$.

В силу того, что $[G_x]_{S\mathfrak{B}_{1,1}}$ и $[G_y]_{S\mathfrak{B}_{1,1}}$ — открыто замкнутые множества, получаем: $G'_x = G_x \cap \mathfrak{N}_2 \neq \varnothing$ и $G'_y = G_y \cap \mathfrak{N}_2 \neq \varnothing$, $G'_x, G'_y \in \mathfrak{B}_{1,2}$ и $G'_x, G'_y \in \xi$, что невозможно.

Положим $x = \cap\{[G']_{S\mathfrak{B}_{1,1}} : G' \in \xi\}$. По определению отображения ϕ имеем: $\phi(x) = \xi$.

Аналогично доказывается и взаимная однозначность отображения ϕ. Непрерывность ϕ очевидна. $\phi\colon [\mathfrak{N}_2]_{S\mathfrak{B}_{1,1}} \to S\mathfrak{B}_{1,2}$ искомый гомеоморфизм. $\square$

Таким образом, $S\mathfrak{B}_{1,2}$ вложимо в $S\mathfrak{B}_{1,1}$ как замкнутое множество. При этом $S\mathfrak{B}_{1,2}$ является нигде не плотным в $S\mathfrak{B}_{1,1}$, в силу вида базисных окрестностей.

Оказалось, что в наросте данного пространства есть изолированные точки, а в самом пространстве есть открыто-замкнутые копии $\beta\omega$.

Теорема 2.2 *Для пространства $S\mathfrak{B}_{1,2}$ справедливо следующее:*

1. *Пусть $A = \{s_i \in \mathfrak{N}_2 \colon i \in \omega\}$ — полная цепь. Тогда $A \in \mathfrak{B}_{1,2}$, $[A]$ является открыто-замкнутым множеством в $S\mathfrak{B}_{1,2}$ и $[A] \setminus A$ состоит из одной точки.*

2. *Пусть $A = \{s_n = f|_n \colon n \in M\}$ — цепь, где $f \in P_2$ и $M \subset \omega$ такое, что $|M| = |\omega \setminus M| = \omega$. Тогда $[A]$ не является открыто-замкнутым множеством в $S\mathfrak{B}_{1,2}$.*

3. *Пусть $A = \{\pi(n) \colon n \in M \subseteq \omega\}$ — строгая антицепь. Тогда $A \in \mathfrak{B}_{1,2}$ и $[A]$ является открыто-замкнутым множеством в $S\mathfrak{B}_{1,2}$ и гомеоморфно $\beta\omega$.*

Доказательство. **1** Покажем, что $A \in \mathfrak{B}_{1,2}$. Для этого построим $\pi_1, \pi_2 \in T_2$ такие, что $A = C_{\pi_1} \setminus C_{\pi_2}$.

Определим $\pi_1(i) = s_i$, для всякого $i \in \omega$. $\pi_2(0)(0) = (s_0(0)+1) \mod 2$ и $\pi_2(i)|_i = s_{i-1}$, $\pi_2(i)(i) = (s_i(i)+1) \mod 2$, при $i > 0$ (другими словами $\pi_2(i)$ — это продолжение s_{i-1} на i отличное от s_i). Из построения, очевидно, что $A = C_{\pi_1} \setminus C_{\pi_2}$.

В теореме 1.6 доказано, что бесконечная цепь из $\mathfrak{N}_1$ есть сходящаяся последовательность. Поскольку $S\mathfrak{B}_{1,2}$ вложимо в $S\mathfrak{B}_{1,1}$ как замкнутое множество, и в силу Теоремы 2.1, получаем, что $[A] \setminus A$ состоит из одной точки. Поскольку $A \in \mathfrak{B}_{1,2}$, то $[A]$ является открыто-замкнутым множеством в $S\mathfrak{B}_{1,2}$.

2 Предположим противное, пусть $[A]$ — открыто-замкнутое множество в $S\mathfrak{B}_{1,2}$. Множества A и $A' = \{s_n = f|_n \colon n \in \omega \setminus M\}$ являются подпоследовательностями последовательности $\{s_n \colon n \in \omega\}$. Отсюда $[A] = A \cup \{x\}$ и $[A'] = A' \cup \{x\}$, где x — предел последовательности $\{s_n \colon n \in \omega\}$. При этом $A' \subseteq S\mathfrak{B}_{1,2} \setminus [A]$.

В силу нашего предположения множество $S\mathfrak{B}_{1,2} \setminus [A]$ замкнуто и следовательно $\{x\} \cup A' = [A'] \subseteq S\mathfrak{B}_{1,2} \setminus [A]$. Это противоречит тому, что $x \in [A]$.

3 По предложению 9 имеем $C_{\pi|M} \in \mathfrak{B}_{1,2}$.

Положим $M' = \{n+1 \colon n \in M\}$. Построим $\pi_0, \pi_1 \in T_2$ такие, что $A = C_{\pi|M} \setminus (C_{\pi_0|M'} \cup C_{\pi_1|M'})$.

Для $n \in M$ положим $\pi_0(n+1)|_{n+1} = \pi_1(n+1)|_{n+1} = \pi(n)$ и $\pi_0(n+1)(n+1) = 0$, $\pi_1(n+1)(n+1) = 1$. Другими словами, $\pi_0(n+1)$ и $\pi_1(n+1)$ это два различных продолжения $\pi(n)$ на следующий шаг. В точках $n \notin M'$ $\pi_0(n)$ и $\pi_1(n)$ выбираем произвольно.

Требуемое равенство выполнено в силу построения, так как $C_{\pi_0|M'} \cup C_{\pi_1|M'}$ вырезает из $C_{\pi|M}$ все продолжения элементов антицепи, оставляя только их. В теореме 1.4 доказано, что замыкание бесконечной строгой антицепи из $\mathfrak{N}_1$ гомеоморфно $\beta\omega$. Отсюда и из Теоремы 2.1 следует, что $[A]$ гомеоморфно $\beta\omega$. Поскольку $A \in \mathfrak{B}_{1,2}$, то $[A]$ является открыто-замкнутым множеством в $S\mathfrak{B}_{1,2}$. □

Заметим, что согласно пункту 1 доказанной теоремы, предел цепи из $\mathfrak{N}_2$ есть изолированная точка нароста $S\mathfrak{B}^*_{1,2}$.

Для неизолированных точек нароста доказан следующий результат.

Теорема 2.3 *В любой окрестности Ox произвольной неизолированной точки из нароста $x \in S\mathfrak{B}^*_{1,2}$ содержится открыто-замкнутая копия $\beta\omega$.*

Доказательство. Рассмотрим произвольную базисную окрестность неизолированной точки нароста $Ox = [C_{\pi|M} \setminus \bigcup_{\pi \in T'} C_\pi]$, $T' \subset T_2$, $|T'| < \omega$. Докажем, что найдется бесконечная строгая антицепь $\{s_i \colon i \in \omega\} \subseteq C_{\pi|M} \setminus \bigcup_{\pi \in T'} C_\pi = G$. Поскольку x точка нароста, то $|G| = \omega$.

Введем обозначение, $s + 1$ — это множество продолжений s на $\operatorname{dom} s + 1$, то есть $s+1 = \{t \in \mathfrak{N}_2 \colon t|_{\operatorname{dom} s} = s, \operatorname{dom} t = \operatorname{dom} s + 1\}$.

Рассмотрим разбиение множества

$$G = I_{Ox} \cup V_{Ox} \cup U_{Ox},$$

где

$$I_{Ox} = \{s \in G \colon |s + 1 \cap G| = 0\}, \quad V_{Ox} = \{s \in G \colon |s + 1 \cap G| = 2\},$$
$$U_{Ox} = \{s \in G \colon |s + 1 \cap G| = 1\}.$$

Докажем, что если $|I_{Ox}| = \omega$, то теорема верна. Заметим, что $\mathfrak{N}_2^n = \{t \in \mathfrak{N}_2 \colon \operatorname{dom} t = n\}$ конечно для всех $n \in \omega$. Тогда найдется бесконечное $M \subseteq \omega$ такое, что $I_{Ox} \cap \mathfrak{N}_2^n \neq \varnothing$ для всех $n \in M$, $M = \{n_1, n_2, \ldots, n_i, \ldots\}$. В качестве s_i выбираем произвольный элемент из $I_{Ox} \cap \mathfrak{N}_2^{n_i}$. В итоге получаем бесконечную строгую антицепь $\{s_i \colon i \in \omega\} \subseteq I_{Ox} \subseteq G$. Далее будем считать, что I_{Ox} конечно.

Теперь рассмотрим V_{Ox}. Если оно конечно, то $|U_{Ox}| = \omega$ и найдется n_0 такой, что $\operatorname{dom} s < n_0$ для всех $s \in I_{Ox} \cup V_{Ox}$. Тогда для всех $m > n_0$ выполнено $\mathfrak{N}_2^m \cap G = \mathfrak{N}_2^m \cap U_{Ox}$. Рассмотрим произвольное $s \in \mathfrak{N}_2^m \cap G$, при $m > n_0$. Поскольку $s \in U_{Ox}$, то $s+1=\{s',s''\}$, где $s'\in U_{Ox}$ и $s''\in\bigcup\limits_{\pi\in T'}C_\pi$. Так как $s\in G$ и $s''\notin G$, то найдется $\pi\in T'$ такое, что $s''=\pi_i(m+1)$.

Заметим, что для различных $s_1,s_2\in\mathfrak{N}_2^m\cap G$ при $m>n_0$ найдутся различные $\pi',\pi''\in T'$ такие, что $s_1<\pi'(m+1)$ и $s_2<\pi''(m+1)$, то есть $|\mathfrak{N}_2^m\cap G|\leqslant|T'|$ для всех $m>n_0$. При этом для любого $s\in\mathfrak{N}_2^m\cap G$ при $m>n_0$ найдется $s'\in\mathfrak{N}_2^{m+1}\cap G$, которое является его продолжением.

Таким образом, $G\setminus\{s\in G\colon \operatorname{dom}s\leqslant n_0\}$ представляет собой не более $|T'|$ бесконечных цепей. Согласно пункту 1 теоремы 2.2 нарост G состоит из конечного числа изолированных точек. Это противоречит тому, что x не изолированная точка.

Осталось рассмотреть случай, когда $|V_{Ox}|=\omega$. Возможны два варианта:

1. $|C_s\cap V_{Ox}|<\omega$ для всех $s\in V'\subseteq V_{Ox}$, где $|V'|=\omega$. В качестве s_1 берем произвольный $s\in V'$, при этом $|V'\setminus C_{s_1}|=\omega$. В качестве s_2 берем $s\in V'\setminus C_{s_1}$ такое, что $\operatorname{dom}s_2>\operatorname{dom}s_1$. На k-ом шаге получаем $\{s_i\colon i\leqslant k\}$ — строгая антицепь и $|V'\setminus\bigcup\limits_{i\leqslant k}C_{s_i}|=\omega$. После счетного числа шагов получим бесконечную строгую антицепь $\{s_i\colon i\in\omega\}\subseteq V'\subseteq V_{Ox}\subseteq G$.

2. Найдется $s_0\in V_{Ox}$ такое, что $|C_{s_0}\cap V_{Ox}|=\omega$. Построим бесконечную цепь $\{t_i\colon i\in\omega\}\subseteq V_{Ox}$. В качестве t_1 возьмем s_0. Если для всех $s\in C_{t_1}\cap V_{Ox}$ выполнено $|C_s\cap V_{Ox}|<\omega$ то переходим к пункту 1, где $V'=C_{t_1}\cap V_{Ox}$. В противном случае найдется $t_2\in C_{t_1}\cap V_{Ox}$ такое, что $|C_{t_2}\cap V_{Ox}|=\omega$. Для t_2 повторяем рассуждения, что и для t_1. И так далее. В итоге либо будет построена бесконечная строгая цепь $\{t_i\colon i\in\omega\}\subseteq V_{Ox}$, либо на конечном шаге мы обратимся к пункту 1 и построим искомую антицепь.

В качестве s_i будем брать то продолжение t_i на $\operatorname{dom}t_i+1$, которое не равно $t_{i+1}|_{\operatorname{dom}t_i}$. В итоге получим бесконечную строгую антицепь $\{s_i\colon i\in\omega\}\subseteq V_{Ox}\subseteq G$.

Согласно пункту 3 Теоремы 2.2, $[\{s_i\colon i\in\omega\}]$ гомеоморфно $\beta\omega$. $\square$

Следствие 2.1 *Для любой неизолированной точки* $x \in S\mathfrak{B}^*_{1,2}$ *и произвольной её окрестности* Ox *справедливо* $c(Ox) = 2^\omega$.

Теорема 2.4 *Пусть* $A \subseteq \mathfrak{N}_2$, $|A| = \omega$. *Замыкание* $[A]$ *является открыто-замкнутой копией* $\beta\omega$ *тогда и только тогда, когда* A *есть объединение конечного числа строгих антицепей из* $\mathfrak{N}_2$.

Доказательство. Докажем необходимость. Согласно теореме 2.1 и следствию 1.3, длины всех цепей входящих в A ограничены некоторой константой h. Поскольку $[A]$ открыто в $S\mathfrak{B}_{1,2}$ и является бикомпактом, то существует конечное покрытие $[A] = \bigcup\limits_{i \leqslant \tilde{n}} [U_i]$, где $U_i = C_{\pi_i | M_i} \setminus \bigcup\limits_{j \leqslant n_i} C_{\pi^i_j}$.

Напомним, что $U_i = \{C_{\pi_i(n)} \setminus \bigcup\limits_{j \leqslant n_i} C_{\pi^i_j} : n \in M_i\}$ и при этом длины цепей входящих в U_i ограничены одной константой h.

Заметим, что для любых $s_1 < s_2 \in U_i$ и произвольного $t \in \mathfrak{N}_2$ такого, что $s_1 \leqslant t \leqslant s_2$ выполнено $t \in U_i$ (другими словами, в цепях содержащихся в U_i нет «дырок»), поскольку в противном случае $t \in \bigcup\limits_{j \leqslant n_i} C_{\pi^i_j}$, но тогда $s_2 \in C_t \subseteq \bigcup\limits_{j \leqslant n_i} C_{\pi^i_j}$ и $s_2 \notin U_i$. Отсюда следует, что для всех $n \in M_i$ и любого $t \in C_{\pi_i(n)} \setminus \bigcup\limits_{j \leqslant n_i} C_{\pi^i_j}$ выполнено $n \leqslant \operatorname{dom} t \leqslant n + h - 1$.

Поскольку у каждого элемента количество продолжений на следующий шаг равно двум, то

$$|\{t \in C_{\pi_i(n)} \setminus \bigcup_{j \leqslant n_i} C_{\pi^i_j} :\ \operatorname{dom} t = n + k\}| \leqslant 2^k.$$

Тогда для всех $n \in M_i$ выполнено $|C_{\pi_i(n)} \setminus \bigcup\limits_{j \leqslant n_i} C_{\pi^i_j}| \leqslant 2^h$.

Представим M_i в виде объединения h непересекающихся подмножеств $M_i = \bigcup\limits_{l \leqslant h} M^l_i$, таких, что для всякого $l \leqslant h$ и для любых $m_1, m_2 \in M^l_i$ и $m_1 \neq m_2$ выполнено $|m_2 - m_1| \geqslant h$.

Рассмотрим множество $U^l_i = C_{\pi_i | M^l_i} \setminus \bigcup\limits_{j \leqslant n_i} C_{\pi^i_j}$. Заметим, что для любых двух различных $m_1, m_2 \in M^l_i$ и любых $t_1 \in C_{\pi_i(m_1)} \setminus \bigcup\limits_{j \leqslant n_i} C_{\pi^i_j}$ и $t_2 \in C_{\pi_i(m_2)} \setminus \bigcup\limits_{j \leqslant n_i} C_{\pi^i_j}$ выполнено $\operatorname{dom} t_1 \neq \operatorname{dom} t_2$. Тогда построим разбиение U^l_i на конечное число строгих антицепей.

Для каждого $n \in M_i^l$ отметим по точке в $C_{\pi_i(n)} \setminus \bigcup_{j \leqslant n_i} C_{\pi_j^i}$ (если данное множество не пусто). Это и будет первой строгой антицепью $D_1^{i,l}$.

Затем для каждого $n \in M_i^l$ отмечаем по точке в не пустых $(C_{\pi_i(n)} \setminus \bigcup_{j \leqslant n_i} C_{\pi_j^i}) \setminus D_1^{i,l}$, это будет $D_2^{i,l}$. И так далее.

Процесс остановится не более чем через 2^h шагов, так как

$$|C_{\pi_i(n)} \setminus \bigcup_{j \leqslant n_i} C_{\pi_j^i}| \leqslant 2^h,$$

для всех $n \in M_i$. Значит U_i^l можно представить в виде объединения не более чем 2^h строгих антицепей, а U_i в виде объединения не более чем $h \cdot 2^h$ строгих антицепей.

В итоге получаем, что $A = \bigcup_{i \leqslant n_0} D_i'$, где D_i' — строгая антицепь, а $n_0 \leqslant \widetilde{n} \cdot h \cdot 2^h$.

Докажем достаточность. Пусть $A = \bigcup_{i \leqslant n} D_i$, где D_i строгая антицепь на $\mathfrak{N}_2$ и $D_i \cap D_j = \varnothing$ при $i \neq j$. Покажем, что для произвольного $A' \subseteq A$ справедливо $A' \in \mathfrak{B}_{1,2}$. Действительно, множество $D_i' = D_i \cap A'$ для всех $i \leqslant n$ является строгой антицепью, а значит по пункту 3 теоремы 2.2 $D_i' \in \mathfrak{B}_{1,2}$. Тогда $A' = \bigcup_{i \leqslant n} D_i' \in \mathfrak{B}_{1,2}$.

Рассмотрим произвольные $A_1, A_2 \subseteq A$ такие, что $A_1 \cap A_2 = \varnothing$. По доказанному, A_1 и A_2 элементы булевой алгебры $\mathfrak{B}_{1,2}$, а значит $[A_1] \cap [A_2] = \varnothing$. Тогда $[A]$ гомеоморфно βA, и A счетное дискретное множество. □

Следствие 2.2 *Если $U \subseteq S\mathfrak{B}_{1,2}^*$ открыто-замкнутое множество, гомеоморфное $\beta\omega \setminus \omega$. Тогда $U = [A] \setminus A$, где A является объединением конечного числа антицепей из $\mathfrak{N}_2$.*

Доказательство. Данное следствие непосредственно вытекает из теоремы 2.4 и предложения 5. □

В связи с доказанной теоремой возникает вопрос о существовании не открыто-замкнутых копий $\beta\omega$ в пространстве $S\mathfrak{B}_{1,2}$ и открыто-замкнутых подмножеств, не гемеоморфных $\beta\omega$ и не содержащих предельных точек цепей. Ответами на данные вопросы служат следующие примеры.

Пример 2.1 Пример не открыто-замкнутой копии $\beta\omega$ в $S\mathfrak{B}_{1,2}$.

Построим множество $A \subseteq \mathfrak{N}_2$ такое, что $[A]$ гомеоморфно $\beta\omega$ и $[A]$ не открыто в $S\mathfrak{B}_{1,2}$.

Рассмотрим строгую антицепь $F = \{\pi(i)\colon i \in M, M \subseteq \omega\}$. Представим её в виде счетного объединения конечных не пересекающихся множеств возрастающей мощности, то есть $F = \bigcup\limits_{i\in\omega} F_i$, где $|F_i| = i$.

Для каждого F_i определим мажорирующую ее антицепь A_i, для этого каждому $s \in F_i$ сопоставим его продолжение s' такое, что $\operatorname{dom} s' = \max\{\operatorname{dom} t\colon t \in F_i\} = n(i)$.

Определим $A = \bigcup\limits_{i\in\omega} A_i$. Согласно теоремам 1.4 и 2.1, множество $[A]$ гомеоморфно $\beta\omega$, при этом открыто-замкнутым в $S\mathfrak{B}_{1,2}$ оно быть не может, так как в противном случае A, согласно теореме 2.4, можно было бы представить в виде конечного объединения строгих антицепей, то есть количество элементов антицепи имеющих один и тот же dom не превосходило бы количества строгих антицепей. А это невозможно, в силу того, что для любого $n \in \omega$ найдется $i(n) \in \omega$ такое, что $|A_{i(n)}| > n$, а все элементы $A_{i(n)}$ имеют одинаковый dom.

Замечание 2.1 Согласно теореме 2.3, нарост нашего пространства представим следующим образом: $S\mathfrak{B}^*_{1,2} = [A \cup B]$, где A — множество всех изолированных точек нароста, B — объединение наростов отрыто-замкнутых копий $\beta\omega$, A и B открытые подмножества $S\mathfrak{B}_{1,2}$ и $A \cap B = \varnothing$. По теореме 2.3 имеем $[B] = S\mathfrak{B}^*_{1,2} \setminus A$ и, в силу приведенного примера 2.1, $[A] \neq S\mathfrak{B}^*_{1,2} \setminus B$.

Пример 2.2 Пример открыто-замкнутого подмножества, не гомеоморфного $\beta\omega$ и не имеющего изолированных точек в наросте.

Построим множество $A \subseteq \mathfrak{N}_2$ такое, что $[A]$ является открыто-замкнутым в $S\mathfrak{B}_{1,2}$, не гомеоморфно $\beta\omega$ и $[A] \setminus A$ не содержит изолированных точек.

Рассмотрим произвольную строгую антицепь $F = \{\pi(i)\colon i \in \omega\}$. По индукции построим семейство конечных цепей со следующими свойствами:

1. $A_i \subset C_{\pi(i)}$ и $|A_i| = i$;

2. A_i — цепь без «дырок», то есть для любых $s, t \in A_i$ и произвольного $k \in \mathfrak{N}_2$ из того, что $s \leqslant k \leqslant t$ следует $k \in A_i$;

3. для произвольных $i \in \omega$, $t \in A_i$ и $s \in A_{i+1}$ выполнено $\operatorname{dom} t < \operatorname{dom} s$.

За A_1 возьмем $\{\pi(1)\}$. Пусть построены A_i для всех $i \leqslant n$, тогда в качестве первого элемента цепи A_{n+1} возьмем то продолжение $\pi(n+1)$, для которого выполнено условие (3), далее нетрудно достроить цепь до нужной длинны ($|A_{n+1}| = n+1$) с выполнением условия (2).

Все элементы цепи A_i, за исключением последнего, имеют в качестве одного продолжения на следующий шаг другой элемент A_i, а в качестве второго продолжения элемент из дополнения к данной цепи.

Определим $A = \bigcup\limits_{i\in\omega} A_i$. Нетрудно показать, что A является элементом булевой алгебры $\mathfrak{B}_{1,2}$. Легко построить $\widetilde{\pi} \in T_2$ и $M \subseteq \omega$ такие, что $\widetilde{\pi}(M) = A$. Тогда $A = C_{\widetilde{\pi}|M} \setminus (C_{\pi'|M'} \cup C_{\pi''|M''})$, где $C_{\pi'|M'}$ обрезает те продолжения элементов наших цепей, которые туда не попадут, $C_{\pi''|M''}$ нужно для удаления вторых продолжений последних элементов наших цепей.

Согласно теореме 2.4 $[A]$ не гомеоморфно $\beta\omega$. Заметим также, что A не содержит ни одной бесконечной цепи, а значит в силу теорем 1.9 и 2.1, $A^* = [A] \setminus A$ не содержит изолированных точек.

В итоге мы получили подмножество $\mathfrak{N}_2$, замыкание которого открыто в $S\mathfrak{B}_{1,2}$ и не гомеоморфно $\beta\omega$, а нарост не содержит изолированных точек.

Таким образом, нарост нашего пространства $S\mathfrak{B}_{1,2}$ помимо копий $\beta\omega \setminus \omega$ и изолированных точек содержит и другие точки.

Следующие результаты показывают тесную связь полных цепей и полных антцепей в $\mathfrak{N}_2$.

Теорема 2.5 *Для пространства $S\mathfrak{B}_{1,2}$ справедливо:*

1. *Если $\{\pi(n)\colon n \in \omega\}$ — полная строгая антицепь, тогда множество $\mathfrak{N}_2 \setminus C_\pi = \{t_n\colon n \in \omega\}$ является полной строгой цепью и $t_n = \pi(n+1)|_{n+1}$ для всех $n \in \omega$.*

2. *Пусть $\mathfrak{N}_2^n = \{t \in \mathfrak{N}_2\colon \operatorname{dom} t = n+1\}$ для всех $n \in \omega$. Если $\{\pi(n)\colon n \in M\}$ таково, что $|\mathfrak{N}_2^n \setminus C_{\pi|M}| = 1$ для всех $n \in \omega$, то $\{\pi(n)\colon n \in M\}$ — полная строгая антицепь.*

Доказательство. **1** Пусть $\mathfrak{N}_2^n = \{t \in \mathfrak{N}_2\colon \operatorname{dom} t = n+1\}$ для всех $n \in \omega$. Покажем, что $|\mathfrak{N}_2^n \setminus C_\pi| = 1$ для всякого $n \in \omega$ и $\mathfrak{N}_2 \setminus C_\pi = \cup\{\mathfrak{N}_2^n\colon n \in \omega\} \setminus C_\pi$ — полная строгая цепь.

Доказательство проведем по индукции. Для $n = 0$ верно.

Предположим, что $\{t_n\} = \mathfrak{N}_2^n \setminus C_\pi$ для всех $n \in \{0, \ldots, \widetilde{n}\}$ и они образуют цепь.

Рассмотрим $\mathfrak{N}_2^{\widetilde{n}+1} = \{t \in \mathfrak{N}_2\colon \operatorname{dom} t = \widetilde{n}+2\}$. Для любого $s \in \mathfrak{N}_2^n \setminus \{t_n\}$ $(n \leqslant \widetilde{n})$ верно $s \in C_\pi$. Тогда всякий элемент $t \in \mathfrak{N}_2^{\widetilde{n}+1} \setminus C_{t_{\widetilde{n}}}$ — продолжение некоторого $s \in \mathfrak{N}_2^{\widetilde{n}} \setminus \{t_{\widetilde{n}}\} \subset C_\pi$, и поэтому он не равен $\pi(\widetilde{n}+1)$, так как $\{\pi(n)\colon n \in \omega\}$ есть антицепь.

Следовательно, $\pi(\widetilde{n}+1)$ есть одно из продолжений элемента $t_{\widetilde{n}}$ на $\widetilde{n}+1$, то есть $\pi(\widetilde{n}+1)|\widetilde{n}+1 = t_{\widetilde{n}}$. Тогда другое продолжение $t_{\widetilde{n}}$ на $\widetilde{n}+1$ и есть элемент $t_{\widetilde{n}+1}$, и $\{t_{\widetilde{n}+1}\} = \mathfrak{N}_2^{\widetilde{n}+1} \setminus C_\pi$.

Построенное таким образом множество $\{t_n\colon n \in \omega\} = \mathfrak{N}_2 \setminus C_\pi$ и есть искомая полная цепь.

2 Обозначим $M_n = \omega \cap \{0, 1, \ldots, n\}$ для всех $n \in \omega$. Заметим, что $\mathfrak{N}_2^n \setminus C_{\pi|M} = \mathfrak{N}_2^n \setminus C_{\pi|M_n}$. Предположим, что $\{\pi(n)\colon n \in M\}$ не является полной строгой цепью, то есть найдётся

$$n' = \min\{n\colon n \notin M \text{ или } (n \in M \text{ и } \pi(n) \in C_{\pi|M_{n-1}})\}.$$

В случае если $n' = 0$, получаем $C_{\pi|M_0} = \varnothing$, чего быть не может. Имеем $C_{\pi|M_{n'}} = C_{\pi|M_{n'-1}}$. По условию теоремы $\mathfrak{N}_2^{n'-1} \setminus C_{\pi|M_{n'-1}} = \{t'\}$, тогда $\mathfrak{N}_2^{n'} \setminus C_{\pi|M_{n'}} = \mathfrak{N}_2^{n'} \setminus C_{\pi|M_{n'-1}} = \mathfrak{N}_2^{n'} \cap C_{t'}$ состоит из двух продолжений t' на n', а это противоречит $|\mathfrak{N}_2^{n'} \setminus C_{\pi|M_{n'}}| = 1$. Таким образом, наше предположение неверно и $\{\pi(n)\colon n \in M\}$ является полной строгой антицепью. $\square$

Следствие 2.3 *Для всякой полной антицепи* $A = \{s_n\colon n \in \omega\}$ *найдется* $f \in P_2$ *такое, что* $[A] \setminus A \subseteq F_f$, *где* $F_f = \bigcap_{n\in\omega}[C_{f|_n}]$.

Доказательство. В силу теоремы 2.5, для полной антицепи A найдется полная цепь $\{t_n\colon n \in \omega\} = \mathfrak{N}_2 \setminus (\cup\{C_{s_n} : s_n \in A\})$. При этом для всех $n \in \omega$ справедливо $t_n < s_{n+1}$. Данная полная цепь и определяет искомое $f \in P_2$ ($f|_{n+1} = t_n$ для всех $n \in \omega$).

Получаем, что $A \cap C_{f|_n} = \{s_i\colon i > n\}$. То есть $C_{f|_{n+1}} = C_{t_n}$ содержит все элементы нашей антицепи начиная с некоторого. Но $[C_{f|_{n+1}}]$ открыто-замкнуто в $S\mathfrak{B}_{1,2}$ и $\{(C_{f|_{n+1}})^*\colon n \in \omega\}$ образуют базу F_f в $S\mathfrak{B}_{1,2}^*$. Отсюда следует, что $[A] \setminus A \subseteq F_f$. $\square$

Предложение 2.1 *Для всякой полной цепи* $A = \{\pi(n)\colon n \in \omega\}$ *найдётся полная антицепь* $\{\pi'(n)\colon n \in \omega\}$ *такая, что* $A = \mathfrak{N}_2 \setminus C_{\pi'}$.

Доказательство. Определим $\pi' \in T_2$ следующим образом: $\pi'(n)|_n = \pi(n-1)$ для всякого $n \in \omega \setminus \{0\}$ и $\pi'(n)(n) = (\pi(n)(n)+1) \mod 2$ для всех $n \in \omega$.

Таким образом, $\pi'(n+1)$ является продолжением $\pi(n)$ на $n+1$ отличным от $\pi(n+1)$ для всех $n \in \omega$, а значит $\{\pi'(n)\colon n \in \omega\}$ является полной антицепью. Заметим, что $A \cap C_{\pi'} = \varnothing$ и в силу теоремы 2.3 имеем $A = \mathfrak{N}_2 \setminus C_{\pi'}$. $\square$

Следствие 2.4 $A = \{\pi(n)\colon n \in M \subseteq \omega\}$ *— строгая антицепь. A можно дополнить до полной антицепи тогда и только тогда, когда* $G = \{\pi(n)|_n\colon n \in M \setminus \{0\}\}$ *образует цепь.*

Доказательство. ($\Rightarrow$) Пусть $A' = \{\pi(n)\colon n \in \omega\}$ — полная антицепь и $A \subseteq A'$. Тогда в силу теоремы 2.5 получаем

$$G' = \mathfrak{N}_2 \setminus C_\pi = \{t_n = \pi(n+1)|_{n+1}\colon n \in \omega\}$$

— полная цепь. Очевидно, что $G \subseteq G'$, а значит, G является цепью.

($\Leftarrow$) Найдется полная цепь $G' = \{\pi_1(n)\colon n \in \omega\}$ такая, что $G \subseteq G'$ и $A \cap G' = \varnothing$. Тогда по предложению 2.1 найдется π_2 такое, что $G' = \mathfrak{N}_2 \setminus C_{\pi_2}$ и $A' = \{\pi_2(n)\colon n \in \omega\}$ является полной антицепью.

Поскольку $\pi(n)|_n = \pi_1(n-1) = \pi_2(n)|_n$ для всех $n \in M \setminus \{0\}$ и A, A' антицепи, то $\pi(n)(n) \neq \pi_1(n)(n)$ и $\pi_2(n)(n) \neq \pi_1(n)(n)$ для всех $n \in M$. Тогда $\pi(M) = \pi_2(M)$, то есть $A \subseteq A'$. $\square$

Также приведем пример строгой антицепи, которую нельзя продолжить до полной антицепи.

Пример 2.3 Для начала пронумеруем произвольным образом элементы $\mathfrak{N}_2$, то есть $\mathfrak{N}_2 = \{s_n\colon n \in \omega\}$. Строить нашу антицепь $A = \{t_n\colon n \in \omega\}$ будем по индуции. Положим $s_{n_1} = s_1$, в качестве t_1 берем произвольное собственное продолжение s_{n_1}. Пусть выбраны $s_{n_1}, \ldots, s_{n_k}$ и их собственные продолжения $t_1, \ldots, t_k$ такие, что $\operatorname{dom} t_1 < \ldots < \operatorname{dom} t_k$ и $\{t_i\colon i \leqslant k\}$ — антицепь. Тогда положим $n_{k+1} = \min\{n\colon s_n \nleqslant t_i$ и $t_i \nleqslant s_n$ для всех $1 \leqslant i \leqslant k\}$. В качестве t_{k+1} берем собственное продолжение $s_{n_{k+1}}$: $\operatorname{dom} t_k < \operatorname{dom} t_{k+1}$. В силу выбора n_{k+1}, $\{t_i\colon i \leqslant k+1\}$ — строгая антицепь.

Этот процесс продолжается до бесконечности. В итоге получим строгую антицепь $A = \{t_n\colon n \in \omega\}$.

Докажем следующие свойства полученной антицепи:

1. Для любого $s \notin \bigcup\limits_{t_n \in A} C_{t_n}$ найдется номер $k \in \omega$ такой, что $s < t_k$.

2. Для всякого $f \in P_A = \{f \in P_2\colon f|_n \notin \bigcup\limits_{t \in A} C_t$ для всех $n \in \omega\}$ выполнено $A^* \cap F_f \neq \varnothing$.

3. Существует ультрафильтр $\xi \in A^*$ такой, что для любой строгой полной антицепи D найдётся $A' \in \xi$ такое, что $A' \cap D = \varnothing$.

1 Предположим противное.

Пусть нашелся $s_{\widetilde{n}}$ такой, что $s_{\widetilde{n}} \notin \bigcup\limits_{t_n \in A} C_{t_n}$ и $s_{\widetilde{n}} \nless t_k$ для всех $k \in \omega$. Но тогда для $n_k > \widetilde{n}$ (такое n_k найдётся, в силу бесконечности $\{s_{n_k} : k \in \omega\}$) получаем противоречие с выбором n_k, так как его роль должен был играть $\widetilde{n}$, в силу его минимальности.

2 Достаточно доказать, что для любого $f \in P_A$ и $n \in \omega$ выполнено $|C_{f|_n} \cap A| = \omega$. Предположим противное $|C_{f|_n} \cap A| < \omega$.

Данное пересечение не пусто, поскольку $f \in P_A$.

Пусть $C_{f|_n} \cap A = \{t_{k_1}, \ldots, t_{k_m}\}$. В силу того, что

$$\operatorname{dom} f|_n < \operatorname{dom} t_{k_1} < \ldots < \operatorname{dom} t_{k_m}$$

получаем $|C_{f|_n} \setminus \bigcup_{i<m} C_{t_{k_{i+1}}}| = \omega$. То есть найдется s такое, что $f|_n < s$, $\operatorname{dom} s > \operatorname{dom} t_m$ и $s \in C_{f|_n} \setminus \bigcup_{i=1,\ldots,m} C_{t_{k_i}}$. Значит $s \notin \bigcup_{t_n \in A} C_{t_n}$.

Тогда из построения A следует, что найдется $k \notin \{k_1, \ldots, k_m\}$ такое, что $s < t_k$. Получаем $t_k \in C_{f|_n} \cap A$, что противоречит предположению.

Множество P_A бесконечно. Из следствия 2.3 и того факта, что нарост A пересекается со многими F_f, следует, что A нельзя продолжить до полной антицепи.

3 Рассмотрим систему

$$\gamma = \{A^* \setminus D^* \colon D \text{ — строгая полная антицепь}\}.$$

По следствию 2.3, для любой строгой полной антицепи D найдётся $f \in P_2$ такое, что $D^* \subseteq F_f$.

В силу доказанного свойства 2, имеем $A^* \setminus \bigcup_{i \leqslant n} D_i^* \neq \varnothing$. Тогда система γ центрирована и её элементы замкнуты в силу пункта 3 теоремы 2.2. В бикомпактном расширении $S\mathfrak{B}_{1,2}$ пересечение центрированной системы замкнутых множеств не пусто, а значит найдется $\xi \in \cap\{U \colon U \in \gamma\}$. ξ и есть искомый ультрафильтр.

В $S\mathfrak{B}_{1,1}$ были введены понятия u-точки и ℓ-точки. Аналогичные построения можно провести и для $S\mathfrak{B}_{1,2}$.

Доказательства существования u и ℓ-точек в пространстве $S\mathfrak{B}_{1,2}$ полностью повторяют соответствующие доказательства проведенные для пространства $S\mathfrak{B}_{1,1}$ (теоремы 1.11, 1.13).

В $S\mathfrak{B}_{1,2}$, как и в пространстве $S\mathfrak{B}_{1,1}$ (теорема 1.12), полностью перенеся соответствующее доказательство, можно доказать следующую теорему:

Теорема 2.6 *Для точки $x \in S\mathfrak{B}^*_{1,2}$ следующие утверждения эквивалентны:*

1. *Точка x является ℓ-точкой, то есть имеет базу открыто-замкнутых окрестностей вида $[\mathfrak{N}_2 \setminus \bigcup\limits_{\pi \in T'} C_\pi]$.*

2. *Точка x является пределом сходящейся последовательности $\{f|_n \colon n \in \omega\} \subseteq \mathfrak{N}_2$.*

Отсюда получаем, что каждое из условий 1 или 2 является необходимым и достаточным для того, чтобы точка $x \in S\mathfrak{B}^*_{1,2}$ была ℓ-точкой.

Так как $S\mathfrak{B}_{1,2}$ по теореме 2.1 вложимо в пространство $S\mathfrak{B}_{1,1}$, возникает вопрос, как соотносятся понятия u и l-точек в данных пространствах? Ответом на данный вопрос служат следующие теоремы.

Теорема 2.7 *Если $x \in S\mathfrak{B}_{1,2}$, тогда x не является u-точкой в пространстве $S\mathfrak{B}_{1,1}$.*

Доказательство. Построим строгую антицепь $D \subseteq \mathfrak{N}_1 \setminus \mathfrak{N}_2$. Сначала упорядочим $\mathfrak{N}_2 = \{t_n \colon n \in \omega\}$. Для всякого $t_n \in \mathfrak{N}_2$ фиксируем $\widetilde{t}_n \in \mathfrak{N}_1 \setminus \mathfrak{N}_2$ такое, что $t_n < \widetilde{t}_n$, $\operatorname{dom} \widetilde{t}_n > \operatorname{dom} \widetilde{t}_n - 1$ и $\widetilde{t}_n(m) = 2$, где $m = \operatorname{dom} t_n + 1$. Таким образом, в качестве $\widetilde{t}_n$ берем достаточно длинное продолжение t_n, которое уже в точке $m = \operatorname{dom} t_n + 1$ выходит из $\mathfrak{N}_2$.

Построенное таким образом D является строгой антицепью, поскольку в противном случае нашлись бы $t_{n_1} \neq t_{n_2}$ из $\mathfrak{N}_2$ такие, что $\widetilde{t}_{n_1} < \widetilde{t}_{n_2}$. Поэтому либо $\widetilde{t}_{n_1} \leqslant t_{n_2}$ (чего быть не может, поскольку $\widetilde{t}_{n_1} \notin \mathfrak{N}_2$), либо $t_{n_2} < \widetilde{t}_{n_1}$. Тогда либо $t_{n_1} < t_{n_2}$ (в этом случае $t_{n_2}(\operatorname{dom} t_{n_1} + 1) = 2$), либо $t_{n_2} < t_{n_1}$.

Получаем, что $\widetilde{t}_{n_2}|_m = t_{n_1}|_m$, где $m = \operatorname{dom} t_{n_2} + 1$. А это противоречит тому, что $t_{n_1} \in \mathfrak{N}_2$. Антицепь D является строгой в силу того, что $\operatorname{dom}\widetilde{t}_n < \operatorname{dom}\widetilde{t}_{n+1}$. Тогда найдутся $\pi \in T_1$ и $M \subseteq \omega$ такие, что $\pi(M) = D$. При этом $[D]_{S\mathfrak{B}_{1,1}} \subseteq [C_{\pi|M}]_{S\mathfrak{B}_{1,1}}$, $[C_{\pi|M}]_{S\mathfrak{B}_{1,1}}$ открыто-замкнутое множество и $[C_{\pi|M}]_{S\mathfrak{B}_{1,1}} \cap [\mathfrak{N}_2]_{S\mathfrak{B}_{1,1}} = \varnothing$. Тогда $[D]_{S\mathfrak{B}_{1,1}} \cap [\mathfrak{N}_2]_{S\mathfrak{B}_{1,1}} = \varnothing$.

Докажем, что $x \in [\mathfrak{N}_2]_{S\mathfrak{B}_{1,1}}$ не может быть u-точкой в $S\mathfrak{B}_{1,1}$. Предположим противное, тогда у точки x есть база из множеств вида $C_{\pi|_M}$. Поэтому если $t \in \mathfrak{N}_2 \cap Ox$, то $\widetilde{t} \in D \cap Ox$.

Поскольку $x \in [\mathfrak{N}_2]_{S\mathfrak{B}_{1,1}}$, то $x \in [D]_{S\mathfrak{B}_{1,1}}$, а это противоречит тому, что $[D]_{S\mathfrak{B}_{1,1}} \cap [\mathfrak{N}_2]_{S\mathfrak{B}_{1,1}} = \varnothing$. □

Следствие 2.5 *Если x является и-точкой из $S\mathfrak{B}_{1,2}$, тогда x не является и-точкой в пространстве $S\mathfrak{B}_{1,1}$.*

Теорема 2.8 1. *Если x является ℓ-точкой в $S\mathfrak{B}_{1,2}$, тогда x является ℓ-точкой и в объемлющем пространстве $S\mathfrak{B}_{1,1}$.*

2. *Если x является ℓ-точкой в $S\mathfrak{B}_{1,2}$, тогда для любого*

$$X \subseteq \mathfrak{N}_1 \colon [X]_{S\mathfrak{B}_{1,1}} \setminus X = \{x\}$$

выполнено $|X \setminus \mathfrak{N}_2| < \omega$.

Доказательство. **1** Поскольку любая цепь из $\mathfrak{N}_2$ также является цепью и в $\mathfrak{N}_1$, а $S\mathfrak{B}_{1,2}$ вложимо в $SB_{1,1}$ как замкнутое подмножество (теорема 2.1), то теорема верна согласно эквивалентному определению l-точки (теорема 2.6).

2 Из теоремы 1.9 получаем, что найдется бесконечное $X' \subseteq X$ такое, что $|X \setminus X'| < \omega$ и X' является цепью из $\mathfrak{N}_1$ которая сходится к x. С другой стороны согласно теореме 2.6, найдется бесконечная цепь $X'' \subset \mathfrak{N}_2$ которая также сходится к x.

Если $|X' \setminus \mathfrak{N}_2| = \omega$, тогда найдется $s' \in X'$ такое, что $C_{s'} \cap X'' = \varnothing$ и $|X' \setminus C_{s'}| < \omega$. Таким образом, цепи X' и X'' можно отделить базисными окрестностями, что противоречит тому, что они сходятся к одной точке. Получаем, что $|X' \setminus \mathfrak{N}_2| < \omega$, а значит и $|X \setminus \mathfrak{N}_2| < \omega$. □

2.2 Пространство $S\mathfrak{B}_{1,3}$

Данное пространство отличается от двух рассмотренных ранее тем, что множество фиксированных ультрафильтров $\widehat{\mathfrak{N}}_3$ не является его дискретным подпространством.

Лемма 2.2 *Множество свободных ультрафильтров $S\mathfrak{B}^*_{1,3}$ всюду плотно в $S\mathfrak{B}_{1,3}$.*

Доказательство. Рассмотрим произвольное $U \in \Gamma_3 \cup \Theta_3$ (Γ_i и Q_3 определены на странице 19). Легко построить бесконечную цепь $\{s_n : n \in \omega\} \subseteq U$. Для этого достаточно заметить, что для произвольного $s \in U$ количество его продолжений на следующий шаг бесконечно, а по определению Γ_3и Θ_3, только конечное их число может не содержаться в U.

Для каждого $k \in \omega$ определим $A_k = \{s_n : n \geqslant k\}$. Тогда для всякого A_k $(k \in \omega)$ выполнены следующие свойства:

1. $[A_k] \cap \widehat{\mathfrak{N}}_3 = A_k$;

2. $[A_k] \subseteq U$.

Получаем центрированную систему, состоящую из замкнутых множеств $\{[A_k] \colon k \in \omega\}$ и, в силу бикомпактности $S\mathfrak{B}_{1,3}$, $\bigcap\limits_{k\in\omega}[A_k] \neq \varnothing$, при этом $\bigcap\limits_{k\in\omega}[A_k] \subseteq S\mathfrak{B}^*_{1,3}$. □

Выделим несколько типов точек данного пространства с базами определенного вида.

Лемма 2.3 $\Theta_{1,3} = \{\mathfrak{N}_3 \setminus (\bigcup\limits_{\pi\in T'} C_\pi) \colon T' \subset T_3, |T'| < \omega\}$ *является базисом некоторого ультрафильтра ξ_0.*

Доказательство. Семейство $\Theta_{1,3}$ центрировано.

Пусть $\xi_0 \in S\mathfrak{B}_{1,3}$ — ультрафильтр, мажорирующий $\Theta_{1,3}$. Никакое множество из $\Gamma_{1,3}$ вида $C_{\pi|M} \setminus \bigcup\limits_{\pi\in T'} C_\pi$ $(T' \subset T_3,\ |T'| < \omega)$ ультрафильтру ξ_0 не принадлежит, поскольку $\mathfrak{N}_3 \setminus C_{\pi|M} \in \Theta_{1,3}$. Таким образом, $\Theta_{1,3}$ — базис ультрафильтра ξ_0. □

Лемма 2.4 *Пусть $s \in \mathfrak{N}_3$. Семейство множеств*

$$\sigma_s = \{C_s \setminus \bigcup_{\pi \in T'} C_\pi : T' \subseteq T_3, |T'| < \omega, s \notin \bigcup_{\pi \in T'} C_\pi\}$$

является базисом фиксированного по s ультрафильтра $\widehat{s}$.

Доказательство. Во-первых, отметим, что всякое множество семейства σ_s содержит s и является элементом булевой алгебры $\mathfrak{B}_{1,3}$, следовательно, принадлежит ультрафильтру $\widehat{s}$.

Если множество $C_{\pi|M} \setminus \bigcup_{\pi \in T'} C_\pi \in \widehat{s}$ для некоторых $\pi \in T_3$, $T' \subseteq T_3$, $|T'| < \omega$, $M \subseteq \omega$, то $C_{\pi|M} \in \widehat{s}$, а это значит, что $C_{\pi(n)} \ni s$ для некоторого $n \in M$. Таким образом, $C_{\pi(n)} \setminus \bigcup_{\pi \in T'} C_\pi \in \sigma_s$ и $C_{\pi(n)} \setminus \bigcup_{\pi \in T'} C_\pi \subseteq C_{\pi|M} \setminus \bigcup_{\pi \in T'} C_\pi$ □

Лемма 2.5 *Пусть $\alpha = \{s_n : n \in \omega\}$ — бесконечная цепь в $\mathfrak{N}_3$. Тогда семейство непустых множеств*

$$\sigma_\alpha = \{C_s \setminus \bigcup_{\pi \in T'} C_\pi : s \in \alpha, T' \subseteq T_3, |T'| < \omega, \alpha \cap (\bigcup_{\pi \in T'} C_\pi) = \varnothing\}$$

является базисом свободного ультрафильтра ξ_α.

Доказательство. Из определения семейства σ_α следует, что семейство σ_α центрировано. Дополним σ_α до ультрафильтра, обозначим его ξ_α. Покажем, что σ_α является базисом этого ультрафильтра.

Пусть $C_{\pi|M} \setminus \bigcup_{\pi \in T'} C_\pi \in \xi_\alpha$ для некоторых $\pi \in T_3$, $T' \subseteq T_3$, $|T'| < \omega$ и $M \subseteq \omega$. Тогда найдутся $s_n \in \alpha$ и $m \in M$ такие, что $C_{\pi(m)} \ni s_n$. Действительно, в противном случае $\alpha \cap C_{\pi|M} = \varnothing$ и найдется $\pi' \in T_3$ такое, что $\pi'|M = \pi|M$ и $\alpha \cap C_{\pi'} = \varnothing$.

Тогда для $s_n \in \alpha$ имеем $U = C_{s_n} \setminus ((\bigcup_{\pi \in T'} C_\pi) \cup C_{\pi'}) \in \sigma_\alpha$ и следовательно $U \in \xi_\alpha$. С другой стороны, поскольку $C_{\pi'} \supseteq C_{\pi|M}$, имеем $U \cap (C_{\pi|M} \setminus \bigcup_{\pi \in T'} C_\pi) = \varnothing$, что противоречит центрированности ξ_α как ультрафильтра.

Поскольку α — бесконечная цепь, то ξ_α является свободным ультрафильтром. При этом для всякой бесконечной цепи $\alpha' \subseteq \alpha$ имеем $\xi_{\alpha'} = \xi_\alpha$. □

Множество свободных ультрафильтров ξ_α, построенных по бесконечным цепям $\alpha \subseteq \mathfrak{N}_3$, будем обозначать $\widehat{F}_1$, а сами ультрафильтры ξ_α будем называть ультрафильтрами первого рода.

Лемма 2.6 *Если $\xi \in S\mathfrak{B}^*_{1,3} \setminus \widehat{F}_1 \cup \{\xi_0\}$, то найдется множество $C_{\pi|M}$ такое, что $\pi \in T_3$, $M \subseteq \omega$, $|M| = \omega$ и $\{\pi(n)\colon n \in M\}$ есть строгая антицепь и*

$$\xi \ni C_{\pi|M} \text{ и } C_{\pi(n)} \notin \xi \text{ для всякого } n \in M.$$

Доказательство. Предположим, что для всякого $C_{\pi|M}$ такого, что $C_{\pi|M} \in \xi$ найдется $n \in M$ такое, что $C_{\pi(n)} \in \xi$.

Рассмотрим семейство $\lambda = \{s \in \mathfrak{N}_3\colon C_s \in \xi\}$. Тогда λ — цепь. В силу нашего предположения, у ультрафильтра ξ есть базис $\sigma = \{C_s \setminus \bigcup\limits_{\pi \in T'} C_\pi\colon \lambda \cap (\bigcup\limits_{\pi\in T'} C_\pi) = \varnothing, T' \subseteq T_3, |T'| < \omega\}$. Тогда ξ есть или фиксированный ультрафильтр, или свободный ультрафильтр 1 рода, что противоречит условию леммы. $\square$

Ультрафильтры из множества $\widehat{F}_2 = S\mathfrak{B}^*_{1,3} \setminus (\widehat{F}_1 \cup \{\xi_0\})$ будем называть свободными ультрафильтрами второго рода.

Из лемм 2.3, 2.4, 2.5, 2.6 следует

Теорема 2.9 *$S\mathfrak{B}_{1,3} = \{\xi_0\} \cup \widehat{\mathfrak{N}}_3 \cup \widehat{F}_1 \cup \widehat{F}_2$.*

Лемма 2.7 *Пусть $\xi \in \widehat{F}_1 \cup \widehat{F}_2$ свободный ультрафильтр. Тогда существует $C_{\pi|M} \in \mathfrak{B}_{1,3}$ такое, что*

1. *$|M| = \omega$;*
2. *$\xi \ni C_{\pi|M}$;*
3. *если $\{M_k\colon k \leqslant k_0\}$ — конечное разбиение M, то найдется k', $k' \leqslant k_0$ такое, что $|M_{k'}| = \omega$ и $\xi \ni C_{\pi|M_{k'}}$.*

Доказательство. Если $\xi \in \widehat{F}_1$ — свободный ультрафильтр 1 рода, порожденный полной цепью $\alpha = \{s_n\colon n \in \omega\}$, то определим $\pi \in T_3$ по правилу: $\pi(n) = s_n$. Положим $M = \omega$. Тогда C_π искомое множество.

Если $\xi \in \widehat{F}_2$ — свободный ультрафильтр 2 рода, то по лемме 2.6 существует $C_{\pi|M} \in \mathfrak{B}_{1,3}$ такое, что $|M| = \omega$, $\{\pi(n)\colon n \in M\}$ есть строгая антицепь и $\xi \in [C_{\pi|M}] \setminus \cup\{[C_{\pi(n)}]\colon n \in M\}$. Тогда $C_{\pi|M}$ искомое. $\square$

Теорема 2.10 $\mathrm{c}(S\mathfrak{B}^*_{1,3}) = \omega$.

Доказательство. Рассмотрим произвольную дизъюнктную систему открытых множеств $\nu = \{U_\alpha\colon \alpha \in A\}$ в $S\mathfrak{B}^*_{1,3}$. По теореме 2, найдется система множеств $\nu' = \{V_\alpha\colon \alpha \in A\}$ такая, что $V_\alpha \in \Gamma_{1,3} \cup \Theta_{1,3}$ и $[V_\alpha] \cap S\mathfrak{B}^*_{1,3} \subseteq U_\alpha$ для всех $\alpha \in A$.

Покажем, что ν' дизъюнктно. Предположим противное. Тогда найдутся $\alpha, \beta \in A$ такие, что $V_\alpha \cap V_\beta \neq \varnothing$. Заметим, $V_\alpha \cap V_\beta \in \mathfrak{B}_{1,3}$, а значит $[V_\alpha \cap V_\beta]$ открыто-замкнутое множество, и по лемме 2.2 справедливо $[V_\alpha \cap V_\beta] \cap S\mathfrak{B}^*_{1,3} \neq \varnothing$.

Получаем $\varnothing \neq [V_\alpha \cap V_\beta] \cap S\mathfrak{B}^*_{1,3} \subseteq [V_\alpha] \cap [V_\beta] \cap S\mathfrak{B}^*_{1,3} \subseteq U_\alpha \cap U_\beta$, что противоречит дизъюнктности ν.

Предположим, что $|A| > \omega$. Тогда из дизъюнктности ν следует существование на счетном $\mathfrak{N}_3$ несчетной системы дизъюнктных множеств, чего быть не может. $\square$

Теорема 2.11 *Подпространство свободных ультрафильтров пространства* $S\mathfrak{B}^*_{1,3}$ *не сепарабельно.*

Доказательство. Пусть $A = \{\theta_n\colon n \in \omega\}$ — счетное подмножество $S\mathfrak{B}^*_{1,3} \setminus \{\xi_0\}$. Мы покажем, что существует строгая антицепь $\{s_n\colon n \in \omega\}$ такая, что $A \subseteq [\cup\{C_{s_n}\colon n \in \omega\}]$.

Рассмотрим произвольное $n \in \omega$ и $\xi_n \in A$. Обозначим $C_{\pi_n|M_n}$ множество булевой алгебры $\mathfrak{B}_{1,3}$ удовлетворяющее условиям леммы 2.7.

Тогда существует число $m_n \in \{0, \ldots, 10^{n+1} - 1\}$ такое, что для класса вычетов $\overline{m}_n$ по модулю 10^{n+1}, определяемого числом m_n, выполняется $C_{\pi_n|\overline{m}_n \cap M} \in \xi$. Класс вычетов $\overline{m}_n$ состоит из точек вида $p^r_n = 10^{n+1} \cdot r + m_n$, где $r \in \omega$, $n \in \omega$. Обозначим $\overline{m}'_n = \{p^r_n \in \overline{m}_n\colon r \geqslant 1\}$.

Для любых чисел $p^r_n, p^{r-1}_n \in \overline{m}'_n$ $(r \geqslant 1)$ мы определим число k^r_n и $t^r_n \in \mathfrak{N}_3$ такие, что выполнены следующие условия:

1. $p_n^{r-1} \leqslant k_n^r < p_n^r$;

2. $\operatorname{dom} t_n^r = k_n^r + 1$;

3. $\pi_n(p_n^r) \geqslant t_n^r$;

4. $k_n^r \neq k_{n'}^{r'}$, если не выполнено $n = n'$ и $r = r'$.

Мы будем обозначать $\widetilde{M}_n = \{k_n^r \colon r \geqslant 1\}$. Построение множеств $\{\widetilde{M}_n \colon n \in \omega\}$ будем осуществлять по индукции.

Для $n = 0$ положим $\widetilde{M}_0 = \{\overline{m}'_0\}$.

Пусть построены множества $\widetilde{M}_i$ для $i < n$. Определим множество $\widetilde{M}_n$. Для этого рассмотрим произвольные $r \geqslant 1$ и $p_n^r \in \overline{m}'_n$, то есть $p_n^r = 10^{n+1} \cdot r + m_n$. Рассмотрим также $p_n^{r-1} = 10^{n+1} \cdot (r-1) + m_n$. Обозначим $I = [10^{n+1} \cdot (r-1) + m_n, 10^{n+1} \cdot r + m_n]$ отрезок натуральных чисел. Нетрудно видеть, что $|I \cap (\cup\{\widetilde{M}_i \colon i < n\})| < 10^{n+1}$. Тогда найдется число $k_n^r \in I \setminus \cup\{\widetilde{M}_i \colon i < n\}$. Обозначим $\widetilde{M}_n = \{k_n^r \colon r \geqslant 1\}$.

Для чисел k_n^r выберем и зафиксируем элемент $t_n^r \in \mathfrak{N}_3$ такой, что

$$t_n^r \leqslant \pi_n(p_n^r) \quad \text{и} \quad \operatorname{dom} t_n^r = k_n^r + 1.$$

Тогда для множеств $\{\widetilde{M}_i \colon i \leqslant n\}$ и $\{t_i^r \colon i \leqslant n, r \geqslant 1\}$ выполнены условия 1–4.

Таким образом, построены множество $\widetilde{M} = \bigcup\limits_{n \in \omega} \widetilde{M}_n$ и множество $\{t(k_n^r) = t_n^r \colon k_n^r \in \widetilde{M}\}$.

В силу условия 4 множество $\cup\{C_{t(k_n^r)} \colon k_n^r \in \widetilde{M}\}$ есть элемент булевой алгебры $\mathfrak{B}_{1,3}$.

В силу условия 3 мы имеем

$$\theta_n \ni \cup\{C_{t(k_n^r)} \colon k_n^r \in \widetilde{M}\} \text{ для всех } n \in \omega,$$

и, следовательно, $\{\theta_n \colon n \in \omega\}$ лежит в открыто-замкнутом множестве $[\cup\{C_{t(k_n^r)} \colon k_n^r \in \widetilde{M}\}]$. При этом $S\mathfrak{B}_{1,3} \setminus [\cup\{C_{t(k_n^r)} \colon k_n^r \in \widetilde{M}\}] \neq \varnothing$. $\square$

2.3 Пространства $S\mathfrak{B}_{2,1}$, $S\mathfrak{B}_{2,2}$ и $S\mathfrak{B}_{2,3}$.

Данные пространства существенно отличаются от рассмотренных ранее. Это связано с тем, что булевы алгебры здесь порождены другими семействами множеств. Прежде всего, отметим, что пространства $S\mathfrak{B}_{2,1}$, $S\mathfrak{B}_{2,2}$ и $S\mathfrak{B}_{2,1}$ являются нульмерными бикомпактами и обладают счетной базой, поэтому пространства $S\mathfrak{B}_{2,3}$, $S\mathfrak{B}^*_{2,1}$ и $S\mathfrak{B}^*_{2,2}$, как пространства без изолированных точек, гомеоморфны канторову совершенному множеству.

Мы рассмотрим внутреннее строение этих пространств, дадим классификацию их точек. На этой основе нами будут построены гомеоморфизмы данных пространств и их подмножеств на канторово совершенное множество и пространства ему гомеоморфные.

Пространство $S\mathfrak{B}_{2,3}$ отличается от двух других рассматриваемых в данном параграфе тем, что фиксированные ультрафильтры в нем не являются изолированными точками.

Рассмотрим пространство $S\mathfrak{B}_{2,2}$.

Лемма 2.8 *Для всякого свободного ультрафильтра $\xi \in S\mathfrak{B}^*_{2,2}$ найдется $f \in P_2$ такое, что семейство $\sigma_f = \{C_{f|_n} : n \in \omega\}$ является базисом ультрафильтра ξ.*

Доказательство. Покажем, что для всякого $n \in \omega$, $n \geqslant 1$, найдется $r \in \mathfrak{N}_2$ такое, что $\operatorname{dom} r = n$ и $C_r \in \xi$.

Действительно, пусть найдется $n_0 \in \omega$ такое, что $C_r \notin \xi$ для всякого $r \in \mathfrak{N}_2$, $\operatorname{dom} r = n_0$. Тогда множество $\mathfrak{N}_2 \setminus \cup\{C_r\colon \operatorname{dom} r = n_0\}$ или пусто, если $n_0 = 1$, или есть элемент ультрафильтра ξ, и, следовательно, ξ — фиксированный ультрафильтр, что противоречит нашему предположению.

По предложению 11, множество $\{r\colon C_r \in \xi\}$ является цепью и, следовательно, найдется $f \in P_2$ такая, что

$$\{C_r\colon C_r \in \xi\} = \{C_{f|_n} : n \in \omega\} = \sigma_f.$$

Будем обозначать ультрафильтр ξ как ξ_f.

Покажем, что σ_f является базисом ультрафильтра ξ_f. Для этого рассмотрим $C_s \setminus (\bigcup_{t\in N'} C_t)$ $(N' \subset \mathfrak{N}_2,\ |N'| < \omega)$ — элемент базиса ультрафильтра ξ_f. Пусть $k = \max\{\operatorname{dom} s, \operatorname{dom} t \colon t \in N'\}$. Тогда $C_{f|_{k+1}} \subseteq C_s \setminus (\bigcup_{t \in N'} C_t)$, поскольку по предложению 11 $C_{f|_{k+1}} \subseteq C_s$ и $C_{f|_{k+1}} \cap (\bigcup_{t \in N'} C_t) = \varnothing$. □

Очевидно, что если $f, g \in P_2$ различны, то $\xi_f \neq \xi_g$ и всякая функция $f \in P_2$ определяет свободный ультрафильтр, для которого семейство $\sigma_f = \{C_{f|_n} : n \in \omega\}$ является базисом.

Таким образом, существует взаимно однозначное соответствие $h \colon P_2 \to S\mathfrak{B}^*_{2,2}$, определенное по правилу: $h(f) = \xi_f$ для всякого $f \in P_2$. Если множество P_2 наделить тихоновской топологией, то справедлива следующая теорема.

Теорема 2.12 *Отображение* $h \colon P_2 \to S\mathfrak{B}^*_{2,2}$ *является гомеоморфизмом.*

Доказательство. Заметим что, семейство множеств вида

$$O(s) = \{f \in P_2 \colon f|_{\operatorname{dom} s} = s\}, \quad \text{где } s \in \mathfrak{N}_2,$$

определяет базу тихоновской топологии на P_2.

Отображение $h \colon P_2 \to S\mathfrak{B}^*_{2,2}$ определили по правилу $h(f) = \xi_f$. Из свойств отображения h и топологии P_2 следует, что h является взаимно однозначным, непрерывным вместе с обратным отображением пространства P_2 на $S\mathfrak{B}^*_{2,2}$. □

Заметим, что пространство P_2 с тихоновской топологией гомеоморфно канторову совершенному множеству (см., например [20]) и, следовательно, $S\mathfrak{B}^*_{2,2}$ гомеоморфно канторову совершенному множеству.

Аналогичными рассуждениями можно доказать, что пространство $S\mathfrak{B}^*_{2,1}$ гомеоморфно P_1 с тихоновской топологией.

Основные результаты данного параграфа связаны с пространством $S\mathfrak{B}_{2,3}$. Сначала рассмотрим внутреннюю структуру этого пространства, дав характеристики его точкам.

Рассмотрим три вида ультрафильтров из $S\mathfrak{B}_{2,3}$. Для всякого $s \in \mathfrak{N}_3$ обозначим через $\widehat{s}$ фиксированный ультрафильтр из $S\mathfrak{B}_{2,3}$, определяемый s, то есть состоящий из всех элементов булевой алгебры $\mathfrak{B}_{2,3}$, содержащих s.

Обозначим $\mathfrak{N}_3 = \{\widehat{s}\colon s \in \mathfrak{N}_3\}$ — множество всех фиксированных ультрафильтров из $S\mathfrak{B}_{2,3}$.

Лемма 2.9 *Пусть* $\widehat{s} \in \mathfrak{N}_3$. *Тогда семейство*

$$\sigma_s = \{C_s \setminus \bigcup_{t\in N'} C_t\colon s \notin \bigcup_{t\in N'} C_t, N' \subset \mathfrak{N}_3, |N'| < \omega\}$$

является базисом ультрафильтра $\widehat{s}$.

Доказательство. Отметим что $\sigma_s \subseteq \widehat{s}$, поскольку всякий элемент семейства σ_s содержит s. Рассмотрим базис ультрафильтра $\widehat{s}$, состоящий из элементов вида $C_r \setminus \bigcup_{t\in N'} C_t$, где $r \in \mathfrak{N}_3$, $N' \subset \mathfrak{N}_3$, $|N'| < \omega$. И пусть $C_r \setminus \bigcup_{t\in N'} C_t$ один из элементов этого базиса.

Поскольку $C_r \setminus \bigcup_{t\in N'} C_t \ni s$, то $r \leqslant s$, и всякий элемент $t \in N'$ либо не сравним с s, либо $s < t$. Следовательно, для множества $C_s \setminus \bigcup_{t\in N'} C_t \in \sigma_s$ выполняется $C_s \setminus \bigcup_{t\in N'} C_t \subseteq C_r \setminus \bigcup_{t\in N'} C_t$. Таким образом, семейство σ_s есть базис ультрафильтра $\widehat{s}$. □

Лемма 2.10 *Пусть* $f \in P_3$ *и* $\{s_n = f|_n\colon n \in \omega\}$ *полная цепь в* $\mathfrak{N}_3$. *Тогда семейство* $\sigma_f = \{C_{s_n}\colon n \in \omega\}$ *является базисом некоторого ультрафильтра* $\xi_f \in S\mathfrak{B}_{2,3}$.

Доказательство. Поскольку σ_f является центрированной системой множеств, её можно дополнить до ультрафильтра $\xi_f \in S\mathfrak{B}_{2,3}$. Покажем, что σ_f является базисом этого ультрафильтра. Отметим, что отсюда будет следовать единственность ультрафильтра ξ_f, мажорирующего σ_f.

Рассмотрим базис ультрафильтра ξ_f, состоящий из элементов семейства $\Gamma_{2,3} \cup \Theta_{2,3}$.

$$\Gamma_{2,3} = \Big\{ C_s \setminus \bigcup_{t\in N'} C_t\colon s \in \mathfrak{N}_i, N' \subset \mathfrak{N}_3, |N'| < \omega \Big\},$$

$$\Theta_{2,3} = \Big\{ \mathfrak{N}_3 \setminus \bigcup_{t\in N'} C_t\colon N' \subset \mathfrak{N}_3, |N'| < \omega \Big\}.$$

Пусть $C_r \setminus \bigcup_{t\in N'} C_t$ — одно из множеств этого базиса.

Рассмотрим множество $C_{s_{n_0}} \in \sigma_f$ такое, что

$$\operatorname{dom} s_{n_0} > \max\{\operatorname{dom} r, \operatorname{dom} t (t \in N')\}.$$

Так как $\sigma_f \subseteq \xi_f$, то по предложению 11 имеем $C_r \supseteq C_{s_{n_0}}$ и $C_{s_{n_0}} \cap C_t = \varnothing$ для всех $t \in N'$. Следовательно, $C_{s_{n_0}} \subseteq C_r \setminus \bigcup_{t\in N'} C_t$. Таким образом, семейство σ_f есть базис ультрафильтра ξ_f. $\square$

Заметим, что, если $f, g \in P_3$ различны, то ультрафильтры ξ_f и ξ_g, определяемые цепями $\sigma_f = \{C_{f|_n} : n \in \omega\}$ и $\sigma_g = \{C_{g|_n} : n \in \omega\}$, различны.

Отметим также, что всякая полная цепь в $\mathfrak{N}_3$ — это множество вида $\{f|_n : n \in \omega\}$ для некоторой $f \in P_3$.

Обозначим $\widehat{F} = \{\xi_f : f \in P_3\}$, где ξ_f — ультрафильтр, мажорирующий семейство $\sigma_f = \{C_{f|_n} : n \in \omega\}$ для $f \in P_3$.

Лемма 2.11 *Семейство* $\Theta_{2,3} = \{\mathfrak{N}_3 \setminus \bigcup_{t\in N'} C_t : N' \subset \mathfrak{N}_3, |N'| < \omega\}$ *является базисом некоторого ультрафильтра* $\xi_0 \in S\mathfrak{B}_{2,3}$.

Доказательство. Семейство $\Theta_{2,3}$ центрировано.

Пусть $\xi_0 \in S\mathfrak{B}_{2,3}$ — ультрафильтр, мажорирующий $\Theta_{2,3}$. Имеем, с одной стороны, $\Theta_{2,3} \subseteq (\Gamma_{2,3} \cup \Theta_{2,3})$, с другой стороны, никакое множество из $\Gamma_{2,3}$ вида $C_s \setminus \bigcup_{t\in N'} C_t$ ультрафильтру ξ_0 не принадлежит. Таким образом, $\Theta_{2,3}$ является базисом ультрафильтра ξ_0. $\square$

Как итог этих лемм, мы можем сформулировать следующую теорему.

Теорема 2.13 $S\mathfrak{B}_{2,3} = \{\xi_0\} \cup \widehat{F} \cup \mathfrak{N}_3$.

Доказательство. Пусть $\xi \in S\mathfrak{B}_{2,3}$ — произвольный ультрафильтр.

Положим $A = \{C_s : C_s \in \xi, s \in \mathfrak{N}_3\}$. Возможны три случая:

1. $A = \varnothing$;

2. A конечно;

3. A бесконечно.

1 Пусть $A = \varnothing$. Тогда $\sigma_0 = \{\mathfrak{N}_3 \setminus C_s\colon s \in \mathfrak{N}_3\} \subseteq \xi$ и следовательно $\xi = \xi_0$.

2 Пусть A конечно, $A = \{C_{s_i}\colon i \leqslant k\}$. По предложению 11 множество A является конечной цепью, без ограничения общности будем считать, что $C_{s_0} \subseteq \ldots \subseteq C_{s_k}$. Тогда $\bigcap\limits_{i \leqslant k} C_{s_i} = C_{s_k}$ и $C_{s_k} \in \xi$.

Покажем, что ξ есть фиксированный ультрафильтр $\widehat{s_k}$, что означает, что всякий элемент ξ содержит s_k. Рассмотрим базис ультрафильтра ξ, состоящий из элементов семейства $\Gamma_{2,3} \cup \Theta_{2,3}$.

Пусть $C_r \setminus \bigcup\limits_{t \in N'} C_t$ — одно из множеств этого базиса. Отметим, во-первых, что $r \leqslant s_k$. Действительно, если r не сравним с s_k, то $(C_r \setminus \bigcup\limits_{t \in N'} C_t) \cap C_{s_k} = \varnothing$, если $s_k < r$, то получаем противоречие с максимальностью s_k в A.

Итак, $r \leqslant s_k$, следовательно, $s \in C_r$. Для всякого $t \in N'$ имеем либо $s_k < t$, либо t не сравним с s_k. В противном случае $C_{s_k} \notin \xi$.

Следовательно, $s_k \in C_r \setminus \bigcup\limits_{t \in N'} C_t$. Таким образом, всякий элемент $C_r \setminus \bigcup\limits_{t \in N'} C_t$ базиса ультрафильтра ξ содержит s_k и $\xi = \widehat{s_k}$.

3 Пусть A бесконечно. Тогда по предложению 11, A является бесконечной цепью. Пусть $\sigma_f = \{f|_n\colon n \in \omega\}$ для некоторой функции $f \in \omega^\omega$ — полная цепь, содержащая A. Тогда σ_f является базисом ультрафильтра $\xi_f \in \widehat{F}$ и $\xi_f = \xi$. □

Таким образом, пространство $S\mathfrak{B}_{2,3}$ состоит из точки ξ_0, множества пределов цепей элементов из $\mathfrak{N}_3$ и множества фиксированных ультрафильтров.

Теорема 2.14 *Подпространство $\widehat{F}$ пространства $S\mathfrak{B}_{2,3}$ гомеоморфно множеству иррациональных чисел.*

Доказательство. Множество P_3 является счетным произведением счетных множеств. Для всякого $s \in \mathfrak{N}_3$ определим множество $O(s) = \{f \in P_3\colon f|_{\mathrm{dom}\, s} = s\}$. Тогда семейство $\{O(s)\colon s \in N_3\}$ является базой тихоновской топлогии на P_3. Хорошо известно, что $P_3 = \omega^\omega$ с тихоновской топологией гомеоморфно множеству $\mathbb{P}$ иррациональных чисел (см., например, [20]).

Покажем, что подмножество $\widehat{F} \subseteq S\mathfrak{B}_{2,3}$ гомеоморфно P_3 с тихоновской топологией. Построим отображение $\phi\colon P_3 \to \widehat{F}$ по правилу: если $f \in P_3$, то $\phi(f) = \xi_f$. Нетрудно видеть, что ϕ есть взаимно однозначное отображение P_3 на $\widehat{F}$. Его непрерывность и непрерывность обратного отображения следует из того, что $\phi(O(s)) = [C_s] \cap \widehat{F}$. $\square$

Пример 2.4 Множество J — совершенное нигде не плотное ограниченное подмножество прямой.

Построим нигде не плотное совершенное подмножество J отрезка $[0,1]$, гомеоморфное пространству $S\mathfrak{B}_{2,3}$.

Для произвольного отрезка $[a,b]$ назовем семейство отрезков $\{[a_i,b_i]\colon i \in \omega\}$ *правильным*, если $a_0 = \frac{a+b}{2}$, $a_{i+1} > b_i$ для всякого $i \in \omega$, и последовательность $\{a_i\colon i \in \omega\}$ сходится к точке b.

Рассмотрим отрезок $[0,1]$. Обозначим правильное семейство отрезков $\Delta_0 = \{[a_{i^0}, b_{i^0}]\colon i^0 \in \omega\}$. Положим $\widetilde{\Delta}_0 = \cup\{[a_{i^0}, b_{i^0}]\colon i^0 \in \omega\}$ — тело семейства Δ_0, $\overline{\Delta}_0 = [\widetilde{\Delta}_0]$. Очевидно, $\overline{\Delta}_0 = \widetilde{\Delta}_0 \cup \{1\}$.

Пусть $\delta_{i^0} = \{[a_{i^0 i^1}, b_{i^0 i^1}]\colon i^1 \in \omega\}$ — правильное семейство для отрезка $[a_{i^0}, b_{i^0}]$ $(i^0 \in \omega)$. Положим $\Delta_1 = \cup\{\delta_{i^0}\colon i^0 \in \omega\}$, $\widetilde{\Delta}_1$ — тело семейства Δ_1, $\overline{\Delta}_1 = [\widetilde{\Delta}_1]$. Тогда $\overline{\Delta}_1 = \widetilde{\Delta}_1 \cup \{1\} \cup \{b_{i^0}\colon i^0 \in \omega\}$.

Пусть $\delta_{i^0 i^1} = \{[a_{i^0 i^1 i^2}, b_{i^0 i^1 i^2}]\colon i^2 \in \omega\}$ — правильное семейство для отрезка $[a_{i^0 i^1}, b_{i^0 i^1}] \in \Delta_1$, $(i^0, i^1 \in \omega)$, $\Delta_2 = \cup\{\delta_{i^0 i^1}\colon i^0, i^1 \in \omega\}$, $\widetilde{\Delta}_2$ — тело Δ_2, $\overline{\Delta}_2 = [\widetilde{\Delta}_2]$, и

$$\overline{\Delta}_2 = \widetilde{\Delta}_2 \cup \{1\} \cup \{b_{i^0}\colon i^0 \in \omega\} \cup \{b_{i^0 i^1}\colon i^0, i^1 \in \omega\}.$$

Продолжая этот процесс построения, получим для всякого $k \in \omega$ семейство $\Delta_k = \cup\{\delta_{i^0 \ldots i^k}\colon i^0, \ldots, i^k \in \omega\}$, где $\delta_{i^0 \ldots i^k}$ — правильное семейство для отрезка $[a_{i^0 \ldots i^k}, b_{i^0 \ldots i^k}]$,

$$\delta_{i^0 \ldots i^k} = \{[a_{i^0 \ldots i^k i^{k+1}}, b_{i^0 \ldots i^k i^{k+1}}]\colon i^{k+1} \in \omega\},$$

$\widetilde{\Delta}_k$ — тело Δ_k, $\overline{\Delta}_k = [\widetilde{\Delta}_k]$.

Имеем $\overline{\Delta}_k = \widetilde{\Delta}_k \cup \{1\} \cup \{b_{i^0}\colon i^0 \in \omega\} \cup \ldots \cup \{b_{i^0 \ldots i^k}\colon i^0, \ldots, i^k \in \omega\}$.

Положим $J = \cap\{\overline{\Delta}_k\colon k \in \omega\}$. Нетрудно видеть, что J — совершенное нигде не плотное подмножество отрезка $[0,1]$. Точками множества J являются точки $\{1\}$, $\{b_{i^0 \ldots i^k}\colon i^0, \ldots, i^k \in \omega, k \in \omega\}$ а также точки $x(f)$, где $f \in P_3$, определяемые следующим образом $x(f) = [a_{f(0)}, b_{f(0)}] \cap \ldots \cap [a_{f(0)\ldots f(k)}, b_{f(0)\ldots f(k)}] \cap \ldots$

Базу окрестностей в точке $\{1\}$ образуют множества вида

$$([0,1] \setminus [a_{i^0 \ldots i^k}, b_{i^0 \ldots i^k}]) \cap J.$$

Базу окрестностей в точке $\{b_{i^0 \ldots i^k}\}$ образуют множества вида

$$([a_{i^0 \ldots i^k}, b_{i^0 \ldots i^k}] \setminus [a_{i^0 \ldots i^k i^{k+1}}, b_{i^0 \ldots i^k i^{k+1}}]) \cap J.$$

Базу окрестностей в точках $x(f)$, $f \in P_3$ образуют множества вида

$$[a_{f(0)\ldots f(k)}, b_{f(0)\ldots f(k)}] \cap J.$$

Теорема 2.15 *Пространство $S\mathfrak{B}_{2,3}$ гомеоморфно J.*

Доказательство. Рассмотрим отображение $h\colon S\mathfrak{B}_{2,3} \to J$, определяемое по следующему правилу:

— $h(\xi_0) = 1$;

— для фиксированного ультрафильтра $\widehat{s} \in \mathfrak{N}_3$, где $s \in \mathfrak{N}_3$, то есть $s = f|_n$ для некоторой функции $f \in P_3$ и $n \in \omega$, положим $h(\widehat{s}) = b_{f(0)\ldots f(n-1)}$;

— для ультрафильтра $\xi_f \in \widehat{F}$, определяемого функцией $f \in P_3$, положим $h(\xi_f) = x(f)$.

Из конструкции и определения топологий пространств $S\mathfrak{B}_{2,3}$ и J следует, что $h\colon S\mathfrak{B}_{2,3} \to J$ — взаимно однозначное и непрерывное вместе с обратным отображение $S\mathfrak{B}_{2,3}$ на J. □

Так как всякое совершенное нигде не плотное ограниченное подмножество прямой гомеоморфно канторову совершенному множеству, то пространство $S\mathfrak{B}_{2,3}$ гомеоморфно канторову совершенному множеству.

Предметный указатель

Список литературы

1. *Bell M. G.* Compact ccc non-separable spaces of small weight // Topology Proceedings. — 1980. — Т. 5. — С. 11—25. — ISSN 0146-4124. — URL: `http://topo.math.auburn.edu/tp/reprints/v05/tp05002s.pdf`.
2. *Mill J. van* Weak p-points in compact P-spaces // Topology Proceedings. — 1979. — Т. 4, № 2. — С. 605—628.
3. *Gryzlov A. A.* On the Rudin–Keisler order on ultrafilters // Topol. Appl. — 1997. — Т. 76. — С. 151—155.
4. *Gryzlov A. A.*, *Bastrykov E. S.*, *Golovastov R. A.* On Bell's compactification of N // Topology Proceedings. — 2010. — Т. 35. — С. 177—185. — ISSN 0146-4124. — URL: `http://topology.auburn.edu/tp/reprints/v35/`.
5. *Грызлов А. А.*, *Бастрыков Е. С.*, *Головастов Р. А.* О точках одного бикомпактного расширения N // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. — 2010. — Т. 3. — С. 10—17.
6. *Gryzlov A. A.* On Convergent Sequences and Copies of N in the Stone Space of One Boolean Algebra // Topology Proceedings. — 2013. — Т. 42. — С. 165—171. — ISSN 0146-4124. — URL: `http://topology.auburn.edu/tp/reprints/v42/`.
7. *Бастрыков Е. С.* О некоторых точках расширения Белла счётного дискретного пространства // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. — 2009. — Т. 4. — С. 3—6. — URL: `http://vestnik.udsu.ru/2009/2009-014/vuu%5C_09%5C_014%5C_01.pdf`.
8. *Грызлов А. А.*, *Бастрыков Е. С.* Некоторые центрированные системы множеств и определяемые ими точки // Труды ИММ. — 2011. — Т. 4. — С. 76—82.
9. *Энгелькинг Р.* Общая топология. — Москва: «Мир», 1986. — С. 751.

10. *Архангельский А. В., Пономарёв В. И.* Основы общей топологии в задачах и упражнениях. — Москва: «Наука», 1974.

11. *Сикорский Р.* Булевы алгебры. — Москва: «Мир», 1969.

12. *Архангельский А. В.* Строение и классификация топологических пространств и кардинальные инварианты // Успехи мат. наук. — 1978. — Т. 33, № 6. — С. 29—34.

13. *Mill J. van* An introduction to $\beta\omega \setminus \omega$. — Amsterdam: Vrige Univ., 1981.

14. *Mill J. van* Weak p-points in Chech – Stone compactifications // Trans. Amer. Math. Soc. — 1982. — Т. 173, № 2. — С. 657—678.

15. *Грызлов А. А.* О бикомпактых расширениях дискретных пространств // Фундаментальная и прикладная математика. — 1996. — Т. 2, № 3. — С. 803—848. — URL: `http://www.math.msu.su/f%CC%83pm/rus/96/963/96306t.htm`.

16. *Gryzlov A. A.* Independent matrices and some points of $\beta\tau$ // Topol. Appl. — 2002. — Т. 107. — С. 79—81.

17. *Бастрыков Е. С.* О замыканиях счетных подмножеств BN // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. — 2011. — Т. 3. — С. 15—20.

18. *Грызлов А. А., Бастрыков Е. С.* О замыканиях счётных множеств в пространстве Стоуна одной булевой алгебры // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. — 2011. — Т. 3. — С. 37—42.

19. *Бастрыков Е. С.* Классы точек компактификаций дискретных пространств // Известия Института Математики и Информатики УдГУ. — 2013. — Т. 1 (41). — С. 47—77.

20. *Александров П. С.* Введение в теорию множеств и общую топологию. — Москва: «Наука», 1977.