Министерство образования и науки РФ
ФГБОУ ВПО
«Удмуртский государственный университет»
Математический факультет

В. Н. Баранов, О. В. Баранова

Экстремальные задачи в дискретной математике
Метод раскраски

Учебное пособие

Ижевск
2015

УДК 512.8
ББК 22.11
Б24

Рекомендовано к изданию Учебно-методическим Советом УдГУ

Рецензенты:
зав. кафедрой математики и информатики, к.ф.-м.н., доцент
В. И. Родионов
председатель методической комиссии МФ, к.п.н., доцент
Н. А. Баранова

Баранов В. Н., Баранова О. В.
Б24 Экстремальные задачи в дискретной математике. Метод раскраски: учебное пособие. – Ижевск: Изд-во «Удмуртский университет». – 2015, 56 с.

ISBN 978-5-4312-0350-3

Учебное пособие посвящено экстремальным задачам в дискретной математике. Пособие адресовано студентам бакалавриата, обучающимся по направлениям «Прикладная математика и информатика», «Математика и компьютерные науки», изучающим курс дискретной математики. В пособии содержится большое количество заданий для самостоятельной работы. Материал пособия может быть использован студентами старших курсов и магистрами естественно-научных направлений при работе над курсовыми и выпускными квалификационными проектами.

УДК 512.8
ББК 22.11

ISBN 978-5-4312-0350-3

Оглавление

Предисловие

Учебное пособие посвящено экстремальным задачам в дискретной математике, которые традиционно излагаются в курсе дискретной геометрии.

Клетчатая бумага (множество точек плоскости с целочисленными координатами) является своеобразным множеством, которое дает возможность при решении чисто геометрических задач воспользоваться методами алгебры, теории чисел и математического анализа, и наоборот, задачи аналитического характера позволяет переводить на геометрический язык. Умение решать задачи на клетчатой бумаге необходимо как для будущих математиков, так и для специалистов в области информатики.

Основной упор в пособии сделан на метод раскраски, который часто возникает при исследовании задач, связанных с инвариантами. Эти задачи крайне важны для развития логического мышления у будущих специалистов.

Такие задачи возникают в различных областях математики, в компьютерных науках, в электронике, в других дисциплинах (в том числе в экономике). При этом практически отсутствует систематизированное изложение изучаемых вопросов.

Задачи о раскрашивании различных математических объектов появились сравнительно недавно, во второй половине XVIII века (знаменитая проблема четырех красок была сформулирована в 1878г.). Исследования в этом направлении встречаются в работах Бернсайда, Коши, Фробениуса, Пойа и других математиков. Часто раскрашивание объектов является средством для решения поставленной задачи. Именно такие задачи рассматриваются в данной работе.

Учебное пособие состоит из трех глав.

В первой главе изучается метод шахматной раскраски.

Вторая глава посвящена конструированию раскрасок, удовлетворяющих заданным условиям.

В третьей главе рассматриваются задачи смешанного содержания. Основное внимание уделено многоцветным раскраскам.

В пособии содержится большое количество задач. Многие из них приведены с подробными решениями. Задачи систематизированы по методам их решений. Кроме того, предложено большое количество упражнений для самостоятельной работы, решение которых позволяет читателю правильно оценить приобретенные знания и способствует повышению его математической культуры.

Материал пособия может быть использован студентами старших курсов и магистрами естественно-научных направлений при работе над курсовыми и выпускными квалификационными проектами.

Глава 1

Шахматная раскраска

Это пособие посвящено методу раскраски, который позволяет решать задачи из самых различных областей математики: геометрии, теории игр, теории множеств, теории чисел.

Прежде чем мы сформулирем саму идею, рассмотрим классическую задачу, решаемую методом раскраски.

Задача 1.1. Можно ли разрезать доску 8×8 с вырезанными противоположными угловыми клетками на прямоугольники 1×2 по линиям сетки?

Ответ: Нельзя.

Решение. После нескольких неудачных попыток разрезать возникает желание доказать, что это сделать невозможно. Как это сделать?

Математика работает с такими объектами как множества, правила логического вывода, числа, геометрические объекты. Все они определяются своим набором аксиом. Один из способов доказать невозможность, это — метод от противного. Где же тут искать противоречие? Для этого надо наделить исследуемые объекты некоторыми свойствами, к которым можно применить математические методы.

Какие численные характеристики есть у доски? Самая первая — это количество клеток. Их в нашей задаче 64-2=62. Получаем, что если фигуру разрезать возможно, то прямоугольников должно быть 62/2=31. Пока никакого противоречия. Но уже есть информация о количестве прямоугольников.

Какие еще численные характеристики есть у доски и у прямоугольников? Чтобы их увидеть, раскрасим клетки доски в шахматном порядке, то есть так, что любые две соседние клетки покрасим в различные цвета, белый и черный. Значит, любой прямоугольник, содержащий две соседние по стороне клетки сосдержит одну белую и одну черную клетку.

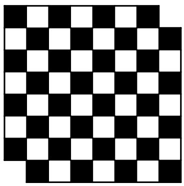


Рис. 1.1: Задача 1.1

Получаем, что если разрезать возможно, то 31 прямоугольник будет содержать 31 черную и 31 белую клетки. Но на доске 30 белых и 32 черных клетки. Вот оно противоречие: 31=30. Значит, доску на такие прямоугольники разрезать нельзя. □

Разберем идею раскраски. Мы наделили объекты различными свойствами (раскрасили клетки в два цвета), то есть каждой клетке мы поставили в соотвествие один из цветов, дали некую метку. Таким образом, помимо общего числа клеток появились численные характеристики, равные количеству клеток с разными метками. И уже эти характеристики, которых не было в начале, помогли нам решить задачу.

Как придумать метки, сколько их должно быть, по какому правилу их присваивать объектам зависит от конкретной задачи, свойств объектов и, разумеется, от воображения решающего. Трудность решения методом раскраски заключается в том, что изначально раскраска не дана и ее нужно придумать, как инструмент, для решения конкретной задачи. Мы разберем несколько примеров, как применять этот метод.

Заметим, что в терминах "меток"можно сформулировать и другие принципы. Например, принцип Дирихле. Он говорит о том, что *если мы хотим наделить объекты различными метками, то меток должно быть не меньше количества объектов.* Это является частью теории множеств и свойств инъективных отображений, мощностей их образов и прообразов. Поэтому, принцип Дирихле и метод раскрасок это не просто приемы для решения олимпиадных задач, но и часть общей теории, связь между головоломкой и общей теорией множеств, строгой математической теорией, основанной на аксиомах.

Рассмотрим некоторые задачи, к которым применима шахматная раскраска.

Задача 1.2. Можно ли при помощи комплекта тетриса из пяти четырехклеточных фигур: прямоугольника 1×4, квадрата 2×2, буквы Т, уголка, буквы S, выложить прямоугольник 4×5? Фигурки можно поворачивать и переворачивать.

Ответ: Нельзя.

Р е ш е н и е. Предположим, что можно. Используем шахматную раскраску прямоугольника 4×5. У нас 10 черных и 10 белых клеток. Все фигуры тетриса, кроме буквы Т, накрывают по две черные и две белые клет-

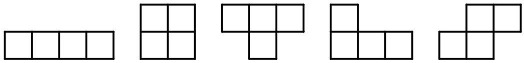


Рис. 1.2: Фигурки тетриса: прямоугольник, квадрат, Т, уголок, S.

ки. Буква Т накрывает нечетное число белых и нечетное число черных клеток. Если выложить прямоугольник возможно, то мы можем представить 10 в виде суммы четырех четных и одного нечетного чисел, а этого сделать нельзя. □

Зачастую шахматную раскраску можно применить в задачах, для того, чтобы увидеть чередование. Напомним основные идеи в задачах на чередования. 1) *Если в некотором процессе объекты двух видов чередуются, то количество объектов одного вида отличается от количества объектов другого вида не более, чем на 1.* 2) *Если процесс начинается и заканчивается на одном объекте (например циклический путь), или начало и конец пути — объекты разных классов, то количество объектов первого вида равно количеству объектов второго вида, а количество шагов в процессе — четное.* Это происходит, например, когда процесс заключается в обходе какой-либо конструкции.

Разберем цикл задач, связанных с обходами шахматной доски шахматными фигурами.

Задача 1.3. Можно ли конем обойти доску 7×7, побывав в каждой клетке ровно по одному разу, и вернуться в начальную клетку?

Ответ: Нельзя.

Р е ш е н и е. Используем шахматную раскраску. Каждым ходом конь меняет цвет клетки, на которой стоит. Чтобы обойти всю доску 7×7 и вернуться в начальную клетку, надо сделать 49 ходов. Но после 49 хода конь будет находится в клетке цвета, отличного от начального. □

Упражнение 1.1. Конь вышел с поля a_1 и через несколько ходов вернулся на него. Докажите, что он сделал чётное число ходов.

Задача 1.4. Напомним, что фигура конь ходит по доске ходом типа $(1, 2)$, то есть в одном из четырех направлений на одну клетку и, перпендикулярно этому направлению в любую сторону, еще на две клетки. Назовем “верблюдом” фигуру, ход которой имеет тип $(1, 3)$. Можно ли пройти ходом “верблюда” с произвольного поля на соседнее по стороне поле на доске 7×7?

Указание. Используем шахматную раскраску. “Верблюд” ходит только по клеткам одного цвета.

Упражнение 1.2. Может ли конь пройти с поля a_1 на поле h_8, побывав по дороге на каждом из остальных полей ровно один раз?

Упражнение 1.3. Можно ли обойти хромым королём (король не может ходить по диагоналям) все клетки шахматной доски, начав в левом нижнем углу и закончив в правом верхнем углу?

Задача 1.5. Шахматный король обошёл всю доску 8×8, побывав на каждой клетке по одному разу, вернувшись последним ходом в исходную клетку. Докажите, что он сделал чётное число диагональных ходов.

Решение. Рассмотрим шахматную раскраску. После диагонального хода король не меняет цвет клетки, на которой стоит. Если ход не диагональный, то меняет. Так как король обошел всю доску и вернулся в начальную клетку, то он сделал четное число горизонтальных ходов. Но всего сделано ровно 64 хода, значит, диагональных ходов также четное число. □

Задача 1.6. Можно ли обойти доску а) 8×8; б) 9×9 королем, чередуя диагональные и недиагональные ходы?

Ответ: а) Можно; б) Нельзя.

Р е ш е н и е. а) Да, можно, см. рисунок 1.3.

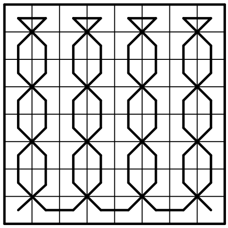


Рис. 1.3: Задача 1.6 Путь короля.

б) Используем шахматную раскраску, главна диагональ — белая. При диагональном ходе король не меняет цвет клетки, на которой стоит. Из клеток, прилегающих к краю доски 16 белых. Так как все клетки принадлежат пути короля, в котором чередуются диагональные ходы, значит, каждая из 16 белых пограничных клеток должна быть связана с белой клеткой из второго слоя. Но во втором слое их всего 12. Значит, разбить на пары 16 белых клеток, прилегающих к краю доски, и 12 белых клеток из второго слоя невозможно.

Отметим, что в пункте а) белые клетки из пограничного могут быть связаны диагональным ходом как с белыми клетками из второго слоя, так и с белыми клетками пограничного слоя. В этом случае шахматная раскраска помогает построить пример. Разобьем белые клетки из первых двух слоев на пары. Мы имеем диагональные ходы короля, соответствующие этому разбиению. Аналогичные рассуждения, позволяют построить диагональные ходы, соответствующие разбиению черных клеток первых двух слоев на пары. Из соображения чередования диагональных и недиагональных ходов, строим остальные ходы, связывающие клетки в первых двух слоях:

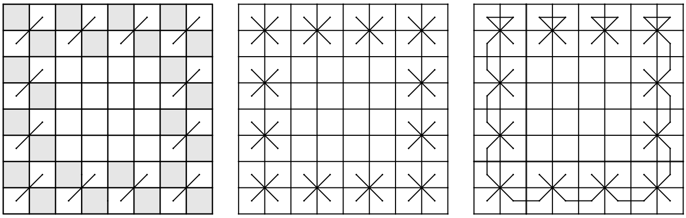


Рис. 1.4: Задача 1.6 Построение пути короля.

В этой задаче шахматная раскраска помогла нам найти ходы, с которых начинается построение примера. □

Рассмотрим теперь задачи, связанные с идеей, что при чередовании количество объектов одного типа отличается от количества объектов второго типа не более, чем на 1.

Задача 1.7. Можно ли обойти все города на рис. 1.5, побывав в каждом городе ровно один раз? Точки на схеме — города, отрезки, их соединяющие — дороги между городами.

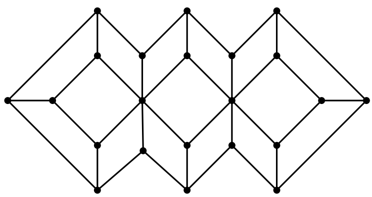


Рис. 1.5: Задача 1.7 Схема карты городов и дорог.

Ответ: Нельзя.

Р е ш е н и е. Раскрасим города в шахматном порядке, то есть так, что по дороге мы переходим из черного города в белый и наоборот:

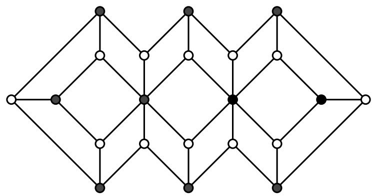


Рис. 1.6: Задача 1.7 Раскраска.

На схеме 10 черных и 12 белых городов. Если можно указать маршрут, проходящий через все города, то в нем должны чередоваться белые и черные города, следовательно, белых городов не может быть на два больше. □

Задача 1.8. Замок имеет форму правильного треугольника, разделенного на 25 маленьких залов той же формы. В каждой стене между залами проделана дверь. Путник ходит по замку, не посещая более одного раза ни один из залов. Найдите наибольшее число залов, которое ему удастся посетить.

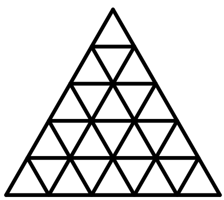


Рис. 1.7: Задача 1.8. Схема замка

Ответ: 21.

Р е ш е н и е. Раскрасим комнаты замка в шахматном порядке: Получится 25 комнат, из которых 10 черных

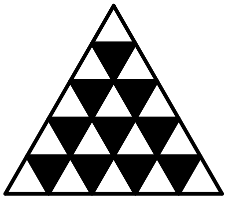


Рис. 1.8: Задача 1.8 Раскраска.

и 15 белых. В любом пути черные и белые комнаты чередуются. Значит, путник может посетить максимум 10 черных и 11 белых комнат. Пример строится несложно. □

Задача 1.9. Можно ли разрезать шестиугольник на рис. 1.9 по линиям сетки на 23 равные фигуры?

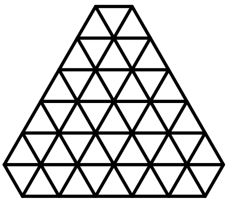


Рис. 1.9: Задача 1.9 Фигура.

Ответ: Нельзя.

Р е ш е н и е. На рисунке 46 треугольников. Значит, разрезать можно только на ромбы, состоящие из двух треугольников, имеющих общую сторону. Раскрасим фигуру в шахматную раскраску.

Каждый ромб должен накрывать один белый и один черный треугольник. Однако, их неравное количество: черных — 21, белых — 25.

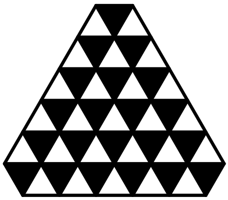


Рис. 1.10: Задача 1.9 Раскраска.

Упражнение 1.4. Замок имеет форму шестиугольника, как на рис. 1.9 В каждой стене между залами проделана дверь. Путник ходит по замку, не посещая более одного раза ни один из залов. Найти наибольшее число залов, которое ему удастся посетить.

Задача 1.10. На какое наименьшее число прямоугольников можно разбить по линиям сетки решетку на рис. 1.12?

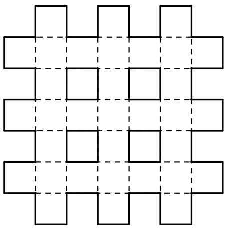


Рис. 1.11: Задача 1.10 Решетка.

Ответ: 15.

Р е ш е н и е. Раскрасим решетку в шахматную раскраску. Получится 9 черных и 24 белых клеток. Каждый из прямоугольников может содержать либо равное число белых и черных клеток, либо эти числа будут отличаться на 1. Предположим, что при разрезании получилось n прямоугольников. Обозначим x_i — количество черных, y_i — количество белых клеток в i-прямоугольнике,

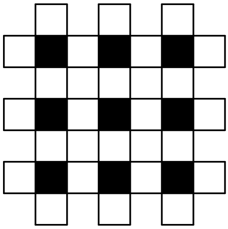


Рис. 1.12: Задача 1.10 Раскраска.

$i = 1, 2, \ldots, n$. Получаем, что

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 9,$$
$$y_1 + y_2 + \ldots + y_n = 24,$$
$$x_i + 1 \geqslant y_i, \;\; i = 1, 2, \ldots, n.$$

Сложим неравенства и получим, что

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n + n \geqslant y_1 + y_2 + \ldots + y_n,$$
$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n + 15 = y_1 + y_2 + \ldots + y_n,$$

откуда получаем, что $n \geqslant 15$.

Или, другими словами, понадобится не менее 15 частей, чтобы получить «перевес» в 15 белых клеток, если в каждой части мы можем иметь «перевес» максимум в 1 белую клетку. Пример, как разрезать на 15 прямоугольников строится несложно. □

Упражнение 1.5. На какое наименьшее число прямоугольников можно разбить по линиям сетки фигуру на рисунке?

Задача 1.11. В каждой клетке квадрата 5×5 сидит жук. По команде каждый из жуков перелетает на одну из соседних клеток. Докажите, что по крайней мере одна клетка после этого окажется свободной.

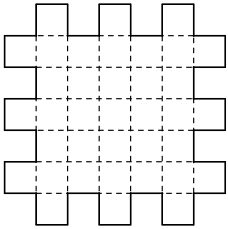


Рис. 1.13: Упражнение 1.5 Решетка — 2.

Р е ш е н и е. Предположим, что существует перемещение, при котором не окажется свободных клеток. Раскрасим квадрат в шахматную раскраску. Главная диагональ — белая. На доске 12 черных и 13 белых клеток. Заметим, что все жуки, находившиеся в белых клетках, переползут в черные и наоборот. Значит, 12 жуков из черных клеток должны занять 13 белых, а это невозможно. □

Задача 1.12. Существует ли клетчатая фигура, которую можно разрезать или на четыре трехклеточных уголка, или на три четырехклеточные Т-шки, или на две равные части?

Ответ: Не существует.

Р е ш е н и е. Предположим, что такая фигура существует. Используем шахматную раскраску. Из второго способа разрезания следует, что фигура содержит нечетное число черных и нечетное число белых клеток (как сумма трех нечетных чисел). Если эту же фигуру можно разрезать на две одинаковые части, то они будут содержать по шесть клеток. Пусть одна часть содержит k белых клеток и $6 - k$ черных. Возможны два варианта для второй фигуры. Либо она содержит k белых клеток и $6-k$ черных, либо содержит $6-k$ белых клеток и k черных. В любом случае, обе части содержат четное число черных клеток. Противоречие □

Задача 1.13. Можно ли клетчатый многоугольник изображенный на рис. 1.14 разрезать на 9 равных клетчатых многоугольников?

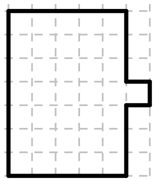


Рис. 1.14: Задача 1.13 Многоугольник.

Ответ: Нельзя.

Р е ш е н и е. Предположим, что можно разрезать фигуру на 9 клетчатых одинаковых многоугольников. Всего 36 клеток, значит, каждый многоугольник должен состоять из четырех клеток. Раскрасим фигуру в шахматную раскраску.

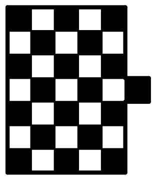


Рис. 1.15: Задача 1.13 Раскраска.

Получим 17 белых и 19 черных клеток. Все четырехклеточные фигуры, кроме буквы Т, из четырех клеток, занимают независимо от расположения одинаковое количество белых и черных клеток. Значит, нашу фигуру можно разрезать только на 9 букв Т.

Относительно выступа есть только два различных, с точностью до отражения, расположения буквы Т.

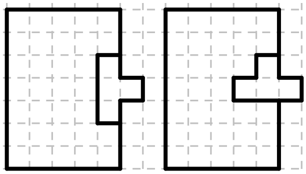


Рис. 1.16: Задача 1.13 Расположение букв Т.

Рассмотрим правый верхний угол фигуры. В обоих случаях он содержит область внутри выступа, обозначенного на рисунке 1.17 жирной границей:

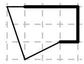


Рис. 1.17: Задача 1.13 Угловая область.

Область с такой границей нельзя замостить без наложения буквами Т, что несложно проверить перебором возможных расположений букв Т, накрывающих правый верхний угол. □

Задача 1.14. Каемкой клетчатого прямоугольника (со сторонами, не меньшими двух) назовем полосу ширины 1, идущую по краю прямоугольника. (Прямоугольник $2\times n$, $n \geqslant 2$ является и своей каемкой). Можно ли квадрат а) 2015×2015; б) 2016×2016; покрыть по линиям сетки каемками в несколько слоев (то есть над каждой клеткой квадрата должно быть поровну клеток каемок)?

Р е ш е н и е. Рассмотрим шахматную раскраску квадрата 2015x2015. Количества черных и белых клеток не равны. Значит и суммы черных и белых клеток в нескольких слоях, накрывающих квадрат, не могут быть равны. Но эти несколько слоев складываются из каемок, а в каждой каемке одинаковое количество черных и белых клеток в силу чередования. □

Задача 1.15. Фишка стоит в левом нижнем углу квадрата 4×4. За один ход она может передвинуться в соседнюю по стороне клетку. Во скольких клетках доски она может закончить свой путь, если обязана побывать во всех клетках по одному разу?

Задача 1.16. Для игры в классики на земле нарисован ряд клеток, в которые вписаны по порядку числа от 1 до 10:

1	4	5	8	9
2	3	6	7	10

Маша прыгнула снаружи в клетку 1, затем попрыгала по остальным клеткам (каждый прыжок - на соседнюю по стороне клетку) и выпрыгнула наружу из клетки 10. Известно, что на клетке 1 Маша была 1 раз, на клетке 2 – 2 раза, ..., на клетке 9 – 9 раз. Сколько раз побывала Маша на клетке 10?

Задача 1.17. В левом нижнем углу доски 9×9 стоят 9 шашек, образуя квадрат 3×3. За один ход можно выбрать какие-то две шашки и переставить одну из них симметрично относительно другой (не выходя при этом за пределы доски). Можно ли за несколько ходов переместить эти шашки так, чтобы они образовали квадрат 3×3 в: а) левом верхнем углу; б) правом верхнем углу; в) центральном квадратике 3×3?

Задача 1.18. Расставьте в квадрате 4×4 числа $1, 2, \ldots, 16$ так, чтобы каждое число было либо меньше всех чисел, стоящих в соседних (по стороне) клетках, либо больше всех этих чисел? *Указание.* Используйте шахматную раскраску, в белых клетках все числа от 1 до 8, в черных: 9 — 16.

Задача 1.19. Можно ли разрезать фигуру на рис. 1.18 на прямоугольники 1×2?

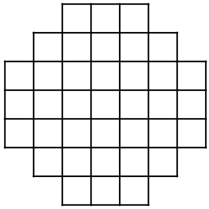


Рис. 1.18: Задача 1.19

Задача 1.20. Замок имеет форму двадцатиугольника, как на рис. 1.18 В каждой стене между залами проделана дверь. Путник ходит по замку, не посещая более одного раза ни один из залов. Найдите наибольшее число залов, которое ему удастся посетить.

Задача 1.21. Дно прямоугольной коробки выложили четырехклеточными фигурками типа Г. Затем фигурки достали и одну фигурку типа Г заменили на одну четырехклеточную фигурку типа Т. Удастся ли теперь выложить дно той же коробки?

Задача 1.22. Существует ли клетчатая фигура, которую можно разрезать или на 9 фигурок, изображенных на рис. 1.19 справа или на 6 фигур, изображенных на этом же рисунке слева?

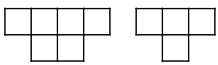


Рис. 1.19: Задача 1.22 Фигуры.

Задача 1.23. Шахматный слон ходит по диагонали на любое число клеток. Назовем ход слона нечётным, если слон за этот ход переместился на нечётное число клеток. Однажды слон, сделав несколько ходов, попал из правого нижнего в левый верхний угол шахматной доски. Докажите, что он сделал нечётное число нечётных ходов.

Указание. Так как слон ходит только по диагонали одного цвета в шахматной раскраске, то не имеет смысла раскрашивать всю доску. Можно в шахматную раскраску раскрасить только диагонали, по которым ходит слон.

1		1		1		1	
	0		0		0		0
1		1		1		1	
	0		0		0		0
1		1		1		1	
	0		0		0		0
1		1		1		1	
	0		0		0		0

Подумайте, чем отличаются четные и нечетные ходы слона.

Задача 1.24. Можно ли отметить несколько клеток на доске 10×10 так, чтобы при любом разбиении доски на прямоугольники 1×2 нашлось ровно 23 прямоугольника, содержащих одну отмеченную клетку?

Указание. Если мы используем шахматную раскраску, то при любом разбиении доски, ровно 50 прямоугольников будет содержать ровно одну черную клетку. Подумайте, что изменится, если мы перекрасим несколько черных клеток в белый цвет.

Задача 1.25. а) На две клетки шахматной доски выставляются черная и белая фишки. Разрешается по очереди передвигать их, каждым ходом сдвигая очередную фишку на любое свободное соседнее поле по вертикали или горизонтали. Могут ли на доске в результате таких ходов встретиться все возможные позиции расположения этих двух фишек, причем ровно по одному разу? б) А если разрешается сдвигать фишки в любом порядке (не обязательно по очереди)?

Ответ: Нет в обоих пунктах.

Р е ш е н и е. Предположим, что это возможно. Разобьем все позиции на два типа: обе фишки стоят в клетках разного цвета и фишки стоят в клетках одного цвета. Заметим, что при перемещении фишки в соседнюю по стороне клетку, позиции первого и второго типа чередуются. Позиций первого типа — $64 * 32$, второго — $32 * 31 + 32 * 31 = 64 * 31$. Количество позиций первого ии второго типа отличаются на 64, значит, все позиции не могут чередоваться, встречаясь ровно по одному разу.

Заметим, что в этой задаче мы разбивали на две категории не клетки на поле, а позиции фигур. □

Рассмотрим еще несколько задач на шахматную раскраску и идею чередования.

Задача 1.26. За круглым столом на совете старейшин сидят 13 человек — представители четырех племен: могикане, гуроны, апачи и делавары. Могиканин никогда не сядет рядом с гуроном, а апачи рядом с делаваром. Доказать, что представители хотя бы одного из племен за столом окажутся соседями.

Задача 1.27. За круглым столом сидят 25 мальчиков и 25 девочек. Докажите: а) что у кого-то, из сидящих за столом, оба соседа одного пола; б) что у кого-то из сидящих за столом оба соседа — мальчики.

Задача 1.28. Блоха прыгает по плоскости. Каждый прыжок имеет длину 1 см и его направление повернуто по отношению к предыдущему на $60°$(в любую сторону). После нескольких прыжков блоха вернулась в начальное положение. Докажите, что длина ее пути — четное число.

Задача 1.29. Улитка ползет по стволу с постоянной скоростью. Через каждые 15 минут она поворачивает на 90°, а в промежуках между поворотами она ползет по прямой. Докажите, что она может вернуться в исходный пункт только через целое число часов.

Задача 1.30. На кубе отмечены вершины и центры граней, а также проведены диагонали всех граней. Можно ли по отрезкам диагоналей обойти все отмеченные точки, побывав в каждой из них ровно по одному разу?

Указание. Центры граней в пути всегда идут между вершинами. Вершин на две больше, чем центров граней.

Задача 1.31. Можно ли провести в каждом квадратике 1×1 на поверхности куба $3 \times 3 \times 3$ диагональ так, чтобы получился несамопересекающийся путь?

Указание. Шахматная раскраска узлов сетки на поверхности куба. Путь идет или только по белым узлам, или только по черным.

Задача 1.32. Доска 100×100 разбита на 10000 единичных квадратиков. Один из них вырезали, так что образовалась дырка. Можно ли оставшуюся часть доски покрыть равнобедренными прямоугольными треугольниками с гипотенузой длины 2 так, чтобы их гипотенузы шли по сторонам квадратиков, а катеты — по диагоналям и чтобы треугольники не налегали друг на друга и не свисали с доски?

Шахматная раскраска работает и в пространстве, что видно из следующих задач.

Задача 1.33. Кусок сыра имеет форму кубика $3 \times 3 \times 3$, из которого вырезан центральный кубик. Мышь начинает грызть этот кусок сыра. Сначала она съедает некоторый кубик $1 \times 1 \times 1$. После того, как мышь съедает очередной кубик $1 \times 1 \times 1$, она приступает к съедению одного из соседних (по грани) кубиков с только что съеденным. Сможет ли мышь съесть весь кусок сыра?

Задача 1.34. Можно ли из 13 кирпичей $1 \times 1 \times 2$ сложить куб $3 \times 3 \times 3$ с дыркой $1 \times 1 \times 1$ в центре?

Задача 1.35. В нашем распоряжении имеются «кирпичи», имеющие форму, которая получается следующим образом: приклеиваем к одному единичному кубу по трём его граням, имеющим общую вершину, ещё три единичных куба, так что склеиваемые грани полностью совпадают. Можно ли сложить прямоугольный параллелепипед $11 \times 12 \times 13$ из таких «кирпичей»?

Глава 2

Раскраки с заданным условием

Во всех предыдущих задачах мы рассматривали шахматную раскраску. Эта раскраска среди всех раскрасок занимает такую же позицию, как и идея четности среди всех инвариантов. Однако, раскрасок, используемых при решении задач очень много. Мы начнем с того, что будем придумывать раскраски, удовлетоворяющие заданныму условиям. В дальнейшем, исходя из условия задачи, мы будем понимать, каким условиям должна удовлетворять раскраска, чтобы получить противоречие или помочь в построении конструкции.

При построении раскрасок испоьзуются методы конструирования, подсчета двумя способами и, конечно, воображение. Приведем задачи на построение раскраски и разберем неокторые из них.

Задача 2.36. а) Отметьте несколько клеток на доске 8×8 так, чтобы в каждой вертикали и каждой горизонтали было по три отмеченные клетки. б) Отметьте несколько клеток на доске 6×8 так, чтобы во всех вертикалях было одинаковое количество отмеченных клеток и во всех горизонталях было одинаковое количество отмеченных клеток. Сколько отмеченных клеток может быть на доске? в) Закрасьте несколько клеток доски 8×8 так, чтобы во всех вертикалях было одинаковое количество закрашенных клеток, а во всех горизонталях — различное.

Указание. в) Сначала воспользуйтесь методом подсчета двумя способами. Так как во всех вертикалях должно быть одинаковое количество закрашенных клеток, то количесвто закрашенных клеток на всей доске должно делиться на 8. В горизонталях количество закрашенных клеток — это 8 различных чисел, принимающих значения от 0 до 8. То есть, из 9 чисел от 0 до 8 нужно выбрать 8 чисел так, чтобы их сумма делилась на 8. Это можно записать как $0 + 1 + 2 + \ldots + 8 - x = 36 - x$, где x — то число, которое не войдет в 8 выбранных. Так как $36 - x \vdots 8$, то $x = 4$, всего закрашенных клеток на доске будет 32, в каждой вертикали по 4, в горизонталях: 0, 1, 2, 3, 5, 6, 7, 8. $\square$

Задача 2.37. а) Раскрасьте некоторые клетки доски 8×8 так, чтобы у каждой клетки было ровно две соседние по стороне закрашенные клетки. б) Можно ли некоторые клетки доски 6×20 закрасить так, чтобы у каждой клетки было ровно две соседние по стороне закрашенные клетки?

Решение. а) Воспользуемся методом постепенного конструирования. На рис. 2.1 цифрами обозначены клетки, которые дают однозначную информацию о своих соседях в том порядке, в котором идут номера этих клеток. Белым цветом обозначены клетки, информация о цвете которых пока не определена, серым — те клетки, которые точно не закрашены, черным — те клетки,

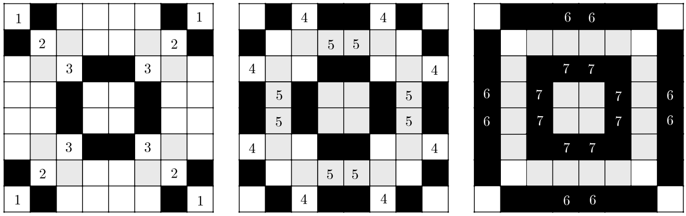


Рис. 2.1: Постепенное конструирование в задаче 2.37 а).

которые точно должны быть закрашены.

Рассмотрим клетки с номером 1. У них ровно два соседа, значит оба должны быть закрашены. У клеток с номеро 2 уже есть по два закрашенных соседа, значит два других соседа точно не закрашены. У клеток с номером 3 есть два соседа, которые точно не закрашены, значит два других соседа точно закрашены. У клеток с номером 4 всего три соседа, один из которых точно не закрашен, значит, два других точно закрашены.

Продолжите рассуждения самостоятельно, используя рисунок 2.1. □

Задача 2.38. а) Отметьте на шахматной доске 8×8 несколько белых клеток так, чтобы у каждой черной клетки была ровно одна соседняя по стороне отмеченная белая клетка. б) Отметьте некоторые клетки доски 8×8 так, чтобы у каждой клетки была ровно одна соседняя по стороне отмеченная клетка.

Р е ш е н и е. а) Опять воспользуемся методом постепенного конструирования. Числами будем обозначать клетки в том порядке, в котором отмечаили эти клекти, рис. 2.2. Ясно, что у угловой черной клетки должен быть один отмеченный сосед. Всего два варианта. Выберем любой из них. Обозначим эту клетку 1 — первая отмеченная клетка. У всех черных клеток-соседей уже есть отмечен-

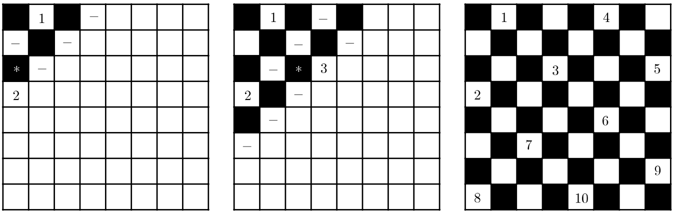


Рис. 2.2: Постепенное конструирование в задаче 2.38 а).

ная клетка, значит, их соседи — белые клетки, не являются отмеченными. Поставим в них значок «-». Тогда у черной клетки, отмеченной на левом рисунке значком «*» осталась ровно одна белая клетка-сосед, в которой нет «-». Значит, это — вторая отмеченная клетка. Обозначим у всех черных клеток-соседей клетки 2 все соседние белые клетки значком «-». Тогда у черной клетки, отмеченной на среднем рисунке значком «*» три соседние клетки отмечены значком «-», значит, мы нашли место для третьей отмеченной клетки. Поступая аналогично, расстваим все отмеченные клетки на доске.

б) *Указание.* Заметим, что при шахматной раскраске у белых клеток соседи — черные клетки, а у черных — белые. Значит, можно на одной картинке объединить результаты пункта а) для белых и черных клеток. □

Задача 2.39. Отметьте некоторые клетки бесконечной клетчатой доски 8×8 так, чтобы каждый прямоугольник а) 2×4; б) 2×3; в) 2×2 содержал ровно одну закрашенную клетку.

Решение. а) Рассмотрим отмеченную клетку. Во всех прямоугольниках 2×3, содержащих эту клетку больше нет отмеченных клеток. Значит, фигура, изображенная на рис. 2.3 слева не содержит больше ни одной отмеченной клетки. По условию задачи, прямоугольник 2×4, изображенный на рис. 2.3 в центре должен содержать закрашенную клетку. Это может быть только клетка, отмеченная значком «*». Получаем, что вместе с отмеченной клеткой должны быть отмечены и клетки, изображенные на рис. 2.3 справа.

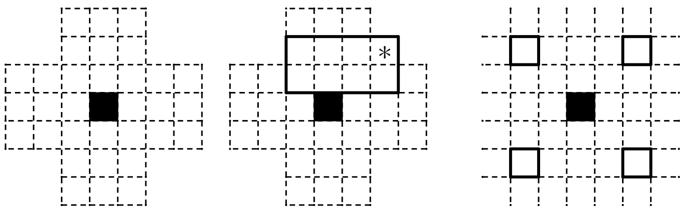


Рис. 2.3: Постепенное конструирование в задаче 2.39 а).

Продолжая дальше эти рассуждения, получим раскраску:

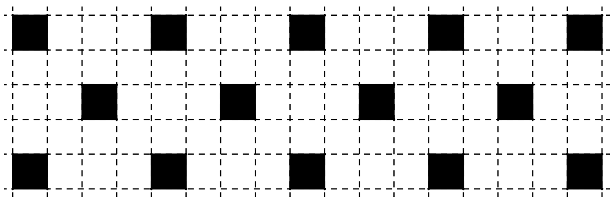


Рис. 2.4: Раскраска в задаче 2.39 а).

б) Рассмотрим отмеченную клетку. Во всех прямоугольниках 2×3, содержащих эту клетку больше нет отмеченных клеток. Значит, фигура, изображенная на рис. 2.5 слева не содержит больше ни одной отмеченной клетки. По условию задачи, прямоугольник 2×3, изображенный на рис. 2.5 справа должен содержать закрашенную клетку. Противоречие.

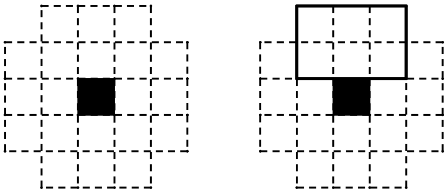


Рис. 2.5: Постепенное конструирование в задаче 2.39 б).

Получаем, что не существует раскраски, удовлетворяющей условию пункта б).

в) Рассмотрим отмеченную клетку. Во всех квадратах 2×2, содержащих эту клетку больше нет отмеченных клеток. Значит, квадрат 3×3, изображенная на рис. 2.6 не содержит ни одной отмеченной клетки, кроме центральной. По условию задачи, квадрат, изображенный на рис. 2.6 сплошным цветом должен содержать закрашенную клетку. Значит, либо клетка 1, либо клетка 2 закрашена.

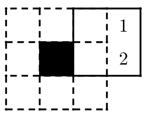


Рис. 2.6: Постепенное конструирование в задаче 2.39 в).

Продолжив рассуждение, получим две раскраски:

Заметим, что возможны и другие раскраски, комбинирующие эти две. □

В этой задаче мы получили единственно возможную раскраску с доказательством единственности; доказали, что раскраска не существует; получили множество раскрасок.

Задача 2.40. Заскрасьте некоторые клетки доски $8\times$

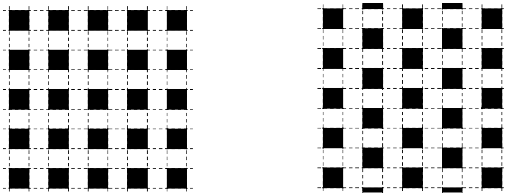


Рис. 2.7: Раскраски к задаче 2.39 в).

8 так, чтобы каждый прямоугольник а) 1×2; б) 1×3; в) 1×4; г) 1×5 содержал ровно одну закрашенную клетку.

Задача 2.41. Раскрасьте некоторые клетки доски 8×8 так, чтобы каждый квадрат а) 2×2; б) 3×3 содержал ровно одну закрашенную клетку. Каким наименьшим и каким наибольшим количеством клеток можно обойтись?

Задача 2.42. Раскрасьте клетки доски 8×8 в четыре цвета так, чтобы а) каждый прямоугольник 1×4; б) квадрат 2×2 содержал клетки всех четырех цветов.

Задача 2.43. а) Раскрасьте некоторые клетки бесконечного клетчатого поля так, чтобы каждый крест из пяти клеток содержал ровно одну закрашенную клетку. б) Раскрасьте клетки бесконечного клетчатого поля в пять цветов так, чтобы каждый крест из пяти клеток содержал клетки всех пяти цветов.

Задача 2.44. а) Можно ли отметить несколько клеток на доске 8×8 так, чтобы каждый а) уголок из 4 клеток; б) буква T из 4 клеток; в) буква S из 4 клеток; г) прямоугольник 2×3; д) прямоугольник 2×4; е) прямоугольник 2×5 содержал ровно одну закрашенную клетку?

Задача 2.45. Можно ли отметить несколько клеток на доске 8×8 так, чтобы каждый квадрат 3×3 содержал ровно а) две; б) три; в) четыре отмеченные клетки?

Задача 2.46. Можно ли отметить 5 клеток на доске размером 8×8 так, чтобы любой квадрат 3×3 содержал в точности одну отмеченную клетку? Сколько клеток можно отметить на доске, чтобы было выполнено условие задачи? Приведите все ответы.

Задача 2.47. а) Отметьте на доске 8×8 несколько клеток так, чтобы любой квадрат 2×2 содержал нечетное число отмеченных клеток, а любой прямоугольник 1×4 — четное. б) Отметьте на доске 8×8 несколько клеток так, на всей доске было четное число отмеченных клеток, а в любой четырехклеточной фигуре типа Г — нечетное. в) Отметьте на доске 8×8 несколько клеток так, чтобы любой квадрат 2×2 содержал четное число отмеченных клеток, а любая четырехклеточная фигура типа Г — нечетное.

Задача 2.48. Какое наименьшее количество клеток квадрата 5×5 нужно закрасить так, чтобы в любом прямоугольнике 1×4 и в любом квадрате 2×2 была хотя бы одна закрашенная клетка? Приведите пример такой раскраски.

Задача 2.49. Докажите, что если любой прямоугольник 2×4 с границами, расположенными по линиям сетки, на бесконечной клетчатой доске, содержит ровно одну закрашенную клетку, то найдется прямоугольник 1×5, содержащий две закрашенные клетки.

Задача 2.50. а) Существует ли трехцветная раскраска доски 8×8 такая, что каждый уголок из трех клеток содержит по одной клетке всех трех цветов? б) Существует ли четырехцветная раскраска доски 8×8 такая, что каждй уголок из трех клеток содержит три клетки различных цветов?

Задача 2.51. Можно ли раскрасить куб $4 \times 4 \times 4$ в шахматную раскраску? То есть, в два цвета так, что любые две соседние по стороне клетки были раскрашены в различные цвета.

Задача 2.52. Отметьте на гранях куба $4 \times 4 \times 4$ некоторые клетки так, чтобы любая полоска 1×3 накрывала ровно две отмеченные клетки.

Задача 2.53. Назовем крокодилом шахматную фигуру, ход которой заключается в прыжке на m клеток по вертикали или по горизонтали, и потом на n клеток в перпендикулярном направлении. Докажите, что для любых m и n можно так раскрасить бесконечную клетчатую доску в 2 цвета (для каждых конкретных m и n своя раскраска), что всегда 2 клетки, соединенные одним ходом крокодила, будут покрашены в разные цвета.

Подумайте, как связаны следующие задачи на расстановку чисел и задачи на раскраску.

Задача 2.54. Заполните таблицу 6×6 числами так, чтобы сумма чисел во всей таблице была четной, а в каждом прямоугольнике 1×4 — нечетной.

Задача 2.55. Заполните таблицу 8×8 числами так, сумма чисел во всей таблице была четной, а в а) каждом квадрате 3×3; б) в каждой фигуре из четырех клеток, типа S — нечетной. Можно ли это сделать для в) уголка из четырех клеток; г) букв Т из четырех клеток?

Задача 2.56. Заполните таблицу 8×8 числами так, сумма чисел в каждом квадрате 2×2 была четной, а в каждой фигуре из четырех клеток типа Г — нечетной.

Задача 2.57. Заполните таблицу 8×8 числами так, сумма чисел в каждом квадрате 2×2 была нечетной, а в каждом прямоугольнике 1×4 — четной.

Задача 2.58. Заполните таблицу 6×6 числами $1, 2, 3$ так, чтобы сумма чисел во всех прямоугольниках 1×3 делилась на 3, а в любом уголке из трех клеток не делилась.

Задача 2.59. Заполните таблицу 8×8 числами так, чтобы: а) сумма чисел в каждом квадрате 2×2 не делилась на 4, а в каждом прямоугольнике 1×4 — делилась; б) сумма чисел в каждом квадрате 2×2 делилась на 4, а в каждом прямоугольнике 1×4 — не делилась.

Задача 2.60. Можно ли расставить в клетках таблицы 100×100 натуральные числа так, чтобы при любом разрезании этой таблицы на прямоугольники 1×2 нашлось ровно 2015 прямоугольников, сумма чисел на которых четна (а на остальных — нечетна)?

Указание. Сравните с задачей 1.24.

Задача 2.61. Расставьте натуральные числа в таблице 8×8 так, чтобы в любом вертикальном прямоугольнике $1 \times n$ сумма чисел была нечетная, а в любом горизонтальном — четная, при $n = 1, 2, 3$.

Глава 3

Различные раскраски

Задача 3.62. Можно ли разрезать доску 6×6 на: а) четырехклеточные фигуры типа Т; б) четырехклеточные фигуры типа Г; в) прямоугольники 1×4? **Р е ш е н и е.** Во всех случаях, если разрезание возможно, то количество фигур должно быть $36/4=9$. Шахматная раскраска поможет в случае а). Количество белых и черных клеток при шахматной раскраске равно 18. Однако, буква Т накрывает либо 1, либо 3 черные клетки, т.е. нечетное число. Девять фигур типа Т накроют нечетное число черных клеток.

Однако, в случаях б) и в) шахматная раскраска уже не поможет, т.к. каждая фигура содержит по две черные и две белые клетки. Попробуем использовать такую раскраску, чтобы фигурки типа Г содержали нечетное число черных клеток, а на всей доске было четное число черных клеток. Рассмотрим раскраску типа «зебра» (см. рис. 3.1).

Каждая фигура из 4 клеток типа Г содержит либо одну, либо три черные клетки. Далее решение аналогично пункту а).

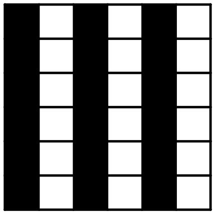


Рис. 3.1: Задача 3.62 Раскраска «Зебра».

Поможет ли раскраска «зебра» решить пункт в)? Эта раскраска позволяет различать горизонтальные и вертикальные прямоугольники: каждый горизонтальный прямоугольник содержит по две белые и по две черные клетки, а каждый вертикальный — либо 0, либо 4 черные клетки. Числа 0 и 4 имеют общее свойство: они делятся на 4. Общее число черных клеток на доске — 18=4x4+2, значит, должно быть нечетное число горизонтальных прямоугольников. Это уже дополнительная информация. Но пока никакого противоречия. Чем горизонтальные прямоугольники "лучше"вертикальных? Ничем. Рассмотрев горизонтальную раскраску "зебра получим, что и количество вертикальных прямоугольников должно быть нечетное. Но всего прямоугольников 9. Значит, количество вертикальных и горизонтальных прямоугольников не может быть нечетным. □

В пункте в) мы впервые использовали в одной задаче две раскраски(на самом деле одну, но с поворотом) и идею, что не только клетки можно разбить(раскрасить) на две категории, но и фигурки разрезания можно разбивать на различные категории и исследовать их численные характеристики.

Упражнение 3.6. Придумайте как использовать следующие раскраски для решения пункта в) задачи

3.62 :

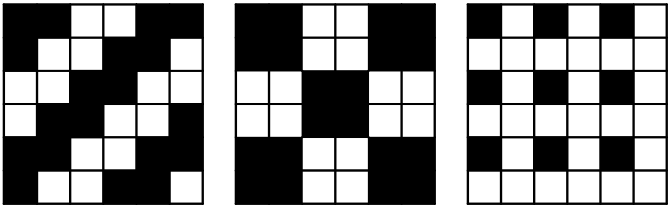


Рис. 3.2: Задача 3.62 Крупная диагональная, Крупая шахматная, Горох.

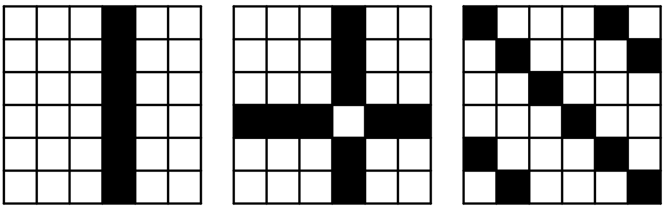


Рис. 3.3: Задача 3.62 Редкая вертикальная, Редкая решетка, Редкая диагональная.

Задача 3.63. Можно ли разрезать доску 7×7 с вырезанной угловой клеткой на четырехклеточные фигуры типа Г?

Р е ш е н и е. Всего должно получиться 12 фигур. Используем раскраску "Зебра". На доске получится 21 белая и 27 черные клетки.

Каждая буква Г занимает либо 3 черные, 1 белую клетки, либо 1 черную, 3 белых клетки. Пусть фигур первого типа — x, второго — y. Тогда имеем соотношения: $3x + y = 27$, $x + 3y = 21$. Откуда делаем вывод, что количество фигур первого и второго типа имеют различную четность. Но в сумме их — 12. Противоречие. □

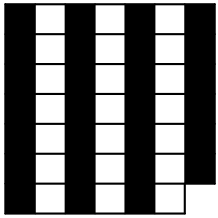


Рис. 3.4: Задача 3.63 Зебра.

Разберем задачи, где используется не двухцветная раскраска.

Задача 3.64. Можно ли разрезать доску 8×8 с вырезаным уголком на прямоугольники 1×3 по линиям сетки?

Р е ш е н и е. Общее количество клеток 64-1=63 делится на 3: 63/3=21. Если мы сможем разрезать, то должен получиться 21 прямоугольник. Если мы попытаемся использовать шахматую раскраску, то получим, что у нас 31 белая и 32 черные клетки, а прямоугольник 1x3 накрывает либо 1, либо 2 белые клетки.

Пусть x — число прямоугольников, содержащих одну белую клетку, а y — число прямоугольников, содержащих по две белые клетки. Уравнение 31 = x+2y имеет решение в целых числах. Так что, пока противоречия нет.

Первый способ. Надо придумать раскраску, которая имеет что-то общее для всех прямоугольников 1x3. По аналогии с шахматной (когда в любой прямоугольник 1x2 попадает по одной клетке каждого из двух цветов) рассмотрим трехцветную раскраску такую, что в каждый прямоугольник 1x3 попадает по одной клетке каждого из трех цветов:

Если разрезание возможно, то 21 прямоугольник 1x3 будет содержать 21 черную, 21 серую и 21 белую клетки.

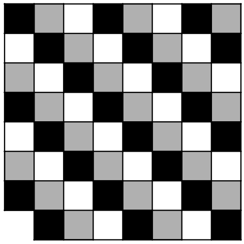


Рис. 3.5: Задача 3.64 Трехцветная диагональная раскраска.

При этом доска содержит 22 черных, 21 серую и 20 белых клеток.

Второй способ. Рассмотрим другую трехцветную раскраску:

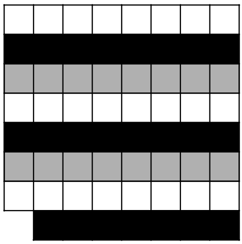


Рис. 3.6: Задача 3.64. Трехцветная горизонтальная раскраска.

Всего на доске 24 белых, 16 серых и 23 черных клеток. Прямоугольники 1×3 делятся на вертикальные и горизонтальные. Каждый вертикальный прямоугольник занимает по одной клетке всех трех цветов. А каждый горизонтальный — число, делящееся на 3 (0 или 3). Пусть x

— число вертикальных прямоугольников. Получаем, для белых клеток выполнено равенство $24 = x + 3k$, а для серых клеток: $16 = x + 3l$, откуда имеем, что 8 делится на 3, противоречие.

Третий способ. Упростим раскраску. Оставим из трехцветной диагональной только каждую третью строчку:

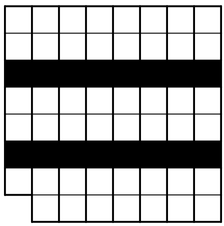


Рис. 3.7: Задача 3.64 Двуцветная редкая горизонтальная раскраска.

Все прямоугольники 1x3 делятся на вертикальные и горизонтальные. Каждый горизонтальный прямоугольник содержит 0 или 3 черные клетки, а каждый вертикальный — по 1.

Всего черных клеток 16, значит $(16-x)\vdots 3$, где x — количество вертикальных прямоугольников. Получаем, что количество вертикальных прямоугольников при делении на 3 дает остаток 1. Пока никакого противоречия. Вспомним, что в задаче никак не фигурировало деление прямоугольников на вертикальные и горизонтальные. Это наш выбор раскараски привел нас к выводу о свойстве количества вертикальных прямоугольников. Значит, то же самое можно сказать и о горизонтальных прямоугольниках. Действительно, взяв вместо горизонтальных черных полосок вертикальные и повторив все рассуждения, получим, что количество горизонтальных прямоугольников при делении на 3 дает остаток 1. Всего прямоугольников 21, значит, делится на 3, а сумма двух чисел вида $3k + 1$ не может делиться на 3. Противоречие.

Заметим, что по сравнению с решением вторым способом мы упростили раскраску, но усложнили рассуждения, необходимостью использовать две раскраски.

Четвертый способ. Объединим вместе две раскраски, горизонтальную и вертикальныую из предыдущго способа. Клетку, принадлежащую двум раскраскам не красим.

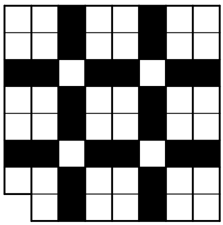


Рис. 3.8: Задача 3.64 Решетка.

Всего на доске 24 черных и 39 белых клеток. Каждый прямоугольник 1×3 накрывает либо 2 черные и одну белую, либо 1 белую и 2 черные клетки. Пусть у нас x прямоугольников первого типа и y прямоугольников второго типа. Имеем соотношения: $2x + y = 24$; $x + 2y = 39$. Откуда получаем, что $x = 3$, $y = 18$. Заметим, что прямоугольник, накрывающий белую клетку, стоящую в пересечении черной строки и черного столбца, обязан накрывать две черные клетки. Значит, раз пересечений 4 и один прямоугольник не может накрывать сразу две из этих 4 клеток, прямоугольников первого типа не менее 4. Но мы получили, что их ровно 3. Противоречие.

Пятый способ. Метки могут использоваться не только для того, чтобы различать объекты, но и сами выступать как объекты для вычислений. Запишем в каждую клетку доски числа 1, 2, 3 по следующему правилу. В каждую черную клетку на рис. 3.5 запишем число 1, в каждую серую — 2, в каждую белую — 3. Каждый прямоугольник накрывает три числа, в сумме делящиеся на 3 (равную 6). Однако, сумма всех чисел на доске равна $1 \cdot 22 + 2 \cdot 21 + 3 \cdot 20 = 124$ и на 3 не делится.

В этом способе мы расставляли числа по диагонали. Попробуйте расставить числа, используя горизонтальную раскраску. □

Как показали последние примеры, в одной задаче мы можем использовать различные способы присвоения меток. От выбора раскраски зависит сложность дальнейших рассуждений. Еще раз обратим внимание на такой факт: если применение раскраски не приводит к противоречию, то это еще не значит, что конструкцию построить возможно. Но во всех решениях есть общее: мы везде использовали методы от противного и подсчет двумя способами.

Упражнение 3.7. Используйте в задаче 3.62 в) четырехцветные раскраски. Подумайте, как связаны четырехцветные диагональная и четырехцветная вертикальная с двухцветными: редкой диагональной и редкой вертикальной (см. рис. 3.3).

Упражнение 3.8. Вспомните задачу 2.58 и решите следующую: можно ли разрезать квадрат 6×6 на 11 прямоугольников 1×3 и один трехклеточный уголок?

Рассмотрим еще пример, где мы будем использовать численные свойства раскрасок.

Задача 3.65. На шахматной доске расставили 8 ладей так, что они не бьют друг друга. Докажите, что в черных клетках стоит четное число ладей.

Р е ш е н и е. Нам нужно ввести характеристики, позволяющие говорить о четности ладей, стоящих в черных клетках. Как можно численно различать белые и черные клетки? Заметим, что если ввести координаты на доске, то есть каждой клетке поставить в соответствие номер строки и столбца, где стоит клетка, то белым клекткм соотвествуют пары чисел, сумма которых четна, а черным — пары с нечетной суммой (главная диагональ, идущая из левого нижнего угла в правый верхний — белая; левая нижняя клетка имеет координаты — (1,1)). Поставим в соответствие ладье сумму чисел координат клеток, где она стоит. Ладьям, стоящим в черных клектах, соотвествуют нечетные числа, а в белых — четные. Сумма всех пар чисел, для 8 не бьющих друг друга ладей, равна $(1+2+3+4+5+6+7+8)+(1+2+3+4+5+6+7+8)$ — четное число. Значит, нечетных слагаемых — четное число. □

Задача 3.66. Дно прямоугольной коробки выложили прямоугольниками 1×4 и квадратами 2×2. Затем все фигуры высыпали и один квадрат поменяли на прямоугольник. Удастся ли снова выложить дно коробки?

Р е ш е н и е. В этой задаче нам понадобится раскраска, которая дает различные характеристики прямоугольнику 1×4 и квадрату 2×2. Это раскраска — горох. каждый квадрат накрывает ровно одну черную клетку, а каждый прямоугольник — 0 или 2 черные клетки. Значит, количество черных клеток на дне коробки по четности совпадает с количеством квадратов 2×2. Но в первом и втором случае — это различные по четности числа. □

Упражнение 3.9. Решите эту задачу при помощи четырехцветной диагональной раскраски. Указание: обратите внимание, что если диагонали пронумеровать 1, 2, 3, 4, 1, ..., то каждый квадрат накрывает 4 числа, в сумме кратные 4, а каждый прямоугольник — 4 числа, в сумме дающие 10.

Задача 3.67. Дно прямоугольной коробки выложили четырехклеточными фигурами типа Г и квадратами 2×2. Затем все фигуры высыпали и один квадрат поменяли на фигуру Г. Удастся ли снова выложить дно коробки?

Задача 3.68. Дно прямоугольной коробки выложили прямоугольниками 1×4 и четырехклеточными фигурами типа Г. Затем все фигуры высыпали и один прямоугольник поменяли на фигуру Г. Удастся ли снова выложить дно коробки?

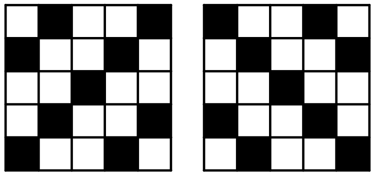
Задача 3.69. Дно прямоугольной коробки выложили четырехклеточными фигурками типа Г и четырехклеточными фигурками типа S. Затем фигурки достали и одну фигуру Г поменяли на фигуру S. Удастся ли теперь выложить дно той же коробки?

Задача 3.70. В клетчатом квадрате 5×5 по линиям сетки без наложений разместили 8 прямоугольников 1×3. Какая клетка могла оказаться ненакрытой ни одним прямоугольником? (Укажите все варианты).

Ответ: Только центральная клетка.

Р е ш е н и е. Рассмотрим или трехцветную диагональную, или редкую диагональную раскраску.

Черных клеток 9. Каждый прямоугольник накрывает ровно одну черную клетку, значит, одна из черных клеток окажется ненакрытой. Получаем 9 вариантов. Однако, если мы попытаемся разместить прямоугольники так, чтобы оказалась ненакрытой угловая клетка, то у нас ничего не выйдет. Действительно, в этой раскраске две угловые клетки — черные, две — белые. Но при расположении прямоугольников они абсолютно одинаковы, так как любое размещение прямоугольников мы можем поворачивать и отражать и получать другие варианты. Повернем раскраску на 90°. Получим другие 9 вариантов для пустой клетки.



Ненакрытая клетка должна входить и в первый и второй вариант. В первую и вторую раскраску входит только центральная клетка. Значит, только она и может оказаться свободной. Пример строится несложно. □

Задача 3.71. На доске 8×8 Паша расставил 21 прямоугольный трёхпалубный корабль, а Витя выстрелил один раз и не попал. Куда он мог выстрелить? (Укажите все варианты).

Задача 3.72. В квадрате 7×7 клеток размещено 16 плиток 1×3. Доказать, что свободная клетка либо лежит в центре, либо примыкает к границам квадрата. Найдите все варианты. Приведите примеры для каждого.

Задача 3.73. В квадрате 10×10 разместили 32 плитки размером 1×3 и одну плитку — размером 2×2. Может ли плитка 2×2 : а) закрывать центр квадрата; б) примыкать к границе квадрата; в) находиться в углу квадрата?

Рассмотрим еще одну любопытную задачу, которую можно решить при помощи раскраски.

Задача 3.74. На доске расставлены шашки:

○		○		○		○	
	○		○		○		○
○		○		○		○	
	○						○
○						○	
	○		○		○		○
○		○		○		○	
	○		○		○		○

Каждая может бить другую по шашечным правилам, то есть шашка должна перепрыгнуть через другую, соседнюю по диагонали, шашку на следующую свободную по диагонали клетку. Дамок нет. Может ли на доске остаться одна шашка? Если может, то определите все ее возможные положения.

Ответ: Нет.

Р е ш е н и е. Раскрасим клетки, где стоят шашки, в три цвета:

1		1		1		1	
	2		2		2		2
3		3		3		3	
	1		1		1		1
2		2		2		2	
	3		3		3		3
1		1		1		1	
	2		2		2		2

С точки зрения этой задачи все шашки одинаковые, поэтому, будем говорить о цвете шашки, как о цвете клетки, в которой она стоит. Заметим, что когда одна шашка бьет другую, то исчезают две шашки разных цветов и появляется шашка третьего цвета.

Задача свелась к известной задаче про амебы: имеются амебы трех цветов. Когда встречаются амебы двух различных цветов, они сливаются в одну амебу третьего цвета. При каких начальных условиях на количество амеб каждого типа они все смогут слиться в одну амебу?

Инвариантом в этой задаче является четность разностей количеств шашек разных цветов. Действительно, пусть x, y, z — количество шашек, первого второго и третьего типа соответственно. Возможны всего три варианта изменения количеств шашек:

x	y	z
+1	-1	-1
-1	+1	-1
-1	-1	+1

Заметим, что разности $x - y$, $y - z$, $z - x$ не меняют своей чтености. Изначально шашек 1-го и 2-го цвета по 10, третьего — 8. Все цвета отличаются на четное число. Значит, разности $x - y$, $y - z$, $z - x$ будут делиться на 2, независио от хода процесса. Если бы в конце осталась одна шашка, то x, y, z приняли значения 0, 0, 1 в некоторой перестановке, а их разности $x - y$, $y - z$, $z - x$ — значения 0, 1, -1. То есть два нечетных числа, одно — четное. Противоречие. Одна шашка остаться не может. $\square$

Задача 3.75. Решите предыдущую задачу для следующей начальной расстановки шашек:

○		○		○		○	
	○		○		○		○
○		○		○		○	
	○				○		○
○		○				○	
	○		○		○		○
○		○		○		○	
	○		○		○		○

Расммотрим еще одну задачу на процессы, которую помогает решить раскраска.

Задача 3.76. В 17 клеток квадрата 5×5 поставили по одной фишке. В один ход каждую фишку передвигают в соседнюю по стороне клетку, соблюдая два правила: запрещено ставить две фишки в одну клетку и, если фишка в какой-то ход передвигалась по горизонтали, то в следующий ход ее надо передвинуть по вертикали, и наобоорот. Может ли процесс продолжаться сколь угодно долго?

Р е ш е н и е. Предположим, что такой процесс возможен. Сначала рассмотрим простую конструкцию фишек, которую можно двигать по правилам бесконечно долго. Это — квадрат из четырех фишек, которые перемещаются по часовой стрелке. Квадрат 5×5 на квадраты 2×2 не разбивается, но это еще не значит, что искомой конструкции нет. Попробуем использовать перемещения в квадрате 2×2. Раскрасим квадрат 5×5 в 4 цвета так, что квадратах 2×2 фишки могут двигаться по правилам, чередуя цвета $1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 1 \to \ldots$:

1	2	1	2	1
4	3	4	3	4
1	2	1	2	1
4	3	4	3	4
1	2	1	2	1

Получаем, что у нас 9 клеток цвета «1», 6 клеток цвета «2», 4 клетки цвета «3», 6 клеток цвета «4». Заметим, что двигаясь по правилам, фишки из клеток цвета «1» попадают в клетки цвета «2» или «4», а следующим ходом они однозанчно попадают в клетки цвета «3». Так как клеток цвета «3» всего 4, то изначально в клетках цвета «1» стояло не более 4 фишек. Получаем, что в клетках «1» и «3» цвета изначально было не более 8 фишек. Тогда в клетках «2» и «4» цвета изначально стояло не менее 9 фишек. После первого хода они окажутся в клетках «1» и «3» цвета. Так клеток «3» цвета всего 4, то в клетках «1» цвета окажется не менее 5 фишек, которые еще через два хода должны попасть в 4 клетки «3» цвета. Противоречие. 17 фишек не смогут двигаться дольше 3 ходов. □

Задача 3.77. Можно ли выложить шахматную доску 32 костями домино так, чтобы 17 из них были расположены горизонтально, а 15 — вертикально?

Задача 3.78. Можно ли выложить квадрат 8×8, используя 15 прямоугольников 1×4 и один уголок из 4 клеток?

Задача 3.79. В каждой клетке квадрата 9×9 сидит жук. По команде каждый из них перелетает на одну из соседних по диагонали клеток. Доказать, что по крайней мере 9 клеток после этого окажутся свободными.

Задача 3.80. Дно прямоугольной коробки выложили прямоугольниками 1×3 и уголками из трех клеток. Один прямоугольник потеряли и заменили его уголком. Можно ли теперь выложить то же дно коробки?

Задача 3.81. Из доски 8×8 вырезали одну угловую клетку. Можно ли разрезать полученную фигуру на а) уголки из трех клеток; б) уголки и прямоугольники из трех клеток?

Задача 3.82. Можно ли разбить квадрат 10×10 на фигуры: а) четырехклеточные фигуры типа Г; б) четырехклеточные фигуры типа Т?

Задача 3.83. На шахматной доске стоят несколько королей. Докажите, что их можно разбить не более, чем на четыре группы так, чтобы короли каждой группы друг друга не били.

Задача 3.84. В одном из углов шахматной доски лежит плоский картонный квадрат 2×2, а в противоположном углу — квадрат 1×1. Двое играющих по очереди перекатывают каждый свой квадрат через сторону: Боря — большой квадрат, а Миша — маленький. Боря выигрывает, если Мишин квадрат окажется на клетке, накрытой Бориным квадратом. Начинает Боря. Может ли он выиграть независимо от игры Миши?

Задача 3.85. Из 32 прямоугольников 1×2 сложен квадрат. Докажите, что можно покрасить по 8 прямоугольников красной, синей, желтой и зеленой красками так, чтобы любые два прямоугольника, имеющие общий участок границы (ненулевой длины), были окрашены различно.

Указание. Нам необходимо наделить по 8 прямоугольников одной из 4 меток. Каждому прямоугольнику соответствует ровно одна черная клетка при шахматной раскраске доски. Если разбить черные клетки на 4 группы по 8 клеток так, что прямоугольники, соответствующие клеткам одной группы не могут иметь общий участок границы, то можно каждому прямоугольнику поставить в соотвествие номер той группы, клетку которой он содержит.

Решение.

1		3		1		3	
	2		4		2		4
3		1		3		1	
	4		2		4		2
1		3		1		3	
	2		4		2		4
3		1		3		1	
	4		2		4		2

□

Задача 3.86. Можно ли три попарно соседние грани кубика $4 \times 4 \times 4$ оклеить 16 полосками 3×1?

Указание. Придумайте такую раскраску, чтобы каждый прямоугольник 3×1 содержал четное число закрашенных клеток, а три соседние грани куба — нечетное.

Задача 3.87. Можно ли прямоугольную доску размером а) 5×9; а) 7×9 разрезать на уголки из 3 клеток?

Ответ: а) Да; б) Да.

Решение. □

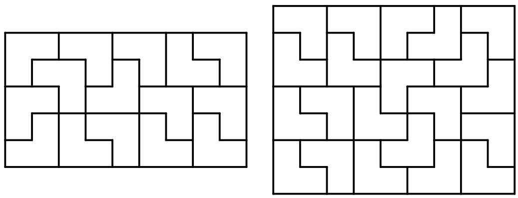


Рис. 3.9: Задача 3.87 Доски 5×9 и 7×9 на уголки.

Задача 3.88. Можно ли доску 5×7 покрыть уголками из трех клеток в несколько слоев так, чтобы каждая клетка была покрыта одним и тем же количеством уголков?

Указание. Вспомните задачу 2.50

Решение. Предположим, что можно. Рассмотрим четырехцветную раскраску такую, что каждй уголок из трех клеток содержит три клетки различных цветов:

1	2	1	2	1	2	1
3	4	3	4	3	4	3
1	2	1	2	1	2	1
3	4	3	4	3	4	3
1	2	1	2	1	2	1

Тогда у нас 12 клеток цвета «1»; 9 клеток цвета «2»; 8 клеток цвета «3»; 6 клеток цвета «4». Все уголки делятся на четыре типа: накрывающие клетки всех цветов, кроме «1»; накрывающие клетки всех цветов, кроме «2»; накрывающие клетки всех цветов, кроме «3»; накрывающие клетки всех цветов, кроме «4».

Пусть у нас получилось n уголков, накрывших доску в k слоев. Пусть, далее, уголков первого типа — x; второго типа — y; третьего типа — z; четвертого типа — t. Клетки цвета «1» принадлежат уголкам второго, третьего или четвертого типа. Имеем равенство: $y + z + t = 12k$. Аналогично, получаем $x + z + t = 9k$; $x + y + t = 8k$; $x + y + z = 6k$. Сложим последние три равенства: $3x + 2(y + z + t) = 23k$. Учитывая равенство $y + z + t = 12k$, получим, что $3x + 24k = 23k$. Это противоречит неравенству $k \geqslant 1$. $\square$

Задача 3.89. Из таблицы а) 8×8; б) 6×6 вырезали квадрат из четырех клеток. Верно ли, что оставшуюся часть можно разрезать на прямоугольники 1×2 так, что число горизонтальных прямоугольников равно числу вертикальных?

Задача 3.90. Новая фигура «заяц» может ходить на одну клетку вверх по любой диагонали или на клетку вниз по вертикали. За какое наименьшее число ходов заяц сможет обойти все поля доски а) 7×7; а) 5×5 и вернуться на исходное поле?

Указание. а) Подойдет горизонтальная раскраска «зебра». Фигура каждым ходом меняет цвет клетки. Значит, количество ходов не менее 56, так как на доске 28 черных и 21 белая клетки.

б) Раскраска «зебра» даст оценку — 30 ходов. Но эта оценка неточная. Заметим, что «заяц» может вернуться в исходную клетку не менее, чем за 4 хода. Раскрасим доску в 4 цвета так, что при ходе фигура чередует цвета клеток доски по очереди $1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 1 \ldots$:

1	3	1	3	1
2	4	2	4	2
3	1	3	1	3
4	2	4	2	4
1	3	1	3	1

На доске 8 клеток цвета «1». Значит, в пути «зайца» как минимум 8 циклов длины 4. Получаем, что ходов не меньше 32. Построить пример помогут такие же рассуждения, как при построении пути короля, чередующего диагональные и недиагональные ходы в задаче 1.6 Через клетки цвета «1» фигура должна пройти ровно по одному разу. Определив эти ходы, достраивается весь путь. Начало в верхней левой клетке. Обозначим ее как 0 и 32 — начало и конец пути. В остальных клетках расставим номера, соответствующие номеру хода, после которого фигура попадает в эту клетку:

0 32	30	16	18 22	20
1	27 31	17 25 29	15 19 23	21
2	28	26	24	14
3	5	7	9 13	11
4	6	8	10	12

□

Литература

[1] Дж. А. Андерсон. Дискретная математика и комбинаторика. — М.: Вильямс, 2003.

[2] Н. В. Горбачев. Сборник олимпиадных задач по математике. — М.:МЦНМО, 2010.

[3] Н. Х. Агаханов, О. К. Подлипский. Математика. Районные олимпиады. — М.: Просвещение, 2010.

[4] Н. Х. Агаханов, О. К. Подлипский. Математика. Всероссийские олимпиады. — М.: Просвещение, 2009.

[5] Прасолов В. В. Задачи по планиметрии. — М.:МЦНМО, 2001.

[6] Квант. Научно-популярный физико-математический журнал для школьников и студентов.

Учебное издание

Баранов Виктор Николаевич
Баранова Ольга Викторовна

Экстремальные задачи в дискретной математике
Метод раскраски

Учебное пособие

Авторская редакция

Подписано в печать . Формат 60×84 1/16.
Печать офсетная. Усл.печ.л. 3,6. Уч.-изд.л. 3,32.
Тираж экз. Заказ №
Издательство «Удмуртский университет»
426034, Ижевск, ул. Университетская, 1, корп. 4, каб. 207