УДК 517.917

© *Е. В. Котлячкова*

К НЕСТАЦИОНАРНОЙ ЗАДАЧЕ ПРОСТОГО ПРЕСЛЕДОВАНИЯ В КЛАССЕ ИМПУЛЬСНЫХ СТРАТЕГИЙ

Рассматривается задача простого преследования в классе импульсных стратегий преследователей. Цель преследователей — поймать убегающего, цель убегающего — помешать встрече. Для всех игроков заданы геометрические ограничения на управление — строго выпуклый компакт с гладкой границей. В основу данной работы положены основные идеи метода разрешающих функций. Формулируется аналог теоремы Б. Н. Пшеничного, позволяющий получить достаточные условия решения задачи. Рассмотрены случаи импульсного управления преследователей и отдельно случаи импульсного управления убегающего. В каждой задаче получены достаточные условия поимки убегающего. Результаты решения задачи с импульсным управлением преследователей иллюстрируются на примере в последнем пункте данной работы.

Ключевые слова: дифференциальная игра, групповое преследование, импульсные стратегии.

Введение

Рассматривается задача простого группового преследования в классе импульсных стратегий игроков. Отметим, что импульсные управления рассматривались в монографии Н. Н. Красовского [1] и ряде других работ. Так, в работе [2] получены достаточные условия разрешимости задачи преследования в линейной дифференциальной игре двух лиц при условии, что один из участников либо оба используют импульсные стратегии. В работе [3] рассмотрена линейная задача преследования группой преследователей одного убегающего в классе импульсных стратегий. В работе [4] получены достаточные условия поимки группой преследователей одного убегающего для обобщенного стационарного примера Л. С. Понтрягина при условии, что преследователи используют импульсные стратегии.

В данной работе получены достаточные условия поимки группой преследователей одного убегающего в задаче простого преследования при условии, что одна из сторон использует импульсные стратегии в нестационарной задаче простого преследования. Работа примыкает к исследованиям [5–10]. Полученные результаты являются продолжением работы [11].

§ 1. Постановка задачи

В пространстве R^k ($k \geqslant 2$) рассматривается дифференциальная игра Γ $n+1$ лиц: n преследователей $P_1, P_2, \ldots, P_n$ и убегающего E. Закон движения каждого из преследователей P_i имеет вид

$$\dot{x}_i = a(t)u_i, \quad \|u_i\| \leqslant \rho.$$

Закон движения убегающего E имеет вид

$$\dot{y} = a(t)v, \quad \|v\| \leqslant \sigma.$$

В начальный момент времени ($t = t_0$) заданы начальные позиции преследователей $x_i(t_0) = x_i^0$ и убегающего $y(t_0) = y^0$, причем $x_i^0 \neq y^0$. Сделаем замену $\dot{z}_i = x_i - y$, получим систему вида

$$\dot{z}_i = a(t)(u_i - v), \quad z_i(t_0) = z_i^0 = x_i^0 - y^0. \tag{1.1}$$

Пусть $\{\tau_j\}_{j=1}^{\infty}$ — последовательность вещественных чисел, не имеющая конечных точек сгущения, такая, что $\tau_0 = t_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_k < \ldots$.

§ 2. Групповое преследование в классе импульсных стратегий преследователя

О п р е д е л е н и е 2.1. *Импульсной контрстратегией* Δ_i *преследователя* P_i называется отображение G_i, ставящее в соответствие набору $(\tau_j, x_1(\tau_j), \ldots, x_n(\tau_j), y(\tau_j), v(t))$, $t \in [\tau_j, \tau_{j+1})$, точку u_i^j такую что $u_i^j \in U$, где $U = \{u \mid \|u\| \leqslant \rho\}$, $j = 1, 2, \ldots$.

О п р е д е л е н и е 2.2. В игре Γ происходит *поимка*, если существуют момент $T > t_0$ и контрстратегии $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \ldots, \Delta_n$ преследователей $P_1, P_2, \ldots, P_n$ такие, что для любой измеримой функции $v(t)$ убегающего E найдутся номер s и момент $\tau_0 \in [t_0, T]$ такие, что $x_s(\tau_0) = y(\tau_0)$.

Определим множества:

$$W_j^m = a(\tau_j)U \stackrel{*}{-} \int_{\tau_{j-1}}^{\tau_j} a(t)V\,dt, \text{ где } m \in \mathbb{N},\ j = 0, 1, \ldots, m,$$

$A \stackrel{*}{-} B$ — разность множеств A и B по Минковскому.

Л е м м а 2.1. *Пусть* V *— шар радиуса* σ *с центром в начале координат, функция* $a\colon [\alpha, \beta] \to R^1$ *непрерывна. Тогда* $D = \displaystyle\int_\alpha^\beta a(t)V\,dt$ *— шар радиуса* $\sigma_0 = \sigma\displaystyle\int_\alpha^\beta |a(t)|\,dt$ *с центром в начале координат.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим через D_{σ_0} шар радиуса σ_0 с центром в начале координат. Докажем, что $D = D_{\sigma_0}$. Пусть $d \in D$. Тогда $d = \displaystyle\int_\alpha^\beta a(t)v(t)\,dt$, и поэтому $|d| \leqslant \displaystyle\int_\alpha^\beta |a(t)||v(t)|\,dt \leqslant \sigma\int_\alpha^\beta |a(t)|\,dt = \sigma_0$. Следовательно, $D \subset D_{\sigma_0}$. Пусть $v \in D_{\sigma_0}$, тогда $\hat{v} = \dfrac{v}{\sigma_0}\sigma \in V$. Возьмем функцию $v(t) = \hat{v}\,\mathrm{sign}\,a(t)$. Получаем $d = \displaystyle\int_\alpha^\beta a(t)v(t)\,dt = \hat{v}\int_\alpha^\beta |a(t)|\,dt \in D$. Следовательно, $D_{\sigma_0} \subset D$. □

У т в е р ж д е н и е 2.1. *Множество* $W_j^m \neq \emptyset$ *для всех* $m \in \mathbb{N}$, $j = 0, 1, \ldots, m$, *тогда и только тогда, когда* $|a(\tau_j)|\rho \geqslant \sigma\displaystyle\int_{\tau_{j-1}}^{\tau_j} |a(t)|\,dt$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $a(\tau_j)U$ — шар радиуса $|a(\tau_j)|\rho$ с центром в начале координат, $\displaystyle\int_{\tau_{j-1}}^{\tau_j} a(t)V\,dt$ — шар радиуса $\sigma\displaystyle\int_{\tau_{j-1}}^{\tau_j} |a(t)|\,dt$ с центром в начале координат, то множество W_j^m имеет хотя бы один элемент тогда и только тогда, когда выполнено неравенство

$$|a(\tau_j)|\rho \geqslant \sigma\int_{\tau_{j-1}}^{\tau_j} |a(t)|\,dt,$$

что и требовалось доказать. □

Введем функцию $\overline{\alpha}$ следующим образом:

$$\overline{\alpha}(z_i^0, I_j) = \frac{(z_i^0, I_j) + \sqrt{(z_i^0, I_j)^2 + \|z_i^0\|^2((|a(\tau_j)|\rho)^2 - I_j^2)}}{\|z_i^0\|^2},$$

где $I_j = \displaystyle\int_{\tau_{j-1}}^{\tau_j} a(t)v(t)\,dt$. Пусть $k = k(i) = \min\{j\colon j \in \{1,2,3,\ldots\}, \sum\limits_{l=1}^{j} \overline{\alpha}(z_i^0, I_l) \geqslant 1\}$. Определим разрешающие функции

$$\alpha(z_i^0, I_j) = \begin{cases} \overline{\alpha}(z_i^0, I_j), & j = 0, 1, \ldots, k-1, \\ 1 - \sum\limits_{j=0}^{k-1} \overline{\alpha}(z_i^0, I_j), & j = k, \\ 0, & j = k+1, \ldots. \end{cases}$$

Л е м м а 2.2. *Пусть для всех j справедливо*

$$|a(\tau_j)|\rho \geqslant \sigma \int_{\tau_{j-1}}^{\tau_j} |a(t)|\ dt$$

и существует $\hat{\delta} > 0$ такое, что для любого j выполнено неравенство

$$\min_{I_j \in V_j} \max_i \{\overline{\alpha}(z_i^0, I_j)\} \geqslant \hat{\delta},$$

где $V_j = \displaystyle\int_{\tau_{j-1}}^{\tau_j} a(t)V\,dt$. Тогда существует p такое, что для всех m, $m > p$, справедливо неравенство

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \overline{\alpha}(z_i^0, I_j) \geqslant n.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Отметим, что справедливы следующие соотношения:

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \overline{\alpha}(z_i^0, I_j) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} \overline{\alpha}(z_i^0, I_j) \geqslant \sum_{j=1}^{m} \max_i \overline{\alpha}(z_i^0, I_j).$$

Из определения величины $\hat{\delta}$ получаем, что справедливо неравенство

$$\sum_{j=1}^{m} \max_i \overline{\alpha}(z_i^0, I_j) \geqslant \sum_{j=1}^{m} \hat{\delta} = m\hat{\delta}.$$

Тогда, выбрав в качестве $m \geqslant \frac{n}{\hat{\delta}}$, получим требуемое неравенство. □

С л е д с т в и е 2.1. *Пусть для всех j справедливо*

$$|a(\tau_j)|\rho \geqslant \sigma \int_{\tau_{j-1}}^{\tau_j} |a(t)|\ dt$$

и существует $\hat{\delta} > 0$ такое, что для любого j выполнено

$$\min_{I_j \in V_j} \max_i \{\overline{\alpha}(z_i^0, I_j)\} \geqslant \hat{\delta} > 0.$$

Тогда существует p такое, что для любого m, $m > p$, существует i, для которого справедливо неравенство

$$\sum_{j=1}^{m} \overline{\alpha}(z_i^0, I_j) \geqslant 1.$$

Т е о р е м а 2.1. *Пусть для всех j справедливо*

$$|a(\tau_j)|\rho \geqslant \sigma \int_{\tau_{j-1}}^{\tau_j} |a(t)|\, dt$$

и существует $\hat{\delta} > 0$ такое, что для любого j выполнено

$$\min_{I_j \in V_j} \max_i \{\overline{\alpha}(z_i^0, I_j)\} \geqslant \hat{\delta}.$$

Тогда в игре Γ происходит поимка.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Решение системы (1.1) представимо в виде

$$z_i(\tau_p) = z_i^0 + \sum_{j=0}^{p} a(\tau_j)u_i - \int_{\tau_0}^{\tau_p} a(t)v(t)dt.$$

Зададим управления преследователей, полагая u_i на каждом $[\tau_j, \tau_{j+1})$ как решение уравнения

$$a(\tau_j)u_i - \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} a(t)v(t)dt = -\alpha(z_i^0, I_j)z_i^0.$$

В силу системы (1.1) с учетом выбранного управления получим

$$z_i(\tau_p) = z_i^0 + \sum_{j=0}^{p} \alpha(z_i^0, I_j)z_i^0 = z_i^0(1 - \sum_{j=0}^{p} \alpha(z_i^0, I_j)).$$

Тогда, в силу следствия и определения функции $\alpha(z_i^0, I_j)$, найдется такое p, что хотя бы одна из величин $1 - \sum\limits_{j=0}^{p} \alpha(z_i^0, I_j)$ обратится в нуль. Таким образом, произойдет поимка. □

§ 3. Групповое преследование в классе импульсных стратегий убегающего

О п р е д е л е н и е 3.1. *Импульсной стратегией Υ убегающего E* называется отображение Q, ставящее в соответствие моментам τ_j, позициям $x_1(\tau_j), \ldots, x_n(\tau_j), y(\tau_j)$ точку v_j такую, что $v_j \in V$, где $V = \{v| \quad \|v\| \leqslant \sigma\}$, $j = 1, 2, \ldots$.

О п р е д е л е н и е 3.2. *Контрстратегией Δ_i преследователя P_i* называется отображение G_i, ставящее в соответствие моментам τ_j, $j = 1, 2, 3, \ldots$, позициям $x_i(\tau_j)$, $y(\tau_j)$ и точке v_j измеримую функцию $u_i^j(t)$, определенную на $[\tau_j, \tau_{j+1})$ и такую, что $u_i^j(t) \in U$ для $t \in [\tau_j, \tau_{j+1})$.

О п р е д е л е н и е 3.3. В игре происходит *поимка*, если существуют момент $T > t_0$ и контрстратегии $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \ldots, \Delta_n$ преследователей $P_1, P_2, \ldots, P_n$ такие, что для любой стратегии Q убегающего E найдутся номер s и момент $\tau_0 \in [t_0, \tau]$ такие, что будет выполнено равенство $x_s(\tau_0) = y(\tau_0)$.

Определим множества

$$W_j^m = \int_{\tau_{j-1}}^{\tau_j} a(t)U\, dt \overset{*}{-} a(\tau_j)V, \text{ где } m \in \mathbb{N},\ j = 0, 1, \ldots, m.$$

У т в е р ж д е н и е 3.1. *Множество* $W_j^m \neq \emptyset$ *для всех* $m \in \mathbb{N}$, $j = 0, 1, \ldots, m$, *тогда и только тогда, когда* $\displaystyle\int_{\tau_{j-1}}^{\tau_j} |a(t)|\, dt\rho \geqslant |a(\tau_j)|\sigma$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как U — шар радиуса $|a(\tau_j)|\rho$, V — шар радиуса $|a(\tau_j)|\sigma$, то множество W_j^m имеет хотя бы один элемент, когда выполнено неравенство

$$\int_{\tau_{j-1}}^{\tau_j} |a(t)|\, dt\rho \geqslant |a(\tau_j)|\sigma,$$

что и требовалось доказать. □

Введем функцию $\overline{\alpha}$ следующим образом:

$$\overline{\alpha}(z_i^0, v) = \frac{(z_i^0, v) + \sqrt{(z_i^0, v)^2 + \|z_i^0\|^2((|a(\tau_j)|\rho)^2 - v^2)}}{\|z_i^0\|^2}.$$

Пусть $k = k(i) = \min\{j \colon j \in \{1, 2, 3, \ldots\}, \sum\limits_{l=1}^{j} \overline{\alpha}(z_i^0, v) \geqslant 1\}$. Определим разрешающие функции

$$\alpha(z_i^0, v) = \begin{cases} \overline{\alpha}(z_i^0, v), & j = 0, 1, \ldots, k-1, \\ 1 - \sum\limits_{j=0}^{k-1} \overline{\alpha}(z_i^0, v), & j = k, \\ 0, & j = k+1, \ldots. \end{cases}$$

Л е м м а 3.1. *Пусть для всех* j *справедливо неравенство*

$$\rho \int_{\tau_{j-1}}^{\tau_j} |a(t)|\, dt \geqslant |a(\tau_j)|\sigma$$

и существует $\hat{\delta} > 0$ *такое, что для любого* j *выполнено*

$$\min_{v \in V} \max_i \{\overline{\alpha}(z_i^0, v)\} \geqslant \hat{\delta}.$$

Тогда существует p *такое, что для всех* m, $m > p$, *справедливо неравенство*

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=0}^{m} \alpha(z_i^0, v) \geqslant n.$$

Т е о р е м а 3.1. *Пусть для всех* j *справедливо неравенство*

$$\int_{\tau_{j-1}}^{\tau_j} |a(t)|\, dt\rho \geqslant |a(j\tau)|\sigma$$

и существует $\hat{\delta} > 0$ *такое, что для любого* j *выполнено*

$$\min_{I_j \in V_j} \max_i \{\overline{\alpha}(z_i^0, v)\} \geqslant \hat{\delta}.$$

Тогда в игре происходит поимка.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1.

§ 4. Пример

Пусть закон движения каждого из преследователей P_i имеет вид

$$\dot{x}_i = tu_i, \quad x_i(0) = x_i^0, \quad \|u_i\| \leqslant \rho.$$

Закон движения убегающего E имеет вид

$$\dot{y} = tv, \quad y(0) = y^0, \quad \|v\| \leqslant \sigma.$$

После замены получим систему $\dot{z}_i = t(u_i - v),\ z_i(t_0) = z_i^0$. Определим множества

$$W_j^m = \tau_j U \overset{*}{-} \int_{\tau_{j-1}}^{\tau_j} tV\,dt.$$

Будем считать, что $\tau_j = \tau j$. Тогда неравенство $W_j^m \neq \emptyset$ будет выполнено, если

$$\tau_j\rho \geqslant (\frac{\tau_{j-1}^2}{2} - \frac{\tau_j^2}{2})\sigma, \text{ или } \rho > \tau\sigma.$$

Введем функцию $\overline{\alpha}$ следующим образом:

$$\overline{\alpha}(z_i^0, I_j) = \frac{(z_i^0, I_j) + \sqrt{(z_i^0, I_j)^2 + \|z_i^0\|^2((\tau_j\rho)^2 - I_j^2)}}{\|z_i^0\|^2},$$

где $I_j = \displaystyle\int_{\tau_{j-1}}^{\tau_j} tv(t)\,dt$. Рассмотрим множество $V_j = \displaystyle\int_{\tau_{j-1}}^{\tau_j} tV\,dt$. Данное множество является компактным с гладкой границей, так как представляет собой шар радиусом $\tau^2\sigma\frac{(2j-1)}{2}$ с центром в начале координат.

Предположим, что $0 \in \operatorname{Int}\operatorname{co}\{z_1^0, z_2^0, \ldots, z_n^0\}$, тогда $z_1^0, z_2^0, \ldots, z_n^0$ образуют положительный базис [12]. Поэтому условие $0 \in \operatorname{Int}\operatorname{co}\{z_1^0, z_2^0, \ldots, z_n^0\}$ гарантирует выполнение условия теоремы о том, что существует $\hat{\delta} > 0$ такое, что для любого j выполнено

$$\min_{I_j \in V_j} \max_i \{\overline{\alpha}(z_i^0, I_j)\} \geqslant \hat{\delta}. \tag{4.1}$$

Докажем неравенство (4.1). Отметим, что

$$\max_i \overline{\alpha}(z_i^0, I_j) = \max_i \frac{(z_i^0, I_j) + \sqrt{(z_i^0, I_j)^2 + \|z_i^0\|^2((\tau_j\rho)^2 - I_j^2)}}{\|z_i^0\|^2} \geqslant \max_i \frac{(z_i^0, I_j) + |(z_i^0, I_j)|}{\|z_i^0\|^2}.$$

Обозначим $\gamma_j = \dfrac{(z_i^0, I_j) + |(z_i^0, I_j)|}{\|z_i^0\|^2}$. Представим I_j в виде $I_j = \gamma_j v$, где $v \in V$. Тогда

$$\min_{I_j \in V_j} \max_i \{\overline{\alpha}(z_i^0, I_j)\} \geqslant \min_{I_j \in V_j} \max_i \{\frac{(z_i^0, I_j) + |(z_i^0, I_j)|}{\|z_i^0\|^2}\} \geqslant$$
$$\geqslant \min_{v \in V} \max_i \{\frac{(z_i^0, \gamma_j v) + |(z_i^0, \gamma_j v)|}{\|z_i^0\|^2}\} \geqslant \min_{v \in V} \max_i \{\frac{(z_i^0, v) + |(z_i^0, v)|}{\|z_i^0\|^2}\}\gamma_j.$$

Если $0 \in \operatorname{Int}\operatorname{co}\{z_1^0, z_2^0, \ldots, z_n^0\}$, то $\hat{\delta}_0 = \displaystyle\min_{v \in V} \max_i \{\frac{(z_i^0, v) + |(z_i^0, v)|}{\|z_i^0\|^2}\} > 0$.
Кроме того, $\gamma_j \geqslant \gamma_1$ для всех j. Поэтому получаем, что

$$\min_{I_j \in V_j} \max_i \{\overline{\alpha}(z_i^0, I_j)\} \geqslant \gamma_1\hat{\delta}_0 > 0.$$

Тем самым неравенство (4.1) доказано. Следовательно, если $\tau_j = \tau j$ для всех j, $\rho > \sigma\tau$ и выполнено включение $0 \in \operatorname{Int}\operatorname{co}\{z_1^0, z_2^0, \ldots, z_n^0\}$, то в игре произойдет поимка.

Список литературы

1. Красовский Н.Н. Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 476 с.
2. Чикрий А.А., Матичин И.И. Линейные дифференциальные игры с импульсным управлением игроков // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2005. Т. 11. № 1. С. 212–224.
3. Кривонос Ю.Г., Матичин И.И., Чикрий А.А. Динамические игры с разрывными траекториями. Киев: Наукова думка, 2005. 220 с.
4. Петров Н.Н. Задача группового преследования в классе импульсных стратегий преследователей // Известия РАН. Теория и системы управления. 2009. № 2. С. 38–44.
5. Благодатских А.И., Петров Н.Н. Конфликтное взаимодействие групп управляемых объектов. Ижевск: Удмуртский университет, 2009. 266 с.
6. Петров Н.Н. К нестационарной задаче группового преследования с фазовыми ограничениями // Математическая теория игр и ее приложения. 2010. Т. 2. Вып. 4. С. 74–83.
7. Банников А.С., Петров Н.Н. К нестационарной задаче группового преследования // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16. № 1. С. 40–51.
8. Банников А.С. О задаче позиционной поимки одного убегающего группой преследователей // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2011. Вып. 1. С. 3–7.
9. Вагин Д.А., Петров Н.Н. Об одной задаче группового преследования с фазовыми ограничениями // Прикладная математика и механика. 2002. Т. 66. № 2. С. 234–241.
10. Виноградова М.Н. О поимке двух убегающих в задаче простого преследования с фазовыми ограничениями // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2011. Вып. 4. С. 3–8.
11. Котлячкова Е.В. Простое преследование с фазовыми ограничениями в классе импульсных стратегий // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2012. Вып. 3. С. 48–52.
12. Петров Н.Н. Об управляемости автономных систем // Дифференциальные уравнения. 1968. Т. 4. № 4. С. 606–617.

Поступила в редакцию 25.04.2015

Котлячкова Елена Владимировна, старший преподаватель, кафедра дифференциальных уравнений, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.
E-mail: kotlyachkova@milan2000.ru

E. V. Kotlyachkova

About non-stationary problem of simple pursuit in the class of impulse strategies

Keywords: differential game, group pursuit, impulse strategy.

MSC: 49N70, 49N75

The problem of simple pursuit in the class of impulse strategies of pursuers is considered. The goal of pursuers is evader's capture, the goal of evader is to prevent the meeting. The geometrical constraints on controls of players are strictly convex compact set with a smooth boundary. The basis of this work is based on the basic ideas of the method of resolving functions. We formulate an analogue of Pshenichnyi's theorem allowing to obtain sufficient conditions for solving the problem. Cases of impulse controls of pursuers and the cases of impulse controls of evaders are considered separately. In each case the sufficient conditions for a winning strategy are obtained. The results of solving the problem with impulse controls of pursuers are illustrated on an example.

REFERENCES

1. Krasovskii N.N. *Teoriya upravleniya dvizheniem* (Theory of motion control), Moscow: Nauka, 1968, 476 p.

2. Chikrii A.A., Matichin I.I. Linear differential games with impulse control of players, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2005, suppl. 1, pp. S68–S81.
3. Krivonos Yu.G., Matichin I.I., Chikrii A.A. *Dinamicheskie igry s razryvnymi traektoriyami* (Dynamic games with discontinuous trajectories), Kiev: Naukova Dumka, 2005, 220 p.
4. Petrov N.N. A problem of group pursuit in the class of impulse strategies of pursuers, *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 2009, vol. 48, no. 2, pp. 199–205. DOI: 10.1134/S106423070902004X
5. Blagodatskikh A.I., Petrov N.N. *Konfliktnoe vzaimodeistvie grupp upravlyaemykh ob"ektov* (Conflict interaction of groups of controlled objects), Izhevsk: Udmurt State University, 2009. 266 p.
6. Petrov N.N. To a nonstationary group pursuit problem with phase constraints, *Automation and Remote Control*, 2014, vol. 75, no. 8, pp. 1525–1531. DOI: 10.1134/S0005117914080153
7. Bannikov A.S., Petrov N.N. On a nonstationary problem of group pursuit, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2010, vol. 271, no. 1, pp. S41–S52. DOI: 10.1134/S0081543810070047
8. Bannikov A.S. About a problem of positional capture of one evader by group of pursuers, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, 2011, no. 1, pp. 3–7 (in Russian).
9. Vagin D.A., Petrov N.N. A problem of group pursuit with phase constraints, *J. Appl. Math. Mech.*, 2002, vol. 66, no. 2, pp. 225–232. DOI: 10.1016/S0021-8928(02)00027-8
10. Vinogradova M.N. On the capture of two evaders in a simple pursuit-evasion problem with phase restrictions, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, 2011, no. 4, pp. 3–8 (in Russian).
11. Kotlyachkova E.V. Simple pursuit with phase constraints in a class of impulse strategies, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, 2012, no. 3, pp. 48–52 (in Russian).
12. Petrov N.N. On the controllability of autonomous systems, *Differ. Uravn.*, 1968, vol. 4, no. 4, pp. 606–617 (in Russian).

Received 25.04.2015

Kotlyachkova Elena Vladimirovna, Lecturer, Department of Differential Equations, Udmurt State University, ul. Universitetskaya, 1, Izhevsk, 426034, Russia.
E-mail: kotlyachkova@milan2000.ru