Нелинейная динамика. 2015. Т. 11. № 2. С. 279–286.
Полнотекстовая версия в свободном доступе
http://nd.ics.org.ru

ОРИГИНАЛЬНЫЕ СТАТЬИ

УДК: 517.9
MSC 2010: 34A25

Метод Гамильтона – Якоби для негамильтоновых систем

В. В. Веденяпин, Н. Н. Фимин

Гидродинамическая подстановка, применявшаяся ранее только в теории плазмы, представляет собой декомпозицию специального вида функции распределения в фазовом пространстве, выделяющую явно зависимость импульсной переменной от конфигурационной переменной и времени. Для системы автономных обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), приводимой к гамильтоновой форме, эволюция данной динамической системы описывается классическим уравнением Лиувилля для функции распределения, определенной на кокасательном расслоении конфигурационного многообразия. Уравнение Лиувилля приводится к редуцированной системе Эйлера, представляющей собой пару расцепленных гидродинамических уравнений (неразрывности и переноса импульса). Уравнение для импульса путем несложных преобразований может быть приведено к классическому уравнению Гамильтона – Якоби для эйкональной функции. Для общей системы автономных ОДУ можно произвольно ввести разбиение конфигурационных переменных на новые конфигурационные и «импульсные» переменные. В построенном таким образом фазовом (вообще говоря, несимметричном) пространстве можно рассмотреть обобщенное уравнение Лиувилля, привести его снова к паре гидродинамических уравнений. Уравнение переноса «импульса» будет являться аналогом уравнения Гамильтона – Якоби в общем негамильтоновом случае.

Ключевые слова: гидродинамическая подстановка, уравнение Лиувилля, метод Гамильтона – Якоби, негамильтонова система

Получено 27 ноября 2014 года
После доработки 24 февраля 2015 года

Работа выполнена при финансовой поддержке грантов РФФИ № 14-01-00670 и № 14-29-06086.

Веденяпин Виктор Валентинович
vicveden@yahoo.com
Фимин Николай Николаевич
oberon@kiam.ru
Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша Российской академии наук
125047, г. Москва, Миусская пл., д. 4

1. Введение

Гидродинамическая подстановка [1–3] до недавних пор использовалась в основном в теории уравнения Власова. Однако недавно была продемонстрирована ее применимость к уравнению Лиувилля и гамильтоновой механике [4–9]. В работах В. В. Козлова [4–6] был намечен простейший вывод уравнения Гамильтона–Якоби (ГЯ), а гидродинамическая подстановка связала этот вывод с уравнением Лиувилля [8, 9]. Более того, при внимательном анализе свойств исследуемой подстановки можно видеть, что она обладает свойством широкой универсальности и может быть использована для исследования систем обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) достаточно общего вида. В настоящей работе рассматривается возможность применения гидродинамической подстановки для исследования системы автономных ОДУ с последующим использованием для ее решения метода Гамильтона–Якоби, причем, как оказывается, данный метод (после надлежащего обобщения) применим и для динамических систем, не являющихся гамильтоновыми.

2. Гидродинамическая подстановка в гамильтоновой ситуации и прямой вывод уравнения Гамильтона–Якоби

Гамильтоновы канонические уравнения

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{\partial H(\mathbf{x},\mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}}, \quad \frac{d\mathbf{p}}{dt} = -\frac{\partial H(\mathbf{x},\mathbf{p})}{\partial \mathbf{x}} \tag{2.1}$$

приводят к уравнению Лиувилля на функцию распределения $f(\mathbf{x},\mathbf{p},t)$ по импульсам $\mathbf{p}\in\mathbb{R}^n$ и пространственным переменным $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n$:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial H}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial p_i}\right) = 0. \tag{2.2}$$

В уравнении Власова изучается подстановка $f(\mathbf{x},\mathbf{p},t) = \rho(\mathbf{x},t)\delta(\mathbf{p}-\mathbf{Q}(\mathbf{x},t))$ (так называемая «гидродинамическая подстановка»). Здесь $\delta(\cdot)$ — функция Дирака, $\rho(\mathbf{x},t)$ и $\mathbf{Q}(\mathbf{x},t)$ имеют смысл плотности частиц и импульса частиц в точке $\mathbf{x}$ в момент времени t соответственно. Вывод уравнений на ρ и $\mathbf{Q}$ проводится прямым способом:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial \rho}{\partial t}\delta(\mathbf{p}-\mathbf{Q}) - \rho\left(\nabla\delta, \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t}\right),$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial \rho}{\partial x_i}\delta - \rho\left(\nabla\delta, \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial x_i}\right) + \rho\frac{\partial \delta}{\partial p_i}, \quad \frac{\partial f}{\partial p_i} = \rho\frac{\partial \delta}{\partial p_i}.$$

Собирая множители при δ-функции, получаем:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n}\left(\left.\frac{\partial H}{\partial p_i}\right|_{p_i=Q_i}\frac{\partial \rho}{\partial x_i} + \rho\,\mathrm{div}\left.\frac{\partial H}{\partial p_i}\right|_{p_i=Q_i}\right) = 0.$$

Здесь мы должны положить во втором слагаемом после операции дифференцирования $\mathbf{p}=\mathbf{Q}$; обозначим для краткости $\mathbf{V}\equiv(\partial H/\partial\mathbf{p})|_{\mathbf{p}=\mathbf{Q}}$. Тогда получаем уравнение, совпадающее по виду с классическим уравнением непрерывности,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}(\rho V_i) = 0,$$

так что по физическому смыслу можно называть введенную выше величину $\mathbf{V} = \left(\dfrac{\partial H(\mathbf{x}, \mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}}\right)\Bigg|_{\mathbf{p}=\mathbf{Q}(\mathbf{x},t)}$ «обобщенной скоростью».

Приравнивая выражения при производных дельта-функции, получаем второе уравнение:

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} V_i \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial x_i} = \mathbf{F},$$

где $F_i(\mathbf{x}, t) = -\partial H(\mathbf{x}, \mathbf{Q}(\mathbf{x}, t))/\partial x_i$ — компоненты обобщенной силы.

Итак, получаем систему уравнений (которую можно назвать редуцированной системой Эйлера, или РСЭ), которая является точным следствием уравнения Лиувилля:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{V}) = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \left(\mathbf{V}, \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \mathbf{x}}\right) = \mathbf{F}, \tag{2.3}$$

где обобщенные скорость $\mathbf{V}$ и сила $\mathbf{F}$ определены выше.

Рассмотрим альтернативный вышеизложенному вывод уравнений (2.3) с помощью уравнений моментов. Проинтегрируем уравнение Лиувилля (2.2), полагая $\rho = \int f(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)\, d\mathbf{p}$:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \left(\int \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial f}{\partial x_i}\, d\mathbf{p} - \int \frac{\partial H}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial p_i}\, d\mathbf{p} \right) = 0.$$

Второе слагаемое в скобках преобразуем, вынося $\partial/\partial x_i$ за знак интеграла; тогда, учитывая, что $f = \rho(\mathbf{x}, t)\delta(\mathbf{p} - \mathbf{Q})$, получаем

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \int \frac{\partial H}{\partial p_i} \rho(\mathbf{x}, t)\delta(\mathbf{p} - \mathbf{Q})\, d\mathbf{p} = \int \frac{\partial^2 H}{\partial x_i \partial p_i} f\, d\mathbf{p} + \int \left(\frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial f}{\partial x_i} \right) d\mathbf{p},$$

откуда имеем для второго слагаемого

$$\int \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial f}{\partial x_i}\, d\mathbf{p} = \operatorname{div}(\rho \mathbf{V}) - \frac{\partial^2 H}{\partial x_i \partial p_i}(\mathbf{x}, \mathbf{Q})\rho,$$

а третье слагаемое преобразуем, интегрируя по частям,

$$-\int \frac{\partial H}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial p_i}\, d\mathbf{p} = \rho \frac{\partial^2 H}{\partial x_i \partial p_i}(\mathbf{x}, \mathbf{Q}).$$

Это слагаемое сокращается с последним членом второго, и окончательно получаем уравнение неразрывности.

Чтобы получить второе из уравнений РСЭ, умножим (2.2) на $\mathbf{p}$ и, обозначая $\mathbf{Q}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\rho} \int f\, \mathbf{p}\, d\mathbf{p}$, получаем

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathbf{Q}) + \sum_{i=1}^{n} \left(\int \mathbf{p} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial H}{\partial p_i}\, d\mathbf{p} - \int \mathbf{p} \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial x_i}\, d\mathbf{p} \right) = 0.$$

Делая преобразования, аналогичные рассмотренным выше, при выводе уравнения неразрывности, имеем

$$\int p \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho \mathbf{Q} V_i) - \rho \mathbf{Q} \frac{\partial^2 H}{\partial x_i \partial p_i}(\mathbf{x}, \mathbf{Q}) - \int \mathbf{p} \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial x_i}\, d\mathbf{p} =$$
$$= \int \frac{\partial^2 H}{\partial x_i \partial p_i} \mathbf{p} \rho \delta(\mathbf{p} - \mathbf{Q})\, d\mathbf{p} + \rho \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}, \mathbf{Q}).$$

Получаем окончательно:

$$\frac{\partial(\rho\mathbf{Q})}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}(\rho\mathbf{Q}V_i)\right) = \rho\mathbf{F}.$$

Последнее уравнение несколько отличается по внешнему виду от второго уравнения РСЭ (2.3), но приводится к таковому с привлечением уравнения неразрывности. Но, вообще говоря, оно представляет и самостоятельный интерес, поэтому запишем РСЭ в новой форме:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\mathbf{V}) = 0, \quad \frac{\partial(\rho\mathbf{Q})}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\mathbf{Q}\mathbf{V}) = \rho\mathbf{F}. \tag{2.4}$$

Второе из уравнений системы (2.3) совпадает с уравнением, введенным в [4–6] из других соображений. Поэтому систему (2.3) или (2.4) можно считать выведенной из уравнений Гамильтона, как обоснование результатов этих работ. В работах [4–6] показывается, как из (2.3) получаются уравнения ГЯ. Во-первых, приведем второе уравнение (2.3) к форме Громеки – Лэмба [4–7]:

$$\frac{\partial\mathbf{Q}}{\partial t} + V_i\frac{\partial\mathbf{Q}}{\partial x_i} - V_i\frac{\partial Q_i}{\partial\mathbf{x}} = -\frac{\partial H}{\partial\mathbf{x}} - \frac{\partial H}{\partial p_i}(\mathbf{x},\mathbf{Q})\frac{\partial Q_i}{\partial\mathbf{x}}. \tag{2.5}$$

Выражение $(\partial Q_i/\partial x_j - \partial Q_j/\partial x_i)dx_i \wedge dx_j$ есть дифференциал от $Q_i dx_i$, и форма Громека показывает, что уравнение для ротора $R_{ij} = \partial Q_i/\partial x_j - \partial Q_j/\partial x_i$ имеет решение $\mathbf{R} \equiv 0$:

$$\frac{\partial\mathbf{R}}{\partial t} + \operatorname{rot}[\mathbf{R},\mathbf{V}] = 0. \tag{2.6}$$

Мы воспользовались тем, что второе и третье слагаемое в левой части (2.5) — это компоненты векторного произведения $[\mathbf{R},\mathbf{V}]$, а справа стоит градиент функции:

$$\frac{dH(\mathbf{x},\mathbf{Q})}{dx_j} = \frac{\partial H(\mathbf{x},\mathbf{Q})}{\partial x_j} + \frac{\partial H(\mathbf{x},\mathbf{Q})}{\partial p_i}\frac{\partial Q_i}{\partial x_j}.$$

Обратно, если ротор $\mathbf{Q}$ равен нулю, то $\mathbf{Q}$ есть градиент некоторой функции (в односвязной области): $Q_i = \partial S/\partial x_i$; это свойство, как показывает уравнение (2.6), сохраняется со временем. Из (2.5) следует

$$\frac{\partial}{\partial\mathbf{x}}\left(\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(\mathbf{x},\frac{\partial S}{\partial\mathbf{x}}\right)\right) = 0.$$

Отсюда $\partial S/\partial t + H(\mathbf{x},\partial S/\partial\mathbf{x}) = f(t)$. Снова следуя [4–6] и делая замену $S = \widetilde{S} + \int f(t)dt$, получаем чистое уравнение ГЯ:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(\mathbf{x},\frac{\partial S}{\partial\mathbf{x}}\right) = 0. \tag{2.7}$$

Пример 1. Если $H = p^2/(2m) + U(\mathbf{x})$, то $\mathbf{V}(\mathbf{x},t) = (\partial H(\mathbf{x},\mathbf{p})/\partial\mathbf{p})|_{\mathbf{p}=\mathbf{Q}} = \mathbf{Q}/m$ (стандартная функция Гамильтона для классической частицы), $\mathbf{F} = -(\partial H(\mathbf{x},\mathbf{p})/\partial\mathbf{x})|_{\mathbf{p}=\mathbf{Q}} = -\partial U/\partial\mathbf{x}$. Система (2.3) в этом случае имеет вид

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{1}{m}\operatorname{div}(\rho\mathbf{Q}) = 0, \quad \frac{\partial\mathbf{Q}}{\partial t} + \frac{1}{m}(\nabla\mathbf{Q},\mathbf{Q}) = -\frac{\partial U}{\partial\mathbf{x}}.$$

Уравнение Гамильтона – Якоби имеет вид

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m}(\nabla S,\nabla S) + U(\mathbf{x}) = 0.$$

3. Гидродинамическая подстановка в негамильтоновой ситуации и обобщение уравнений Гамильтона – Якоби

Рассмотрим общую (негамильтонову) автономную систему обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка в n-мерном пространстве:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{v}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in R^n, \quad \mathbf{v}(\mathbf{x}) \in R^n, \quad t \in R^1. \tag{3.1}$$

Введем вновь функцию распределения $f(\mathbf{x}, t)$ изображающих точек в n-мерном фазовом пространстве, представляющую собой вероятность пребывания точки траектории динамической системы в окрестности данной точки пространства R^n в момент времени t. Ее эволюция описывается обобщенным уравнением Лиувилля:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathrm{div}_n(\mathbf{v}f) = 0. \tag{3.2}$$

Чтобы описать движение m-мерной ($1 \leqslant m \leqslant n-1$) поверхности, представим вектор $\mathbf{x}$ как упорядоченную пару $(\mathbf{q}, \mathbf{p})^T$, $\mathbf{q} \in R^m$, $\mathbf{p} \in R^{n-m}$ (иначе говоря, разложим фазовое пространство системы в декартову сумму фазовых множеств, определяемых новыми переменными: $R^n_{\mathbf{x}} = R^m_{\mathbf{q}} \oplus R^{n-m}_{\mathbf{p}}$). Перепишем систему (3.1) в этих переменных:

$$\frac{d\mathbf{q}}{dt} = \mathbf{w}(\mathbf{q}, \mathbf{p}), \quad \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{g}(\mathbf{q}, \mathbf{p}), \tag{3.3}$$

где $\mathbf{w}(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ и $\mathbf{g}(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ — это, соответственно, m первых и $n-m$ последних компонент векторной функции $\mathbf{v}(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ из (3.1) (то есть $\big(\mathbf{w}, \mathbf{g}\big)^T = \mathbf{v}$).

Будем искать решение уравнения Лиувилля (3.2), вновь используя гидродинамическую подстановку: $f(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) = \rho(\mathbf{q}, t)\delta\big(\mathbf{p} - \mathbf{P}(\mathbf{q}, t)\big)$. Здесь $\mathbf{p} = \mathbf{P}(\mathbf{q}, t)$ — уравнение m-мерной поверхности в момент времени t, $\rho(\mathbf{q}, t)$ — плотность изображающих точек на ней. Подстановка данного представления $f(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ в уравнение (3.2) дает (в соответствии с [8, 9]) уравнение неразрывности и уравнение движения поверхности:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial}{\partial q_k}\big(\rho W_k\big) = 0, \tag{3.4}$$

$$\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \sum_{k=1}^{m} W_k \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial q_k} = \mathbf{G}, \tag{3.5}$$

где $\mathbf{W}(\mathbf{q}, t) \equiv \mathbf{w}\big(\mathbf{q}, \mathbf{P}(\mathbf{q}, t)\big)$, $\mathbf{G}(\mathbf{q}, t) \equiv \mathbf{g}\big(\mathbf{q}, \mathbf{P}(\mathbf{q}, t)\big)$.

Анализ метода ГЯ с целью распространения его на негамильтонову ситуацию приводит к заключению, что данному методу можно приписать три составляющие: *замена переменных — запас точно решаемых уравнений — уравнение ГЯ*. Для классического гамильтонова случая в качестве основных примеров замен переменных обычно рассматриваются сферическая, эллиптическая и параболическая системы координат (см., например, [10, 11]): для них с помощью подстановки в уравнение ГЯ находятся все (точнее, все физически интересные) гамильтоновы системы, интегрируемые по Лиувиллю. Для общего негамильтонова случая замена переменных имеет более широкие рамки применения, поскольку у нас в качестве запаса точно решаемых уравнений, вместо достаточно ограниченной совокупности таковых для классического случая, выступят любые уравнения (например, линейные или с разделяющимися переменными).

Но что же в общем случае сыграет роль аналога уравнения ГЯ для эйконала S? Попытка его ввести, положив $\mathbf{p} = \nabla S(\mathbf{q})$ в уравнении (3.5), сразу накладывает ограничение $n = 2m$. Поэтому в общем случае следует признать аналогом уравнения для скалярной функции $S(\mathbf{q})$ $(n - m)$-мерное векторное уравнение в частных производных (3.5). Система уравнений (3.5) имеет простой и яркий геометрический смысл, описывая движение m-мерной поверхности в n-мерном пространстве в эйлеровых координатах. Поэтому важнейшим и простейшим случаем является случай $m = 1$, который описывает движение линий — движение поверхностей склеено из движения линий. Особый интерес представляет стационарный случай $(\partial\mathbf{P}/\partial t \equiv 0)$, когда уравнение (3.5) описывает инвариантные поверхности. Теперь проясняется важность стационарного метода ГЯ в классической ситуации, а также важность стационарного уравнения (3.5) при $m = 1$ (см. *пример 2* ниже).

Мы имеем систему уравнений для определения траекторий, которая получается при делении всех уравнений исходной автономной системы ОДУ (3.1) на первое из них. Проиллюстрируем это сравнением классического уравнения ГЯ с предлагаемым нами в простейшем случае.

Пример 2. Рассмотрим подробнее случай $n = 2$ $(m = n - m = 1)$. При этом система (3.1) принимает следующую форму:

$$\dot{x} = v_1(x, y), \quad \dot{y} = v_2(x, y). \tag{3.6}$$

Уравнение (3.5) (в стационарном случае) для данной системы приводится к виду

$$W\frac{dP}{dq}\bigg|_{P=y,\,W=v_1} = G\big|_{G=v_2},$$

то есть $dy/dx = v_2(x, y)/v_1(x, y)$ хорошо известного следствия для определения траекторий (и это единственный кандидат на роль уравнения ГЯ в негамильтоновой ситуации).

Введем гамильтониан одномерного движения $H = p^2/(2m) + U(x)$. Будем полагать $v_1 = \partial H/\partial p = p$, $v_2 = -\partial H/\partial x = -U'(x)$. Тогда, вспоминая *пример 1*, заключаем, что классический метод ГЯ (в стационарном случае) приводит к уравнению

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{dS}{dx}\right)^2 + U'(x) = E,$$

либо, при использовании сопряженной подстановки [8], — к уравнению

$$\frac{p^2}{2m} - U\left(\frac{dS}{dp}\right) = E_1.$$

Сравнивая последние два выражения с полученным выше следствием уравнения (3.5) в форме

$$\frac{1}{2m}\frac{dP}{dq} = -\frac{dU/dq}{P},$$

можно видеть, что «обобщенный метод ГЯ» применим как к негамильтоновым, так и к гамильтоновым системам, причем соответствующие уравнения ГЯ, получаемые из (3.5), даже проще, чем классические: действительно, последнее уравнение (линейное ОДУ) решается разделением переменных или подбором интегрирующего множителя, в то время как классические уравнения ГЯ (нелинейные!) требуют весьма незаурядных усилий по поиску «подходящей» системы координат, в которых уравнение может быть разрешено.

4. Заключение

Таким образом, обобщение метода Гамильтона – Якоби на негамильтонову ситуацию оказывается даже проще, чем «классический» метод ГЯ. В стационарном случае в роли уравнения ГЯ выступает любое из следствий уравнений гидродинамического типа (3.5), например, простейшее для $m = 1$. В роли точно решаемого («интегрируемого по Лиувиллю» или «допускающего переменные действие – угол») уравнения — любое таковое, например, с разделяющимися переменными или линейное [12]. Замена переменных оказывается более общей, чем в гамильтоновом случае, поскольку нет необходимости искать новую систему координат, в которой разделяются переменные для нелинейного уравнения (содержащего член типа $(\nabla S)^2$). Ситуация вновь проще, чем в классическом подходе ГЯ. Отметим, что в двумерном случае $m = 1$ — единственный выбор. В случае $n > 2$ открывается больше возможностей.

Список литературы

[1] Власов А. А. Статистические функции распределения. Москва: Наука, 1966. 356 с.

[2] Бом Д. Общая теория коллективных переменных. Москва: Мир, 1964. 152 с.

[3] Веденяпин В. В. Кинетические уравнения Больцмана и Власова. Москва: Физматлит, 2001. 112 с.

[4] Козлов В. В. Гидродинамика гамильтоновых систем // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Механ., 1983, № 6, с. 10–22.

[5] Козлов В. В. Симметрии, топология и резонансы в гамильтоновой механике. Ижевск: УдГУ, 1995. 429 с.

[6] Козлов В. В. Общая теория вихрей. Ижевск: УдГУ, 1998. 238 с.

[7] Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. Москва – Ленинград: ГИТТЛ, 1950. 677 с.

[8] Веденяпин В. В., Фимин Н. Н. Уравнение Лиувилля, гидродинамическая подстановка и уравнение Гамильтона – Якоби // Докл. РАН, 2012, т. 446, № 2, с. 142–144.

[9] Веденяпин В. В., Негматов М. А. О топологии гидродинамических и вихревых следствий уравнения Власова и метод Гамильтона – Якоби // Докл. РАН, 2013, т. 449, № 5, с. 521–526.

[10] Lanczos C. The variational principles of mechanics. Toronto: Univ. Toronto Press, 1952. 308 p.

[11] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика: В 10 тт.: Т. 1: Механика. 4-е изд., испр. Москва: Наука, 1988. 216 с.

[12] Веденяпин В. В., Фимин Н. Н. Метод Гамильтона – Якоби в негамильтоновой ситуации и гидродинамическая подстановка // Докл. РАН, 2015, т. 461, № 2, с. 136–139.

The Hamilton – Jacobi method for non-Hamiltonian systems

Victor V. Vedenyapin[1], Nikolay N. Fimin[2]

[1,2] Keldysh Institute of Applied Mathematics
Miusskaya sq. 4, Moscow, 125047, Russia
[1]`vicveden@yahoo.com`, [2]`oberon@kiam.ru`

The hydrodynamic substitution applied earlier only in the theory of plasma represents the decomposition of a special type of the distribution function in phase space which is marking out obviously dependence of a momentum variable on a configuration variable and time. For the system of the autonomous ordinary differential equations (ODE) given to a Hamilton form, evolution of this dynamic system is described by the classical Liouville equation for the distribution function defined on the cotangent bundle of configuration manifold. Liouville's equation is given to the reduced Euler's system representing pair of uncoupled hydrodynamic equations (continuity and momenta transfer). The equation for momenta by simple transformations can be brought to the classical equation of Hamilton – Jacobi for eikonal function. For the general system autonomous ODE it is possible to enter the decomposition of configuration variables into new configuration and "momenta" variables. In constructed thus phase (generally speaking, asymmetrical) space it is possible to consider the generalized Liouville's equation, to lead it again to the pair of the hydrodynamic equations. The equation of transfer of "momenta" is an analog of the Hamilton – Jacobi equation for the general non-Hamilton case.

MSC 2010: 34A25
Keywords: hydrodynamical substitution, Liouville equation, Hamilton – Jacobi method, non-Hamiltonian system

Received November 27, 2014, accepted February 24, 2015
Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2015, vol. 11, no. 2, pp. 279–286 (Russian)