



ОРИГИНАЛЬНЫЕ СТАТЬИ

УДК: 521.13, 521.14
MSC 2010: 70F15, 70F99

О вращении Марса вокруг центра масс под действием притяжения Солнца, Юпитера и Земли

П. С. Красильников, Р. Н. Амелин

Рассматриваются вращения Марса вокруг центра масс под действием притяжения Солнца, Юпитера и Земли. Предполагается, что Марс — осесимметричное твердое тело ($A = B$). Орбиты Марса, Земли и Юпитера считаются эллиптическими. Независимыми малыми параметрами задачи являются средние движения Земли и Юпитера.

Получена осредненная функция Гамильтона задачи и интегралы эволюционных уравнений. Построена качественная картина движений вектора кинетического момента Марса на небесной сфере единичного радиуса, экваториальная плоскость которой параллельна плоскости орбиты Юпитера.

Показано, что «классические» положения равновесия вектора кинетического момента Марса \mathbf{I}_2 , принадлежащие нормали к плоскости орбиты Марса, сохраняются под действием притяжения Земли и Юпитера. Кроме того, появляются два новых равновесия вектора \mathbf{I}_2 , принадлежащие нормали к плоскости орбиты Юпитера. Эти равновесия неустойчивы, через них проходят гомоклинические траектории.

Помимо этого, появляется пара неустойчивых равновесий, принадлежащих дуге большого круга, параллельного плоскости орбиты Марса. Через эти равновесия проходят четыре гетероклинические кривые. Между парами этих кривых заключены два устойчивых положения равновесия.

Ключевые слова: ограниченная задача четырех тел, переменные Делпри – Андуайе, след вектора кинетического момента Марса, метод усреднения

Получено 11 мая 2015 года
После доработки 12 июня 2015 года

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 14-21-00068) в Московском авиационном институте.

Красильников Павел Сергеевич
krasil06@rambler.ru
Амелин Руслан Николаевич
rus-amelin@mail.ru

Московский авиационный институт (Национальный исследовательский университет)
125993, Россия, г. Москва, Волоколамское шоссе, д. 4



Уравнения вращательных движений Марса в переменных Депри – Андуайе

Рассмотрим обобщенную ограниченную задачу четырех тел, три из которых — Солнце, Юпитер и Земля — представляют собой материальные точки с массами m_\odot , m_J , m_\oplus соответственно ($m_\odot > m_J > m_\oplus$), при этом Юпитер и Земля движутся относительно Солнца по эллиптическим кеплеровым орбитам:

$$r = \frac{a_J (1 - e_J^2)}{1 + e_J \cos \nu}, \quad r_\oplus = \frac{a_\oplus (1 - e_\oplus^2)}{1 + e_\oplus \cos \nu_2}.$$

Здесь r , r_\oplus — расстояния между Солнцем и Юпитером, Солнцем и Землей, a_J , a_\oplus и e_J , e_\oplus — большие полуоси и эксцентриситеты орбит Юпитера и Земли, ν , ν_2 — истинные аномалии.

Четвертое тело — Марс, которое мы будем рассматривать как твердое тело с динамически симметричным распределением массы ($A = B$). Считаем орбиту Марса кеплеровским эллипсом

$$r_1 = \frac{a_M (1 - e_M^2)}{1 + e_M \cos \nu_1},$$

где r_1 — расстояние между Солнцем и Марсом, a_M и e_M — большая полуось и эксцентриситет орбиты Марса, ν_1 — его истинная аномалия.

Пусть \oplus , M , J и \odot — центры масс Земли, Марса, Юпитера и Солнца соответственно.

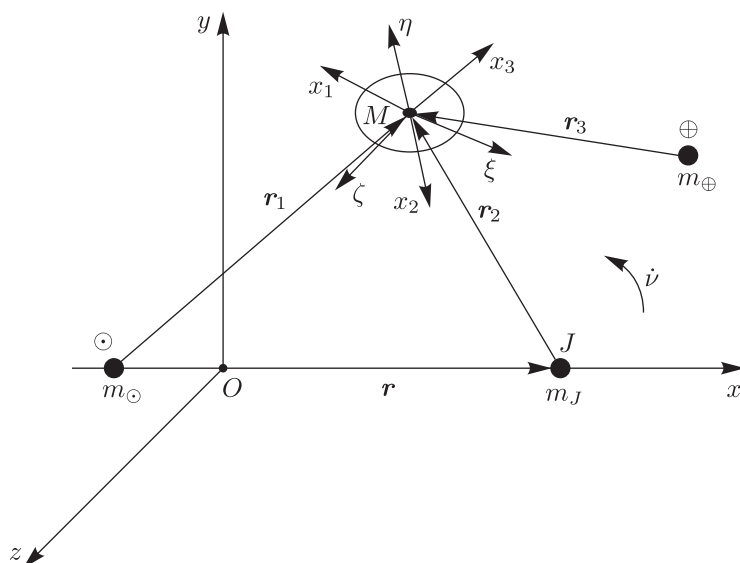


Рис. 1. Вывод уравнений движения вокруг центра масс Марса.

Введем (рис. 1) барицентрическую систему координат $Oxyz$ с началом в центре масс тел \odot и J . Плоскость Oxy совместим с плоскостью орбиты тела J относительно \odot . Ось Ox направим по прямой, соединяющей тела \odot и J в сторону тела J . Кратчайший поворот от оси Ox к оси Oy совпадает с направлением вращения тела J относительно тела \odot . Ось Oz дополняет оси Ox и Oy до правой системы координат. С центром масс M свяжем поступательно движущуюся систему координат $M\xi\eta\zeta$, ось $M\zeta$ которой коллинеарна Oz , ось $M\xi$ параллельна линии апсид эллиптического движения тел \odot и J относительно общего центра масс, а $M\eta$ дополняет систему координат до правой. Введем систему координат $Mx_1x_2x_3$,

жестко связанную с телом, оси которой направлены по главным центральным осям инерции. Взаимное положение главных центральных осей инерции $Mx_1x_2x_3$ и кёниговой системы координат $M\xi\eta\zeta$ задается с помощью канонических переменных Депри – Андуйе $L, I_2, I_3, l, \varphi_2, \varphi_3$ [1, 2]. Отметим, что если использовать традиционные обозначения этих переменных L, G, H, l, g, h , будем иметь переменные Серре – Андуйе [3].

Дифференциальные уравнения вращения имеют гамильтонов вид. Выражение для функции Гамильтона известно [4, 5]:

$$H = \frac{I_2^2 - L^2}{2A} + \frac{L^2}{2C} - U,$$

$$U = -\frac{3}{2}(1 - \mu)n_J^2 \frac{a_J^3}{r_1^3} (C - A)\gamma_{13}^2 - \frac{3}{2}\mu n_J^2 \frac{a_J^3}{r_2^3} (C - A)\gamma_{23}^2 - \frac{3}{2}\mu_{\oplus} n_{\oplus}^2 \frac{a_{\oplus}^3}{r_3^3} (C - A)\gamma_{33}^2, \quad (1)$$

$$\gamma_{ij} = \frac{1}{r_i} [(\alpha_j \cos \nu + \beta_j \sin \nu)(x - x_i) + (\beta_j \cos \nu - \alpha_j \sin \nu)(y - y_i) + \gamma_j(z - z_i)].$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\mu = \frac{m_J}{m_S + m_J} = 0.0009535918308, \quad \mu_{\oplus} = \frac{m_{\oplus}}{m_S + m_{\oplus}} = 0.000003002655505,$$

f – гравитационная постоянная, $x_1 = -\mu r$, $x_2 = (1 - \mu)r$ – координаты центров масс Солнца и Юпитера, $n_J = \sqrt{f(m_S + m_J)/a_J^3}$ – среднее движение Юпитера, $n_{\oplus} = \sqrt{f(m_S + m_{\oplus})/a_{\oplus}^3}$ – среднее движение Земли, $r_i = \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2}$, γ_{ij} – направляющие косинусы радиус-вектора r_i с главными центральными осями инерции Mx_j , A, C – экваториальный и аксиальный моменты инерции Марса, $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ – элементы матрицы направляющих косинусов между кёниговой системой координат $M\xi\eta\zeta$ и главными центральными осями инерции $Mx_1x_2x_3$ соответственно, выражения для которых приведены, например, в [6].

Орбиту Марса M будем считать известной квазипериодической функцией времени в барицентрической системе координат $Oxyz$, частотный базис которой имеет вид $\omega_1 = (n_J, n_M)$. Здесь n_J, n_M – средние движения Юпитера и Марса соответственно.

Орбиту Земли будем также считать известной квазипериодической функцией времени в барицентрической системе координат $Oxyz$ с частотным базисом $\omega_2 = (n_J, n_{\oplus})$. Величины n_J, n_{\oplus} – средние движения Юпитера и Земли соответственно.

Орбиты Земли и Марса в барицентрических координатах Солнца и Юпитера

Для вычисления орбиты Марса в барицентрической системе координат $Oxyz$ введем правые системы координат.

Пусть $SXYZ$ – система координат с началом в центре масс Солнца, ось SZ направлена по нормали к плоскости эклиптики, ось SX направлена в точку весеннего равноденствия γ , ось SY дополняет систему координат до правой; $Sx'y'z'$ – система координат с началом в центре масс Солнца, ось Sz' направлена по нормали к плоскости орбиты Юпитера, ось Sx' направлена в точку восходящего узла орбиты Юпитера, ось Sy' дополняет систему координат до правой. Барицентрическая система координат $Oxyz$ была описана выше.

Координаты центра масс Марса в гелиоцентрической эклиптической системе координат $SXYZ$ вычисляются по следующим формулам:

$$\begin{aligned} X_M &= r_1 (\cos(\omega_M + \nu_1) \cos(\Omega_M) - \sin(\omega_M + \nu_1) \sin(\Omega_M) \cos(i_M)), \\ Y_M &= r_1 (\cos(\omega_M + \nu_1) \sin(\Omega_M) + \sin(\omega_M + \nu_1) \cos(\Omega_M) \cos(i_M)), \\ Z_M &= r_1 (\sin(\omega_M + \nu_1) \sin(i_M)). \end{aligned}$$

Здесь ω_M , Ω_M , i_M — кеплеровские элементы орбиты Марса (см. табл. 1). Для вычисления координат центра масс Марса в барицентрической системе координат $Oxyz$ выполним три последовательных поворота и параллельный перенос начала координат S в точку O — барицентр Солнца и Юпитера.

Первый поворот выполним вокруг оси SZ на угол Ω_J . В результате получим систему координат $SX_1Y_1Z_1$, где плоскость X_1Y_1 лежит в плоскости эклиптики, причем ось SX_1 направлена в точку восходящего узла орбиты Юпитера, ось SZ_1 направлена по нормали к плоскости эклиптики, ось SY_1 дополняет систему координат до правой. Второй поворот выполним вокруг оси SX_1 на угол i_J . В результате получим систему координат $Sx'y'z'$, которая была описана выше. Третий поворот выполним вокруг оси Sz' на угол $u = \omega_J + \nu$. В результате получим вращающуюся систему координат $Sxyz$ с центром в Солнце. Перейдем от системы координат $Sxyz$ к системе координат $Oxyz$, сделав параллельный перенос начала координат на вектор $\mathbf{s} = (\mu r, 0, 0)$.

В векторно-матричной форме переход от прежних координат $SXYZ$ к новым $Oxyz$ запишется в виде

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mathbf{S}^{-1} \begin{pmatrix} X_M \\ Y_M \\ Z_M \end{pmatrix} - \mathbf{s}. \quad (2)$$

Здесь $\mathbf{S} = \mathbf{S}_1\mathbf{S}_2\mathbf{S}_3$, \mathbf{S}_1 — матрица поворота вокруг оси SZ на угол Ω_J , \mathbf{S}_2 — матрица поворота вокруг оси SX_1 на угол i_J , \mathbf{S}_3 — матрица поворота вокруг оси Sz' на угол $u = \omega_J + \nu$.

Матрицы \mathbf{S}_1 , \mathbf{S}_2 , \mathbf{S}_3 имеют следующий вид:

$$\mathbf{S}_1 = \begin{pmatrix} \cos \Omega_J & -\sin \Omega_J & 0 \\ \sin \Omega_J & \cos \Omega_J & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos i_J & -\sin i_J \\ 0 & \sin i_J & \cos i_J \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S}_3 = \begin{pmatrix} \cos u & -\sin u & 0 \\ \sin u & \cos u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Для вычисления орбиты Земли в барицентрической системе координат $Oxyz$ поступим аналогичным образом. Подсчитаем координаты центра масс Земли в гелиоцентрической эклиптической системе координат $SXYZ$ по формулам

$$\begin{aligned} X_\oplus &= r_\oplus (\cos(\omega_\oplus + \nu_2) \cos(\Omega_\oplus) - \sin(\omega_\oplus + \nu_2) \sin(\Omega_\oplus) \cos(i_\oplus)), \\ Y_\oplus &= r_\oplus (\cos(\omega_\oplus + \nu_2) \sin(\Omega_\oplus) + \sin(\omega_\oplus + \nu_2) \cos(\Omega_\oplus) \cos(i_\oplus)), \\ Z_\oplus &= r_\oplus (\sin(\omega_\oplus + \nu_2) \sin(i_\oplus)), \end{aligned}$$

где r_\oplus — расстояние между Солнцем и Землей, ω_\oplus , Ω_\oplus , i_\oplus — кеплеровские элементы орбиты Земли (см. табл. 1). Тогда координаты центра масс Земли в барицентрических осях можно

Таблица 1. Кеплеровские элементы орбит Юпитера, Марса и Земли

Элемент	Юпитер	Марс	Земля
Эксцентриситет	$e_J = 0.04839266$	$e_M = 0.09341233$	$e_{\oplus} = 0.01671022$
Наклонение орбиты	$i_J = 1.30530^\circ$	$i_M = 1.85061^\circ$	$i_{\oplus} = 0^\circ$
Долгота восходящего узла	$\Omega_J = 100.55615^\circ$	$\Omega_M = 49.57854^\circ$	$\Omega_{\oplus} = 348.73936^\circ$
Аргумент перигелия	$\omega_J = 275.066^\circ$	$\omega_M = 286.4623^\circ$	$\omega_{\oplus} = 114.20783^\circ$
Большая полуось	$a_J = 5.20336301$ а.е.	$a_M = 1.52366231$ а.е.	$a_{\oplus} = 1.00000011$ а.е.
Среднее движение	$n_J = 1.6784899 \times 10^{-8}$ рад/с	$n_M = 1.05857597 \times 10^{-7}$ рад/с	$n_{\oplus} = 1.990986576 \times 10^{-7}$ рад/с

записать в виде

$$\begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix} = \mathbf{S}^{-1} \begin{pmatrix} X_{\oplus} \\ Y_{\oplus} \\ Z_{\oplus} \end{pmatrix} - \mathbf{s}.$$

Средние кеплеровские элементы орбит Юпитера, Марса и Земли, рассчитанные на эпоху J2000, представлены в таблице 1.

Используя полученные формулы для координат центров масс Земли и Марса, значения средних кеплеровских элементов орбиты, получим координаты x, y, z как функции ν, ν_1 и координаты x_3, y_3, z_3 — как функции ν, ν_2 :

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{1 + 0.09341233 \cos \nu_1} [1.164389636 \cos \nu_1 \cos \nu + 0.9619543252 \cos \nu \sin \nu_1 - \\ &\quad - 0.9618034592 \sin \nu \cos \nu_1 + 1.163934041 \sin \nu \sin \nu_1] - \frac{0.004949210633}{1 + 0.04839266 \cos \nu}, \\ y &= \frac{1}{1 + 0.09341233 \cos \nu_1} [-0.9618034592 \cos \nu \cos \nu_1 + 1.163934041 \cos \nu \sin \nu_1 - \\ &\quad - 1.164389636 \sin \nu \cos \nu_1 - 0.9619543252 \sin \nu \sin \nu_1], \\ z &= \frac{1}{1 + 0.09341233 \cos \nu_1} [-0.01842487193 \cos \nu_1 + 0.03331703134 \sin \nu_1], \\ x_3 &= \frac{1}{1 + 0.01671022 \cos \nu_2} [0.0466676364 \cos \nu_2 \cos \nu - 0.9983733582 \cos \nu \sin \nu_2 + \\ &\quad + 0.9986305951 \sin \nu \cos \nu_2 + 0.0466339854 \sin \nu \sin \nu_2] - \frac{0.004949210633}{1 + 0.04839266 \cos \nu}, \\ y_3 &= \frac{1}{1 + 0.01671022 \cos \nu_2} [0.9986305951 \cos \nu \cos \nu_2 + 0.0466339854 \cos \nu \sin \nu_2 - \\ &\quad - 0.0466676364 \sin \nu \cos \nu_2 + 0.9983733582 \sin \nu \sin \nu_2], \\ z_3 &= \frac{1}{1 + 0.01671022 \cos \nu_2} [-0.000949299537 \cos \nu_2 - 0.02275398410 \sin \nu_2]. \end{aligned}$$

Для того чтобы записать координаты центра масс Марса и Земли в виде временных рядов, воспользуемся разложением тригонометрических функций истинной аномалии в три-



гонометрические ряды по кратным средней аномалии [7]:

$$\begin{aligned}\cos \nu &= -e + \frac{2(1-e^2)}{e} \sum_{k=1}^{\infty} J_k(ke) \cos kM, \\ \sin \nu &= \sqrt{1-e^2} \sum_{k=1}^{\infty} [J_{k-1}(ke) - J_{k+1}(ke)] \sin kM.\end{aligned}\tag{3}$$

Подставляя ряды (3) в формулы для x, y, z и x_3, y_3, z_3 , а затем раскладывая полученные выражения в ряды по e_J, e_M, e_{\oplus} , получим, с точностью до членов пятого порядка малости, координаты центра масс Марса в осях $Oxyz$:

$$\begin{aligned}x(M, M_1) &= \frac{1.164389636 \cos M \cos M_1}{1 + 0.09341233 \cos M_1} + \frac{0.9619543252 \cos M \sin M_1}{1 + 0.09341233 \cos M_1} - \\ &- \frac{0.9618034592 \sin M \cos M_1}{1 + 0.09341233 \cos M_1} + \frac{1.163934041 \sin M \sin M_1}{1 + 0.09341233 \cos M_1} - \\ &- \frac{0.004949210633}{1 + 0.04839266000 \cos M} + \sum_{m+n=1}^4 e_J^m e_M^n x_{mn}(M, M_1), \\ y(M, M_1) &= -\frac{0.9618034592 \cos M \cos M_1}{1 + 0.09341233 \cos M_1} + \frac{1.163934041 \cos M \sin M_1}{1 + 0.09341233 \cos M_1} - \\ &- \frac{1.164389636 \sin M \cos M_1}{1 + 0.09341233 \cos M_1} - \frac{0.9619543252 \sin M \sin M_1}{1 + 0.09341233 \cos M_1} + \\ &+ \sum_{m+n=1}^4 e_J^m e_M^n y_{mn}(M, M_1), \\ z(M, M_1) &= -\frac{0.01842487193 \cos M_1}{1 + 0.09341233 \cos M_1} + \frac{0.03331703134 \sin M_1}{1 + 0.09341233 \cos M_1} + \sum_{m+n=1}^4 e_J^m e_M^n z_{mn}(M, M_1), \\ x_3(M, M_2) &= \frac{0.0466676364 \cos M \cos M_2}{1 + 0.01671022 \cos M_2} - \frac{0.9983733582 \cos M \sin M_2}{1 + 0.01671022 \cos M_2} + \\ &+ \frac{0.9986305951 \sin M \cos M_2}{1 + 0.01671022 \cos M_2} + \frac{0.0466339854 \sin M \sin M_2}{1 + 0.01671022 \cos M_2} - \\ &- \frac{0.004949210633}{1 + 0.04839266000 \cos M} + \sum_{m+n=1}^4 e_J^m e_{\oplus}^n x_{mn}(M, M_2), \\ y_3(M, M_2) &= \frac{0.9986305951 \cos M \cos M_2}{1 + 0.01671022 \cos M_2} + \frac{0.0466339854 \cos M \sin M_2}{1 + 0.01671022 \cos M_2} - \\ &- \frac{0.0466676364 \sin M \cos M_2}{1 + 0.01671022 \cos M_2} + \frac{0.9983733582 \sin M \sin M_2}{1 + 0.01671022 \cos M_2} + \\ &+ \sum_{m+n=1}^4 e_J^m e_{\oplus}^n y_{mn}(M, M_2), \\ z_3(M, M_2) &= -\frac{0.01842487193 \cos M_2}{1 + 0.01671022 \cos M_2} + \frac{0.03331703134 \sin M_2}{1 + 0.01671022 \cos M_2} + \sum_{m+n=1}^4 e_J^m e_{\oplus}^n z_{mn}(M, M_2).\end{aligned}$$

Здесь $M = n_J t$, $M_1 = n_M t$, $M_2 = n_{\oplus} t$ — средние аномалии Юпитера, Марса и Земли. Функции x_{nm}, y_{nm}, z_{nm} имеют громоздкий вид, поэтому их опускаем.



На рисунках 2, 3 изображены орбиты Марса и Земли в барицентрических осях $Oxyz$ на интервале времени порядка 31.7 земных лет. Величины x , y , z и x_3 , y_3 , z_3 указаны в астрономических единицах.

На рисунке 4 представлены орбиты Марса, Земли (плоскость эклиптики) и Юпитера на единичной сфере в инерциальной системе координат. Здесь Υ и Ω — точки весеннего и осеннего равноденствий соответственно, β — наклонение орбиты Марса к орбите Юпитера.

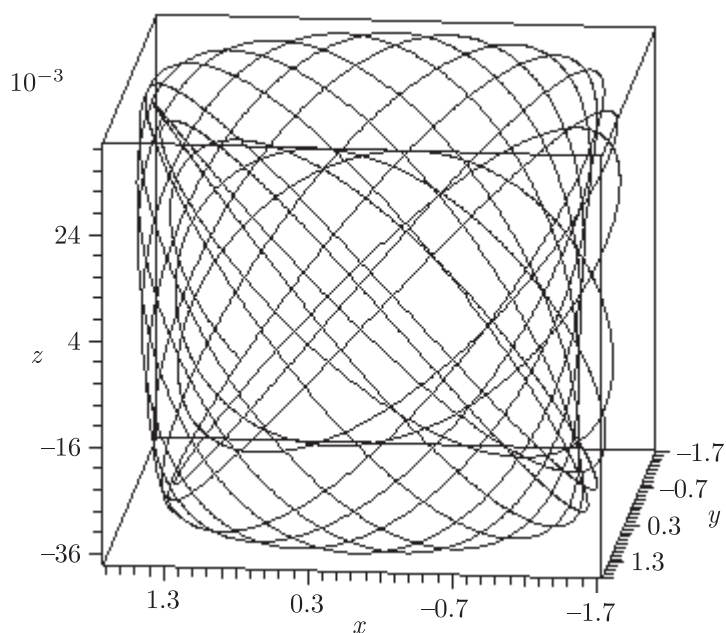


Рис. 2. График орбиты Марса в барицентрической системе координат $Oxyz$.

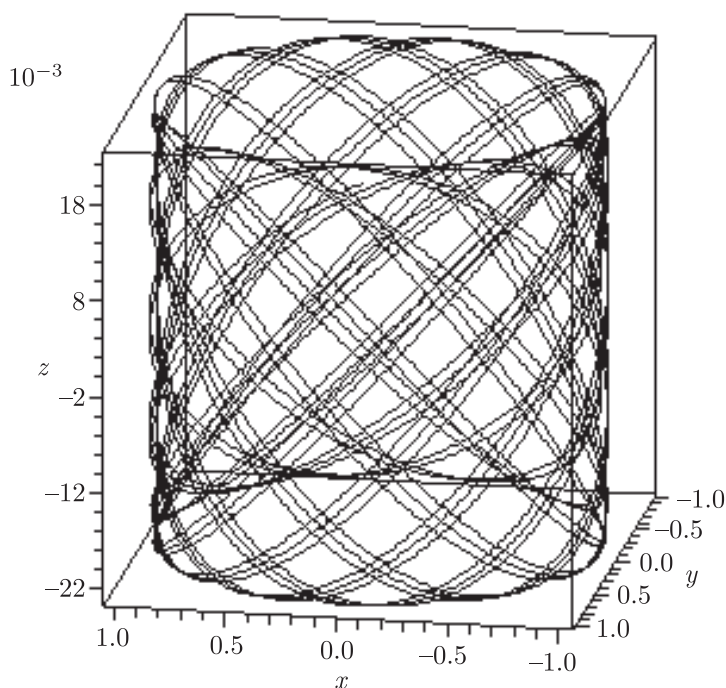


Рис. 3. График орбиты Земли в барицентрической системе координат $Oxyz$.

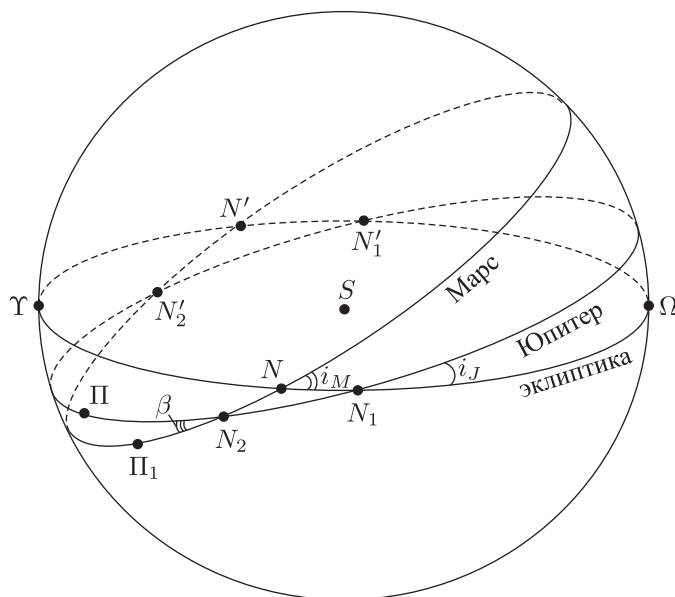


Рис. 4. Орбиты Марса и Юпитера на небесной сфере.

Из таблицы 1 непосредственно следует, что $\Upsilon N = 100.55615^\circ$, $\Upsilon N_1 = 49.57854^\circ$, $N\Pi = 275.066^\circ$, $N_1\Pi_1 = 286.4623^\circ$, $i_J = 1.30530^\circ$, $i_M = 1.85061^\circ$. Из сферического треугольника N_1N_2N , изображенного на рисунке 4, легко получить

$$N_1N = \Omega_J - \Omega_M = 50.97761^\circ,$$

$$\beta = \arccos(-\cos(180 - i_M) \cos i_J + \sin(180 - i_M) \sin i_J \cos(\Omega_J - \Omega_M)) = 1.444426100^\circ,$$

$$N_1N_2 = \arcsin\left(\frac{\sin(\Omega_J - \Omega_M) \sin(180 - i_M)}{\sin \beta}\right) = 84.44437506^\circ,$$

$$NN_2 = \arcsin\left(\frac{\sin(\Omega_J - \Omega_M) \sin i_J}{\sin \beta}\right) = 44.59437585^\circ.$$

Возмущенное вращение Марса

Для того чтобы исследовать вращение Марса методами теории возмущений, введем малые параметры задачи. Учитывая, что угловая скорость вращения Марса $\Omega^* \approx 7.0882711 \times 10^{-5}$ рад/с относительно центра масс существенно превосходит среднее движение Юпитера $n_J \approx 1.6784899 \cdot 10^{-8}$ рад/с и среднее движение Земли $n_\oplus \approx 1.990986576 \cdot 10^{-7}$ рад/с, за единицу времени примем характерное значение $T^* = \frac{1}{\Omega^*}$. Тогда параметры $\varepsilon_1 = n'_J$ ($n'_J = n_J/\Omega^* \sim 10^{-4}$), $\varepsilon_2 = n'_\oplus$ ($n'_\oplus = n_\oplus/\Omega^* \sim 10^{-3}$) — малые, при этом средние аномалии движений Юпитера, Марса и Земли будут вычисляться по формулам

$$M = n'_J t, \quad M_1 = n'_M t \quad \left(n'_M = \frac{n_M}{\Omega^*} \sim 10^{-2}\right), \quad M_2 = n'_\oplus t.$$

Функция Гамильтона (1) примет следующий вид:

$$H = \frac{I_2^2 - L^2}{2A\Omega^*} + \frac{L^2}{2C\Omega^*} + \varepsilon_1^2 H_{11}\Omega^* + \varepsilon_2^2 H_{12}\Omega^*,$$



где

$$H_{11} = -\frac{3}{2}(1-\mu)\frac{a_J^3}{r_1^3}(C-A)\gamma_{13}^2 - \frac{3}{2}\mu\frac{a_J^3}{r_2^3}(C-A)\gamma_{23}^2,$$

$$H_{12} = -\frac{3}{2}\mu_{\oplus}\frac{a_{\oplus}^3}{r_3^3}(C-A)\gamma_{33}^2.$$

Отметим, что для случая динамически симметричного Марса ($A = B$) переменные Депри – Андуайе являются переменными действие – угол в невозмущенной задаче:

$$\dot{\varphi}_2 = \frac{\partial H_0}{\partial I_2} = \frac{I_2}{\Omega^* A}, \quad \dot{l} = \frac{\partial H_0}{\partial L} = \frac{L}{\Omega^*} \left(\frac{1}{C} - \frac{1}{A} \right),$$

$$L = \text{const}, \quad I_2 = \text{const}, \quad I_3 = \text{const}, \quad \varphi_3 = \text{const}. \quad (4)$$

Заметим, что частота собственного вращения ($\Omega_1 = \dot{l}$), частота прецессии ($\Omega_2 = \dot{\varphi}_2$) орбитальных движений Марса вокруг вектора кинетического момента \mathbf{I}_2 , частоты n_M, n_J, n_{\oplus} орбитального движения Марса и Юпитера в барицентрических осях не удовлетворяют резонансным соотношениям

$$k_0 n_J + k_1 n_M + k_2 n_{\oplus} + k_3 \Omega_1 + k_4 \Omega_2 = 0$$

ни при одном наборе целых чисел k_0, k_1, k_2, k_3, k_4 , если $k_0^2 + k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 + k_4^2 \neq 0$.

Перейдем к новому времени $M = \varepsilon_1 t$ и запишем «расширенную» функцию Гамильтона

$$H^* = P_M + \frac{n'_M}{\varepsilon_1} P_{M_1} + \frac{n'_{\oplus}}{\varepsilon_1} P_{M_2} + \frac{1}{\varepsilon_1} H_0 + \varepsilon_1 H_{11} + \bar{\varepsilon}_2 H_{12}, \quad \bar{\varepsilon}_2 = \varepsilon_2^2 \varepsilon_1^{-1} \sim 10^{-2}. \quad (5)$$

Здесь $M, P_M, M_1, P_{M_1}, M_2, P_{M_2}$ — новые обобщенные координаты и обобщенные импульсы соответственно. Легко видеть, что величины $M, M_1, M_2, l, \varphi_2$ являются быстрыми переменными задачи, частоты изменения которых в невозмущенном движении равны 1, $n'_M/\varepsilon_1, n'_{\oplus}/\varepsilon_1, \Omega_1/\varepsilon_1, \Omega_2/\varepsilon_1$.

Исследуем уравнения возмущенного движения при помощи метода усреднения. Для этого усредним функцию H^* по быстрым переменным $M, M_1, M_2, l, \varphi_2$, рассматривая $\varepsilon_1, \bar{\varepsilon}_2$ как независимые малые параметры [8]:

$$\bar{H}^* = \frac{1}{\varepsilon_1} H_0 + \varepsilon_1 \bar{H}_1, \quad \bar{H}_1 = \frac{1}{(2\pi)^5} \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} \left(H_{11} + \frac{\varepsilon_2^2}{\varepsilon_1} H_{12} \right) dl d\varphi_2 dM dM_1 dM_2.$$

Вычисления показывают, что функция \bar{H}_1 имеет следующий вид:

$$\bar{H}_1 = \frac{a_J^3}{\Omega^*} F(I_2, L) \left[\frac{D_1}{2} - \frac{3}{2} G(I_2, I_3, \varphi_3) \right], \quad (6)$$

где

$$F(I_2, L) = 2C - 3(C - A) \sin^2 \delta_2,$$

$$G(I_2, I_3, \varphi_3) = (D_2 \sin^2 \varphi_3 + D_3 \cos^2 \varphi_3 + D_4 \sin 2\varphi_3 + D_5) \sin^2 \delta_1 +$$

$$+ (D_6 \sin \varphi_3 + D_7 \cos \varphi_3) \cos \delta_1 \sin \delta_1,$$

$$\cos \delta_1 = \frac{I_3}{I_2}, \quad \cos \delta_2 = \frac{L}{I_2}.$$

Коэффициенты D_i вычисляются по формулам

$$D_i = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} Q_i dM dM_1 dM_2 =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(1 - e_J^2)^{\frac{3}{2}}}{(1 + e_J \cos \nu)^2} \frac{(1 - e_N^2)^{\frac{3}{2}}}{(1 + e_N \cos \nu_1)^2} \frac{(1 - e_{\oplus}^2)^{\frac{3}{2}}}{(1 + e_{\oplus} \cos \nu_2)^2} Q_i d\nu d\nu_1 d\nu_2.$$

Здесь введены следующие обозначения ($\mu_1 = 1 - \mu$, $\mu_2 = \mu$, $\mu_3 = \mu_{\oplus}$):

$$Q_1 = \sum_{i=1}^2 \mu_i \frac{(x - x_i)^2 + y^2 - 2z^2}{2r_i^5} + \frac{\varepsilon_2^2 a_{\otimes}^3}{\varepsilon_1^2 a_J^3} \mu_3 \frac{(x - x_3)^2 + (y - y_3)^2 - 2(z - z_3)^2}{2r_3^5},$$

$$Q_2 = \sum_{i=1}^2 \mu_i \frac{((x - x_i) \cos \nu - y \sin \nu)^2}{2r_i^5} + \frac{\varepsilon_2^2 a_{\otimes}^3}{\varepsilon_1^2 a_J^3} \mu_3 \frac{((x - x_3) \cos \nu - (y - y_3) \sin \nu)^2}{2r_3^5},$$

$$Q_3 = \sum_{i=1}^2 \mu_i \frac{((x - x_i) \sin \nu + y \cos \nu)^2}{2r_i^5} + \frac{\varepsilon_2^2 a_{\otimes}^3}{\varepsilon_1^2 a_J^3} \mu_3 \frac{((x - x_3) \sin \nu + (y - y_3) \cos \nu)^2}{2r_3^5},$$

$$Q_4 = \sum_{i=1}^2 \mu_i \frac{(y \sin \nu - (x - x_i) \cos \nu)((x - x_i) \sin \nu + y \cos \nu)}{2r_i^5} +$$

$$+ \frac{\varepsilon_2^2 a_{\otimes}^3}{\varepsilon_1^2 a_J^3} \mu_3 \frac{((y - y_3) \sin \nu - (x - x_3) \cos \nu)((x - x_3) \sin \nu + (y - y_3) \cos \nu)}{2r_3^5},$$

$$Q_5 = - \sum_{i=1}^2 \mu_i \frac{z^2}{2r_i^5} - \frac{\varepsilon_2^2 a_{\otimes}^3}{\varepsilon_1^2 a_J^3} \mu_3 \frac{(z - z_3)^2}{2r_3^5},$$

$$Q_6 = \sum_{i=1}^2 \mu_i \frac{z((x - x_i) \cos \nu - y \sin \nu)}{r_i^5} + \frac{\varepsilon_2^2 a_{\otimes}^3}{\varepsilon_1^2 a_J^3} \mu_3 \frac{(z - z_3)((x - x_3) \cos \nu - (y - y_3) \sin \nu)}{r_3^5},$$

$$Q_7 = - \sum_{i=1}^2 \mu_i \frac{z((x - x_i) \sin \nu + y \cos \nu)}{r_i^5} - \frac{\varepsilon_2^2 a_{\otimes}^3}{\varepsilon_1^2 a_J^3} \mu_3 \frac{(z - z_3)((x - x_3) \sin \nu + (y - y_3) \cos \nu)}{r_3^5}.$$

В силу определения малых параметров ε_1 , ε_2 и третьего закона Кеплера имеем

$$\frac{\varepsilon_2^2 a_{\otimes}^3}{\varepsilon_1^2 a_J^3} = 1.$$

Усредненные уравнения вращений допускают следующие интегралы в инволюции:

$$L = \text{const}, \quad I_2 = \text{const}, \quad G = \text{const}, \quad \overline{H}^* = \text{const}.$$

Интеграл $G = \text{const}$ описывает возмущенное движение вектора кинетического момента Марса. Он не зависит от моментов инерции A , C , поэтому геометрия массы планеты не влияет на движение вектора \mathbf{I}_2 .

Таким образом, в рассматриваемом приближении вращение Марса складывается из вращения по Эйлеру – Пуансо вокруг вектора \mathbf{I}_2 и движения самого вектора \mathbf{I}_2 относительно осей $M\xi\eta\zeta$.



Вычисления показывают, что при $m_s = 1.9891 \cdot 10^{30}$ кг, $m_j = 1.8986 \cdot 10^{27}$ кг, $m_{\oplus} = 5.9726 \cdot 10^{24}$ кг, $\mu_1 = 1 - \mu \approx 0.9990$, $\mu_2 = \mu \approx 9.5359 \cdot 10^{-4}$, $\mu_3 = \mu_{\oplus} \approx 0.0027 \cdot 10^{-6}$ коэффициенты имеют следующие значения: $D_1 = 0.1429559651$, $D_2 = 0.07154463109$, $D_3 = 0.07150226249$, $D_4 = 0.000008246177674$, $D_5 = -0.4546425415 \cdot 10^{-4}$, $D_6 = 0.0006645690058$, $D_7 = -0.3543987113 \cdot 10^{-2}$.

След вектора кинетического момента Марса на единичной сфере

Рассмотрим интеграл

$$G = g, \tag{7}$$

описывающий поведение вектора кинетического момента Марса в кёниговой системе координат $M\xi\eta\zeta$. Полный анализ интеграла (7) для произвольных значений параметров D_j дан в работах [9, 10]. Результаты расчетов либрационных зон вращения Марса в окрестности полюсов представлены на рисунках 5, 6.

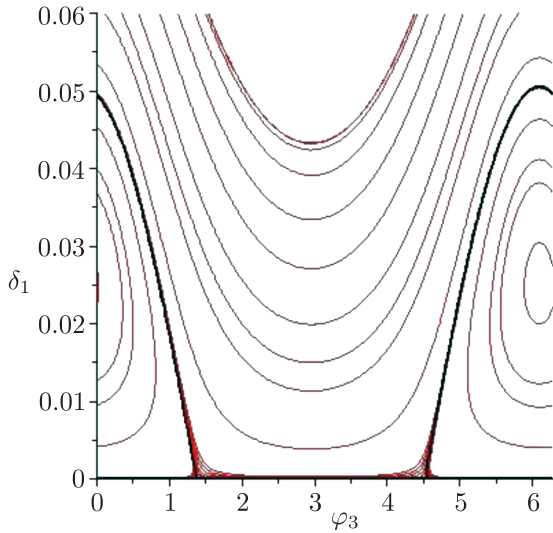


Рис. 5. Колебания конца вектора кинетического момента Марса в окрестности северного полюса единичной сферы.

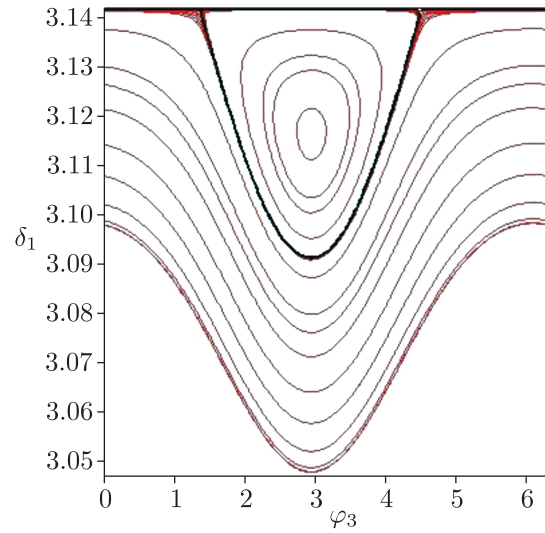


Рис. 6. Колебания конца вектора кинетического момента Марса в окрестности южного полюса единичной сферы.

Положения равновесия конца вектора \mathbf{I}_2 находятся численно из следующих уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial \varphi_3} &\equiv [(D_2 - D_3) \sin 2\varphi_3 + 2D_4 \cos 2\varphi_3] \sin^2 \delta_1 + \frac{1}{2} (D_6 \cos \varphi_3 - D_7 \sin \varphi_3) \sin 2\delta_1 = 0, \\ \frac{\partial G}{\partial \delta_1} &\equiv (D_2 \sin^2 \varphi_3 + D_3 \cos^2 \varphi_3 + D_4 \sin 2\varphi_3 + D_5) \sin 2\delta_1 + \\ &+ (D_6 \sin \varphi_3 + D_7 \cos \varphi_3) \cos 2\delta_1 = 0. \end{aligned} \tag{8}$$

Здесь δ_1 — угол между вектором кинетического момента и осью $M\zeta$.

Число стационарных точек равно восьми, при этом четыре точки устойчивы, остальные неустойчивы. Между положениями равновесия 7 и 8 заключены зоны колебаний в окрестности плоскости большого круга, параллельной плоскости орбиты Марса. Эти зоны изображены на рисунке 7.



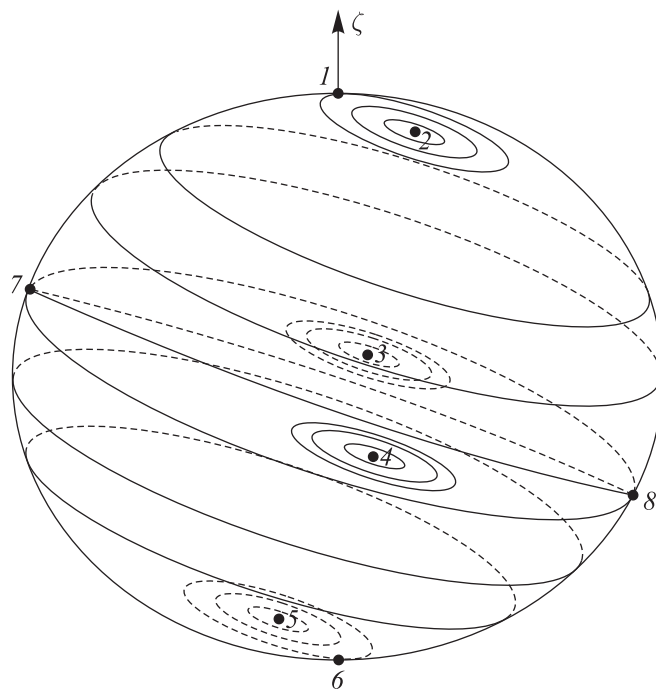


Рис. 7. Траектории конца вектора кинетического момента Марса на единичной сфере.

Качественная картина траекторий вектора I_2 представлена на рисунке 7. Сплошными линиями изображены видимые кривые, расположенные на внешней стороне сферы, а пунктирными линиями изображены кривые, расположенные на оборотной стороне.

Приведенных сведений достаточно, чтобы сделать выводы о влиянии Солнца, Юпитера и Земли на вращение Марса. Прежде всего отметим, что стационарные точки 2 и 5 имеют следующие координаты: $\{\varphi_3^* = 349.37922056^\circ, \delta_1^* = 1.44439823^\circ\}$ и $\{\varphi_3^* = 169.37922055^\circ, \delta_1^* = 178.555602^\circ\}$ соответственно. Отсюда следует, что эти точки принадлежат нормали к плоскости орбиты Марса, так как угол $\delta_1^* = 1.44439823^\circ$ совпадает с наклоном $\beta = 1.444426100^\circ$ орбиты Марса к орбите Юпитера.

Отсюда следует, что стационарные точки 7 и 8, имеющие координаты $\{\varphi_3^* = 132.08670022^\circ, \delta_1^* = 88.85081593^\circ\}$ и $\{\varphi_3^* = 312.08670023^\circ, \delta_1^* = 91.14918407^\circ\}$, принадлежат плоскости, параллельной плоскости орбиты Марса. «Окружностям» единичной сферы, плоскость которых параллельна орбите Марса, отвечает прецессия вектора кинетического момента вокруг нормали к плоскости этой орбиты. Не останавливаясь подробно на анализе прецессии, отметим только, что притяжение Солнца вызывает регулярную прецессию, тогда как Юпитер и Земля «портят» прецессию, изменяя угол нутации и угловую скорость прецессии на величины порядка ε_1 . Уточнение прецессионного движения можно провести на основе работы [12]. Подробное исследование прецессии Марса с учетом возмущающих факторов разной природы проведено в работе [11].

Более существенные эффекты от притяжения Юпитера и Земли проявляют себя в том случае, когда движения вектора кинетического момента наблюдаются вблизи южного и северного полюсов единичной сферы, а также вблизи плоскости большого круга, параллельного плоскости орбиты Марса. К примеру, появляются новые положения равновесия, отвечающие значениям $\delta_1 = 0, \delta_1 = \pi$, что непосредственно следует из интеграла (8) при $g = 0$. Неустойчивым стационарным точкам $\delta_1 = 0, \delta_1 = \pi$ отвечают гомоклинические траектории,

вдоль которых движение имеет асимптотический характер. Либрациям в окрестности этих траекторий отвечают движения \mathbf{I}_2 со сколь угодно большим периодом.

В окрестности плоскости большого круга, параллельной плоскости орбиты Марса, вектор \mathbf{I}_2 совершает колебания вблизи стационарных точек 3, 4 с координатами $\{\varphi_3^* = 222.10425195^\circ, \delta_1^* = 89.12509615^\circ\}$ и $\{\varphi_3^* = 42.10425194^\circ, \delta_1^* = 90.87490385^\circ\}$ соответственно. Появление стационарных точек и либраций в их окрестности — результат разрушения структурно неустойчивого континуума равновесий, существующего во вращениях планеты под действием притяжения Солнца и заполняющего собой экваториальную окружность. Зона колебаний ограничена четырьмя гетероклиническими кривыми, соединяющими равновесия 7 и 8 (рис. 7) и отвечающими константе $g = 0.07150070095$.

В заключение отметим, что реальному вращению Марса соответствует псевдорегулярная прецессия с углом нутации $\theta^* = 25.19^\circ$, отсчитанным от нормали к плоскости орбиты Марса. Для уточнения модели вращения Марса необходимо учесть притяжение ближайшего спутника планеты — Фобоса, используя, например, модель движения двух притягивающих тел в поле притягивающего центра [13, 14].

Точность приближения метода усреднения есть величина первого порядка малости по $\varepsilon_1, \bar{\varepsilon}_2$ на промежутке времени порядка $1/||(\varepsilon_1, \bar{\varepsilon}_2)||$ [8].

Список литературы

- [1] Andoyer M. H. Cours de Mécanique Céleste: Vol. 1. Paris: Gauthier-Villars, 1923. 440 pp.
- [2] Deprit A. Free rotation of a rigid body studied in the phase plane // Amer. J. Phys., 1967, vol. 35, no. 5, pp. 424–428.
- [3] Serret J. A. Mémoire sur l'emploi de la méthode de la variation des arbitraires dans la théorie des mouvements de rotation // Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris, 1866, vol. 35, pp. 585–616.
- [4] Архангельский Ю. А. Аналитическая динамика твердого тела. Москва: Наука, 1977. 328 с.
- [5] Белецкий В. В. Движение спутника относительно центра масс в гравитационном поле. Москва: МГУ, 1975. 308 с.
- [6] Борисов А. В., Мамаев И. С. Динамика твердого тела: гамильтоновы методы, интегрируемость, хаос. Москва–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2005. 576 с.
- [7] Абалакин В. К., Аксенов Е. П., Гребеников Е. А., Рябов Ю. А. Справочное руководство по небесной механике и астродинамике. Москва: Наука, 1971. 584 с.
- [8] Красильников П. С. О нелинейных колебаниях маятника переменной длины на вибрирующем основании // ПММ, 2012, т. 76, № 1, с. 36–51.
- [9] Маркеев А. П., Красильников П. С. О движении спутника относительно центра масс в эллиптической ограниченной задаче трех тел // Космические исследования, 1981, т. 19, № 2, с. 178–190.
- [10] Красильников П. С., Захарова Е. Е. Нерезонансные вращения спутника относительно центра масс на условно-периодической орбите в ограниченной задаче N тел // Космические исследования, 1993, т. 31, № 6, с. 11–21.
- [11] Bouquillon S., Souchay J. Precise modelling of the precession-nutation of Mars // Astron. Astrophys., 1999, vol. 345, pp. 282–297.
- [12] Петров К. Г., Тихонов А. А. Уравнения ротационного движения твердого тела, основанные на использовании кватернионных параметров // МТТ, 2002, № 3, с. 3–16.
- [13] Зленко А. А. Движение двух вязкоупругих шаров в поле притягивающего центра // Космические исследования, 2011, т. 49, № 6, с. 569–572.
- [14] Зленко А. А. Стационарные решения и исследование их устойчивости в задаче об эволюции движения двух вязкоупругих шаров в поле притягивающего центра // Космические исследования, 2012, т. 50, № 6, с. 490–492.

On the Mars rotation under the action of gravity torque from the Sun, Jupiter and Earth

Pavel S. Krasilnikov¹, Ruslan N. Amelin²

^{1,2}Moscow Aviation Institute (National Research University)

Volokolamskoe Shosse, 4, GSP-3, A-80, Moscow, 125993, Russia

¹krasil06@rambler.ru, ²rus-amelin@mail.ru

The Mars rotation under the action of gravity torque from the Sun, Jupiter, Earth is considered. It is assumed that Mars is the axially symmetric rigid body ($A = B$), the orbits of Mars, Earth and Jupiter are Kepler ellipses. Elliptical mean motions of Earth and Jupiter are the independent small parameters.

The averaged Hamiltonian of problem and integrals of evolution equations are obtained. By assumption that the equatorial plane of unit sphere parallel to the plane of Jupiter orbit, the set of trajectories for angular momentum vector of Mars \mathbf{I}_2 is drawn.

It is well known that “classic” equilibriums of vector \mathbf{I}_2 belong to the normal to the Mars orbit plane. It is shown that they are saved by the action of gravitational torque of Jupiter and Earth. Besides that there are two new stationary points of \mathbf{I}_2 on the normal to the Jupiter orbit plane. These equilibriums are unstable, homoclinic trajectories pass through them.

In addition, there are a pair of unstable equilibriums on the great circle that is parallel to the Mars orbit plane. Four heteroclinic curves pass through these equilibriums. There are two stable equilibriums of \mathbf{I}_2 between pairs of these curves.

MSC 2010: 70F15, 70F99

Keywords: four body restricted problem, Deprit–Andoyer variables, the track of the angular momentum vector, method of averaging

Received May 11, 2015, accepted June 12, 2015

Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2015, vol. 11, no. 2, pp. 329–342 (Russian)

