Нелинейная динамика. 2015. Т. 11. № 2. С. 343–352.
Полнотекстовая версия в свободном доступе
http://nd.ics.org.ru

ПЕРЕВОДНЫЕ СТАТЬИ

УДК: 531.36
MSC 2010: 70H05, 70H15, 70E50

О преобразовании Биркгофа в случае полного вырождения квадратичной части функции Гамильтона*

А. П. Маркеев

Исследуется периодическая по времени система с одной степенью свободы. Предполагается, что она имеет положение равновесия, в окрестности которого функция Гамильтона системы представима сходящимся рядом, в котором нет членов второй степени, а члены до некоторой конечной степени ℓ не зависят явно от времени. Предлагается алгоритм построения канонического преобразования, упрощающего структуру функции Гамильтона до членов степени ℓ включительно.

В качестве приложения рассмотрен один особый случай, когда разложение функции Гамильтона начинается с членов третьей степени. Для этого случая получены достаточные условия неустойчивости положения равновесия по формам четвертой и пятой степеней.

Ключевые слова: система Гамильтона, канонические преобразования, устойчивость

*Перевод статьи “On the Birkhoff Transformation in the Case of Complete Degeneracy of the Quadratic Part of the Hamiltonian”, опубликованной в журнале Regular and Chaotic Dynamics, 2015, vol. 20, no. 3, pp. 309–316.

Получено 08 февраля 2015 года
После доработки 24 февраля 2015 года

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 14-21-00068) в Московском авиационном институте (Национальном исследовательском университете).

Маркеев Анатолий Павлович
markeev@ipmnet.ru
Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН
119526, Россия, г. Москва, пр. Вернадского, 101, стр. 1

1. Введение

Рассмотрим систему с одной степенью свободы, функция Гамильтона которой $H(q, p, t)$ представима сходящимся рядом вида

$$H = \sum_{k=m}^{\ell} H_k(q, p) + \widetilde{H}(q, p, t), \quad H_k = \sum_{\nu+\mu=k} h_{\nu\mu} q^\nu p^\mu, \tag{1.1}$$

где коэффициенты $h_{\nu\mu}$ форм H_k не зависят от времени t, через $\widetilde{H}$ обозначена совокупность членов ряда, степень которых больше, чем ℓ, а коэффициенты — непрерывные периодические функции t.

Система с функцией Гамильтона (1.1) допускает положение равновесия $q = p = 0$. Для исследования движений вблизи положения равновесия обычно делается каноническая замена переменных q, $p \to q'$, p', упрощающая структуру функции Гамильтона. В качестве такой замены чаще всего принимается преобразование Биркгофа [1] или его модификации типа метода Деприи–Хори [2].

В классическом преобразовании Биркгофа предполагается, что разложение (1.1) начинается с квадратичной формы H_2. Но в конкретных задачах динамики возможны случаи, когда в разложении (1.1) члены второй степени отсутствуют. Такая ситуация возникает, например, в задаче об устойчивости и нелинейных колебаниях 2π-периодической по времени гамильтоновой системы с одной степенью свободы на границах областей параметрического резонанса. В этой задаче функция $\widetilde{H}$ в разложении (1.1) имеет период 2π или 4π по t, причем число ℓ в этом разложении можно считать сколь угодно большим [3].

В статье преобразование Биркгофа обобщается на случай, когда разложение (1.1) начинается с формы H_k третьей или более высокой степени, указывается процедура получения канонической замены переменных q, $p \to q'$, p', упрощающей функцию Гамильтона. Как и в классическом преобразовании Биркгофа, эта замена переменных близка к тождественной и задается при помощи производящей функции, представимой рядом относительно старой координаты q и нового импульса p'. В качестве конкретного примера рассмотрен частный случай, когда разложение (1.1) начинается с членов третьей степени.

Системы с функцией Гамильтона (1.1) относятся к классу нелинейных систем, для которых топологический тип фазового портрета в окрестности особой точки не определяется только линейными членами. Для таких систем в монографии [4] разработана процедура аналитического представления решений в виде рядов, аналогичных рядам, используемым в первом методе Ляпунова. Особое внимание в [4] уделено связи задачи о существовании асимптотических решений, стремящихся к положению равновесия при неограниченном возрастании или убывании независимой переменной, с задачей об устойчивости самого положения равновесия. В данной статье вопрос об аналитическом представлении решений системы с функцией Гамильтона (1.1) не рассматривается.

2. Построение канонического преобразования

Пусть $H'(q', p', t)$ — функция Гамильтона (1.1) в новых канонически сопряженных переменных q', p'. Чтобы упростить функцию $H'(q', p', t)$ до членов степени ℓ включительно, переменные q', p' введем при помощи унивалентного канонического преобразования с производящей функцией $S(q, p')$ вида

$$S = qp' + \sum_{k=3}^{\ell-m+2} S_k(q, p'), \quad S_k = \sum_{\nu+\mu=k} s_{\nu\mu} q^\nu p'^\mu, \tag{2.1}$$

где $s_{\nu\mu}$ — постоянные коэффициенты. Их значения предстоит определить в процессе упрощения функции $H'(q', p', t)$.

Связь новых и старых переменных задается соотношениями

$$q' = \frac{\partial S}{\partial p'}, \qquad p = \frac{\partial S}{\partial q}. \tag{2.2}$$

Из этих соотношений находятся выражения $q = q(q', p')$, $p = p(q', p')$ старых переменных через новые в виде разложений с точностью до членов степени $\ell - m + 1$ включительно относительно q', p':

$$q = q(q', p') = q' - \frac{\partial S_3(q', p')}{\partial p'} + \ldots, \quad p = p(q', p') = p' + \frac{\partial S_3(q', p')}{\partial q'} + \ldots. \tag{2.3}$$

Здесь многоточием обозначена совокупность членов выше второй степени относительно q', p' (до степени $\ell - m + 1$ включительно).

Подставив разложения (2.3) в правую часть равенства (1.1), получим разложение новой функции Гамильтона $H'(q', p', t)$ в ряд вида

$$H' = \sum_{k=m}^{\ell} H'_k(q', p') + \widetilde{H}'(q', p', t), \quad H'_k = \sum_{\nu+\mu=k} h'_{\nu\mu} q'^\nu p'^\mu, \tag{2.4}$$

где $\widetilde{H}'(q', p', t)$ — периодическая по времени функция, разложение которой начинается с членов, степень которых относительно q', p' превосходит ℓ.

Функции $H'_k(q', p')$ вычисляются по следующим формулам:

$$H'_m = H_m(q', p'), \tag{2.5}$$

$$H'_{m+1} = (S_3, H_m) + H_{m+1}(q', p'), \tag{2.6}$$

$$H'_n = (S_{n-m+2}, H_m) + H_n(q', p') + F_n(q', p') \quad (n = m+2, \ldots, \ell). \tag{2.7}$$

Здесь через (S_r, H_m) $(r = 3, 4, \ldots, \ell - m + 2)$ обозначена скобка Пуассона функций $S_r(q', p')$ и $H_m(q', p')$,

$$(S_r, H_m) = \frac{\partial S_r}{\partial q'} \frac{\partial H_m}{\partial p'} - \frac{\partial S_r}{\partial p'} \frac{\partial H_m}{\partial q'}.$$

Соотношения (2.5)–(2.7) рассматриваются последовательно, одно за другим. Функции F_n в (2.7) зависят от форм $H_m, \ldots, H_{n-1}$, заданных разложением (1.1) исходной функции Гамильтона, а также от форм S_k, вычисленных для $k = 3, 4, \ldots, n - m + 1$.

Из (2.5)–(2.7) следует, что в новых переменных структура членов наименьшей степени m в разложении функции Гамильтона остается такой же, какой она была в старых переменных; структуру же членов более высокой степени (от $m+1$ до ℓ включительно) выбором пока еще не определенных коэффициентов форм $S_3, \ldots, S_{\ell-m+2}$ можно сделать более удобной для анализа движения системы. В простейшем случае можно, например, стремиться выбрать коэффициенты форм $S_3, \ldots, S_{\ell-m+2}$ так, чтобы уничтожить в формах $H'_{m+1}, \ldots, H'_\ell$ максимальное количество одночленов $h'_{\nu\mu} q'^\nu p'^\mu$.

3. Пример

Пусть $m = 3$, то есть разложение (1.1) начинается с членов третьей степени $H_3(q, p)$. При этом можно считать (см. статью [3]), что функция H_3 имеет одну из четырех ее простейших форм

$$1)\, q(q^2 + p^2), \qquad 2)\, q(q^2 - p^2), \qquad 3)\, q^2 p, \qquad 4)\, q^3, \tag{3.1}$$

к которым члены третьей степени приводятся при помощи линейного канонического преобразования. Здесь и в следующем разделе полагаем, что $H_3 = q^3$.

Упрощение функции Гамильтона. Следуя разделу 2, сделаем замену переменных q, $p \to q'$, p', задаваемую соотношениями (2.2), в которых

$$S = S(q, p') = qp' + S_3 + S_4 + \ldots + S_{\ell-1}. \tag{3.2}$$

Равенства (2.5)–(2.7) записываются в следующем виде:

$$H'_3 = q'^3, \tag{3.3}$$

$$H'_4 = -3q'^2 \frac{\partial S_3(q', p')}{\partial p'} + H_4(q', p'), \tag{3.4}$$

$$H'_5 = -3q'^2 \frac{\partial S_4(q', p')}{\partial p'} + H_5(q', p') + F_5(q', p'), \tag{3.5}$$

$$H'_n = -3q'^2 \frac{\partial S_{n-1}(q', p')}{\partial p'} + H_n(q', p') + F_n(q', p') \quad (n = 6, 7, \ldots, \ell). \tag{3.6}$$

В (3.5) F_5 — форма пятой степени относительно q', p',

$$F_5 = \sum_{\nu+\mu=5} f_{\nu\mu} q'^{\nu} p'^{\mu},$$

коэффициенты которой вычисляются по следующим формулам:

$$\begin{aligned}
&f_{50} = 9s_{21}^2 + 3s_{30}h_{31} - 4s_{21}h_{40},\\
&f_{41} = 30s_{21}s_{12} + 6s_{30}h_{22} - s_{21}h_{31} - 8s_{12}h_{40},\\
&f_{32} = 36s_{21}s_{03} + 24s_{12}^2 + 9s_{30}h_{13} + 2s_{21}h_{22} - 5s_{12}h_{31} - 12s_{03}h_{40},\\
&f_{23} = 54s_{12}s_{03} + 12s_{30}h_{04} + 5s_{21}h_{13} - 2s_{12}h_{22} - 9s_{03}h_{31},\\
&f_{14} = 27s_{03}^2 + 8s_{21}h_{04} + s_{12}h_{13} - 6s_{03}h_{22},\\
&f_{05} = 4s_{12}h_{04} - 3s_{03}h_{13}.
\end{aligned} \tag{3.7}$$

Сравнив коэффициенты одночленов одинаковых степеней относительно q', p' в правых и левых частях равенств (3.4)–(3.6), найдем выражения для коэффициентов $h'_{\nu,\mu}$ форм H'_k в разложении новой функции Гамильтона по степеням q', p'.

Для коэффициентов формы четвертой степени эти выражения имеют вид:

$$h'_{40} = -3s_{21} + h_{40}, \quad h'_{31} = -6s_{12} + h_{31}, \quad h'_{22} = -9s_{03} + h_{22}, \tag{3.8}$$

$$h'_{13} = h_{13}, \quad h'_{04} = h_{04}, \tag{3.9}$$

а для коэффициентов формы пятой степени —

$$h'_{50} = -3s_{31} + h_{50} + f_{50}, \qquad h'_{41} = -6s_{22} + h_{41} + f_{41}, \tag{3.10}$$

$$h'_{32} = -9s_{13} + h_{32} + f_{32}, \qquad h'_{23} = -12s_{04} + h_{23} + f_{23}, \tag{3.11}$$

$$h'_{14} = h_{14} + f_{14}, \qquad h'_{05} = h_{05} + f_{05}. \tag{3.12}$$

Рассмотрим члены четвертой степени H'_4 в разложении новой функции Гамильтона H' в ряд. Из равенств (3.8) следует, что если положить

$$s_{21} = \frac{1}{3}\,h_{40}, \qquad s_{12} = \frac{1}{6}\,h_{31}, \qquad s_{03} = \frac{1}{9}\,h_{22}, \tag{3.13}$$

то три коэффициента формы H'_4 обратятся в нуль:

$$h'_{40} = h'_{31} = h'_{22} = 0. \tag{3.14}$$

Коэффициенты же h'_{13} и h'_{04}, как это видно из равенств (3.9), не поддаются упрощению.

Таким образом, если три коэффициента s_{21}, s_{12}, s_{03} формы S_3 в производящей функции (3.2) задать равенствами (3.13) (оставив четвертый коэффициент s_{30} произвольным), то получим, что в новой функции Гамильтона члены четвертой степени имеют вид

$$H'_4 = h'_{13}q'p'^3 + h'_{04}p'^4, \tag{3.15}$$

причем коэффициенты h'_{13}, h'_{04} совпадают с соответствующими коэффициентами h_{13}, h_{04} формы H_4 в разложении (1.1) исходной функции Гамильтона.

Теперь рассмотрим члены пятой степени H'_5 в разложении новой функции Гамильтона в ряд. Из равенств (3.7), (3.13) и соотношений (3.10)–(3.12) получаем, что если четыре коэффициента s_{31}, s_{22}, s_{13}, s_{04} формы S_4 в производящей функции (3.2) задать равенствами (при произвольном выборе s_{40})

$$s_{31} = \frac{1}{3}\,h_{50} - \frac{1}{9}\,h_{40}^2 + h_{31}s_{30}, \quad s_{22} = \frac{1}{6}\,h_{41} + h_{22}s_{30}, \tag{3.16}$$

$$s_{13} = \frac{1}{9}\,h_{32} - \frac{1}{54}\,h_{31}^2 + \frac{2}{27}\,h_{40}h_{22} + h_{13}s_{30}, \quad s_{04} = \frac{1}{12}\,h_{23} + \frac{5}{36}\,h_{40}h_{13} - \frac{1}{36}\,h_{31}h_{22} + h_{04}s_{30}, \tag{3.17}$$

то четыре коэффициента формы H'_5 обратятся в нуль:

$$h'_{50} = h'_{41} = h'_{32} = h'_{23} = 0. \tag{3.18}$$

Коэффициенты же h'_{14}, h'_{05} уничтожить нельзя. Члены пятой степени в новой функции Гамильтона имеют вид

$$H'_5 = h'_{14}q'p'^4 + h'_{05}p'^5, \tag{3.19}$$

где коэффициенты h'_{14}, h'_{05} выражаются через коэффициенты форм H_4 и H_5 в разложении (1.1) исходной функции Гамильтона по следующим формулам:

$$\begin{aligned} h'_{14} &= h_{14} + \frac{8}{3}\,h_{40}h_{04} - \frac{1}{3}\,h_{22}^2 + \frac{1}{6}\,h_{31}h_{13}, \\ h'_{05} &= h_{05} + \frac{2}{3}\,h_{31}h_{04} - \frac{1}{3}\,h_{13}h_{22}. \end{aligned} \tag{3.20}$$

Отметим, что произвол в выборе коэффициентов s_{30} и s_{40} форм S_3 и S_4 в производящей функции (3.2) не влияет на значения коэффициентов форм (3.15) и (3.19) в разложении преобразованной функции Гамильтона в ряд.

Аналогично можно рассмотреть члены шестой и более высоких степеней, до степени ℓ включительно. В результате получим, что при помощи не зависящего от времени унивалентного канонического преобразования, задаваемого производящей функцией (2.1), исходную функцию Гамильтона (1.1) можно привести к новой функции $H'(q', p', t)$, обладающей следующей структурой:

$$H' = q'^3 + q' \sum_{i=k}^{\ell-1} h'_{1i}\, p'^i + \sum_{j=n}^{\ell} h'_{0j}\, p'^j + \widetilde{H}'(q', p', t). \tag{3.21}$$

Здесь $3 \leqslant k \leqslant \ell - 1$, $4 \leqslant n \leqslant \ell$, а $\widetilde{H}'(q', p', t)$ — периодическая по времени совокупность членов выше степени ℓ относительно q', p'.

Об устойчивости положения равновесия. Исследуем задачу об устойчивости положения равновесия $q = p = 0$ системы с функцией Гамильтона (1.1), в которой $H_3 = q^3$. Эта задача, очевидно, эквивалентна задаче об устойчивости равновесия $q' = p' = 0$ в системе с упрощенной функцией Гамильтона (3.21). Для конкретности ограничимся исследованием устойчивости по формам четвертой и пятой степени в разложении функции Гамильтона в ряд.

Функцию Гамильтона (3.21) запишем в виде

$$H' = q'^3 + H'_4 + H'_5 + \ldots + H'_\ell + \widetilde{H}'(q', p', t). \tag{3.22}$$

Здесь формы H'_4 и H'_5 задаются равенствами (3.15) и (3.19). При помощи теоремы Четаева [5] получим достаточные условия неустойчивости, выраженные через коэффициенты этих форм.

Теорема. *Если хотя бы один из коэффициентов* (3.9), (3.20) *форм* H'_4 *и* H'_5 *отличен от нуля, то положение равновесия неустойчиво.*

Чтобы убедиться в справедливости сформулированной теоремы, достаточно рассмотреть следующие три отличающиеся один от другого случая: 1) $h'_{13} \neq 0$, 2) $h'_{04} = 0$, $h'_{05} \neq 0$, 3) $h'_{04} = 0$, $h'_{05} = 0$.

1. Случай $h'_{13} \neq 0$. Здесь, в зависимости от значений коэффициентов h'_{04} и h'_{05}, имеется три возможности (при этом для каждой из них коэффициент h'_{14} может принимать произвольные значения).

1. $h'_{04} \neq 0$, h'_{05} произволен. Вместо переменных q', p' введем новые переменные ξ, η при помощи канонического (с валентностью $c = {h'_{04}}^{3/5}$) преобразования

$$q' = {h'_{04}}^{-1/5}\xi, \quad p' = {h'_{04}}^{-2/5}\eta. \tag{3.23}$$

Отвечающая новым переменным функция Гамильтона Γ задается равенством $\Gamma = c\,H$, в правой части которого величины q', p' заменены их выражениями (3.23) [6]. Получаем

$$\Gamma = \xi^3 + \eta^4 + \xi(\gamma_{13}\eta^3 + \gamma_{14}\eta^4) + \gamma_{05}\eta^5 + O_6, \tag{3.24}$$
$$\gamma_{13} = h'_{13}\, {h'_{04}}^{-4/5}, \quad \gamma_{14} = h'_{14}\, {h'_{04}}^{-6/5}, \quad \gamma_{05} = h'_{05}\, {h'_{04}}^{-7/5}.$$

Здесь и всюду в дальнейшем через O_6 обозначается совокупность членов выше пятой степени относительно ξ, η.

В качестве функции Четаева возьмем функцию

$$V = \varepsilon^2\eta^{8/3} - (\xi + \eta^{4/3})^2, \tag{3.25}$$

где $0 < \varepsilon \ll 1$, а за область $V > 0$ примем область, определяемую следующими условиями: $\eta < 0$, $\xi = (-1 + \varepsilon\beta)\,\eta^{4/3}$ $(-1 < \beta < 1)$.

Для производной функции (3.25) в силу уравнений движения, задаваемых функцией Гамильтона (3.24), в области $V > 0$ получаем такое выражение:

$$\frac{dV}{dt} = 8\,\varepsilon\,|\eta|^{13/3}\bigl\{\varepsilon[1 + 2\beta^2 - \varepsilon\beta(2 + \beta^2 - \varepsilon\beta)] + O(|\eta|^{1/3})\bigr\}. \tag{3.26}$$

При достаточно малом фиксированном значении ε функция (3.26) положительна, если величина $|\eta|$ достаточно мала. Отсюда на основании теоремы Четаева следует неустойчивость положения равновесия.

2. $h'_{04} = 0$, $h'_{05} \neq 0$. Каноническая (с валентностью $c = |h'_{13}|^{3/4}$) замена переменных

$$q' = |h'_{13}|^{-1/4}\xi, \quad p' = |h'_{13}|^{-1/2}\eta$$

преобразует функцию Гамильтона (3.22) к функции Γ вида

$$\Gamma = \xi^3 + \sigma\xi\eta^3 + \gamma_{14}\xi\eta^4 + \gamma_{05}\eta^5 + O_6, \tag{3.27}$$
$$\gamma_{14} = h'_{14}\,|h'_{13}|^{-3/2}, \quad \gamma_{05} = h'_{05}\,|h'_{13}|^{-7/4}, \quad \sigma = \mathrm{sign}(h'_{13}).$$

Если $\sigma = 1$, то в качестве функции Четаева можно взять функцию

$$V = \varepsilon^2\,|\eta|^3 - (\xi - |\eta|^{3/2})^2 \qquad (0 < \varepsilon \ll 1),$$

а за область $V > 0$ принять область, в которой $\eta < 0$, а $\xi = (1 + \varepsilon\beta)|\eta|^{3/2}$ $(-1 < \beta < 1)$. Для производной функции V в области $V > 0$ имеем выражение

$$\frac{dV}{dt} = 3\,\varepsilon\,|\eta|^5\bigl\{\varepsilon[2 + 4\beta^2 + 3\varepsilon\beta(2 + \beta^2 + \varepsilon\beta)] + O(|\eta|^{1/2})\bigr\}. \tag{3.28}$$

Если же $\sigma = -1$, то за функцию Четаева принимаем функцию

$$V = \varepsilon^2\,\eta^3 - \xi^2 \qquad (0 < \varepsilon \ll 1),$$

а в качестве области $V > 0$ берем область, где $\eta > 0$, $\xi = \varepsilon\beta\eta^{3/2}$ $(-1 < \beta < 1)$. В этой области

$$\frac{dV}{dt} = 3\,\varepsilon\,\eta^5\bigl[\varepsilon(1 + 2\beta^2) - 3\varepsilon^2\beta^2 + O(\eta^{1/2})\bigr]. \tag{3.29}$$

При малом ε достаточно близко к положению равновесия правые части равенств (3.28) и (3.29) положительны. Следовательно, согласно теореме Четаева, положение равновесия неустойчиво (как в случае $\sigma = 1$, так и в случае $\sigma = -1$).

3. $h'_{04} = 0$, $h'_{05} = 0$. Здесь доказательство неустойчивости положения равновесия почти полностью совпадает с соответствующим доказательством в предыдущем случае, когда $h'_{04} = 0$, а $h'_{05} \neq 0$. Отличие состоит только в том, что в функции (3.27) величина γ_{05}

должна равняться нулю, а в правых частях выражений (3.28) и (3.29) величины $O(|\eta|^{1/2})$ и $O(\eta^{1/2})$ должны быть заменены, соответственно, на $O(|\eta|)$ и $O(\eta)$.

2. Случай $h'_{13} = 0$, $h'_{14} \neq 0$. Как и в случае $h'_{13} \neq 0$, здесь, в зависимости от значений коэффициентов h'_{04} и h'_{05}, следует рассмотреть три возможных ситуации.

1. $h'_{04} \neq 0$, h'_{05} произволен. Сделав замену переменных (3.23), придем к функции Гамильтона (3.24), в которой $\gamma_{13} = 0$. Доказательство неустойчивости осуществляется с использованием функции Четаева (3.25).

2. $h'_{04} = 0$, $h'_{05} \neq 0$. Сделав каноническую (с валентностью ${h'_{05}}^{3/7}$) замену переменных

$$q' = {h'_{05}}^{-1/7}\xi, \quad p' = {h'_{05}}^{-2/7}\eta, \tag{3.30}$$

придем к системе с функцией Гамильтона

$$\Gamma = \xi^3 + \eta^5 + \gamma_{14}\xi\eta^4 + O_6 \qquad (\gamma_{14} = h'_{14}\,{h'_{05}}^{-6/7}). \tag{3.31}$$

Положим

$$V = \varepsilon^2\,\eta^{10/3} - (\xi + \eta^{5/3})^2 \qquad (0 < \varepsilon \ll 1), \tag{3.32}$$

а за область $V > 0$ примем область, в которой $\eta < 0$, $\xi = (-1 + \varepsilon\beta)\eta^{5/3}$ $(-1 < \beta < 1)$.

Для производной функции V имеем в области $V > 0$ такое выражение:

$$\frac{dV}{dt} = 10\,\varepsilon\,|\eta|^{17/3}\big\{\varepsilon[(1 + 2\beta^2) - \varepsilon\beta(2 + \beta^2 - \varepsilon\beta)] + O(|\eta|^{2/3})\big\}. \tag{3.33}$$

При малом значении ε правая часть выражения (3.33) положительна, если величина $|\eta|$ достаточно мала. Отсюда, на основании теоремы Четаева, следует неустойчивость положения равновесия.

3. $h'_{04} = 0$, $h'_{05} = 0$. В этом случае каноническое преобразование

$$q' = |h'_{14}|^{-1/6}\xi, \quad p' = |h'_{14}|^{-1/3}\eta$$

приводит функцию Гамильтона (3.22) к такой форме:

$$\Gamma = \xi^3 + \sigma\xi\eta^4 + O_6 \qquad (\sigma = \operatorname{sign}(h'_{14})). \tag{3.34}$$

Пусть $\sigma = 1$. Рассмотрим функцию $V = -\eta$. Для ее производной в силу уравнений движения с функцией Гамильтона (3.34) имеем выражение

$$\frac{dV}{dt} = 3\xi^2 + \eta^4 + \ldots, \tag{3.35}$$

где многоточием обозначена совокупность членов выше четвертой степени относительно ξ, η. В области $V > 0$, задаваемой неравенством $\eta < 0$, при достаточно малых $|\xi|$, $|\eta|$ функция (3.35) положительна. Поэтому из теоремы Четаева следует, что положение равновесия неустойчиво.

Отметим, что этот же вывод следует и из первой теоремы Ляпунова о неустойчивости [5], так как функция dV/dt знакоопределенная (определенно-положительная), а функция V не является знакопостоянной, знака, противоположного с dV/dt.

Пусть теперь $\sigma = -1$. Положим в правой части равенства (3.34) $\sigma = -1$ и запишем функцию Γ в виде

$$\Gamma = \xi^3 - \xi\eta^4 + \gamma_{06}\eta^6 + O_6^*, \tag{3.36}$$

где O_6^* — совокупность членов выше пятой степени относительно ξ, η, не содержащая одночлена $\gamma_{06}\eta^6$, который выделен из совокупности членов O_6 в функции (3.34) и явно выписан в правой части равенства (3.36).

Для доказательства неустойчивости возьмем функцию Четаева в виде

$$V = \varepsilon^2 k^2 \eta^4 - (\xi - k\eta^2)^2 \quad (0 < \varepsilon \ll 1), \tag{3.37}$$

где k — некоторая постоянная, которая будет выбрана ниже при анализе производной функции (3.37) в силу уравнений движения с функцией Гамильтона (3.36).

За область $V > 0$ примем область, в которой $\eta < 0$, $\xi = (1 + \varepsilon\beta)\, k\, \eta^2$ $(-1 < \beta < 1)$. Вычисления показывают, что в этой области для производной функции V справедливо представление

$$\frac{dV}{dt} = 4\,\varepsilon\, k\, |\eta|^7 \big\{\varepsilon\, k\, [(3k^2 - 1)(1 + 2\beta^2) + 3\varepsilon\beta k^2(2 + \beta^2 + \varepsilon\beta)] + 3\beta P_3(k) + O(|\eta|)\big\}, \tag{3.38}$$

где $P_3(k)$ — многочлен третьей степени вида

$$P_3 = k^3 - k + \gamma_{06}.$$

Несложно убедиться, что этот многочлен при любом значении величины γ_{06} имеет хотя бы один вещественный корень k_*, удовлетворяющий неравенству $|k_*| > \sqrt{3}/3$. Если теперь в функции V положить $k = k_*$, то ее производная (3.38) при малом ε и достаточно малых $|\eta|$ будет положительной. Неустойчивость равновесия доказана.

3. Случай $h'_{13} = 0$, $h'_{14} = 0$. Здесь следует рассмотреть две возможные ситуации.

1. $h'_{04} \neq 0$, h'_{05} произволен. Замена переменных (3.23) приводит функцию Гамильтона (3.22) к функции Г, задаваемой равенством (3.24), в правой части которого следует положить $\gamma_{13} = \gamma_{14} = 0$. Доказательство неустойчивости можно получить, использовав функцию Четаева (3.25).

2. $h'_{04} = 0$, $h'_{05} \neq 0$. Сделав замену переменных (3.30), получим функцию Гамильтона, определяемую формулой (3.31), в которой $\gamma_{14} = 0$. Доказательство неустойчивости осуществляется при помощи функции Четаева (3.32).

Рассмотрением этого случая завершается доказательство теоремы о неустойчивости положения равновесия $q = p = 0$ исходной системы с функцией Гамильтона (1.1).

Список литературы

[1] Биркгоф Д. Динамические системы. Ижевск: УдГУ, 1999. 408 с.

[2] Джакалья Г. Е. О. Методы теории возмущений для нелинейных систем. Москва: Наука, 1979. 319 с.

[3] Маркеев А. П. Упрощение структуры форм третьей и четвертой степеней в разложении функции Гамильтона при помощи линейного преобразования // Нелинейная динамика, 2014, т. 10, № 4, с. 447–464.

[4] Козлов В. В., Фурта С. Д. Асимптотики решений сильно нелинейных систем дифференциальных уравнений. Москва: МГУ, 1996. 244 с.

[5] Малкин И. Г. Теория устойчивости движения. Москва: Наука, 1966. 532 с.

[6] Маркеев А. П. Теоретическая механика. Москва – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2007. 592 с.

On the Birkhoff transformation in the case of complete degeneracy of the quadratic part of the Hamiltonian

Anatoly P. Markeev

A. Ishlinsky Institite for Problems in Mechanics, Russian Academy of Sciences
pr. Vernadskogo 101-1, Moscow, 119526, Russia
markeev@ipmnet.ru

A time-periodic system with one degree of freedom is investigated. The system is assumed to have an equilibrium position, in the vicinity of which the Hamiltonian is represented as a convergent series.This series does not contain members of the second degree, whereas the members to some finite degree ℓ do not depend explicitly on time. The algorithm for constructing a canonical transformation is proposed that simplifies the structure of the Hamiltonian in members to degree ℓ, inclusive. As an application, a special case is considered when the expansion of the Hamiltonian begins with members of the third degree. For this case, sufficient conditions for instability of the equilibrium are obtained depending on the forms of the fourth and fifth degrees.

MSC 2010: 70H05, 70H15, 70E50
Keywords: Hamiltonian system, canonical transformation, stability

Received February 08, 2015, accepted February 24, 2015
Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2015, vol. 11, no. 2, pp. 343–352 (Russian)