



ОРИГИНАЛЬНЫЕ СТАТЬИ

УДК: 534.16

MSC 2010: 39A21,74J30

Самоподобные волны в средах с разномодульной упругой нелинейностью и релаксацией

В. Е. Назаров, С. Б. Кияшко, А. В. Радостин

Приведены результаты исследований распространения продольных акустических волн в средах с разномодульной упругой нелинейностью и релаксацией. Получены точные аналитические решения для профилей несимметричных стационарных волн и самоподобных импульсных и периодических волн, распространяющихся без изменения своей формы.

Ключевые слова: разномодульная нелинейность, релаксация, нелинейные волны, самоподобные решения

1. Введение

Закономерности нелинейного распространения акустических волн в различных средах определяются нелинейными, диссипативными и дисперсионными свойствами этих сред. Как известно, однородные среды обладают упругой квадратичной нелинейностью, при этом в низкочастотном диапазоне они характеризуются вязкой диссипацией и практически полным отсутствием дисперсии скорости звука [1–3]. В высокочастотном диапазоне во многих

Получено 18 сентября 2014 года
После доработки 24 декабря 2014 года

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 15-05-05143 а.

Назаров Вениамин Евгеньевич
nazarov@hydro.appl.sci-nnov.ru
Кияшко Сергей Борисович
sergei-kiyashko@mail.ru
Радостин Андрей Викторович
radostin@hydro.appl.sci-nnov.ru
Институт прикладной физики РАН
603950, г. Нижний Новгород, ул. Ульянова, д. 46

средах, как правило, проявляется релаксация, связанная с восстановлением термодинамического равновесия среды, которое нарушается под действием акустической волны [1, 2]. Релаксация приводит к «невязкого» типа поглощению и к небольшой дисперсии скорости звука. Акустические волны в средах с безынерционной упругой квадратичной нелинейностью и релаксацией подробно описаны в монографии [1], а в работе [4] проведено численное исследование распространения нелинейных акустических волн в таких средах.

В последнее время в акустике все большее внимание уделяется микронеоднородным средам, акустическая нелинейность которых является аномально высокой по сравнению с однородными средами, описываемыми пятikonстантной теорией упругости [5]. Высокая нелинейность микронеоднородных сред определяется нелинейными дефектами их структуры: трещинами, дислокациями, границами зерен и т. д. «Аномальность» таких сред проявляется еще и в том, что их нелинейные уравнения состояния (то есть зависимости $\sigma = \sigma(\varepsilon)$, где σ — напряжение, ε — деформация) часто носят неаналитический характер. «Неаналитичность» некоторых твердых тел проявляется в так называемой разномодульности. Разномодульными (или бимодульными) упругими свойствами, то есть различными модулями E_1 и E_2 упругости при растяжении и сжатии, обладает довольно широкий класс твердых тел: некоторые полимеры, композиционные и конструкционные материалы [6], грунты [7–9], а также твердые тела, содержащие трещины [10, 11]. Распространение нелинейных акустических волн в разномодульных материалах исследовалось во многих работах [11–14], однако влияние релаксационных свойств на эволюцию нелинейных волн в таких средах не рассматривалось.

В настоящей работе проводится исследование распространения несимметричных продольных акустических волн в средах с разномодульной нелинейностью и релаксацией. Интерес к такой задаче и ее специфика связаны с линейной зависимостью разномодульной нелинейности от амплитуды деформации, что позволяет получить точные решения нелинейного волнового уравнения в виде самоподобных волн, распространяющихся без изменения своей формы.

2. Уравнение состояния, реологическая модель и волновое уравнение для разномодульной среды с релаксацией

Уравнение состояния разномодульной среды с релаксацией имеет вид

$$\sigma(\varepsilon) = E[\varepsilon - \gamma|\varepsilon|] + mC_0^2\rho \int_{-\infty}^t \frac{d\varepsilon(t')}{dt'} \exp\left(-\frac{t-t'}{\tau_0}\right) dt', \quad (2.1)$$

где $E = \frac{E_1 + E_2}{2}$, $\gamma = \frac{E_2 - E_1}{E_1 + E_2}$ — параметр разномодульной нелинейности, $C_0 = [E/\rho]^{1/2}$ — фазовая скорость низкочастотной волны, ρ — плотность, τ_0 — время релаксации, $m > 0$ — безразмерный параметр, определяющий релаксационные свойства среды. Если время релаксации τ_0 много меньше периода волны $T = 2\pi/\omega$ (ω — частота), то ее распространение происходит так же, как в вязкой среде с низкочастотной скоростью $C_0 = C(\omega \rightarrow 0)$. Если же $\omega\tau_0 \gg 1$, релаксационные процессы в среде «заморожены» и волна будет распространяться со скоростью $C_\infty = C(\omega \rightarrow \infty) > C_0$, так что $m = \frac{2(C_\infty - C_0)}{C_0} \ll 1$ [1].

Уравнению состояния (2.1) отвечает реологическая модель разномодульной среды с релаксацией [14] (рис. 1). Модель представляет собой однородную цепочку из одинаковых масс



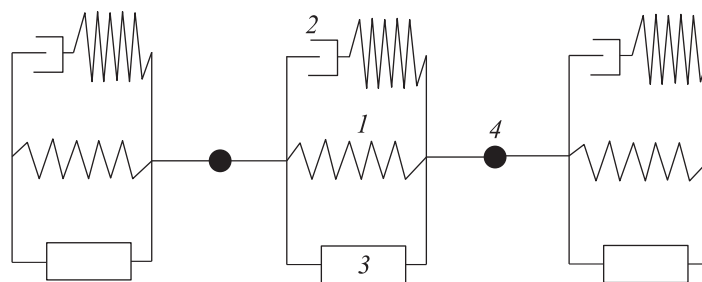


Рис. 1. Реологическая модель нелинейной среды с релаксацией: 1 — линейная пружина, 2 — демпфер, 3 — нелинейный элемент, 4 — масса.

и одинаковых звеньев, каждое из которых является параллельным соединением стандартного линейного вязкоупругого тела и нелинейного (в данном случае — разномодульного) элемента.

Мы будем считать, что $|\varepsilon| \ll |\gamma| \ll 1$, при этом уравнения теории упругости в лагранжевых и эйлеровых координатах совпадают [11]. Подставляя (2.1) в уравнение движения $\rho U_{tt} = \sigma_x(\varepsilon)$, $\varepsilon = U_x$ (U — смещение) [1, 5] и переходя к переменным $\tau = t - x/C_0$, $x = x_1$, получим уравнение для волн, бегущих в положительном направлении оси x :

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial z} = -\frac{\partial |\varepsilon|}{\partial \theta} + h \frac{\partial}{\partial \theta} \int_{-\infty}^{\theta} \frac{\partial \varepsilon(\theta')}{\partial \theta'} \exp[-(\theta - \theta')] d\theta', \tag{2.2}$$

где $\varepsilon = \varepsilon/\varepsilon_0$, $\theta = \Omega\tau$, $z = x\gamma\Omega/2C_0$, $\Omega = \tau_0^{-1}$ — частота релаксации, ε_0 — амплитуда волны, $h = \frac{m}{\gamma}$ — параметр, характеризующий отношение релаксации к нелинейности. Далее, для определенности, мы будем полагать, что $\gamma, h \geq 0$.

При решении волнового интегро-дифференциального уравнения (2.2) удобно перейти к эквивалентному дифференциальному уравнению. Для этого продифференцируем уравнение (2.2) по θ и полученный результат сложим с (2.2):

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial z} + \frac{\partial |\varepsilon|}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial z} + \frac{\partial |\varepsilon|}{\partial \theta} \right) = h \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial \theta^2}. \tag{2.3}$$

3. Стационарные волны

Вначале мы исследуем стационарные решения уравнения (2.3), отвечающие, вообще говоря, несимметричным условиям: $\varepsilon(z, \theta = \mp\infty) = \pm \frac{C_1}{1 \pm \alpha}$, $\frac{d\varepsilon(z, \theta = \mp\infty)}{d\theta} = 0$, где $C_1 > 0$, α — параметр, определяющий несимметрию волны, $|\alpha| < 1$. Для этого перейдем в систему координат $\theta_1 = \theta + \alpha z$, $z_1 = z$, в которой уравнение (2.3) примет вид

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial z} + \alpha \frac{\partial \varepsilon}{\partial \theta} + \frac{\partial |\varepsilon|}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial z} + \alpha \frac{\partial \varepsilon}{\partial \theta} + \frac{\partial |\varepsilon|}{\partial \theta} \right) = h \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial \theta^2}. \tag{3.1}$$

Приравнявая к нулю производные по z в уравнении (3.1), получим уравнение для несимметричной стационарной волны, движущейся со скоростью $C(\alpha) = C_0/(1 - \alpha\gamma/2)$:

$$\alpha \frac{\partial \varepsilon}{\partial \theta} + \frac{\partial |\varepsilon|}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\alpha \frac{\partial \varepsilon}{\partial \theta} + \frac{\partial |\varepsilon|}{\partial \theta} \right) = h \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial \theta^2}. \tag{3.2}$$



При $\epsilon(\theta = 0) = 0$ решение этого уравнения имеет вид

$$\epsilon(\theta) = \begin{cases} \frac{C_1}{1+\alpha} \left(1 - \exp\left(\frac{1+\alpha}{h-1-\alpha}\theta\right) \right) \geq 0, & \theta \leq 0, \\ \frac{C_1}{1-\alpha} \left(-1 + \exp\left(-\frac{1-\alpha}{h+1-\alpha}\theta\right) \right) \leq 0, & \theta \geq 0. \end{cases} \quad (3.3)$$

Для устойчивости стационарной волны (3.3) должны выполняться условия $\epsilon(-\infty) > 0$, $\epsilon(+\infty) < 0$, при этом $\alpha = \frac{\epsilon(\theta = \infty) + \epsilon(\theta = -\infty)}{\epsilon(\theta = \infty) - \epsilon(\theta = -\infty)}$, $h \geq 1 + \alpha > 0$, $|\alpha| < 1$. При $\alpha = 0$ получим симметричную стационарную волну ($\epsilon(\theta = -\infty) = -\epsilon(\theta = \infty)$), движущуюся со скоростью C_0 . Форма плавной стационарной волны при $h = 2$, $\alpha = -0.5$ показана на рисунке 2. В предельном случае $h = 1 + \alpha < 2$ в стационарной волне возникает разрыв (рис. 3), но форма волны все еще определяется выражением (3.3). Здесь при $-1 < \alpha < \min(1, h - 1) > -1$, как и в среде с квадратичной упругой нелинейностью [1], форма стационарной волны (3.3) обеспечивается балансом эффектов нелинейности и релаксации: нелинейность увеличивает крутизну фронта, а релаксационные диссипация и дисперсия стремятся ее уменьшить. При $h < 1 + \alpha < 2$ этот баланс нарушается и решение (3.3) становится «абсурдным» и неоднозначным: его положительная ветвь (пунктирная линия на рисунке 4) направлена в другую (положительную по θ) сторону и не удовлетворяет условиям при $\theta = -\infty$. Для устранения этого «абсурда» и неоднозначности в профиль волны необходимо ввести разрыв [1], используя правило равенства площадей, и «изменить направление» положительной ветви в доразрывной области. Форма стационарной волны при $h = 0.5$, $\alpha = 0.5$ показана на рисунке 4.

4. Самоподобные импульсные возмущения и периодические волны

При $h \geq 1$ уравнения (2.3), (3.1) имеют точные самоподобные (или автомодельные) решения [15] в виде одиночных разнополярных возмущений (импульсов) и периодических волн. Поиск таких решений проведем методом разделения переменных, полагая, что

$$\epsilon(z, \theta) = Z(z)\Psi(\theta), \quad (4.1)$$

где $Z(z) > 0$, $Z(z = 0) = 1$.

Самоподобное (автомодельное) решение (4.1) описывает, вообще говоря, затухающую волну, не меняющую своей формы $\Psi = \Psi(\theta)$ при распространении [15]. Примерами «самоподобных» волн являются незатухающие стационарные волны и солитоны (в нелинейных средах) и гармонические волны (в линейных средах). В разномодульной среде «самоподобные» волны (4.1) распространяются с постоянной и не зависящей от их амплитуды скоростью.

Подставляя (4.1) в (3.1), получаем два обыкновенных дифференциальных уравнения для $Z = Z(z)$ и $\Psi = \Psi(\theta)$:

$$\frac{Z'_z}{Z} = \frac{h\Psi''_{\theta\theta} - |\Psi'|_{\theta} - |\Psi|''_{\theta\theta} - \alpha\Psi_{\theta\theta} - \alpha\Psi_{\theta}}{\Psi + \Psi'_{\theta}} = -k \leq 0. \quad (4.2)$$

При таком выборе знака параметра k ($k \geq 0$) решение пространственного уравнения $Z(z) = \exp(-kz)$ не нарастает по координате $z > 0$. Значение параметра k задается граничным условием, определяющим форму излучаемой самоподобной волны: $\epsilon(z = 0, \theta) = \Psi(\theta)$. Очевидно, что при $k = 0$ получим уже рассмотренное стационарное решение (3.3).



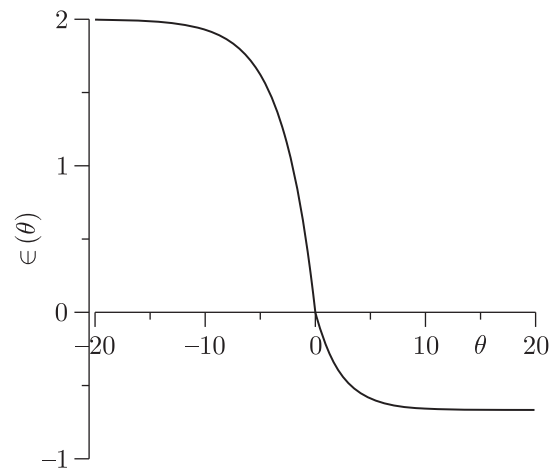


Рис. 2. Форма стационарной волны при $h = 2$, $\alpha = -0.5$.

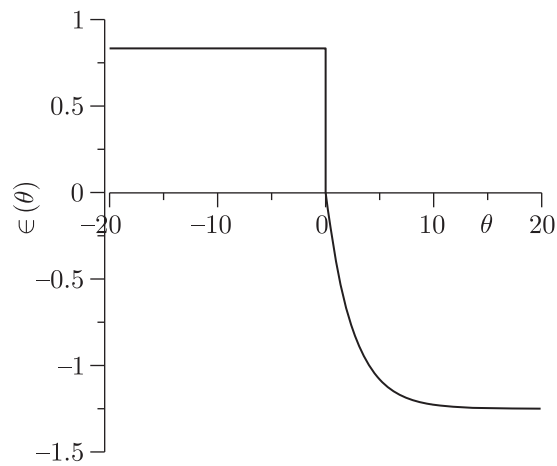


Рис. 3. Форма стационарной волны с разрывом при $h = 1 + \alpha$, $\alpha = 0.2$.

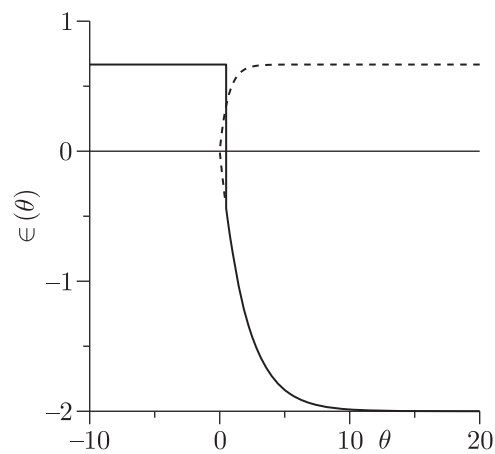


Рис. 4. Форма стационарной волны при $h = 0.5$, $\alpha = 0.5$.

Уравнение для временной части $\Psi = \Psi(\theta)$ волны имеет вид

$$h\Psi''_{\theta\theta} - |\Psi|''_{\theta\theta} - \alpha\Psi_{\theta\theta} + k\Psi'_\theta - |\Psi|'_\theta - \alpha\Psi_\theta + k\Psi = 0. \quad (4.3)$$

Фактически, нелинейное уравнение (4.3) — это два линейных уравнения: одно уравнение для положительной части ($\Psi_1(\theta \leq 0) \geq 0$) и другое уравнение для отрицательной части ($\Psi_2(\theta \geq 0) \leq 0$) функции $\Psi = \Psi(\theta)$:

$$(h - 1 - \alpha)\Psi''_{1\theta\theta} + (k - 1 - \alpha)\Psi'_{1\theta} + k\Psi_1 = 0, \quad (4.4)$$

$$(h + 1 - \alpha)\Psi''_{2\theta\theta} + (k + 1 - \alpha)\Psi'_{2\theta} + k\Psi_2 = 0. \quad (4.5)$$

Из уравнения (4.3) следует, что в точках θ_0 , в которых $\Psi_{1,2}(\theta_0) = 0$, для производных $\Psi_{1,2\theta}(\theta_0)$ выполняется соотношение

$$\frac{\Psi_{1\theta}(\theta_0)}{\Psi_{2\theta}(\theta_0)} = \frac{h + 1 - \alpha}{h - 1 - \alpha}. \quad (4.6)$$

При поиске решений уравнения (4.3) мы будем полагать, что функции, описывающие положительную ($\Psi_1(\theta \leq 0) \geq 0$) и отрицательную ($\Psi_2(\theta \geq 0) \leq 0$) части волны, удовлетворяют условию непрерывности в точках θ_0 и условию (4.6).

При $(k \pm 1 + \alpha)^2 - 4kh \geq 0$, когда $0 \leq k \leq \min[2h \pm 1 - \alpha - 2\sqrt{h(h \pm 1 - \alpha)}]$ или $k \geq \max[2h \pm 1 - \alpha + 2\sqrt{h(h \pm 1 - \alpha)}]$, корни $\lambda_{1,2}^+$ и $\lambda_{1,2}^-$ соответствующих уравнениям (4.4), (4.5) характеристических уравнений определяются выражениями

$$\lambda_{1,2}^+ = \frac{-(k - 1 - \alpha) \pm \sqrt{(k + 1 + \alpha)^2 - 4kh}}{2(h - 1 - \alpha)} \geq 0, \quad (4.7)$$

$$\lambda_{1,2}^- = \frac{-(k + 1 - \alpha) \pm \sqrt{(k + \alpha - 1)^2 - 4kh}}{2(h + 1 - \alpha)} \leq 0. \quad (4.8)$$

В этом случае положительная и отрицательная части самоподобного возмущения определяются выражениями

$$\Psi_1(\theta \leq 0) = -C_1 \exp\left(-\frac{k - 1 - \alpha}{2(h - 1 - \alpha)}\theta\right) \operatorname{sh}\left(\frac{\sqrt{(k + 1 + \alpha)^2 - 4kh}}{2(h - 1 - \alpha)}\theta\right) \geq 0, \quad (4.9)$$

$$\Psi_2(\theta \geq 0) = C_2 \exp\left(-\frac{k + 1 - \alpha}{2(h + 1 - \alpha)}\theta\right) \operatorname{sh}\left(\frac{\sqrt{(k - 1 + \alpha)^2 - 4kh}}{2(h + 1 - \alpha)}\theta\right) \leq 0, \quad (4.10)$$

где $C_1 = \text{const}$, $C_2 = -C_1 \sqrt{\frac{(k + 1 + \alpha)^2 - 4kh}{(k - 1 + \alpha)^2 - 4kh}} < 0$.

Форма самоподобного импульса при $h = 2$, $k = 0.02$, $\alpha = 0.5$ и $h = 3$, $k = 0.02$, $\alpha = -0.5$ показана на рисунках 5 и 6.

При $h = 1 + \alpha$ из выражений (4.9), (4.10) следует, что самоподобное возмущение, как и стационарная волна, содержит разрыв (рис. 7):

$$\begin{aligned} \Psi_1(\theta \leq 0) &= -C_1 \exp\left(-\frac{k}{k - 1 - \alpha}\theta\right) \geq 0, \\ \Psi_2(\theta \geq 0) &= C_2 \exp\left(-\frac{k + 1 - \alpha}{4}\theta\right) \operatorname{sh}\left(\frac{\sqrt{(k + 1 - \alpha)^2 - 8k}}{4}\theta\right) \leq 0, \end{aligned} \quad (4.11)$$

где $C_2 = -C_1 \frac{2(k - 1 - \alpha)}{\sqrt{(k - 1 + \alpha)^2 - 4k(\alpha + 1)}} < 0$.



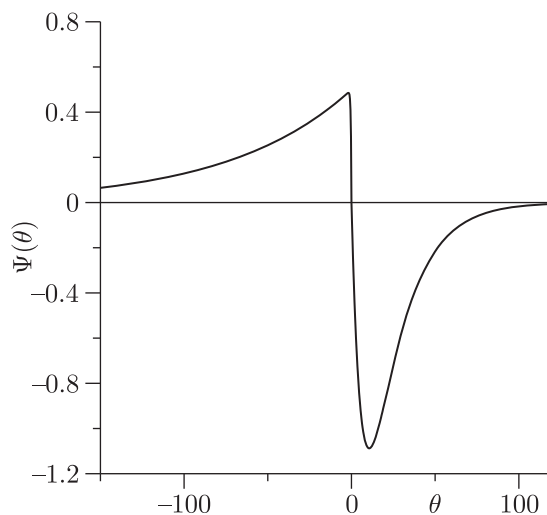


Рис. 5. Форма самоподобного импульса при $h = 2, k = 0.02, \alpha = 0.5$.

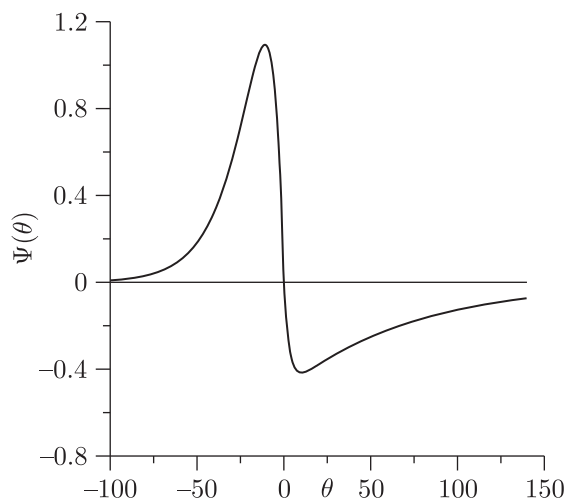


Рис. 6. Форма самоподобного импульса при $h = 3, k = 0.02, \alpha = -0.5$.

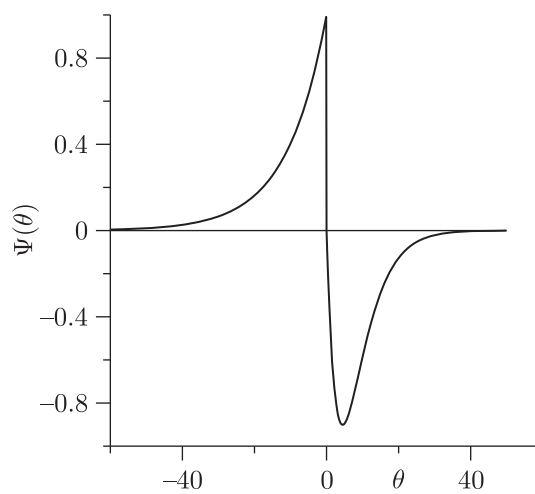


Рис. 7. Форма самоподобного импульса с разрывом при $h = \alpha + 1, k = 0.1, \alpha = 0.2$.

При $(k \pm 1 + \alpha)^2 - 4kh \leq 0$, когда $\max[2h \pm 1 - \alpha - 2\sqrt{h(h \pm 1 - \alpha)}] \leq k \leq \min[2h \pm 1 - \alpha + 2\sqrt{h(h \pm 1 - \alpha)}]$, уравнение (3.2) имеет самоподобное периодическое решение. Здесь мы также будем полагать, что функции, описывающие положительную ($\Psi_1(\theta \leq 0) \geq 0$) и отрицательную ($\Psi_2(\theta \geq 0) \leq 0$) части волны $\in (z, \theta) = Z(z)\Psi(\theta)$, удовлетворяют условию непрерывности в точках θ_0 и условию (4.6):

$$\Psi_1[n(\theta_1 + \theta_2)] = \Psi_2[n(\theta_1 + \theta_2)] = 0, \Psi_1[n(\theta_1 + \theta_2) + \theta_2] = \Psi_2[n(\theta_1 + \theta_2) + \theta_2] = 0, \quad (4.12)$$

$$\frac{\Psi_{1\theta}[n(\theta_1 + \theta_2)]}{\Psi_{2\theta}[n(\theta_1 + \theta_2)]} = \frac{h - \alpha + 1}{h - \alpha - 1}, \frac{\Psi_{1\theta}[n(\theta_1 + \theta_2) + \theta_2]}{\Psi_{2\theta}[n(\theta_1 + \theta_2) + \theta_2]} = \frac{h - \alpha + 1}{h - \alpha - 1}, \quad (4.13)$$

где $\theta_{1,2}$ — периоды функций $\Psi_{1,2}(\theta)$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

В этом случае (для одного периода волны) имеем:

$$\Psi_1(\theta \leq 0) = -C_1 \exp\left(-\frac{k-1-\alpha}{2(h-1-\alpha)}\theta\right) \sin\left(\frac{\pi\theta}{\theta_1}\right) \geq 0, \quad -\theta_1 \leq \theta \leq 0, \quad (4.14)$$

$$\Psi_2(\theta \geq 0) = C_2 \exp\left(-\frac{k+1-\alpha}{2(h+1-\alpha)}\theta\right) \sin\left(\frac{\pi\theta}{\theta_2}\right) \leq 0, \quad 0 \leq \theta \leq \theta_2, \quad (4.15)$$

где $\theta_1 = \frac{2\pi(h-1-\alpha)}{\sqrt{4kh-(k+1+\alpha)^2}}$, $\theta_2 = \frac{2\pi(h+1-\alpha)}{\sqrt{4kh-(k-1+\alpha)^2}}$.

Из выражений (4.13)–(4.15) получим:

$$k(h) = h - \sqrt{(\alpha-h)^2 - 1} \geq 0, \quad (\alpha-h)^2 \geq 1, \quad C_2 = -C_1 \sqrt{\frac{h-1-\alpha}{h+1-\alpha}},$$

$$\Psi_1(\theta \leq 0) = -C_1 \exp\left(-\frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{\frac{h+1-\alpha}{h-1-\alpha}}\right)\theta\right) \sin\left(\frac{\sqrt{h+\alpha - \sqrt{(h-\alpha)^2 - 1}}}{\sqrt{2(h-1-\alpha)}}\theta\right) \geq 0,$$

$$\Psi_2(\theta \geq 0) = C_2 \exp\left(-\frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{\frac{h-1-\alpha}{h+1-\alpha}}\right)\theta\right) \sin\left(\frac{\sqrt{h+\alpha - \sqrt{(h-\alpha)^2 - 1}}}{\sqrt{2(h+1-\alpha)}}\theta\right) \leq 0.$$

Период $T = \theta_1 + \theta_2$, частота $\omega = 2\pi/T$ и скорость $C(\alpha)$ распространения такой волны определяются следующими выражениями:

$$T = \frac{\pi\sqrt{2}[\sqrt{h-1-\alpha} + \sqrt{h+1-\alpha}]}{\Omega\sqrt{h+\alpha - \sqrt{(h-\alpha)^2 - 1}}}, \quad \omega = \Omega\sqrt{k^2 - \alpha^2}, \quad C(\alpha) = \frac{C_0}{1 - \alpha\gamma/2}.$$

Формы самоподобных периодических волн различных частот приведены на рисунке 8.

5. Заключение

В настоящей работе проведено теоретическое исследование распространения продольных акустических волн в средах с разномодульной упругой нелинейностью и релаксацией: получены точные аналитические выражения для несимметричных стационарных и самоподобных импульсных и периодических волн. Полученные результаты представляют интерес для развития теории нелинейных волновых процессов в релаксирующих средах с неаналитической нелинейностью; они могут быть использованы также для создания нелинейных методов акустической диагностики разномодульных структурно-неоднородных сред и конструкционных материалов.



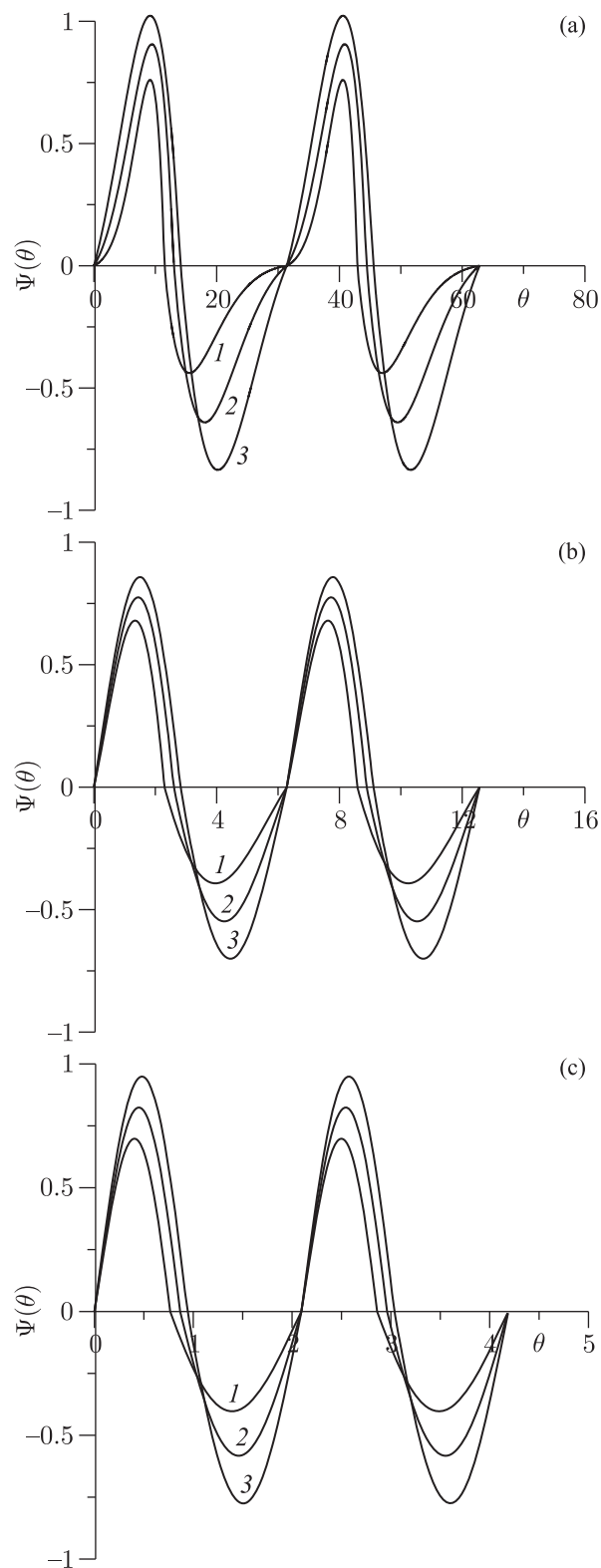


Рис. 8. Периодические самоподобные волны: (а) при $\omega/\Omega = 0.2$, $h = 1.94$, $\alpha = -0.06$ (1), $h = 3.03$, $\alpha = 0.03$ (2), $h = 5.15$, $\alpha = 0.15$ (3); (б) при $\omega/\Omega = 1$, $h = 3.73$, $\alpha = 1.73$ (1), $h = 5.83$, $\alpha = 2.83$ (2), $h = 9.9$, $\alpha = 4.9$ (3); (с) при $\omega/\Omega = 3$, $h = 18.66$, $\alpha = 16.66$ (1), $h = 29.14$, $\alpha = 26.14$ (2), $h = 49.49$, $\alpha = 44.49$ (3).

Список литературы

- [1] Руденко О. В., Солуян С. И. Теоретические основы нелинейной акустики. Москва: Наука, 1975. 288 с.
- [2] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика: В 10 тт.: Т. 6: Гидродинамика. 5-е изд. Москва: Физматлит, 2006. 736 с.
- [3] Наугольных К. А., Островский Л. А. Нелинейные волновые процессы в акустике. Москва: Наука, 1990. 237 с.
- [4] Пищальников Ю. А., Сапожников О. А., Хохлова В. А. Модификация спектрального подхода к описанию нелинейных акустических волн с разрывами // Акуст. журн., 1996, т. 42, № 3, с. 412–417.
- [5] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика: В 10 тт.: Т. 7: Теория упругости. 5-е изд. Москва: Физматлит, 2003. 264 с.
- [6] Амбарцумян С. А. Разномодульная теория упругости. Москва: Наука, 1982. 359 с.
- [7] Николаев А. В. Сейсмические свойства рыхлых сред // Изв. АН СССР. Сер. Физика Земли, 1979, № 1, с. 72–77.
- [8] Алешин А. С., Кузнецов В. В. О параметрах нелинейности грунтов // Нелинейная сейсмология: Междунар. симп.: Тез. докл. Москва: Наука, 1986. С. 4.
- [9] Багмет А. Л., Назаров В. Е., Николаев А. В. Статическая деформация земной поверхности вблизи гармонического источника сейсмических колебаний // Изв. АН СССР. Сер. Физика Земли, 1996, № 7, с. 72–74.
- [10] Маслов В. П., Мосолов П. П. Общая теория решений уравнения движения разномодульной упругой среды // ПММ, 1985, т. 49, № 3, с. 419–437.
- [11] Назаров В. Е., Островский Л. А. Упругие волны в средах с сильной акустической нелинейностью // Акуст. журн., 1990, т. 36, № 1, с. 106–110.
- [12] Gavrilov S. N., Herman G. C. Wave propagation in a semi-infinite heteromodal elastic bar subjected to a harmonic loading // J. Sound Vibration, 2012, vol. 331, pp. 4464–4480.
- [13] Radostin A. V., Nazarov V. E., Kiyashko S. B. Propagation of nonlinear acoustic waves in bimodal media with linear dissipation // Wave Motion, 2013, vol. 50, no. 2, pp. 191–196.
- [14] Назаров В. Е., Радостин А. В. Нелинейные волновые процессы в упругих микронеоднородных средах. Нижний Новгород: ИПФ РАН, 2007. 254 с.
- [15] Рыскин Н. М., Трубецков Д. И. Нелинейные волны. Москва: Наука, 2000. 272 с.

Self-similar waves in media with bimodal elastic nonlinearity and relaxation

Veniamin E. Nazarov¹, Sergey B. Kiyashko², Andrey V. Radostin³

^{1,2,3} Institute of Applied Physics, Russian Academy of Sciences
Ul'yanova str. 46, Nizhny Novgorod, 603950, Russia

¹nazarov@hydro.appl.sci-nnov.ru, ²sergei-kiyashko@mail.ru,

³radostin@hydro.appl.sci-nnov.ru

The results of research of the propagation of longitudinal acoustic waves in media with bimodal elastic nonlinearity and relaxation are presented. Analytical exact solutions have been obtained for the profiles of asymmetrical stationary waves as well as self-similar pulses and periodical waves propagating without distortions in their form.

MSC 2010: 39A21, 74J30

Keywords: bimodal nonlinearity, relaxation, nonlinear waves, self-similar solutions

Received September 18, 2014, accepted December 24, 2014

Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2015, vol. 11, no. 2, pp. 209–218 (Russian)

