



КЛАССИЧЕСКИЕ РАБОТЫ. ОБЗОРЫ

О ДВИЖЕНИИ СКОЛЬЖЕНИЯ И КАЧЕНИЯ

Альфред Фиркандт

Содержание

| | |
|---|-----|
| Введение | 398 |
| §1. Постановка задачи. Обзор литературы | 398 |
| §2. Обозначения. Некоторые законы кинематики | 400 |
| Глава 1. Общие сведения о движении скольжения и качения двух тел друг по другу | 404 |
| §3. Живая сила движения | 404 |
| §4. Дифференциальные уравнения динамики | 409 |
| Глава 2. Применение полученных формул к качению и скольжению двух шаров | 415 |
| §5. Качение двух шаров | 415 |
| §6. Скольжение двух шаров друг по другу | 427 |
| Глава 3. Качение и скольжение плоской поверхности, в частности, однородного кругового диска, по горизонтальной плоскости под действием силы тяжести | 430 |
| §7. Вводные замечания. Обозначения | 430 |
| §8. Живая сила движения и дифференциальные уравнения динамики | 432 |
| §9. Применение найденных формул к качению однородного кругового диска | 436 |
| §10. Скольжение однородного кругового диска | 441 |

Vierkandt A. Über gleitende und rollende Bewegung // Monatshefte für Mathematik und Physik, 1892, vol. 3, no. 1, pp. 31–38;

Vierkandt A. Über gleitende und rollende Bewegung. Erster Abschnitt: Allgemeines über die gleitende und rollende Bewegung zweier Körper auf einander // Monatshefte für Mathematik und Physik, 1892, vol. 3, no. 1, pp. 39–54;

Vierkandt A. Über gleitende und rollende Bewegung. Zweiter Abschnitt: Anwendung der entwickelten Formeln auf die rollende and gleitende Bewegung zweier Kugeln // Monatshefte für Mathematik und Physik, 1892, vol. 3, no. 1, pp. 97–116;

Vierkandt A. Über gleitende und rollende Bewegung. Dritter Abschnitt: Das Rollen und Gleiten einer ebenen Fläche, insbesondere einer homogenen Kreisscheibe, auf der Horizontalebene unter dem Einfluss der Schwere // Monatshefte für Mathematik und Physik, 1892, vol. 3, no. 1, pp. 117–134.

Перевод с немецкого В. В. Шуликовской, под ред. А. В. Борисова.



Введение

§1. Постановка задачи. Обзор литературы

Движение одного тела по поверхности другого может принимать очень разный характер в зависимости от свойств поверхностей обоих тел. В общем случае обе поверхности будут противодействовать движению с некоторым *сопротивлением трения*; его сила зависит от шероховатости поверхностей. В зависимости от степени шероховатости возникают два крайних случая: когда обе поверхности абсолютно гладкие, так что трение вообще отсутствует, и когда они абсолютно шероховатые, так что какое-либо скольжение исключается, а соответствующие друг другу элементы пути, пройденного обоими телами, всегда совпадают друг с другом. В первом случае движение называют *скольжением*, во втором — *качением*. В дальнейшем мы будем более внимательно рассматривать только эти два крайних случая: движение скольжения и движение качения. При этом, в отличие от всех предыдущих работ, мы не будем ограничиваться тем случаем, когда одно из двух тел находится в состоянии покоя; мы рассмотрим также и тот случай, когда *оба* тела перемещаются в пространстве, осуществляя одновременное скольжение или качение друг относительно друга. При этом сначала мы укажем общие формулы, которые описывают интересующее нас движение, а затем перейдем к исследованию отдельных особых случаев.

В сущности, в данной работе мы уточняем ряд общих результатов, полученных для движения скольжения и качения профессором *Карлом Нейманом* в его недавно опубликованной работе¹, а также обращаемся к некоторым особым случаям. Методы исследования тоже восходят к вышеуказанной работе. Они состоят в том, что при исследовании движения мы применяем дифференциальные уравнения Лагранжа второго рода, содержащие пять переменных. Для того чтобы записать эти уравнения, необходимо прежде всего найти живую силу движения². В интересующем нас случае ее проще всего получить, воспользовавшись некоторыми геометрическими законами, по которым происходит сложение и разложение бесконечно малых движений твердого тела. Профессору Карлу Нейману удалось придать этим законам форму, удобную для применения в механике.

Вкратце эти законы перечисляются в §2 нашей работы; начало же параграфа посвящено описанию системы обозначений, необходимой в дальнейшем.

Далее в *первой главе* мы излагаем общие рассуждения о движении качения и скольжения. Прежде всего в §3 мы выводим формулу для живой силы движения, исходя из только что указанных геометрических соображений. Затем в §4 выводятся дифференциальные уравнения динамики. Как уже отмечалось, в этом качестве мы воспользуемся дифференциальными уравнениями Лагранжа второго рода. В случае движения скольжения, когда результат не зависит от выбранных нами переменных, вывод этих уравнений не вызывает затруднений. Иначе обстоит дело для *движения качения*, при наличии *условных уравнений*³, даже — как мы увидим в дальнейшем — в форме *линейных дифференциальных уравнений*. Поскольку в этом случае *почти ни в одном учебнике по механике* уравнения Лагранжа *не выводятся*, мы считаем необходимым *подробно объяснить, как они возникают*.

¹C. Neumann. Grundzüge der analytischen Mechanik, insbesondere der Mechanik starrer Körper // BGWL, 1887, vol. 39, p. 153–190.

²Так раньше называли кинетическую энергию. — *Прим. ред.*

³Так раньше называли уравнения связей. — *Прим. ред.*

Во второй главе мы применяем полученные формулы к случаю, когда оба тела имеют форму шара. Для движения качения (§ 5) мы будем предполагать, что одно из тел находится в покое. Обсуждая движение скольжения (§ 6), мы сочли целесообразным ввести *другую систему переменных*, отличную от использованной ранее, так как это позволит нам найти очень элегантное решение задачи, почти не прибегая к вычислениям.

В обоих случаях мы прежде всего решаем нашу задачу в предположении, что на частицы шаров действуют определенные силы притяжения, которые подчиняются закону Ньютона. Затем мы более подробно исследуем движение шара под влиянием силы тяжести, создаваемой внутренней поверхностью покоящегося полого шара; при этом мы получим интересный результат, состоящий в том, что в случае *качения* шара его движение будет тесно связано с движением некоторого гироскопа сферической формы, а в случае *скольжения* — с движением некоторого сферического маятника.

В третьей главе рассматривается другой особый случай: мы будем предполагать, что одно тело вырождается в горизонтальную плоскость, а другое — в плоскую поверхность, в частности, в однородный круг. Из сил, действующих на тела, остается только сила тяжести. Мы не будем исследовать этот случай, выполняя предельный переход в общих формулах, а выведем необходимые нам формулы заново и непосредственно. Прежде всего мы найдем живую силу движущегося тела, для чего вновь воспользуемся геометрическими соображениями, а это сразу позволит нам записать и дифференциальные уравнения динамики (§ 8). Затем, в § 9, мы более подробно рассмотрим движение качения, а в § 10 — движение скольжения круга. Как выяснится, в обоих случаях движение будет периодическим. Более того, в последнем случае задача сводится к квадратурам.

Что же касается *литературы*, посвященной данной теме, то ее подробное описание не кажется нам необходимым, поскольку д-р Макс Рихтер предоставляет очень полный и основательный обзор соответствующих работ в своей недавно опубликованной диссертации «О движении тела по горизонтальной плоскости» (M. Richter. Über die Bewegung eines Körpers auf einer Horizontalebene. Leipzig, 1887).⁴ Из самых последних изданий к этому списку следует добавить только уже упомянутую во введении работу профессора Карла Неймана, которая и послужила непосредственной причиной к появлению данного исследования; заодно отметим, что мы по возможности старались сохранить принятую в ней систему обозначений. Впрочем, мы позволим себе сделать несколько замечаний о методах, использованных в более ранних работах.

В большинстве работ в качестве дифференциальных уравнений динамики используются уравнения Лагранжа первого рода или дифференциальные уравнения Эйлера, описывающие вращение; как правило, эти уравнения частично преобразуют, приспособлявая к конкретной задаче. В этом отношении особенно интересна работа Функе⁵, где автор выписывает модифицированные уравнения Эйлера для задачи о движении качения и с их помощью проводит элегантное, наполовину геометрическое исследование качения шара по другому шару или по горизонтальной поверхности.

Однако применение вышеупомянутых дифференциальных уравнений динамики в общем случае сопряжено с некоторыми трудностями, прежде всего потому, что в эти формулы всегда входят (к тому же неизвестные по величине) силы сцепления, описывающие прилипание поверхностей друг к другу. Это затруднение можно преодолеть, обратившись к диффе-

⁴ Кроме того, мы всегда будем указывать более ранние работы, посвященные каким-то отдельным задачам; по крайней мере, те работы, которые доступны для нас и нам известны.

⁵ Funcke, Zur Theorie des Rollens (Diss. Göttingen, 1869).

ренциальным уравнениям Лагранжа второго рода. При этом в качестве переменных можно выбрать две из трех координат ξ , η , ζ центра тяжести движущегося тела в неподвижной системе координат, а также три угла, определяющие направление главных осей инерции тела; заметим, что одна из трех переменных ξ , η , ζ исключается из первоначального выражения для живой силы, поскольку поверхность движущегося тела всегда касается поверхности покоящегося тела в одной точке. Именно так исследовали интересующую нас задачу Амтор⁶ и примкнувший к нему Пипер⁷, но только для *скольжения*, когда вышеупомянутые переменные не зависят друг от друга. Впрочем, очень часто исключение переменной, о котором мы говорили, провести довольно сложно, из-за чего данный метод подходит лишь для отдельных особых случаев (с одним из которых мы познакомимся позднее в § 6). В случае *качения* он не годится, прежде всего потому, что возникающие при этом движении условные уравнения, когда их записывают с помощью вышеупомянутых переменных, в общем случае приобретают очень громоздкий вид. Насколько нам известно, во всей предшествующей литературе этот метод применялся к движению качения только один раз, в работе Рауса⁸, для исследования особого случая, а именно — для качения шара по наклонной плоскости под действием силы тяжести; в этом особом случае можно подобрать систему координат так, что решение оказывается очень простым.

Именно профессор Карл Нейман⁹ впервые поставил вопрос о применимости дифференциальных уравнений Лагранжа второго рода к интересующей нас задаче в общем случае, причем он ввел другие координаты, подобранные специально для данной задачи. Представим себе, что на оба тела «натянуты» два семейства кривых; тогда, задавая параметры этих кривых в точке мгновенного касания обоих тел, мы полностью определим положение тел с точностью до возможного поворота вокруг их общей нормали, проходящей через точку касания. Вводя соответствующую пятую переменную, мы устраняем и эту неопределенность; в целом мы получаем пять переменных, которые не зависят друг от друга в случае скольжения, а в случае качения связаны друг с другом двумя простыми условными уравнениями. Если же считать, что *движутся оба тела*, то указанные пять переменных задают только *относительное* положение обоих тел, тогда как *абсолютное* положение одного из двух тел можно будет определить, вводя еще шесть независимых переменных.

§2. Обозначения. Некоторые законы кинематики

Прежде чем мы займемся собственно решением задачи, необходимо условиться о *системе обозначений*.

Для того чтобы отличать тела друг от друга, нам понадобятся верхние индексы 1 и 2, соответствующие выражению «первое и второе тело». Массу мы будем обозначать через M , а три главных момента инерции через \mathfrak{M}_1 , \mathfrak{M}_2 , \mathfrak{M}_3 . Далее мы введем абсолютную неподвижную систему координат $x y z$; в этой системе координат координаты центра тяжести тела равны $x_\sigma y_\sigma z_\sigma$. В дальнейшем мы будем использовать еще две системы координат $\xi_1 \xi_2 \xi_3$, совпадающие с системами, построенными по главным осям инерции рассматриваемых тел. Обозначим через $\pi_1 \pi_2 \pi_3$ координаты точки касания обоих тел в этих системах координат.

⁶Amthor, Über die Bewegung eines Körpers auf einer krummen Fläche (Diss., Leipzig, Teubner, 1868).

⁷Piper, Über die Bewegung eines Körpers, dessen Oberfläche eine im Raum feste Curve berührt (Diss., Dessau, 1879).

⁸Routh, Elementary Treatise on the Dynamics of a System of Rigid Bodies (4 Ed., 1883), p. 327.

⁹Grundzüge der analytischen Mechanik, Zweiter Artikel, § 16.

Кроме того, мы будем предполагать, что на поверхностях обоих тел заданы системы ортогональных координат v, w . Еще две системы координат, по одной для каждого тела, можно ввести в точке касания. При этом у каждой из них две оси можно совместить с касательными, проведенными к кривым $w = \text{const}$ и $v = \text{const}$ в точке касания тел, выбрав положительное направление осей в сторону *возрастания* параметров v и w ; тогда третья ось задается направлением нормали, проведенной в точке касания, причем для первого тела мы выберем *внешнюю*, а для второго — *внутреннюю* нормаль. Оси и координаты в этих двух системах мы будем обозначать символами $\bar{v}, \bar{w}, \bar{n}$ или, в другом порядке, $\bar{n}, \bar{v}, \bar{w}$. У обеих систем координат ось \bar{n} — общая, поэтому они могут вращаться друг относительно друга только в одном определенном направлении; соответствующий угол поворота мы будем отсчитывать от положительного направления оси $\bar{v}^{(1)}$ к положительному направлению оси $\bar{w}^{(1)}$ и обозначать через ψ . Направляющие косинусы углов, образованных осями $\bar{n}, \bar{v}, \bar{w}$ и осями ξ_i того же самого тела, будем обозначать через $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ ($i = 1, 2, 3$).

Все заданные нами системы координат должны быть подобны друг другу; кроме того, все они должны быть положительны, иначе говоря, их оси должны быть расположены друг относительно друга так же, как мизинец, указательный палец и отогнутый большой палец левой руки.

Наконец, следует отметить, что по нашему предположению оба тела всегда будут выпуклыми. В частности, оба они должны иметь такую форму, чтобы они могли касаться друг друга всегда только в одной точке.

Как мы уже говорили, первой нашей задачей будет запись выражения, определяющего живую силу. Для начала сформулируем несколько законов о бесконечно малом движении твердого тела. Их обоснование можно найти в статье профессора Карла Неймана.¹⁰

1. Каждое бесконечно малое движение тела является либо *поступательным*, либо *вращательным*, либо складывается из них обоих.

2. Любое бесконечно малое движение тела, одна из точек которого неподвижна, представляет собой вращение. Если принять ось вращения за ось x положительной системы координат x, y, z , то поворот считается положительным или отрицательным в зависимости от того, в каком направлении перемещаются частицы тела: от положительного направления оси y к положительному направлению оси z или наоборот. Если, кроме того, мы условимся представлять величину поворота, откладывая на оси x (то есть на оси вращения) отрезок, пропорциональный углу поворота и направленный в положительную или отрицательную сторону в зависимости от знака поворота, то подобное представление позволит нам складывать и раскладывать повороты так же, как это делают с силами.

3. Величину такого поворота определяют следующим образом: пусть O обозначает неподвижную точку пространства, вокруг которой происходит свободное движение твердого тела; проведем через эту точку две системы координат $l_1 l_2 l_3$ и x, y, z , первая из которых *жестко связана с телом*, а вторая *неподвижна в пространстве*, и обозначим через $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ направляющие косинусы углов, образованных осями l_i и осями x, y, z ($i = 1, 2, 3$). Тогда каждое движение тела, при котором величины $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ получают приращения $d\alpha_i, d\beta_i, d\gamma_i$,

¹⁰C. Neumann. Die Zerlegung und Zusammensetzung der unendlich kleinen Bewegungen eines starren Körpers als Hilfsmittel bei Aufstellung der dynamischen Differentialgleichungen // Mathematische Annalen, 1877, vol. 11, № 3, p. 388.

представляет собой вращение, компоненты которого в *неподвижных* осях x, y, z равны

$$\omega_\alpha = \sum_i \beta_i d\gamma_i, \quad \omega_\beta = \sum \gamma_i d\alpha_i, \quad \omega_\gamma = \sum \alpha_i d\beta_i,$$

а в *подвижных* осях l_1, l_2, l_3 —

$$\omega_1 = -(\alpha_2 d\alpha_3 + \beta_2 d\beta_3 + \gamma_2 d\gamma_3),$$

$$\omega_2 = -(\alpha_3 d\alpha_1 + \beta_3 d\beta_1 + \gamma_3 d\gamma_1),$$

$$\omega_3 = -(\alpha_1 d\alpha_2 + \beta_1 d\beta_2 + \gamma_1 d\gamma_2).$$

В то же время компоненты перемещения точки (xyz) тела при этом движении, взятые относительно осей xyz , равны

$$dx = -\omega_\gamma y + \omega_\beta z,$$

$$dy = -\omega_\alpha z + \omega_\gamma x,$$

$$dz = -\omega_\beta x + \omega_\alpha y.$$

4. Если же тело выполняет бесконечно малый поворот вокруг некоторой оси, проходящей через произвольную точку, то в случае необходимости мы также сможем представить данное движение как результат двух других движений: мы можем заменить их на вращение той же самой величины и направления, но вокруг параллельной оси, проходящей через произвольную точку A , при том единственном условии, что все точки тела одновременно участвуют и в другом движении, том самом, которое позволило бы нам получить точку A вследствие первоначального поворота.

5. Для того чтобы вычислить *живую силу* движущегося тела, мы поступим в соответствии с правилом из пункта 4 и сведем все бесконечно малые одновременные повороты к повороту вокруг параллельной оси, проходящей через центр тяжести тела. Затем объединим друг с другом все поступательные и все вращательные движения, получая в итоге параллельный перенос с компонентами $x'_\sigma dt, y'_\sigma dt, z'_\sigma dt$ — эти компоненты берутся относительно трех произвольных взаимно перпендикулярных осей, — и поворот на угол, компоненты которого относительно трех главных осей тела равны $\omega_1 dt, \omega_2 dt, \omega_3 dt$. В итоге живая сила T данного движения принимает значение

$$2T = M(x'_\sigma{}^2 + y'_\sigma{}^2 + z'_\sigma{}^2) + \mathfrak{M}_1 \omega_1^2 + \mathfrak{M}_2 \omega_2^2 + \mathfrak{M}_3 \omega_3^2,$$

где M обозначает массу, а $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \mathfrak{M}_3$ — три главных момента инерции тела.

К этому можно добавить еще один закон, которым мы будем часто пользоваться в дальнейшем.¹¹

6. Сведем одно из дифференциальных уравнений Лагранжа второго рода к интегралу

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi'} = \text{const},$$

где T — живая сила рассматриваемого тела, а φ — угол, выбранный так, что изменение аргумента φ соответствует повороту тела вокруг определенной оси A . Тогда записанный

¹¹Его можно найти уже в работе Пауса: Routh, Elementary Treatise on the Dynamics of a System of Rigid Bodies (4 Ed., 1883), p. 329.

выше интеграл означает выполнение закона площадей относительно оси A , причем неважно, покоится эта ось в пространстве или движется.

Введем неподвижную систему в координатах $x y z$; тогда у нас

$$2T = \sum m(x'^2 + y'^2 + z'^2),$$

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi'} = \sum m \left(x' \frac{\partial x'}{\partial \varphi'} + y' \frac{\partial y'}{\partial \varphi'} + z' \frac{\partial z'}{\partial \varphi'} \right) = \text{const.} \quad (\text{a})$$

Если заменить x, y, z на другие переменные $\vartheta, \varphi, \psi, \dots$, то

$$x = x(\vartheta, \varphi, \psi, \dots), \quad y = y(\vartheta, \varphi, \psi, \dots), \quad z = z(\vartheta, \varphi, \psi, \dots),$$

$$x' = \frac{\partial x}{\partial \vartheta} \vartheta' + \frac{\partial x}{\partial \varphi} \varphi' + \frac{\partial x}{\partial \psi} \psi' + \dots, \quad y' \text{ и } z' \text{ аналогично,}$$

следовательно,

$$\frac{\partial x'}{\partial \varphi'} = \frac{\partial x}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial y'}{\partial \varphi'} = \frac{\partial y}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial z'}{\partial \varphi'} = \frac{\partial z}{\partial \varphi},$$

и нашему интегралу (а) можно придать вид

$$\sum m \left(x' \frac{\partial x}{\partial \varphi} + y' \frac{\partial y}{\partial \varphi} + z' \frac{\partial z}{\partial \varphi} \right) = \text{const.} \quad (\text{b})$$

Обозначим теперь через p расстояние от точки (x, y, z) до введенной выше оси A , вокруг которой должно поворачиваться тело при одном, отдельно взятом изменении аргумента φ . Тогда $d\sigma = p d\varphi$ представляет собой элемент траектории, соответствующий такому изменению, и его компоненты относительно осей x, y, z , очевидно, равны $\frac{\partial x}{\partial \varphi} d\varphi$, $\frac{\partial y}{\partial \varphi} d\varphi$, $\frac{\partial z}{\partial \varphi} d\varphi$. Теперь обозначим через α, β, γ направляющие косинусы этого же элемента траектории относительно осей x, y, z , так что у нас $\frac{\partial x}{\partial \varphi} d\varphi = \alpha d\sigma = \alpha p d\varphi$, или

$$\frac{\partial x}{\partial \varphi} = \alpha p, \quad \frac{\partial y}{\partial \varphi} = \beta p, \quad \frac{\partial z}{\partial \varphi} = \gamma p,$$

вследствие чего интересующий нас интеграл (b) можно записать в виде

$$\sum m p (\alpha x' + \beta y' + \gamma z') = \text{const}$$

или

$$\sum m p \frac{ds}{dt} \cos(ds, d\sigma) = \text{const},$$

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}.$$

Очевидно, что это уравнение представляет собой закон площадей относительно оси A .

Глава 1. Общие сведения о движении скольжения и качения двух тел друг по другу

§3. Живая сила движения

Прежде всего мы займемся вычислением живой силы интересующего нас движения. При этом мы на время забудем о разнице между скольжением и качением и поставим общий вопрос: чему равна живая сила системы двух твердых тел, одно из которых движется по поверхности другого? Для ответа на этот вопрос мы рассмотрим бесконечно малое движение системы в каждый момент времени.

Имеет смысл начать с более простого случая, когда одно из тел — можно считать его *первым* телом — находится в покое. Тогда мы примем за неподвижную систему координат три главные оси инерции первого тела $\xi_1^{(1)}, \xi_2^{(1)}, \xi_3^{(1)}$ и будем считать, что координаты каждой точки второго тела записываются в этой системе координат по явным формулам, для чего, как легко понять, нам понадобится ввести 28 величин:

$$\pi_i^{(1)}; \alpha_i^{(1)}, \beta_i^{(1)}, \gamma_i^{(1)}; \psi; \pi_i^{(2)}; \xi_i^{(2)}; \alpha_i^{(2)}, \beta_i^{(2)}, \gamma_i^{(2)} \\ (i = 1, 2, 3).$$

Из всего этого множества выделим необходимые для наших целей три величины $\xi_i^{(2)}$, представляющие собой некоторые константы в каждой точке второго тела; остальные 25 величин мы будем считать переменными, которые при каждом бесконечно малом движении второго тела получают некоторые бесконечно малые приращения. Такое общее бесконечно малое движение мы будем раскладывать на пять отдельных движений, каждому из которых соответствуют приращения, взятые по очереди из следующих пяти групп переменных:

$$\alpha_i^{(1)}, \beta_i^{(1)}, \gamma_i^{(1)}, \alpha_i^{(2)}, \beta_i^{(2)}, \gamma_i^{(2)}, \psi, \pi_i^{(1)}, \pi_i^{(2)};$$

мы будем исследовать каждое из этих пяти движений по отдельности. Как легко увидеть, первые три из них по своей природе — *вращательные*, то есть такие, что точка мгновенного касания остается в покое; оставшиеся два движения — *поступательные*. Сейчас мы попробуем вычислить компоненты всех этих движений относительно трех главных осей инерции второго тела.

1. При движении, переводящем направляющие косинусы $\alpha_i^{(1)}, \beta_i^{(1)}, \gamma_i^{(1)}$ в $\alpha_i^{(1)} + d\alpha_i^{(1)}, \beta_i^{(1)} + d\beta_i^{(1)}, \gamma_i^{(1)} + d\gamma_i^{(1)}$, главные оси инерции $\xi_i^{(1)}$ первого тела остаются в покое, а оси $\bar{n}^{(1)}, \bar{v}^{(1)}, \bar{w}^{(1)}$ меняют свое положение; в соответствии с правилом 3 из § 2, компоненты этого поворота в системе координат $\bar{n}^{(1)}, \bar{v}^{(1)}, \bar{w}^{(1)}$ запишем в виде

$$\begin{aligned} -dA^{(1)} &= -\sum_{i=1}^3 \beta_i^{(1)} d\gamma_i^{(1)}, \\ -dB^{(1)} &= -\sum \gamma_i^{(1)} d\alpha_i^{(1)}, \\ -d\Gamma^{(1)} &= -\sum \alpha_i^{(1)} d\beta_i^{(1)}, \end{aligned} \tag{1}$$

а в системе координат $\bar{n}^{(2)}, \bar{v}^{(2)}, \bar{w}^{(2)}$, с учетом угла ψ (§ 2), — в виде

$$\begin{aligned} &-dA^{(1)} \\ &-(dB^{(1)} \cos \psi + d\Gamma^{(1)} \sin \psi) \\ &-(-dB^{(1)} \sin \psi + d\Gamma^{(1)} \cos \psi). \end{aligned}$$

2. При повороте, переводящем направляющие косинусы $\alpha_i^{(2)}, \beta_i^{(2)}, \gamma_i^{(2)}$ в $\alpha_i^{(2)} + d\alpha_i^{(2)}, \beta_i^{(2)} + d\beta_i^{(2)}, \gamma_i^{(2)} + d\gamma_i^{(2)}$, изменяют свое положение оси $\xi_i^{(2)}$, жестко связанные со вторым телом, тогда как оси $\bar{n}^{(2)}, \bar{v}^{(2)}, \bar{w}^{(2)}$ — которые отличаются от покоящейся системы осей $\bar{n}^{(1)}, \bar{v}^{(1)}, \bar{w}^{(1)}$ только поворотом на угол ψ , остающийся неизменным, — своего положения не меняют. Тогда, в соответствии с правилом 3 из § 2, компоненты этого поворота в системе координат $\bar{n}^{(2)}, \bar{v}^{(2)}, \bar{w}^{(2)}$ запишем в виде

$$\begin{aligned} dA^{(2)} &= \sum \beta_i^{(2)} d\gamma_i^{(2)}, \\ dB^{(2)} &= \sum \gamma_i^{(2)} d\alpha_i^{(2)}, \\ d\Gamma^{(2)} &= \sum \alpha_i^{(2)} d\beta_i^{(2)}. \end{aligned} \tag{2}$$

3. Изменение угла ψ на величину $d\psi$ означает поворот (в положительном направлении) вокруг общей оси $\bar{n}^{(1)}$ или $\bar{n}^{(2)}$ на угол $d\psi$.

4. Изменение координат $\pi_i^{(1)}$ на величину $d\pi_i^{(1)}$ означает параллельный перенос на отрезок $P^{(1)}\Pi^{(1)}$ при условии, что точкам $P^{(1)}$ и $\Pi^{(1)}$ соответствуют координаты $\pi_i^{(1)}$ и $\pi_i^{(1)} + d\pi_i^{(1)}$. Если обозначить элементы пути вдоль кривых $w = \text{const}$ и $v = \text{const}$ через $f^{(1)} dv^{(1)}$ и $g^{(1)} dw^{(1)}$, то компоненты этого параллельного переноса в системе координат $\bar{n}^{(1)}, \bar{v}^{(1)}, \bar{w}^{(1)}$ —

$$0, \quad f^{(1)} dv^{(1)}, \quad g^{(1)} dw^{(1)},$$

а в системе координат $\bar{n}^{(2)}, \bar{v}^{(2)}, \bar{w}^{(2)}$ —

$$0, \quad (f^{(1)} dv^{(1)} \cos \psi + g^{(1)} dw^{(1)} \sin \psi), \quad (-f^{(1)} dv^{(1)} \sin \psi + g^{(1)} dw^{(1)} \cos \psi).$$

5. Если использовать ту же систему обозначений, что и для первого тела, то изменение координат $\pi_i^{(2)}$ на величину $d\pi_i^{(2)}$ означает, что вместо точки $P^{(2)}$ совпадать с точкой $P^{(1)}$ будет точка $\Pi^{(2)}$; иначе говоря, это параллельный перенос, компоненты которого в системе координат $\bar{n}^{(2)}, \bar{v}^{(2)}, \bar{w}^{(2)}$ имеют вид

$$0, \quad -f^{(2)} dv^{(2)}, \quad -g^{(2)} dw^{(2)}.$$

Объединяя все рассмотренные нами соотношения, приходим к следующему выводу: бесконечно малое движение второго тела состоит из *поворота* вокруг общей точки касания, компоненты которого в системе координат $\bar{n}^{(2)}, \bar{v}^{(2)}, \bar{w}^{(2)}$ записываем как

$$\begin{aligned} \mathfrak{A} dt &= -dA^{(1)} + dA^{(2)} + d\psi, \\ \mathfrak{B} dt &= -(dB^{(1)} \cos \psi + d\Gamma^{(1)} \sin \psi) + dB^{(2)}, \\ \mathfrak{C} dt &= -(-dB^{(1)} \sin \psi + d\Gamma^{(1)} \cos \psi) + d\Gamma^{(2)}, \end{aligned} \tag{3}$$

а в системе координат $\xi_i^{(2)}$ — как

$$R_i dt = (\mathfrak{A}\alpha_i^{(2)} + \mathfrak{B}\beta_i^{(2)} + \mathfrak{C}\gamma_i^{(2)})dt, \tag{4}$$

и из *поступательного* движения, компоненты которого в системе координат $\bar{n}^{(2)}, \bar{v}^{(2)}, \bar{w}^{(2)}$ записываем как

$$\begin{aligned} \mathfrak{a} dt &= 0, \\ \mathfrak{b} dt &= f^{(1)} dv^{(1)} \cos \psi + g^{(1)} dw^{(1)} \sin \psi - f^{(2)} dv^{(2)}, \\ \mathfrak{c} dt &= -f^{(1)} dv^{(1)} \sin \psi + g^{(1)} dw^{(1)} \cos \psi - g^{(2)} dw^{(2)}, \end{aligned} \tag{5}$$



а в системе координат $\xi_i^{(2)}$ — как

$$\mathbf{r} dt = (\mathbf{a}\alpha_i^{(2)} + \mathbf{b}\beta_i^{(2)} + \mathbf{c}\gamma_i^{(2)})dt. \quad (6)$$

Для вычисления живой силы нам надо воспользоваться правилом 5 из § 2 и заменить поворот вокруг общей точки касания на совпадающий с ним по величине поворот вокруг параллельной оси, проходящей через центр тяжести второго тела; одновременно мы должны сообщить всему телу поступательное движение, равное движению центра тяжести при исходном повороте. Очевидно, что в системе координат, центр которой лежит в точке касания, а оси параллельны осям $\xi_i^{(2)}$, координаты центра тяжести равны $-\pi_i^{(2)}$, а в системе координат $\bar{n}^{(2)}, \bar{v}^{(2)}, \bar{w}^{(2)}$ они равны величинам

$$-a = -\sum \alpha_i^{(2)} \pi_i^{(2)}, \quad -b = -\sum \beta_i^{(2)} \pi_i^{(2)}, \quad -c = -\sum \gamma_i^{(2)} \pi_i^{(2)}; \quad (7)$$

поэтому в соответствии с правилом 4 из § 2 компоненты перемещения центра тяжести при исходном повороте в системе координат $\xi_i^{(2)}$ имеют вид

$$(+R_3\pi_2^{(2)} - R_2\pi_3^{(2)})dt, \quad (+R_1\pi_3^{(2)} - R_3\pi_1^{(2)})dt, \quad (+R_2\pi_1^{(2)} - R_1\pi_2^{(2)})dt,$$

а в системе координат $\bar{n}^{(2)}, \bar{v}^{(2)}, \bar{w}^{(2)}$ — вид

$$(+\mathfrak{C}b - \mathfrak{B}c)dt, \quad (+\mathfrak{A}c - \mathfrak{C}a)dt, \quad (+\mathfrak{B}a - \mathfrak{A}b)dt.$$

Теперь воспользуемся правилом 5 из § 2 и получим для живой силы T второго тела два представления

$$\begin{aligned} 2T^{(2)} = & M^{(2)}(\mathbf{r}_1 + R_3\pi_2^{(2)} - R_2\pi_3^{(2)})^2 + \mathfrak{M}_1^{(2)}R_1^2 + \\ & + M^{(2)}(\mathbf{r}_2 + R_1\pi_3^{(2)} - R_3\pi_1^{(2)})^2 + \mathfrak{M}_2^{(2)}R_2^2 + \\ & + M^{(2)}(\mathbf{r}_3 + R_2\pi_1^{(2)} - R_1\pi_2^{(2)})^2 + \mathfrak{M}_3^{(2)}R_3^2, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} 2T^{(2)} = & M^{(2)}(\mathbf{a} + \mathfrak{C}b - \mathfrak{B}c)^2 + \mathfrak{M}_1^{(2)}R_1^2 + \\ & + M^{(2)}(\mathbf{b} + \mathfrak{A}c - \mathfrak{C}a)^2 + \mathfrak{M}_2^{(2)}R_2^2 + \\ & + M^{(2)}(\mathbf{c} + \mathfrak{B}a - \mathfrak{A}b)^2 + \mathfrak{M}_3^{(2)}R_3^2, \end{aligned} \quad (9)$$

зависящие от того, в какой системе координат ($\xi_i^{(2)}$ или $\bar{n}^{(2)}\bar{v}^{(2)}\bar{w}^{(2)}$) взяты компоненты параллельного переноса; здесь $M^{(2)}$ обозначает массу, а $\mathfrak{M}_1^{(2)}, \mathfrak{M}_2^{(2)}, \mathfrak{M}_3^{(2)}$ — главные моменты инерции тела. Все остальные величины, входящие в эти две формулы, задающие живую силу, можно считать выраженными через пять переменных, определенных в начале § 2.

Теперь займемся поиском живой силы в том случае, когда *первое тело тоже движется*. Бесконечно малые движения, возникающие в этом случае, отличаются от уже рассмотренных нами, как мы сейчас увидим, только существованием еще одного члена; то же самое верно и для формул, задающих живую силу.

Действительно, для начала мы можем считать, что первое тело жестко связано со вторым и переходит из своего старого положения в новое именно при этом предположении; тогда второе тело будет участвовать в этом движении наряду с первым, но сообразно со своим расположением. А уже *затем* мы будем перемещать второе тело по поверхности первого, находящегося в покое, — в точности, как в предыдущем случае. Будем считать, что *абсолютное* положение первого тела определено через шесть независимых переменных q_1, q_2, \dots, q_6 , тогда как пять аргументов $v^{(1)}, w^{(1)}, v^{(2)}, w^{(2)}, \psi$ задают теперь *относительное* положение второго тела по отношению к первому; тогда первое движение сводится

к изменению первых шести аргументов при суммарном движении, а второе — к изменению последних пяти аргументов при суммарном движении. Необходимое для наших целей исследование первого движения, в свою очередь, тоже распадается на две части, так как мы будем различать движение первого и второго тела; в то же время второе движение уже было исследовано в предыдущем случае. Таким образом, в дальнейшем нам необходимо будет обсудить только два первых пункта.

I. Для того чтобы записать движение первого тела, введем несколько новых обозначений. Направляющие косинусы углов, образованных осями $\xi_i^{(1)}$ с неподвижной системой координат xyz , обозначим через $a_i^{(1)}, b_i^{(1)}, c_i^{(1)}$, а координаты центра тяжести первого тела в системе xyz — через $x_\sigma, y_\sigma, z_\sigma$. Теперь обозначим для краткости

$$\begin{aligned}\omega_1^{(1)} &= a_2^{(1)} a_3^{(1)'} + b_2^{(1)} b_3^{(1)'} + c_2^{(1)} c_3^{(1)'}, \\ \omega_2^{(1)} &= a_3^{(1)} a_1^{(1)'} + b_3^{(1)} b_1^{(1)'} + c_3^{(1)} c_1^{(1)'}, \\ \omega_3^{(1)} &= a_1^{(1)} a_2^{(1)'} + b_1^{(1)} b_2^{(1)'} + c_1^{(1)} c_2^{(1)'};\end{aligned}\tag{10}$$

тогда живая сила $T^{(1)}$ первого тела в соответствии с пунктом 5 § 2 принимает значение

$$2T^{(1)} = M^{(1)}(x_\sigma'^2 + y_\sigma'^2 + z_\sigma'^2) + \mathfrak{m}_1^{(1)}\omega_1^{(1)2} + \mathfrak{m}_2^{(1)}\omega_2^{(1)2} + \mathfrak{m}_3^{(1)}\omega_3^{(1)2}.\tag{11}$$

II. Участие второго тела в этом движении распадается на две части: параллельный перенос ($x'_\sigma dt, y'_\sigma dt, z'_\sigma dt$) и поворот ($-\omega_i^{(1)} dt$).¹² Для того чтобы получить интересующие нас формулы, нам надо найти компоненты обоих движений в системе координат $\xi_i^{(2)}$. Для этого мы воспользуемся рядом последовательных преобразований: сначала мы перейдем от системы xyz к $\xi_i^{(1)}$, затем от нее к системе $\bar{n}^{(1)}\bar{v}^{(1)}\bar{w}^{(1)}$, после чего — к системе $\bar{n}^{(2)}\bar{v}^{(2)}\bar{w}^{(2)}$ и, наконец, к системе $\xi_i^{(2)}$. Если ввести сокращения

$$\begin{aligned}p_i &= a_i^{(1)} x'_\sigma + b_i^{(1)} y'_\sigma + c_i^{(1)} z'_\sigma, \\ q_\alpha &= \sum p_i \alpha_i^{(1)}, \quad q_\beta = \sum p_i \beta_i^{(1)}, \quad q_\gamma = \sum p_i \gamma_i^{(1)}, \\ s_i &= q_\alpha \alpha_i^{(2)} + (q_\beta \cos \psi + q_\gamma \sin \psi) \beta_i^{(2)} + (-q_\beta \sin \psi + q_\gamma \cos \psi) \gamma_i^{(2)}\end{aligned}\tag{12}$$

и

$$\begin{aligned}k_\alpha &= \sum \alpha_i^{(1)} \omega_i^{(1)}, \quad k_\beta = \sum \beta_i^{(1)} \omega_i^{(1)}, \quad k_\gamma = \sum \gamma_i^{(1)} \omega_i^{(1)}, \\ \sigma_i &= k_\alpha \alpha_i^{(2)} + (k_\beta \cos \psi + k_\gamma \sin \psi) \beta_i^{(2)} + (-k_\beta \sin \psi + k_\gamma \cos \psi) \gamma_i^{(2)}\end{aligned}\tag{13}$$

соответственно, то очевидно, что интересующие нас компоненты параллельного переноса относительно системы координат $\xi_i^{(2)}$ равны $s_1 dt, s_2 dt, s_3 dt$, а компоненты поворота равны $-\sigma_1 dt, -\sigma_2 dt, -\sigma_3 dt$.

Теперь для того чтобы найти живую силу второго тела, нам надо будет, в соответствии с пунктом 5 § 2, сохраняя поворот как он есть, сообщить второму телу еще одно движение, поступательное и равное тому перемещению, которое совершает центр тяжести при повороте. Однако нам известно (п. 4 § 2), что и это перемещение распадается на два движения: на перенос центра тяжести второго тела при вышеупомянутом повороте вокруг параллельной оси, проходящей через точку мгновенного касания двух тел, и на перенос этой точки касания при исходном повороте. Вычислим оба перемещения по отдельности.

¹²В соответствии с правилом 3 из § 2 знак минус объясняется тем, что компоненты поворота были найдены относительно подвижных осей $\xi_i^{(1)}$.



Перемещение центра тяжести при повороте $(-\omega_i^{(1)} dt)$ вокруг оси, проходящей через точку касания, без труда раскладывается по осям $\xi_i^{(2)}$. Мы только что нашли компоненты этого поворота относительно тех же осей; они равны $-\sigma_i dt$; с другой стороны, в системе координат, проходящей через точку касания параллельно осям $\xi_i^{(2)}$, центр тяжести имеет координаты $-\pi_i^{(2)}$; тогда в соответствии с правилом 3 § 2 компоненты его перемещения в системе координат $\xi_i^{(2)}$ равны

$$\left(-\sigma_3 \pi_2^{(2)} + \sigma_2 \pi_3^{(2)}\right) dt, \quad \left(-\sigma_1 \pi_3^{(2)} + \sigma_3 \pi_1^{(2)}\right) dt, \quad \left(-\sigma_2 \pi_1 + \sigma_1 \pi_2\right) dt.$$

2. Координаты точки касания двух тел в системе координат $\xi_i^{(1)}$ равны $\pi_i^{(1)}$; тогда при повороте $(-\omega_i^{(1)} dt)$ компоненты сдвига в системе координат $\xi_i^{(1)}$ принимают значения

$$\left(\omega_3^{(1)} \pi_2^{(1)} - \omega_2^{(1)} \pi_3^{(1)}\right) dt, \quad \left(\omega_1^{(1)} \pi_3^{(1)} - \omega_3^{(1)} \pi_1^{(1)}\right) dt, \quad \left(\omega_2^{(1)} \pi_1^{(1)} - \omega_1^{(1)} \pi_2^{(1)}\right) dt.$$

Как и выше, мы преобразуем эти компоненты и перейдем к системе координат $\xi_i^{(2)}$. Введем следующие сокращения:

$$\begin{aligned} R_\alpha &= \pi_1^{(1)}(\omega_2^{(1)} \alpha_3^{(1)} - \omega_3^{(1)} \alpha_2^{(1)}) + \pi_2^{(1)}(\omega_3^{(1)} \alpha_1^{(1)} - \omega_1^{(1)} \alpha_3^{(1)}) + \pi_3^{(1)}(\omega_1^{(1)} \alpha_2^{(1)} - \omega_2^{(1)} \alpha_1^{(1)}), \\ R_\beta &= \pi_1^{(1)}(\omega_2^{(1)} \beta_3^{(1)} - \omega_3^{(1)} \beta_2^{(1)}) + \pi_2^{(1)}(\omega_3^{(1)} \beta_1^{(1)} - \omega_1^{(1)} \beta_3^{(1)}) + \pi_3^{(1)}(\omega_1^{(1)} \beta_2^{(1)} - \omega_2^{(1)} \beta_1^{(1)}), \\ R_\gamma &= \pi_1^{(1)}(\omega_2^{(1)} \gamma_3^{(1)} - \omega_3^{(1)} \gamma_2^{(1)}) + \pi_2^{(1)}(\omega_3^{(1)} \gamma_1^{(1)} - \omega_1^{(1)} \gamma_3^{(1)}) + \pi_3^{(1)}(\omega_1^{(1)} \gamma_2^{(1)} - \omega_2^{(1)} \gamma_1^{(1)}), \\ \bar{R}_i &= R_\alpha \alpha_i^{(2)} + (R_\beta \cos \psi + R_\gamma \sin \psi) \beta_i^{(2)} + (-R_\beta \sin \psi + R_\gamma \cos \psi) \gamma_i^{(2)}; \end{aligned} \quad (14)$$

очевидно, что $\bar{R}_i dt$ и являются искомыми компонентами в системе координат $\xi_i^{(2)}$.

Этим и исчерпывается тот особый вклад, из которого состоит суммарное движение двух тел, — если не считать уже рассмотренного ранее движения второго тела по поверхности первого. Для наглядности мы еще раз перечислим все эти отдельные составляющие и укажем их компоненты в системе координат $\xi_i^{(2)}$.

| | Поступательное движение | Вращение вокруг оси, проходящей через центр тяжести |
|--|--|---|
| А. Участие второго тела в движении первого: | | |
| I. В его параллельном переносе: | $s_i dt$ | |
| II. В его собственном повороте: | | |
| а) как собственно поворот | | $-\sigma_i dt$ |
| б) как поступательное движение | | |
| 1 | $(\sigma_2 \pi_3^{(2)} - \sigma_3 \pi_2^{(2)}) dt$ и т. д. | |
| 2 | $\bar{R}_i dt$ | |
| В. Движение второго тела по поверхности первого: | $(\tau_1 + \pi_2^{(2)} R_3 - \pi_3^{(2)} R_2) dt$ и т. д. | $R_i dt$ |



Теперь, основываясь на этой схеме, мы можем записать выражение для живой силы $T^{(2)}$ второго тела. Объединяя его с выражением (11), задающим живую силу первого тела, получаем, что *живая сила всей находящейся в движении системы* имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}
 2T^{(1)} + 2T^{(2)} = & M^{(1)}(x_{\sigma}^{\prime 2} + y_{\sigma}^{\prime 2} + z_{\sigma}^{\prime 2}) + \mathfrak{M}_1^{(1)}\omega_1^{(1)2} + \mathfrak{M}_2^{(1)}\omega_2^{(1)2} + \mathfrak{M}_3^{(1)}\omega_3^{(1)2} + \\
 & + M^{(2)}\{\tau_1 + s_1 + \bar{R}_1 + \pi_2^{(2)}(R_3 - \sigma_3) - \pi_3^{(2)}(R_2 - \sigma_2)\}^2 + \mathfrak{M}_1^{(2)}(R_1 - \sigma_1)^2 + \\
 & + M^{(2)}\{\tau_2 + s_2 + \bar{R}_2 + \pi_3^{(2)}(R_1 - \sigma_1) - \pi_1^{(2)}(R_3 - \sigma_3)\}^2 + \mathfrak{M}_2^{(2)}(R_2 - \sigma_2)^2 + \\
 & + M^{(2)}\{\tau_3 + s_3 + \bar{R}_3 + \pi_1^{(2)}(R_2 - \sigma_2) - \pi_2^{(2)}(R_1 - \sigma_1)\}^2 + \mathfrak{M}_3^{(2)}(R_3 - \sigma_3)^2.
 \end{aligned} \tag{15}$$

Возможно, стоит заметить, что здесь, как и в предыдущем случае, компоненты параллельного переноса можно рассматривать не только в системе координат $\xi_i^{(2)}$, но и в системе координат $\bar{n}^{(2)}\bar{v}^{(2)}\bar{w}^{(2)}$: в результате мы получим второе представление величины $T^{(2)}$, соответствующее представлению живой силы по формуле (9) в предыдущем случае.

До сих пор мы все время предполагали, что второе тело движется по *внешней* поверхности первого. Но если представить себе, что внутри первого тела есть *полость* или что это вообще *полая тело*, то второе тело может двигаться и по *внутренней* поверхности первого. В этом случае вычисление живой силы потребует точно таких же рассуждений, в которые необходимо внести *одно изменение*. Рассмотрим две системы координат \bar{n} , \bar{v} , \bar{w} , взятые в общей точке касания тел; в *предыдущем* случае они отличались друг от друга только тем, что одна из них была повернута на угол ψ относительно другой; в настоящем же случае оси $\bar{n}^{(1)}$ и $\bar{n}^{(2)}$ — где $\bar{n}^{(1)}$ обозначает *внешнюю*, а $\bar{n}^{(2)}$ *внутреннюю* нормаль — будут направлены в противоположные стороны. Мы можем избежать этого, потребовав, чтобы на сей раз ось $\bar{n}^{(2)}$ представляла собой не *внутреннюю*, а *внешнюю* нормаль второго тела. Если внести это изменение, то все сделанные ранее утверждения и все найденные формулы остаются в силе без изменений; в частности, это касается окончательных формул (8), (9) и (15) для живой силы.

§4. Дифференциальные уравнения динамики

В случае скольжения запись дифференциальных уравнений динамики не вызывает никаких трудностей; сложности, возникающие в задаче о качении, вызваны особенной природой имеющихся здесь *условных уравнений*.

Для того чтобы найти эти условные уравнения, прежде всего вспомним полученный ранее (§3) результат: движение второго тела при покоящемся первом состоит из поворота вокруг общей точки касания и из параллельного переноса, компоненты которого $\mathbf{a} dt$, $\mathbf{b} dt$, $\mathbf{c} dt$ определены по формулам (5). В случае качения точка мгновенного касания всегда должна находиться в покое, то есть параллельный перенос всегда должен принимать нулевое значение. Следовательно, его отдельные компоненты $\mathbf{a} dt$, $\mathbf{b} dt$, $\mathbf{c} dt$ тоже должны обращаться в нуль, так что справедливы уравнения

$$\begin{aligned}
 f^{(1)} dv^{(1)} \cos \psi + g^{(1)} dw^{(1)} \sin \psi - f^{(2)} dv^{(2)} &= 0, \\
 -f^{(1)} dv^{(1)} \sin \psi + g^{(1)} dw^{(1)} \cos \psi - g^{(2)} dw^{(2)} &= 0.
 \end{aligned} \tag{16}$$

Эти уравнения и служат условными уравнениями, возникающими при качении. Мы видим, что это дифференциальные уравнения, причем их нельзя вывести из конечных уравнений с помощью дифференцирования; кроме того, данные дифференциальные уравнения — линейные и однородные.

В большинстве современных учебников по механике дифференциальные уравнения динамики рассматриваются только в тех случаях, когда входящие в них переменные либо независимы, либо связаны друг с другом *конечными* условными уравнениями; между тем в нашем случае речь идет о линейных однородных дифференциальных уравнениях, связывающих переменные. Нам неизвестно, освещалась ли данная задача в существующей литературе¹³, поэтому имеет смысл изложить ее в явном виде, для чего мы заново выведем дифференциальные уравнения Лагранжа второго рода, желая использовать их далее в качестве дифференциальных уравнений динамики.¹⁴

Для простоты ограничимся рассмотрением отдельной движущейся точки с массой m , что в случае твердого тела (то есть системы точек) не вносит никаких существенных изменений. Пусть компоненты равнодействующей всех сил, действующих на точку, равны $X + \bar{X}$, $Y + \bar{Y}$, $Z + \bar{Z}$, при этом мы считаем, что компоненты взяты в абсолютно неподвижной системе координат xuz . Здесь величины \bar{X} , \bar{Y} , \bar{Z} соответствуют силам, которые эквивалентны условным уравнениям, справедливым для движения данной точки, иначе говоря, силам сцепления, сопротивления и всем прочим силам того же типа, обладающим той особенностью, что для любого бесконечно малого движения (dx, dy, dz) нашей точки, удовлетворяющего условным уравнениям, работа этих сил равна нулю:

$$\bar{X} dx + \bar{Y} dy + \bar{Z} dz = 0. \quad (17)$$

Теперь движение нашей точки удовлетворяет уравнениям

$$mx'' = X + \bar{X}, \quad my'' = Y + \bar{Y}, \quad mz'' = Z + \bar{Z}. \quad (18)$$

Умножая на δx , δy , δz соответственно и складывая результаты, находим

$$m(x'' \delta x + y'' \delta y + z'' \delta z) = (X \delta x + Y \delta y + Z \delta z) + (\bar{X} \delta x + \bar{Y} \delta y + \bar{Z} \delta z).$$

Здесь под δx , δy , δz мы понимаем произвольные бесконечно малые сдвиги, *совместимые с условными уравнениями системы*, так что для любого такого сдвига уравнение (17) будет справедливо, что позволит нам упростить записанное выше уравнение, придав ему форму

$$m(x'' \delta x + y'' \delta y + z'' \delta z) = X \delta x + Y \delta y + Z \delta z. \quad (19)$$

Проводя хорошо известные преобразования, получаем

$$\begin{aligned} m(x'' \delta x + y'' \delta y + z'' \delta z) &= m \frac{d}{dt}(x' \delta x + y' \delta y + z' \delta z) - m(x' \delta x' + y' \delta y' + z' \delta z') = \\ &= m \frac{d}{dt}(x' \delta x + y' \delta y + z' \delta z) - \delta T, \end{aligned} \quad (20)$$

¹³Помимо неоднократно упоминавшейся нами работы профессора Карла Неймана в больших учебниках по механике данная задача упоминается только у Рауса (Routh, *Elementary Treatise on the Dynamics of a System of Rigid Bodies*, Cap. VIII, p. 325).

¹⁴Описанный далее вывод дифференциальных уравнений Лагранжа *второго* рода из уравнений *первого* рода можно найти, например, у Рауса (там же, Cap. VIII) или в работе Ball, *Theoretische Mechanik starrer Systeme* (Berlin, 1889), Cap. X, § 5.

где под T понимается живая сила точки. Если теперь ввести вместо величин x, y, z новые переменные $q_1, q_2, \dots, q_i, \dots$ так, чтобы

$$\begin{aligned} x &= x(q_1, q_2, \dots), & y &= y(q_1, q_2, \dots), & z &= z(q_1, q_2, \dots), \\ x' &= \sum \frac{\partial x}{\partial q_i} q_i', & y' &= \sum \frac{\partial y}{\partial q_i} q_i', & z' &= \sum \frac{\partial z}{\partial q_i} q_i', \end{aligned} \quad (21)$$

то мы получим

$$\begin{aligned} \delta T &= \sum \left(\frac{\partial T}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial T}{\partial q_i'} \delta q_i' \right) = \\ &= \sum \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial q_i'} \delta q_i \right) - \sum \left\{ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial q_i'} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} \right\} \delta q_i. \end{aligned}$$

Подставляя эти значения в уравнение (20), придаем ему форму

$$\begin{aligned} m(x'' \delta x + y'' \delta y + z'' \delta z) &= m \frac{d}{dt} (x' \delta x + y' \delta y + z' \delta z) - \\ &- \sum \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial q_i'} \delta q_i \right) + \sum \left\{ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial q_i'} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} \right\} \delta q_i. \end{aligned}$$

Если теперь в первом слагаемом правой части выразить сдвиги $\delta x, \delta y, \delta z$ через величины δq_i и заметить, что в силу уравнений (21) у нас

$$\frac{\partial x}{\partial q_i} = \frac{\partial x'}{\partial q_i'}, \quad \frac{\partial y}{\partial q_i} = \frac{\partial y'}{\partial q_i'}, \quad \frac{\partial z}{\partial q_i} = \frac{\partial z'}{\partial q_i'}, \quad (22)$$

то первые два слагаемых в правой части взаимно уничтожаются и уравнение упростится, принимая вид

$$m(x'' \delta x + y'' \delta y + z'' \delta z) = \sum \left\{ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial q_i'} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} \right\} \delta q_i.$$

Подставляя данное значение в уравнение (19), в правой части которого величины $\delta x, \delta y, \delta z$ тоже следует выразить через δq_i , мы получим

$$\sum \left\{ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial q_i'} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} \right\} \delta q_i = \sum \left(X \frac{\partial x}{\partial q_i} + Y \frac{\partial y}{\partial q_i} + Z \frac{\partial z}{\partial q_i} \right) \delta q_i, \quad (23)$$

причем данное уравнение, как отмечалось выше, справедливо для всех сдвигов δq_i , совместимых с условными уравнениями. В случае, когда переменные q_1, q_2, \dots, q_i независимы, данное уравнение выполняется для совершенно произвольного сдвига, а следовательно, коэффициенты при δq_i должны совпадать друг с другом для каждого i , что дает нам обыкновенные уравнения Лагранжа.

Но вместо этого предположим, что переменные связаны друг с другом условными уравнениями вида

$$\sum a_i q_i' = 0, \quad \sum b_i q_i' = 0. \quad (24)$$

Очевидно, мы можем умножить их на dt и переписать в форме

$$\sum a_i dq_i = 0, \quad \sum b_i dq_i = 0.$$

Уравнения, записанные в такой форме, сразу позволяют нам понять, что для всех сдвигов δq_i , совместимых с условными уравнениями, должны выполняться соотношения

$$\sum a_i \delta q_i = 0, \quad \sum b_i \delta q_i = 0.$$

Таким образом, уравнение (23) справедливо для всех значений δq_i , удовлетворяющих двум записанным выше уравнениям. Как известно, вводя неопределенные множители λ , μ , мы можем свести все эти соотношения к одному:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial q_i'} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = X \frac{\partial x}{\partial q_i} + Y \frac{\partial y}{\partial q_i} + Z \frac{\partial z}{\partial q_i} + \lambda a_i + \mu b_i \quad (i = 1, 2, \dots). \quad (25)$$

Именно такой вид и принимают дифференциальные уравнения Лагранжа, когда переменные удовлетворяют условным уравнениям (24).

Теперь очень просто применить проведенные выше рассуждения к нашей задаче; в случае качения использованные нами переменные $v^{(1)}$, $w^{(1)}$, $v^{(2)}$, $w^{(2)}$, ψ связаны друг с другом условными уравнениями (16),

$$\begin{aligned} f^{(1)} dv^{(1)} \cos \psi + g^{(1)} dw^{(1)} \sin \psi - f^{(2)} dv^{(2)} &= 0, \\ -f^{(1)} dv^{(1)} \sin \psi + g^{(1)} dw^{(1)} \cos \psi - g^{(2)} dw^{(2)} &= 0, \end{aligned} \quad (26)$$

тогда как переменные q_1, q_2, \dots, q_6 , как и ранее, независимы. Если считать, что *оба тела находятся в движении*, то дифференциальные уравнения динамики (25) принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial q_i'} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} &= \sum \left(X \frac{\partial x}{\partial q_i} + Y \frac{\partial y}{\partial q_i} + Z \frac{\partial z}{\partial q_i} \right) \quad (i = 1, 2, \dots, 6), \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial v^{(1)'}} \right) - \frac{\partial T}{\partial v^{(1)}} &= \sum \left(X \frac{\partial x}{\partial v^{(1)}} + Y \frac{\partial y}{\partial v^{(1)}} + Z \frac{\partial z}{\partial v^{(1)}} \right) + \lambda f^{(1)} \cos \psi - \mu f^{(1)} \sin \psi, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial w^{(1)'}} \right) - \frac{\partial T}{\partial w^{(1)}} &= \sum \left(X \frac{\partial x}{\partial w^{(1)}} + Y \frac{\partial y}{\partial w^{(1)}} + Z \frac{\partial z}{\partial w^{(1)}} \right) + \lambda g^{(1)} \sin \psi - \mu g^{(1)} \cos \psi, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial v^{(2)'}} \right) - \frac{\partial T}{\partial v^{(2)}} &= \sum \left(X \frac{\partial x}{\partial v^{(2)}} + Y \frac{\partial y}{\partial v^{(2)}} + Z \frac{\partial z}{\partial v^{(2)}} \right) - \lambda f^{(2)}, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial w^{(2)'}} \right) - \frac{\partial T}{\partial w^{(2)}} &= \sum \left(X \frac{\partial x}{\partial w^{(2)}} + Y \frac{\partial y}{\partial w^{(2)}} + Z \frac{\partial z}{\partial w^{(2)}} \right) - \mu g^{(2)}, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \psi'} \right) - \frac{\partial T}{\partial \psi} &= \sum \left(X \frac{\partial x}{\partial \psi} + Y \frac{\partial y}{\partial \psi} + Z \frac{\partial z}{\partial \psi} \right), \end{aligned} \quad (27)$$

где T обозначает живую силу всей движущейся системы, то есть двух тел вместе взятых, а суммирование в правой части проводится по всем действующим силам и по всем частицам обоих тел.

Для решения этой задачи, в которой нам приходится иметь дело не только с одиннадцатью переменными, определяющими положение двух тел, но и с неизвестными λ и μ , нам придется воспользоваться еще и двумя условными уравнениями (26), чтобы количество уравнений соответствовало количеству неизвестных.



Когда первое тело покоится, первые шесть уравнений отпадают, а суммирование в правой части проводится только по элементам второго тела.

В случае скольжения, когда используемые нами переменные не зависят друг от друга, дифференциальные уравнения динамики сразу получаются из предыдущих, когда мы приравниваем к нулю стоящие в них множители λ и μ ; при движении обоих тел эти уравнения имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial q'_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} &= \sum \left(X \frac{\partial x}{\partial q_i} + Y \frac{\partial y}{\partial q_i} + Z \frac{\partial z}{\partial q_i} \right) \quad (i = 1, 2, \dots, 6), \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial v^{(1)'}} \right) - \frac{\partial T}{\partial v^{(1)}} &= \sum \left(X \frac{\partial x}{\partial v^{(1)}} + Y \frac{\partial y}{\partial v^{(1)}} + Z \frac{\partial z}{\partial v^{(1)}} \right), \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial w^{(1)'}} \right) - \frac{\partial T}{\partial w^{(1)}} &= \sum \left(X \frac{\partial x}{\partial w^{(1)}} + Y \frac{\partial y}{\partial w^{(1)}} + Z \frac{\partial z}{\partial w^{(1)}} \right), \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial v^{(2)'}} \right) - \frac{\partial T}{\partial v^{(2)}} &= \sum \left(X \frac{\partial x}{\partial v^{(2)}} + Y \frac{\partial y}{\partial v^{(2)}} + Z \frac{\partial z}{\partial v^{(2)}} \right), \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial w^{(2)'}} \right) - \frac{\partial T}{\partial w^{(2)}} &= \sum \left(X \frac{\partial x}{\partial w^{(2)}} + Y \frac{\partial y}{\partial w^{(2)}} + Z \frac{\partial z}{\partial w^{(2)}} \right), \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \psi'} \right) - \frac{\partial T}{\partial \psi} &= \sum \left(X \frac{\partial x}{\partial \psi} + Y \frac{\partial y}{\partial \psi} + Z \frac{\partial z}{\partial \psi} \right). \end{aligned} \quad (28)$$

Если же первое тело покоится, то все происходит так же, как и в предыдущем случае.

В заключение хотелось бы еще предостеречь читателя от одного распространенного заблуждения, связанного с дифференциальными уравнениями (27), описывающими качение. В силу условных уравнений (26) величины \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} и, соответственно, \mathbf{r}_1 , \mathbf{r}_2 , \mathbf{r}_3 в выражениях (8), (9) и (15), задающих живую силу катящегося тела, всегда должны обращаться в нуль. Из-за этого можно предположить, что мы имеем право при вычислении живой силы T сразу пренебречь этими выражениями и выводить дифференциальные уравнения Лагранжа, исходя из такого упрощенного выражения T . Однако в общем случае подобное упрощение¹⁵ недопустимо: если в точности повторить описанный выше вывод уравнений Лагранжа, то мы увидим, что они связаны с одним вполне определенным условием.

Во-первых, это условие явственно просматривается в уравнении (20):

$$x'' \delta x + y'' \delta y + z'' \delta z = \frac{d}{dt} (x' \delta x + y' \delta y + z' \delta z) - (x' \delta x' + y' \delta y' + z' \delta z'),$$

которое, как легко понять, предполагает справедливость соотношения

$$\frac{d\delta x}{dt} = \delta \frac{dx}{dt}. \quad (\text{a})$$

Во-вторых, интересующее нас условие обнаруживается и в уравнениях (21):

$$\begin{aligned} x &= x(q_1, q_2, \dots), \quad y = y(q_1, q_2, \dots), \quad z = z(q_1, q_2, \dots), \\ x' &= \sum \frac{\partial x}{\partial q_i} q'_i, \quad y' = \sum \frac{\partial y}{\partial q_i} q'_i, \quad z' = \sum \frac{\partial z}{\partial q_i} q'_i, \end{aligned}$$

¹⁵Конечно, некоторые простые случаи служат исключением из этого правила, так как в них подобное упрощение никак не повлияет на результат.

вытекающих из (22):

$$\frac{\partial x'}{\partial q'_i} = \frac{\partial x}{\partial q_i}, \quad \frac{\partial y'}{\partial q'_i} = \frac{\partial y}{\partial q_i}, \quad \frac{\partial z'}{\partial q'_i} = \frac{\partial z}{\partial q_i}. \quad (\text{b})$$

Очевидно, оба соотношения (а) и (b) предполагают, что величины x' , y' , z' — это полные производные по времени. Но если нам понадобится вычислить живую силу по дифференциальным уравнениям (26), то в общем случае такое предположение уже не будет верным и применимость дифференциальных уравнений Лагранжа вообще окажется под вопросом.

Из сделанного нами замечания вытекает совершенно общее важное **правило (А)**: *в случае качения выражение для живой силы, лежащее в основе дифференциальных уравнений Лагранжа, нельзя подвергать никакому предварительному преобразованию с учетом имеющихся условных уравнений.* Иначе говоря, в случае качения мы обязаны находить живую силу, основываясь на *том же самом* выражении, что и в случае скольжения. Именно поэтому, вычисляя в предыдущем параграфе живую силу, мы изначально не принимали в расчет различие, существующее между скольжением и качением.

Разъяснение вышесказанного. Поясним сформулированное выше **правило (А)** и последствия пренебрежения этим правилом на *специально придуманном примере*. Мы можем определить движение материальной точки тремя переменными x , v , ψ так, чтобы живая сила этой точки была равна

$$T = \frac{1}{2} \{ (\psi' + x' \cos x + v' \cos \psi)^2 + x'^2 \}, \quad (1)$$

для чего должно выполняться условное уравнение

$$x' \cos x + v' \cos \psi = 0. \quad (2)$$

В этом случае дифференциальные уравнения Лагранжа (при отсутствии внешних сил) должны выглядеть так:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \psi'} \right) - \frac{\partial T}{\partial \psi} &= 0, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial x'} \right) - \frac{\partial T}{\partial x} &= \lambda \cos x, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial v'} \right) &= \lambda \cos \psi. \end{aligned}$$

Если взять все частные производные и воспользоваться условным уравнением (2), то мы перепишем искомые уравнения в явном виде:

$$\begin{aligned} \psi'' + \psi' \sin \psi v' &= 0, \\ \frac{d}{dt} (\psi' \cos x) + x'' + \psi' x' \sin x &= \lambda \cos x, \\ \frac{d}{dt} (\psi' \cos \psi) &= \lambda \cos \psi. \end{aligned}$$

После элементарных вычислений с учетом (2) мы выведем отсюда следующие уравнения для ψ и x :

$$\begin{aligned} \psi'' &= -\frac{d}{dt} (\log \cos \psi) \frac{d \sin x}{dt}, \\ x'' &= -\psi'^2 \operatorname{tg} \psi \cos x. \end{aligned} \quad (3)$$

Очевидно, что данные уравнения соответствуют *настоящему* движению рассматриваемой точки.

С другой стороны, если бы мы сразу упростили выражение для T с учетом условия (2), то вместо формулы (1) мы получили бы для живой силы T следующее выражение:

$$T = \frac{1}{2}(\psi'^2 + x'^2). \quad (4)$$

Построив с его помощью уравнения Лагранжа для ψ и x , мы нашли бы попросту

$$\begin{aligned} \psi'' &= 0, \\ x'' &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Данные уравнения, очевидно, *противоречат* уравнениям (3), а следовательно, ими пользоваться нельзя. Этого примера достаточно, чтобы продемонстрировать несостоятельность метода, на котором они основаны.

Глава 2. Применение полученных формул к качению и скольжению двух шаров

§5. Качение двух шаров

В этом параграфе мы воспользуемся полученными выше формулами в частном случае, когда удастся провести все вычисления до конца, *а именно, когда однородный шар катится по другому шару, находящемуся в покое*. Что касается сил, действующих на тела, то мы потребуем, чтобы они обеспечивали непрерывный контакт обеих поверхностей; точнее, мы будем предполагать, что все элементы движущегося шара притягиваются к центру неподвижного по закону Ньютона. Согласно известной теореме из теории потенциалов, потенциал всех таких сил можно представить с помощью некоторой, вообще говоря, легко определяемой константы, откуда сразу следует, что при выводе уравнений Лагранжа эти силы можно *вообще не принимать в расчет*.

В соответствии с введенной ранее системой обозначений мы будем считать, что *первый шар покоится, а второй — движется*.¹⁶ В качестве поверхностных координат v и w мы будем для обоих шаров использовать сферические координаты ϑ и φ ; пусть при этом ϑ обозначает угол между радиусом, проходящим через точку касания, и осью ξ_1 соответствующего шара, а φ представляет собой меридианный угол, который мы будем отсчитывать от оси ξ_2 , причем у первого шара — к положительному направлению оси ξ_3 , а у второго шара — к отрицательному. Если считать, что радиусы шаров равны A_1 и A_2 , то для координат π_i мгновенной точки касания в обеих системах координат ξ_i справедливы уравнения

$$\begin{aligned} \pi_1^{(1)} &= A_1 \cos \vartheta_1, & \pi_2^{(1)} &= A_1 \sin \vartheta_1 \cos \varphi_1, & \pi_3^{(1)} &= A_1 \sin \vartheta_1 \sin \varphi_1, \\ \pi_1^{(2)} &= A_2 \cos \vartheta_2, & \pi_2^{(2)} &= A_2 \sin \vartheta_2 \cos \varphi_2, & \pi_3^{(2)} &= -A_2 \sin \vartheta_2 \sin \varphi_2. \end{aligned} \quad (29)$$

¹⁶При этом для упрощения формул в дальнейшем мы будем ставить индексы 1 и 2 только внизу, вообще опуская их в величинах T , M , \mathfrak{M}_1 , \mathfrak{M}_2 , \mathfrak{M}_3 , так как в них какое-либо неправильное истолкование исключено. Более того, три величины \mathfrak{M}_1 , \mathfrak{M}_2 , \mathfrak{M}_3 , которые в случае шара совпадают, мы обозначим просто через \mathfrak{M} .

Далее из простых геометрических соображений находим, что направляющие косинусы $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ углов, которые оси $\bar{n}, \bar{v}, \bar{w}$ образуют с осями ξ_i , равны

$$\begin{aligned} \alpha_1^{(1)} &= \cos \vartheta_1, & \alpha_2^{(1)} &= \sin \vartheta_1 \cos \varphi_1, & \alpha_3^{(1)} &= \sin \vartheta_1 \sin \varphi_1, \\ \beta_1^{(1)} &= -\sin \vartheta_1, & \beta_2^{(1)} &= \cos \vartheta_1 \cos \varphi_1, & \beta_3^{(1)} &= \cos \vartheta_1 \sin \varphi_1, \\ \gamma_1^{(1)} &= 0, & \gamma_2^{(1)} &= -\sin \varphi_1, & \gamma_3^{(1)} &= \cos \varphi_1, \\ \alpha_1^{(2)} &= -\cos \vartheta_2, & \alpha_2^{(2)} &= -\sin \vartheta_2 \cos \varphi_2, & \alpha_3^{(2)} &= \sin \vartheta_2 \sin \varphi_2, \\ \beta_1^{(2)} &= -\sin \vartheta_2, & \beta_2^{(2)} &= \cos \vartheta_2 \cos \varphi_2, & \beta_3^{(2)} &= -\cos \vartheta_2 \sin \varphi_2, \\ \gamma_1^{(2)} &= 0, & \gamma_2^{(2)} &= -\sin \varphi_2, & \gamma_3^{(2)} &= -\cos \varphi_2. \end{aligned}$$

Отсюда получаем следующие значения для выражений (1), (2) и (3) из § 3:

$$dA^{(1)} = -\cos \vartheta_1 d\varphi_1, \quad dB^{(1)} = \sin \vartheta_1 d\varphi_1, \quad d\Gamma^{(1)} = -d\vartheta_1, \quad (30)$$

$$dA^{(2)} = -\cos \vartheta_2 d\varphi_2, \quad dB^{(2)} = -\sin \vartheta_2 d\varphi_2, \quad d\Gamma^{(2)} = d\vartheta_2, \quad (31)$$

$$\mathfrak{A} = -\cos \vartheta_2 \varphi_2' + \cos \vartheta_2 \varphi_1' + \psi',$$

$$\mathfrak{B} = -\sin \vartheta_2 \varphi_2' - (\sin \vartheta_1 \varphi_1' \cos \psi - \vartheta_1' \sin \psi), \quad (32)$$

$$\mathfrak{C} = \vartheta_2' + (\sin \vartheta_1 \varphi_1' \sin \psi + \vartheta_1' \cos \psi).$$

Элементы пути принимают на обоих телах значения $A dv$ и $A \sin \vartheta d\varphi$; связывающие их условные уравнения (16) выглядят так:

$$\begin{aligned} A_2 \vartheta_2' &= A_1 (\vartheta_2' \cos \psi + \sin \vartheta_1 \varphi_1' \sin \psi), \\ A_2 \sin \vartheta_2 \varphi_1' &= A_1 (-\vartheta_1' \sin \psi + \sin \vartheta_1 \varphi_1' \cos \psi) \end{aligned} \quad (33)$$

или

$$\frac{A_1}{A_2} \vartheta_1' = \vartheta_2' \cos \psi - \sin \vartheta_2 \varphi_2' \sin \psi, \quad (34)$$

$$\frac{A_1}{A_2} \sin \vartheta_1 \varphi_1' = \vartheta_2' \sin \psi + \sin \vartheta_2 \varphi_2' \cos \psi;$$

заметим заодно, что после дифференцирования отсюда следует, что

$$\begin{aligned} \frac{A_1}{A_2} \vartheta_1'' &= \vartheta_2'' \cos \psi - \frac{d}{dt} (\sin \vartheta_2 \varphi_2') \sin \psi - \frac{A_1}{A_2} \sin \vartheta_1 \varphi_1' \psi', \\ \frac{A_1}{A_2} \frac{d}{dt} (\sin \vartheta_1 \varphi_1') &= \vartheta_2'' \sin \psi + \frac{d}{dt} (\sin \vartheta_2 \varphi_2') \cos \psi + \frac{A_1}{A_2} \vartheta_1' \psi'. \end{aligned} \quad (35)$$

С помощью этих соотношений можно также представить значения величин \mathfrak{B} и \mathfrak{C} , входящих в (32), в форме

$$\mathfrak{B} = - \left(1 + \frac{A_2}{A_1} \right) \sin \vartheta_2 \varphi_2', \quad \mathfrak{C} = \left(1 + \frac{A_2}{A_1} \right) \vartheta_2'. \quad (36)$$

Наконец, получаем, что для величин \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} и a , b , c , определенных из уравнений (5) и (7), справедливы соотношения

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= 0, \\ \mathbf{b} &= A_1 \vartheta'_1 \cos \psi + A_1 \sin \vartheta_1 \varphi'_1 \sin \psi - A_2 \vartheta'_2, \end{aligned} \tag{37}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{c} &= -A_1 \vartheta'_1 \sin \psi + A_1 \sin \vartheta_1 \varphi'_1 \cos \psi - A_2 \sin \vartheta_2 \varphi'_2, \\ a &= -A_2, \quad b = 0, \quad c = 0. \end{aligned} \tag{38}$$

Выражения (8) и (9) для живой силы в нашем случае существенно упрощаются, поскольку различные \mathfrak{M}_i совпадают друг с другом, а стоящие при них коэффициенты \mathfrak{K}_1^2 , \mathfrak{K}_2^2 , \mathfrak{K}_3^2 , очевидно, можно заменить на $\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2 + \mathfrak{C}^2$. Таким образом, с учетом записанных выше формул выражение (9) для живой силы принимает вид

$$2T = M(A_1 + A_2)^2(\sin^2 \vartheta_1 \varphi_1'^2 + \vartheta_1'^2) + \mathfrak{M}(\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2 + \mathfrak{C}^2), \tag{39}$$

где под \mathfrak{A} , \mathfrak{B} , \mathfrak{C} следует понимать величины, определенные по формулам (32).¹⁷

Если взять за основу условные уравнения в форме (33), то дифференциальные уравнения динамики (27) в нашем случае примут вид

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \vartheta'_1} \right) - \frac{\partial T}{\partial \vartheta_1} = A_1(-\lambda \cos \psi + \mu \sin \psi), \tag{39a}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \varphi'_1} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi_1} = -A_1(\lambda \sin \psi + \mu \cos \psi) \sin \vartheta_1, \tag{39b}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \vartheta'_2} \right) - \frac{\partial T}{\partial \vartheta_2} = \lambda A_2, \tag{39c}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \varphi'_2} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi_2} = \mu A_2 \sin \vartheta_2, \tag{39d}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \psi'} \right) - \frac{\partial T}{\partial \psi} = 0, \tag{39e}$$

причем, как отмечалось в начале данного параграфа, силы, действующие на тела, можно не учитывать.

Прежде всего мы вычислим, чему равна стоящая в последнем уравнении производная $\frac{\partial T}{\partial \psi}$, воспользовавшись с этой целью уравнениями (33) и (36), после того как найдем в них частные производные. Как мы в итоге увидим, интересующая нас производная тождественно равна нулю, что позволит нам свести рассматриваемое уравнение к интегралу

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \psi'} &= \text{const}, \quad \text{то есть} \\ \mathfrak{A} &= \text{const} = \mathfrak{A}^{(0)}, \end{aligned} \tag{40}$$

где, как и всегда далее, нуль в качестве верхнего индекса означает, что имеется в виду начальное состояние.

¹⁷Если мы хотим выписать дифференциальные уравнения Лагранжа, исходя из выражения для T , то представление (36) для величин \mathfrak{B} и \mathfrak{C} можно вообще не использовать, в соответствии с правилом (А) в конце § 4.



Установив это, попытаемся переписать в явном виде два уравнения (39c) и (39d); они выглядят так:

$$\begin{aligned}\mathfrak{M} \left(\frac{d\mathfrak{C}}{dt} - \mathfrak{A} \sin \vartheta_2 \varphi'_2 + \mathfrak{B} \cos \vartheta_2 \varphi'_2 \right) &= \lambda A_2, \\ \mathfrak{M} \frac{d}{dt} (-\mathfrak{A} \cos \vartheta_2 - \mathfrak{B} \sin \vartheta_2) &= \mu A_2 \sin \vartheta_2.\end{aligned}$$

Отсюда следует, что, подставив вместо \mathfrak{B} , \mathfrak{C} их значения (36) и используя интеграл (40), мы получим

$$\begin{aligned}\frac{\mathfrak{M}}{A_2} \left\{ \left(1 + \frac{A_2}{A_1} \right) \vartheta_2'' - \left[\mathfrak{A}^{(0)} + \left(1 + \frac{A_1}{A_2} \right) \cos \vartheta_2 \varphi'_2 \right] \sin \vartheta_2 \varphi'_2 \right\} &= \lambda, \\ \frac{\mathfrak{M}}{A_2} \left\{ \left(1 + \frac{A_2}{A_1} \right) \frac{d}{dt} (\sin \vartheta_2 \varphi'_2) + \left[\mathfrak{A}^{(0)} + \left(1 + \frac{A_2}{A_1} \right) \cos \vartheta_2 \varphi'_2 \right] \vartheta_2' \right\} &= \mu,\end{aligned}\tag{39f}$$

причем в последнем уравнении мы сократили множитель $\sin \vartheta_2$ с обеих сторон.¹⁸

Умножая эти соотношения на $\sin \psi$ и $\cos \psi$, а затем складывая с учетом уравнений (34) и (35), находим

$$\lambda \sin \psi + \mu \cos \psi = \frac{\mathfrak{M} A_1}{A_2^2} \left\{ \left(1 + \frac{A_2}{A_1} \right) \left[\frac{d}{dt} (\sin \vartheta_1 \varphi'_1) - \vartheta_1' \psi' \right] + \left[\mathfrak{A}^{(0)} + \left(1 + \frac{A_2}{A_1} \right) \cos \vartheta_2 \varphi'_2 \right] \vartheta_1' \right\}$$

или, если заменить производную ψ' на ее значение

$$\psi' = \mathfrak{A}^{(0)} + \cos \vartheta_2 \varphi'_2 - \cos \vartheta_2 \varphi'_1,\tag{41}$$

взятое из первого уравнения (32),

$$\lambda \sin \psi + \mu \cos \psi = \frac{\mathfrak{M} A_1}{A_2^2} \left\{ \left(1 + \frac{A_2}{A_1} \right) \left[\frac{d}{dt} (\sin \vartheta_1 \varphi'_1) + \cos \vartheta_1 \vartheta_1' \varphi'_1 \right] - \frac{A_2}{A_1} \mathfrak{A}^{(0)} \vartheta_1' \right\}.$$

Мы хотим подставить найденные значения в уравнение (39b), которое в явном виде записывается так:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \{ M(A_1 + A_2)^2 \sin^2 \vartheta_1 \varphi'_1 + \mathfrak{M} \sin \vartheta_1 (-\mathfrak{B} \cos \psi + \mathfrak{C} \sin \psi) \} - \\ - \mathfrak{M} \mathfrak{A}^{(0)} \sin \vartheta_1 \vartheta_1' = -A_1 \sin \vartheta_1 (\lambda \sin \psi + \mu \cos \psi).\end{aligned}$$

Выполняя преобразования и замечая, что в силу уравнений (36) и (34) у нас

$$-\mathfrak{B} \cos \psi + \mathfrak{C} \sin \psi = \left(1 + \frac{A_1}{A_2} \right) \sin \vartheta_1 \varphi'_1,$$

¹⁸Этот шаг допустим, если не рассматривать тот простой случай, когда оба шара все время касаются друг друга в одной и той же точке, совпадающей с полюсом второго шара ($\sin \vartheta_2 = 0$).

то есть что мы можем подставить только что найденное значение в правую часть, получаем окончательно¹⁹:

$$K \frac{d}{dt}(\sin^2 \vartheta_1 \varphi_1') - \mathfrak{M}\mathfrak{A}^{(0)} \left(1 + \frac{A_1}{A_2}\right) \sin \vartheta_1 \vartheta_1' = 0 \quad (42)$$

или, после интегрирования,

$$K \sin^2 \vartheta_1 \varphi_1' + \mathfrak{M}\mathfrak{A}^{(0)} \left(1 + \frac{A_1}{A_2}\right) \cos \vartheta_1 = \text{const} \equiv K. \quad (42)$$

Здесь K представляет собой константу со значением

$$K = M(A_1 + A_2)^2 + \mathfrak{M} \left(1 + \frac{A_1}{A_2}\right)^2$$

или, поскольку у шара $\mathfrak{M} = \frac{2}{5}MA_2^2$,

$$K = \frac{7}{5}M(A_1 + A_2)^2. \quad (43)$$

Кроме того, возьмем уравнение живой силы $2T = 2T^{(0)}$, которому с учетом уравнений (36), (34) и (40) можно придать простой вид

$$\vartheta_1'^2 + \sin^2 \vartheta_1 \varphi_1'^2 = \text{const} \equiv c^2. \quad (44)$$

Исключая φ_1' из (42) и (44), получаем

$$\vartheta_1'^2 = c^2 - \left[\frac{k - \mathfrak{M}\mathfrak{A}^{(0)} \left(1 + \frac{A_1}{A_2}\right) \cos \vartheta_1}{K \sin \vartheta_1} \right]^2. \quad (45)$$

Последовательно дифференцируя, находим отсюда уравнения вида

$$\begin{aligned} \vartheta_1'' &= F(\vartheta_1), \quad \vartheta_1''' = \frac{\partial F}{\partial \vartheta_1} \vartheta_1', \\ \vartheta_1^{(IV)} &= \frac{\partial^2 F}{\partial \vartheta_1^2} \vartheta_1'^2 + \frac{\partial F}{\partial \vartheta_1} \vartheta_1'' \quad \text{и т. д.} \end{aligned} \quad (45')$$

Иначе говоря, можно сделать следующий вывод: *если в начале движения $\vartheta_1' = \vartheta_1'' = 0$, то и все производные более высокого порядка функции ϑ_1 в начале движения обращаются*

¹⁹Заметим заодно, что совершенно аналогично мы можем умножить уравнения (39f) на $\cos \psi$ и $-\sin \psi$ соответственно, а затем обратиться к уравнению (39a) вместо (39b); это даст нам следующее уравнение

$$K(\vartheta_1'' - \sin \vartheta_1 \cos \vartheta_1 \varphi_1'^2) + \mathfrak{M}\mathfrak{A}^{(0)} \left(1 + \frac{A_1}{A_2}\right) \sin \vartheta_1 \varphi_1' = 0. \quad (42')$$

Комбинируя его и (42), мы вновь получим уравнение живой силы в приведенной ниже простой форме (44).

в нуль²⁰, из-за чего угол ϑ_1 все время остается неизменным; следовательно, кривая качения на покоящемся шаре — это окружность. Заметим, что подобное начальное условие $\vartheta'_1 = \vartheta''_1 = 0$ всегда можно реализовать: в силу (29) оно означает, что изначально $\pi_1^{(1)'} = \pi_1^{(1)''} = 0$, то есть, как легко понять, что плоскость, соприкасающаяся с кривой качения, построенная в начальной точке касания, будет параллельна экватору — условие, выполнение которого, очевидно, всегда можно обеспечить, выбрав подходящую систему координат $\xi_i^{(1)}$. Итак, кривая качения на покоящемся шаре всегда представляет собой окружность.

Кривая качения на движущемся шаре — тоже всегда окружность. Действительно, если переписать наши формулы с учетом только что выдвинутых нами предположений, иначе говоря, если считать, что

$$\vartheta'_1 = 0, \quad \sin \vartheta_1 \varphi'_1 = \pm c \quad (46)$$

— где последнее соотношение верно в силу (45), — то условные уравнения (33) принимают вид

$$\frac{A_2}{A_1} \vartheta'_2 = \pm c \sin \psi, \quad \frac{A_2}{A_1} \sin \vartheta_2 \varphi'_2 = \pm c \cos \psi.$$

Теперь, продифференцировав первое из уравнений, мы получим

$$\frac{A_2}{A_1} \vartheta''_2 = \pm c \cos \psi \psi'.$$

Если добавить сюда уравнение (41), которому в интересующем нас случае можно придать простой вид

$$\psi' = \cos \vartheta_2 \varphi'_2 + \text{const},$$

то мы приходим к четырем уравнениям, а затем, исключая три неизвестные ψ , ψ' , φ'_2 , выведем из них дифференциальное уравнение для ϑ_2 в форме

$$\vartheta''_2 = f(\vartheta_2, \vartheta'_2).$$

Повторяя дифференцирование, мы получим отсюда систему уравнений, которая позволит нам относительно кривой качения на движущемся шаре сделать вывод, совершенно аналогичный тому, что мы уже сделали выше о кривой качения на покоящемся шаре, опираясь на систему (45').²¹

Установив форму кривых качения, перейдем к определению положения и направления мгновенных осей вращения. Если выбрать полярную систему координат ϑ , φ на втором шаре так же, как и на первом, то есть так, чтобы

$$\vartheta'_2 = \vartheta''_2 = 0, \quad (47)$$

²⁰Разумеется, данный вывод можно сделать только тогда, когда ни одна из частных производных функции F не обращается в бесконечность. Однако в силу (45) этот последний случай возможен только тогда, когда $\sin \vartheta_1^{(0)} = 0$. Взглянув на уравнение (44), мы тут же поймем, что в этом случае $c = 0$, то есть элемент пути на первом шаре все время равен нулю, а следовательно, кривая качения на первом шаре вырождается в точку. Поскольку эту точку можно понимать как окружность нулевого радиуса, данный особый случай также подчиняется общему правилу, изложенному далее в нашей работе.

²¹Что касается строгости данного вывода, то мы могли бы, вычислив в явной форме значение ϑ''_2 , повторить наше рассуждение из примечания к системе (45').

то, очевидно, все время движения у нас будет

$$\psi' = 0, \quad (48)$$

а сам угол ψ будет равен либо 0, либо π , из-за чего, в частности, переменная φ на обоих шарах изменяется либо в том же самом, либо в противоположном направлении. Более того, — и данное замечание пригодится нам также в дальнейшем, — мы можем зафиксировать *первую* из них и предполагать, что равенство элементов пути при качении шаров друг по другу выражается с помощью уравнения

$$A_1 \sin \vartheta_1 \varphi_1' = A_2 \sin \vartheta_2 \varphi_2'. \quad (49)$$

Теперь, с учетом сделанного предположения, находим значения компонент мгновенной скорости вращения относительно системы координат $\bar{n}^{(2)}$, $\bar{v}^{(2)}$, $\bar{w}^{(2)}$, воспользовавшись (32) и, соответственно, (36):

$$\begin{aligned} \mathfrak{A} &= \cos \vartheta_1 \varphi_1' - \cos \vartheta_2 \varphi_2', \\ \mathfrak{B} &= -\frac{A_1 + A_2}{A_1} \vartheta_2', \\ \mathfrak{C} &= 0. \end{aligned}$$

Поскольку \mathfrak{C} — это компонента скорости вращения, взятая по направлению касательной к кривой $\vartheta = \text{const}$ в точке касания шаров, иначе говоря, по направлению нормали к соответствующей меридиональной плоскости, последнее уравнение означает, что *мгновенная ось вращения всегда лежит в соответствующей меридиональной плоскости*.²² Таким образом, она будет пересекать ось $\xi_1^{(2)}$ в некоторой точке P . Однако в силу равномерности исследуемого движения эта точка P должна быть одной и той же для всей последовательности сменяющих друг друга осей вращения; таким образом, все мгновенные оси вращения должны проходить через одну и ту же неподвижную точку P , лежащую на оси $\xi_1^{(2)}$; иначе говоря, все они вместе взятые образуют *круговой конус*, описанный вокруг движущегося шара. Естественно, то же самое справедливо и для неподвижного шара. Это также означает, что оба конуса все время касаются друг друга вдоль некоторой образующей и катятся друг по другу в процессе движения шаров. Очевидно, для этого необходимо, чтобы их вершины все время совпадали.

Объединяя все полученные выше результаты, можно сформулировать следующее **утверждение**.

Пусть однородный шар катится по внешней поверхности покоящегося шара, причем все элементарные части подвижного шара притягиваются к центру неподвижного в соответствии с законом Ньютона. Тогда оба тела катятся друг по другу вдоль двух окружностей с одинаковыми скоростями.²³ Кроме того, множество всех мгновенных осей вращения представляет собой два круговых конуса, описанных вокруг обоих шаров; вершины этих конусов все время совпадают, а сами они катятся друг по другу с одинаковой скоростью.

²² Данный результат можно было предвидеть, поскольку при *любом* движении качения, как гласит известное правило, мгновенная ось вращения перпендикулярна общей касательной к обоим кривым качения, проходящей через точку мгновенного касания.

²³ Этот результат получил еще Функе, рассуждавший геометрически-синтетическим способом (Funcke, Zur Theorie des Rollens, p. 41).

Эти уравнения определяют положение осей $\xi_i^{(2)}$ конусов качения, а вместе с тем и положение окружностей качения, по направлению (начальной) мгновенной оси вращения, а последняя, очевидно, полностью определена из начальных условий. Тем самым мы получаем возможность в конце концов вновь освободиться от тех особых предположений, которые мы сделали по поводу расположения системы координат ξ_i . Точнее говоря, даже при произвольном выборе осей ξ_i величина угла T может быть найдена по начальным условиям с помощью уравнения

$$\cos T = \frac{\mathfrak{A}^{(0)}}{\sqrt{\mathfrak{A}^{(0)2} + \mathfrak{B}^{(0)2} + \mathfrak{C}^{(0)2}}}.$$

Тогда мы сразу же можем определить из уравнений (53) углы ϑ_1, ϑ_2 , под которыми, перпендикулярно касательной к кривой качения, проведенной в начальной точке касания, радиусы пересекают нормали тех плоскостей, в которых лежат окружности качения. Это означает, что мы всегда, даже при произвольно заданном начальном состоянии, сможем записать направляющие косинусы и уравнения интересующих нас плоскостей.

В заключение сделаем еще несколько выводов из уравнений (51) и (53). Из (51) сразу следует

$$\text{abs}(\text{ctg } \vartheta_1) < \text{abs}(\text{ctg } \vartheta_2),$$

то есть

$$\text{abs}\left(\frac{\pi}{2} - \vartheta_1\right) < \text{abs}\left(\frac{\pi}{2} - \vartheta_2\right),$$

а это означает, с геометрической точки зрения, что на покоящемся шаре окружность качения лежит ближе к экватору, чем на движущемся, если измерять расстояние до экватора как угловое. Если же одна из окружностей качения совпадает с большой окружностью шара, то то же самое верно и для второй окружности, как легко понять из (52). В соответствии с уравнением (53), необходимым и достаточным условием этого будет $\text{ctg } T = 0$, то есть мгновенные оси вращения должны быть перпендикулярны радиусам и, поскольку в данном случае $\vartheta = \frac{\pi}{2}$, параллельны осям ξ_1 , образуя в своей совокупности два круговых цилиндра. Однако уравнение $\text{ctg } T = 0$, очевидно, означает, что величина $\mathfrak{A}^{(0)}$, то есть компонента начальной скорости вращения вдоль нормали, равна нулю. Следовательно, окружности качения на шарах совпадают с большими окружностями тогда и только тогда, когда конусы, построенные из совокупности мгновенных осей вращения на обоих шарах, одновременно вырождаются в два круговых цилиндра, то есть когда начальная скорость вращения, взятая вдоль общей нормали обоих тел, равна нулю.

Теперь мы хотим, чтобы на нашу систему могла воздействовать сила тяжести. Однако, желая сделать нашу модель как можно ближе к действительности, мы будем считать, что второй шар катится *внутри* первого, то есть первый шар мы будем считать *полым*. Для большей наглядности можно даже предположить, что мы убрали верхнюю часть полого шара; тогда у нас есть модель, вполне реализуемая в действительности, если не считать условия абсолютной шероховатости поверхностей. В этом случае вступает в силу замечание, сделанное нами в конце § 3, и мы должны изменить систему обозначений, понимая под осью $\bar{n}^{(2)}$ уже не *внутреннюю*, но *внешнюю* нормаль второго шара. Тогда системы координат $\bar{n}, \bar{v}, \bar{w}$ будут абсолютно одинаковы для обоих шаров; то же самое будет верно и для

используемых в дальнейшем систем полярных координат ϑ , φ на обоих шарах: обе они будут того же типа, что и координаты, введенные нами на с. 415 для первого шара. Соответственно, и величины $dA^{(2)}$, $dB^{(2)}$, $d\Gamma^{(2)}$ будут полностью аналогичны величинам $dA^{(1)}$, $dB^{(1)}$, $d\Gamma^{(1)}$, определенным из уравнения (30), то есть примут значения

$$dA^{(2)} = -\cos \vartheta_2 d\varphi_2, \quad dB^{(2)} = \sin \vartheta_2 d\varphi_2, \quad d\Gamma^{(2)} = -d\vartheta_2.$$

Но тогда уравнения (32) надо заменить на следующие:

$$\begin{aligned} \mathfrak{A} &= -\cos \vartheta_2 \varphi_2' + \cos \vartheta_1 \varphi_1' + \psi', \\ \mathfrak{B} &= \sin \vartheta_2 \varphi_2' - (\sin \vartheta_1 \varphi_1' \cos \psi - \vartheta_1' \sin \psi), \\ \mathfrak{C} &= -\vartheta_2' + (\sin \vartheta_1 \varphi_1' \sin \psi + \vartheta_1' \cos \psi). \end{aligned} \quad (32')$$

Условные уравнения (33)–(35) остаются без изменений; то же самое верно для выражений \mathfrak{a} , \mathfrak{b} , \mathfrak{c} в (37), тогда как уравнения (36) теперь принимают вид

$$\mathfrak{B} = \left(1 - \frac{A_2}{A_1}\right) \sin \vartheta_2 \varphi_2', \quad \mathfrak{C} = -\left(1 - \frac{A_2}{A_1}\right) \vartheta_2', \quad (36')$$

а для величин a , b , c , определенных в (7), вместо уравнений (38) будут выполняться следующие:

$$a = A_2, \quad b = 0, \quad c = 0. \quad (38')$$

Сравнивая уравнения (32'), (36'), (38') с соответствующими им уравнениями (32), (36), (38) из предыдущей задачи, видим, что обе группы уравнений переходят друг в друга, если одновременно поменять местами

$$\vartheta_2 \text{ с } -\vartheta_2 \quad \text{и} \quad A_2 \text{ с } -A_2. \quad (54)$$

С другой стороны, при такой одновременной перестановке уравнения (33)–(35) и (37), тоже справедливые для нашей задачи, никак не изменяются. Однако вышеупомянутые уравнения полностью определяют ход наших вычислений — если не принимать в расчет силы, действующие на систему. Это означает, что мы имеем право сразу же перенести на исследуемый сейчас случай все формулы и преобразования из предыдущей задачи, надо только помнить о замене (54) и, кроме того, о необходимости *изменить* дифференциальные уравнения движения с *учетом силы тяжести*. Прежде всего объясним, в чем заключаются эти изменения. Используем в качестве неподвижной системы координат x, y, z , относительно которой записываются правые части дифференциальных уравнений динамики (27), и систему координат $\xi_i^{(1)}$, ось ξ_1 которой направлена вертикально вверх (противоположно направлению силы тяжести). Координаты центра тяжести второго шара в этой системе координат равны

$$x_\sigma = (A_1 - A_2) \cos \vartheta_1, \quad y_\sigma = 0, \quad z_\sigma = 0. \quad (55)$$

Силы, действующие на систему шаров, вырождаются в следующие величины:

$$X = -mg, \quad Y = 0, \quad Z = 0.$$

Тогда дополнительные слагаемые в правой части дифференциальных уравнений Лагранжа (27), отражающие воздействие внешних сил, в нашем случае примут вид

$$-g \sum m \frac{\partial x}{\partial \vartheta_1}, \quad -f \sum m \frac{\partial x}{\partial \varphi_1}, \quad -g \sum m \frac{\partial x}{\partial \vartheta_2}, \\ -g \sum m \frac{\partial x}{\partial \varphi_2}, \quad -g \sum m \frac{\partial x}{\partial \psi}$$

или, с учетом (55) и того, что $\sum mx = Mx_\sigma$,

$$Mg(A_1 - A_2) \sin \vartheta_1, \quad 0, \quad 0, \quad 0, \quad 0. \tag{56}$$

Аналогично для уравнения живой силы получаем

$$2(T - T^{(0)}) = 2Mg(A_1 - A_2)(\cos \vartheta_1^{(0)} - \cos \vartheta_1). \tag{56'}$$

Если теперь найти значение T , исходя из выражения (39) с учетом (36), (40), (53) и (54), то уравнение в явном виде будет выглядеть так:

$$K \left\{ (\vartheta_1'^2 + \sin^2 \vartheta_1 \varphi_1'^2) - (\vartheta_1^{(0)2} + \sin^2 \vartheta_1^{(0)} \varphi_1^{(0)2}) \right\} = 2Mg(A_1 - A_2)(\cos \vartheta_1^{(0)} - \cos \vartheta_1); \tag{57}$$

при этом уравнение (42) останется без изменений в своей «внешней» форме:

$$K \sin^2 \vartheta_1 \varphi_1' + \mathfrak{M}\mathfrak{A}^{(0)} \left(1 - \frac{A_1}{A_2} \right) \cos \vartheta_1 = \text{const} = \\ = K \sin^2 \vartheta_1^{(0)} \varphi_1^{(0)'} + \mathfrak{M}\mathfrak{A}^{(0)} \left(1 - \frac{A_1}{A_2} \right) \cos \vartheta_1^{(0)}. \tag{58}$$

Впрочем, вместо уравнения (43) здесь возникает уравнение

$$K = \frac{7}{5} M(A_1 - A_2)^2. \tag{43'}$$

Два уравнения (57) и (58) позволяют определить величины ϑ_1 и φ_1 в квадратурах, тогда как оставшиеся три переменные можно будет найти из интеграла $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}^{(0)}$ и из двух условных уравнений, выражающих тот факт, что элементы пути при качении друг по другу совпадают.

Теперь сравним интересующее нас движение с движением *гироскопа*, острие которого закреплено в центре покоящегося шара. Для этого мы будем представлять себе гироскоп как тело вращения; кроме того, его ось вращения, которую мы обозначим как ось 1, можно представить с помощью прямой, проходящей через его острие. Сохраним неизменным смысл координат ϑ_1 , φ_1 , чтобы они задавали полярные координаты центра тяжести (или оси вращения) гироскопа, и обозначим массу и главные моменты инерции движущегося тела через \overline{M} , \mathfrak{M}_1 , \mathfrak{M}_2 соответственно, а расстояние от его центра тяжести до острия — через l . Тогда переменные ϑ_1 и φ_1 определяются из следующих уравнений²⁵:

$$(\overline{M}l^2 + \mathfrak{M}_2) \{ (\sin^2 \vartheta_1 \varphi_1'^2 + \vartheta_1'^2) - (\vartheta_1^{(0)2} + \sin^2 \vartheta_1^{(0)} \varphi_1^{(0)2}) \} = 2\overline{M}gl(\cos \vartheta_1^{(0)} - \cos \vartheta_1), \tag{58'} \\ \underline{(\overline{M}l^2 + \mathfrak{M}_2) \sin^2 \vartheta_1 \varphi_1' + \mathfrak{M}_1 C^{(0)} \cos \vartheta_1 = \text{const} = (\overline{M}l^2 + \mathfrak{M}_2) \sin^2 \vartheta_1^{(0)} \varphi_1^{(0)'} + \mathfrak{M}_1 C^{(0)} \cos \vartheta_1^{(0)},}$$

²⁵Carl Neumann, Grundzüge der analytischen Mechanik, Zweiter Artikel, § 2.



где $C^{(0)}$ представляет собой некоторую константу (а именно, скорость вращения относительно оси 1). Данная система уравнений полностью согласуется с системой (57)–(58), если положить $\overline{M} = M$ и, кроме того,

$$\begin{aligned}\frac{\overline{M}l + \mathfrak{M}_2}{l} &= \frac{K}{A_1 - A_2}, \\ \frac{\mathfrak{M}_1 C^{(0)}}{l} &= -\frac{\mathfrak{M}\mathfrak{Q}^{(0)}}{A_2}.\end{aligned}\tag{59}$$

Эти уравнения предоставляют в наше распоряжение только *четыре* величины (а именно, \mathfrak{M}_1 , \mathfrak{M}_2 , $C^{(0)}$, l), так что мы можем произвольно распорядиться еще *двумя* величинами. Прежде всего, будем считать, что величины $\mathfrak{Q}^{(0)}$ и $C^{(0)}$, то есть (постоянные) скорости вращения относительно нормали полого шара, равны друг другу по величине и противоположны по знаку. Кроме того, гироскоп может иметь форму *шара*²⁶, тогда у нас $\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{M}_2 = \frac{2}{5}\overline{M}A^2$, где A обозначает радиус шара. Установив все это, видим, что из формул (59) и (43') после элементарных вычислений мы найдем следующие значения для величин A и l :

$$\begin{aligned}A &= \sqrt{A_2 l}, \\ l &= \frac{7A_1 - 9A_2}{5}.\end{aligned}\tag{60}$$

В итоге мы можем сформулировать следующее **утверждение**.

Пусть однородный шар катится по внутренней поверхности неподвижного полого шара под действием силы тяжести. Кроме того, пусть нам дан гироскоп, острие которого закреплено в центральной точке O полого шара. Пусть при этом гироскоп имеет форму однородного шара, а его радиус A и ось l удовлетворяют соотношениям (60). Пусть центры тяжести обоих движущихся тел лежат в начальный момент времени на одном и том же полулуче, исходящем из точки O , а их начальные угловые скорости равны и сонаправлены, в то время как угловые скорости самих тел относительно вышеупомянутого полулуча равны и противоположно направлены. Тогда оба центра тяжести в течение всего движения лежат на одном и том же полулуче, исходящем из точки O , более того, на нем же располагается и соответствующая точка контакта цельного и полого шаров.

С другой стороны, движение центра тяжести шара будет согласовано с движением сферического маятника с радиусом $\frac{7}{5}(A_1 - A_2)$ тогда и только тогда, когда в начале движения компонента $\mathfrak{Q}^{(0)}$ скорости вращения относительно нормали полого шара равна нулю (43').

Это тоже сразу следует из уравнений (57) и (58). При этом еще предполагается, что в начальный момент времени положение и скорость маятника и центра тяжести шара согласованы друг с другом.

В частности, если центр тяжести шара описывает траекторию *плоского маятника*²⁷, то помимо упоминавшегося выше условия $\mathfrak{Q}^{(0)} = 0$ должно еще иметь место соотноше-

²⁶При таком условии множитель \overline{M} в уравнении (58') можно сократить точно так же, как множитель M в системе (57)–(58): установленное выше условие согласованности обоих тел в отношении их масс оказывается в итоге излишним.

²⁷Этим случаем занимался еще Вальтон (Walton, Collection of Problems of the Theoretical Mechanics, стр. 492), но он сразу предполагал, что подвижный шар катится вдоль большой окружности, которая в начальный момент времени лежит в вертикальной плоскости, проходящей через центр тяжести.

ние $\varphi_1^{(0)'} = 0$. В этом случае кривая качения на движущемся шаре представляет собой большую окружность: в силу (33) имеем

$$A_2 \sin \vartheta_2 \varphi_2' = -A_1 \vartheta_1' \sin \psi,$$

а из (32) и (40) следует

$$-\cos \vartheta_2 \varphi_2' + \psi' = 0.$$

Если теперь выбрать систему координат $\xi_i^{(2)}$ так, чтобы $\psi_0 = 0$, то из записанных выше уравнений получаем также $\psi_0' = 0$ и $\varphi_2^{(0)'} = 0$. Последовательно дифференцируя, можно шаг за шагом показать, что все производные высших порядков от функций $\varphi_2^{(0)}$ и $\psi^{(0)}$ обращаются в нуль, так что кривая качения на втором шаре действительно проходит по меридиану. Q.e.d.

§6. Скольжение двух шаров друг по другу

В этом параграфе мы рассмотрим в случае *скольжения* ту же самую задачу, которую мы исследовали в предыдущем параграфе в случае *качения*; при этом один из шаров — первый — вновь сначала предполагается неподвижным. Нам кажется целесообразным *заменить* в этом случае *методы*, описанные и использованные выше, на *другие*, о которых упоминалось во введении (§1). В частности, вместо использованных ранее переменных мы введем другие, непосредственно определяющие положение центра тяжести и направление главных осей инерции $\xi_i^{(2)}$ движущегося шара.

Впрочем, первая часть данной задачи решается сразу: если сохранить смысл полярных координат ϑ_1, φ_1 из предыдущего параграфа, то они, очевидно, позволят нам полностью определить положение не только мгновенной точки контакта, но и центра тяжести движущегося тела. Для того чтобы решить вторую часть задачи, введем *три новых переменных* ϑ, f, φ : если обозначить через $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ направляющие косинусы углов между осями $\xi_i^{(2)}$ и каждой из осей неподвижной системы координат x, y, z , то положим²⁸

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= -\cos \varphi \cos f \cos \vartheta - \sin \varphi \sin f, \\ \beta_1 &= -\sin \varphi \cos f \cos \vartheta + \cos \varphi \sin f, \\ \gamma_1 &= \cos f \sin \vartheta, \\ \alpha_2 &= -\cos \varphi \sin f \cos \vartheta + \sin \varphi \cos f, \\ \beta_2 &= -\sin \varphi \sin f \cos \vartheta - \cos \varphi \cos f, \\ \gamma_2 &= \sin f \sin \vartheta, \\ \alpha_3 &= \cos \varphi \sin \vartheta, \quad \beta_3 = \sin \varphi \sin \vartheta, \quad \gamma_3 = \cos \vartheta. \end{aligned} \tag{61}$$

Очевидно, что величины ϑ_1, φ_1 определяют *поступательное*, а величины ϑ, f, φ — *вращательное* движение шара. Величина первого движения за элемент времени dt составляет $(A_1 + A_2) \sqrt{\vartheta_1'^2 + \sin^2 \vartheta_1 \varphi_1'^2} dt$; компоненты второго движения в неподвижной системе

²⁸Kirchhoff, *Mechanik*, p. 43.

координат xuz с учетом правила 4 из § 2 равны

$$\begin{aligned}\omega_\alpha dt &= \sum \beta_i d\gamma_i = -\cos \varphi \sin \vartheta df - \sin \varphi d\vartheta, \\ \omega_\beta dt &= \sum \gamma_i d\alpha_i = -\sin \varphi \sin \vartheta df + \cos \varphi d\vartheta, \\ \omega_\gamma dt &= \sum \alpha_i d\beta_i = -\cos \vartheta df + d\varphi.\end{aligned}\tag{62}$$

Тем самым находим, что живая сила T —

$$T = \frac{1}{2}M(A_1 + A_2)^2(\vartheta_1'^2 + \sin^2 \vartheta_1 \varphi_1'^2) + \mathfrak{M}(\omega_\alpha^2 + \omega_\beta^2 + \omega_\gamma^2)$$

— выражается по формуле

$$2T = M(A_1 + A_2)^2(\vartheta_1'^2 + \sin^2 \vartheta_1 \varphi_1'^2) + \mathfrak{M}(\vartheta_1'^2 + \varphi_1'^2 + f'^2 - 2 \cos \vartheta \varphi' f').\tag{63}$$

Теперь мы вновь, как и в предыдущем параграфе, прежде всего предположим, что все элементарные части второго шара притягиваются к центру покоящегося шара *по закону Ньютона* и никакие другие силы не действуют. Тогда, как и раньше, мы можем полностью пренебречь этими силами при построении дифференциальных уравнений Лагранжа, принимая в расчет только выражение для $2T$. Имеет смысл разбить это выражение на две части

$$\begin{aligned}2T_1 &= M(A_1 + A_2)(\sin^2 \vartheta_1 \varphi_1'^2 + \vartheta_1'^2), \\ 2T_2 &= \mathfrak{M}(\vartheta_1'^2 + \varphi_1'^2 + f_1'^2 - 2 \cos \vartheta \varphi' f')\end{aligned}\tag{64}$$

и рассматривать при обсуждении *поступательного* движения только первую из них, а при обсуждении *вращательного* движения — только вторую. Это последнее движение в интересующем нас случае исследуется очень просто. Очевидно, что дифференциальное уравнение для переменной φ сводится к интегралу

$$\mathfrak{M}(\varphi' - \cos \vartheta f') = \text{const},$$

или, с учетом (62),

$$\mathfrak{M}\omega_\gamma = \text{const},$$

или, с геометрической точки зрения: компонента скорости вращения относительно оси z представляет собой константу. Поскольку направление оси z может, очевидно, выбираться совершенно произвольным, данная компонента скорости вращения должна быть постоянной относительно любого направления, иначе говоря, и сама скорость вращения должна быть постоянной как по величине, так и по направлению в пространстве, причем относительно шара — тоже. Переходя к *поступательному* движению, будем рассматривать только первое из выражений (64):

$$2T_1 = M(A_1 + A_2)(\vartheta_1'^2 + \sin^2 \vartheta_1 \varphi_1'^2).$$

Его, очевидно, можно понимать как представление живой силы у точки с массой M при движении по шару радиуса $(A_1 + A_2)$, концентрическому с покоящимся шаром. Соответственно, и дифференциальные уравнения Лагранжа для переменных ϑ_1 и φ_1 можно понимать как уравнения движения такой точки. Но, как известно, эти дифференциальные уравнения, записанные в предположении об отсутствии каких-либо сил, действующих на систему, дают нам траекторию, представляющую собой большую окружность, движение по которой происходит равномерно. Следовательно, так же должна выглядеть и траектория центра тяжести нашего шара.

Итак, пусть однородный шар скользит по другому шару, остающемуся в покое; пусть при этом все его элементарные части притягиваются к центру неподвижного шара по закону Ньютона. Тогда этот шар вращается с постоянной скоростью вокруг постоянной оси, проходящей через его центр тяжести, причем эта ось сдвигается в пространстве параллельно себе самой так, что центр тяжести движущегося шара перемещается по большой окружности некоторого шара, концентрического с покоящимся, с равномерной скоростью.

Теперь обратимся к тому случаю, когда на шар действует сила тяжести. Как и в предыдущем параграфе, мы будем при этом считать, что подвижный шар скользит по внутренней поверхности неподвижного. Вновь предположим, что ось $\xi_1^{(1)}$ направлена противоположно силе тяжести; тогда, как и выше в формуле (56'), получаем, что потенциал \mathfrak{U} принимает значение

$$\mathfrak{U} = Mg(A_1 - A_2)(\cos \vartheta_1^{(0)} - \cos \vartheta_1).$$

Поскольку переменные ϑ , f , φ никак не участвуют в записи функции \mathfrak{U} , сила тяжести никак не влияет на вращение шара. Что касается поступательного движения, то при построении соответствующих уравнений Лагранжа надо заменить стоявшее там ранее выражение T_1 на выражение

$$T_1 + \mathfrak{U} = \frac{1}{2}M(A_1 - A_2)^2(\vartheta_1'^2 + \sin^2 \vartheta_1 \varphi_1'^2) + Mg(A_1 - A_2)(\cos \vartheta_1^{(0)} - \cos \vartheta_1).$$

Записанные для этого выражения уравнения Лагранжа, очевидно, тождественны уравнениям движения сферического маятника с массой M и радиусом $(A_1 - A_2)$.

Итак, пусть однородный шар скользит по внутренности полусферы под действием силы тяжести. Тогда он будет вращаться с равномерной скоростью вокруг постоянной оси, проходящей через его центр тяжести, в то время как его центр тяжести будет двигаться подобно сферическому маятнику, положение и скорость которого в начале движения необходимо согласовать с положением и скоростью шара.²⁹

Замечание 1. Имеет смысл отметить, что представленные здесь соображения заслуживают некоторого обобщения. Представим себе, что шар скользит по какой-то произвольной поверхности; очевидно, что его центр будет двигаться по параллельной поверхности, построенной на расстоянии радиуса шара от исходной. Теперь представим себе, что все элементарные части шара притягиваются к какому-то неподвижному центру по закону Ньютона. Тогда, рассуждая так же, как и раньше, мы придем к следующему результату: шар вновь будет вращаться с равномерной скоростью вокруг оси с постоянным направлением, а его центр тяжести будет двигаться по параллельной поверхности F так, как если бы в нем была сконцентрирована вся масса шара и одновременно все силы, действующие на шар, действовали бы только на него.

Замечание 2. Точно таким же способом можно решить следующую задачу.

Пусть два однородных шара двигаются в пространстве и одновременно скользят друг по другу. Пусть при этом каждая элементарная часть одного шара притягивается к каждой элементарной части другого по закону Ньютона.

²⁹Это согласование с движением сферического маятника было найдено уже у Амтора (Amthor, Über die Bewegung eines Körpers auf einer krummen Fläche, Leipzig, 1868, §6, p. 18).

Обозначим через $x_\sigma, y_\sigma, z_\sigma$ координаты центра тяжести всей системы в неподвижной системе координат, через Θ и Φ — полярные координаты, задающие положение центров шаров относительно точки $(x_\sigma, y_\sigma, z_\sigma)$, а через $\varphi_1, f_1, \varphi_1, \vartheta_2, f_2, \varphi_2$ — углы, которые в соответствии с уравнениями (61) определяют положение главных осей обоих тел в пространстве. Тогда, анализируя движение тел по отдельности, что соответствует изменению отдельных аргументов, мы найдем следующее значение для живой силы системы:

$$2(T^{(1)} + T^{(2)}) = (M^{(1)} + M^{(2)})(x_\sigma'^2 + y_\sigma'^2 + z_\sigma'^2) + \frac{(A_1 + A_2)^2 M^{(1)} M^{(2)}}{M^{(1)} + M^{(2)}}(\Theta'^2 + \sin^2 \Theta \Phi'^2) + \\ + \mathfrak{M}^{(1)}(\vartheta_1'^2 + f_1'^2 + \varphi_1'^2 - 2 \cos \vartheta_1 f_1' \varphi_1') + \mathfrak{M}^{(2)}(\vartheta_2'^2 + f_2'^2 + \varphi_2'^2 - 2 \cos \vartheta_2 f_2' \varphi_2'). \quad (65)$$

При построении уравнений Лагранжа мы можем вновь не принимать в расчет силы, действующие на тела. Поэтому, рассуждая точно так же, как и раньше, мы исследуем записанное выше выражение (65) и получим следующий результат.

Центр тяжести всей системы движется прямолинейно и равномерно, тогда как центры обоих шаров движутся с одинаковой скоростью по окружности, которая лежит на плоскости, проходящей через вышеупомянутый центр тяжести и жестко с ним связанной; кроме того, оба шара вращаются с равномерной скоростью вокруг двух осей, проходящих через их центры и сохраняющих свое направление в пространстве.

Глава 3. Качение и скольжение плоской поверхности, в частности, однородного кругового диска, по горизонтальной плоскости под действием силы тяжести

§7. Вводные замечания. Обозначения

Теперь обратимся к другому частному случаю рассмотренной выше задачи, когда одно тело вырождается в горизонтальную плоскость, а другое — в плоскую поверхность.³⁰

Если попытаться исследовать этот случай аналитически, как один из частных случаев приведенных выше рассуждений, то мы тут же столкнемся с одним *затруднением*: при переходе от качения либо скольжения *тел* к качению либо скольжению *поверхностей* в общем случае неизбежно возникает *скачок*. Отсюда сразу следует, что мы должны ввести совершенно другие координаты и изменить некоторые определения. Так, например, координат $v^{(2)}, w^{(2)}$ здесь не будет, так как положение точки касания на поверхности, то есть, в нашем случае, на ограничивающей эту поверхность кривой, определяется уже только одной переменной; кроме того, здесь придется ввести новый определяющий элемент, задающий наклон поверхности относительно горизонтальной плоскости. Соответственно, и систему координат $\bar{n}^{(2)}, \bar{v}^{(2)}, \bar{w}^{(2)}$ необходимо заменить на другую, более подходящую для новых переменных. Впрочем, после всех этих изменений остальная часть рассуждений окажется

³⁰По-видимому, в имеющейся на настоящий момент литературе данная задача не рассматривалась, если не считать упоминания о ней у Амтора (Amthor, Über die Bewegung eines Körpers auf einer krummen Fläche, Leipzig, 1868, p. 18): автор вычисляет живую силу кругового диска, скользящего по плоскости, но дальнейшие характеристики не обсуждаются.

совершенно аналогичной общему случаю, рассмотренному нами в §3; записанные там формулы после необходимых изменений остаются в силе и для нашего случая; они приведут нас к совершенно аналогичным конечным формулам для живой силы. И все же в дальнейшем мы предпочтем вывести необходимые нам формулы непосредственно, с самого начала, не ссылаясь на предыдущие результаты.

Прежде всего договоримся об *обозначениях*. Введем систему координат x, y, z , жестко связанную с горизонтальной плоскостью; пусть ее ось x направлена вертикально *вверх*. В дальнейшем мы будем использовать систему координат ξ_1, ξ_2, ξ_3 , жестко связанную с поверхностью и проходящую через ее центр тяжести; пусть оси этой системы тождественно совпадают с тремя главными осями инерции данной поверхности, причем ось ξ_1 направлена перпендикулярно поверхности. Как и всегда, обе системы должны быть положительной (правой) ориентации. Кроме того, зададим *направление обхода* кривой, ограничивающей поверхность, а именно: оно считается положительным, если при движении мы переходим от положительного направления оси ξ_2 к положительному направлению оси ξ_3 . Будем считать, что положение точки на граничной кривой определено *переменной* φ , возрастающей при обходе кривой в положительном направлении.

Далее, отметим на горизонтальной плоскости точку мгновенного касания P и проведем из нее касательную к граничной кривой в положительном направлении обхода; эта касательная лежит в горизонтальной плоскости; пусть она образует с положительным направлением оси y *угол* ψ , который отсчитывается от положительного направления оси y к положительному направлению оси z . Затем проведем в точке P внутреннюю нормаль к граничной кривой. Если обозначить касательную и нормаль через t и n , то системы координат $\xi_2\xi_3$ и tn на исследуемой поверхности будут конгруэнтны. Если же теперь провести через точку P ту нормаль к поверхности, которая сонаправлена с осью ξ_1 , то система координат Ntn будет конгруэнтна введенным ранее системам.

Введем еще и *третью переменную* u , равную углу между осями x и ξ_1 (или N), причем угол u должен отсчитываться так, чтобы он всегда принимал значения от 0 до π .

Наконец, введем еще одну систему координат $x'tn'$, у которой начало координат совпадает с точкой P , а ось x' параллельна оси x , тогда как другие две оси t, n' получаются из осей y и z поворотом на угол ψ ; в зависимости от того, острый угол u или тупой, ось n' обозначает проекцию положительного либо отрицательного направления оси n на горизонтальную плоскость.

Задав аргументы u, ψ, φ , мы полностью определим положение поверхности, за исключением положения ее точки касания P с горизонтальной плоскостью; если обозначить координаты этой точки на поверхности через y и z , то пяти аргументов

$$u, \varphi, \psi, y, z$$

полностью достаточно, чтобы определить положение поверхности. При скольжении эти пять аргументов *не зависят* друг от друга, а при качении их связывают друг с другом условные уравнения, возникающие из-за того, что элементы пути при качении должны совпадать:

$$y' = \frac{d\sigma}{dt} \cos \psi, \quad z' = \frac{d\sigma}{dt} \sin \psi$$

или

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{dt} &= y' \cos \psi + z' \sin \psi, \\ 0 &= -y' \sin \psi + z' \cos \psi; \end{aligned} \tag{1}$$

здесь $d\sigma$ обозначает элемент пути граничной кривой поверхности.

§8. Живая сила движения и дифференциальные уравнения динамики

При вычислении живой силы мы вновь абстрагируемся — причем из прежних соображений, изложенных в конце § 4, — от разницы между скольжением и качением и будем рассматривать общее движение плоской кривой поверхности, все время соприкасающейся с горизонтальной плоскостью (причем только в одной точке). Живую силу такого движения можно представить в форме

$$2T = Mv_{\sigma}^2 + \mathfrak{M}_1\omega_1^2 + \mathfrak{M}_2\omega_2^2 + \mathfrak{M}_3\omega_3^2, \quad (2)$$

где v_{σ} обозначает скорость центра тяжести, ω_i — компоненты мгновенной скорости вращения относительно трех главных осей инерции, M — массу, а \mathfrak{M}_i — три главных момента инерции поверхности. Для того чтобы определить возникающие здесь величины v_{σ} , ω_i , вновь проанализируем бесконечно малое движение поверхности; для этого, как и раньше (в § 3), представим себе, что пять аргументов ψ , φ , u , y , z по отдельности получают приращения $d\psi$, $d\varphi$, du , dy , dz , и зададимся вопросом, какие движения соответствуют этим отдельным приращениям. Сразу понятно, что приращения $d\psi$, $d\varphi$, du означают повороты, а dy , dz — параллельные переносы.

Пусть теперь угол ψ переходит в $\psi + d\psi$, тогда происходит поворот вокруг вертикальной оси, проходящей через точку касания. Скорость этого поворота относительно оси x или x' равна ψ' , тогда как ее компоненты относительно осей N (или ξ_1) и n равны $\psi' \cos u$ и $\psi' \sin u$. Разложим последнюю компоненту по осям ξ_2 и ξ_3 . Уточним теперь смысл введенной выше переменной φ с таким расчетом, чтобы она обозначала угол между внешней нормалью к граничной кривой (то есть отрицательным направлением оси n), приведенной в точку касания, и осью ξ_2 , где угол отсчитывается от положительного направления оси ξ_2 к положительному направлению оси ξ_3 . Тогда выражения $(-\psi' \sin u \cos \varphi)$ и $(-\psi' \sin u \sin \varphi)$ представляют собой компоненты скорости $\psi' \sin u$ относительно осей ξ_2 , ξ_3 .

Во-вторых, рассмотрим приращение переменной φ . Ему соответствует поворот, после которого горизонтальной плоскости будет касаться не точка (φ) граничной кривой, а точка ($\varphi + d\varphi$). Построим в обеих вышеупомянутых точках граничной кривой внутренние нормали, а затем проведем нормаль к поверхности в их точке пересечения S . Очевидно, что построенная нами линия и представляет собой ось вращения. Величина поворота измеряется непосредственно через смежный угол $d\varphi$; при этом следует еще заметить, что поворот происходит по направлению не возрастания, а убывания угла φ . Поэтому скорость вращения относительно оси N (или ξ_1) равна $-\varphi'$, тогда как ее компоненты относительно осей x' , t , n' равны $-\varphi' \cos u$, 0 , $\varphi' \sin u$.

В-третьих, увеличению угла u на du соответствует вращение вокруг оси t со скоростью u' . Компоненты этой скорости относительно осей ξ_1 , ξ_2 , ξ_3 равны 0 , $-u' \sin \varphi$, $u' \cos \varphi$.

Тем самым мы определили все возникающие в задаче повороты; их можно объединить в суммарный поворот, компоненты скорости которого относительно осей ξ_1 , ξ_2 , ξ_3 принимают значения

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \psi' \cos u - \varphi', & \omega_2 &= -\psi' \sin u \cos \varphi - u' \sin \varphi, \\ \omega_3 &= -\psi' \sin u \sin \varphi + u' \cos \varphi, \end{aligned} \quad (3)$$

а относительно осей x' , t , n' — значения

$$\omega_a = \psi' - \varphi' \cos u, \quad \omega_b = u', \quad \omega_c = \varphi' \sin u'. \quad (4)$$

Для того чтобы найти живую силу, нам надо выяснить, какой сдвиг претерпевает центр тяжести поверхности при таком повороте. Сперва рассмотрим поворот $(-\varphi')$: центр тяже-

сти S' претерпевает сдвиг $-\rho d\varphi$, при условии, что мы считаем $SS' = \rho$. Если обозначить через τ угол между отрезком SS' и осью t , то компоненты этого сдвига относительно осей x', t, n' равны

$$-\rho d\varphi \cos \tau \sin u, \quad \rho d\varphi \sin \tau, \quad -\rho d\varphi \cos \tau \cos u \tag{5}$$

соответственно.

У нас остаются еще два поворота со скоростями ψ', u' , происходящие, соответственно, вокруг осей x' и t , проведенных в точке касания. Обозначим через a, b, c координаты центра тяжести в системе координат $x'tn'$; тогда при таких поворотах он сдвигается на расстояния

$$(u'c)dt, \quad (-\psi'c)dt, \quad (-u'a + \psi'b)dt \tag{6}$$

относительно осей x', t, n' (см. п. 4, §2).

Остаются еще параллельные переносы $y' dt, z' dt$, соответствующие приращениям dy, dz ; их значения относительно тех же самых осей координат —

$$0, \quad (y' \cos \psi + z' \sin \psi)dt, \quad (-y' \sin \psi + z' \cos \psi)dt.$$

Складывая эти три выражения с записанными ранее (5) и (6) и находя сумму квадратов этих трех компонент, получаем величину, обозначенную в формуле (2) как v_c^2 . С другой стороны, величины ω_i , стоящие в формуле (3), очевидно, тождественны величинам, стоящим в формуле (2) и обозначенным точно так же. В итоге получаем, что живая сила поверхности выражается по формуле

$$2T = M \left\{ \begin{aligned} &(u'c - \rho\varphi' \cos \tau \sin u)^2 + \\ &+ (y' \cos \psi + z' \sin \psi - \psi'c + \rho\varphi' \sin \tau)^2 + \\ &+ (-y' \sin \psi + z' \cos \psi - u'a + \psi'b - \rho\varphi' \cos \tau \cos u)^2 \end{aligned} \right\} + \\ + \mathfrak{M}_1\omega_1^2 + \mathfrak{M}_2\omega_2^2 + \mathfrak{M}_3\omega_3^2, \tag{7}$$

где τ обозначает только что определенную нами функцию от φ , а под $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ мы понимаем выражения, определенные в (3).

Теперь несложно записать **дифференциальные уравнения динамики**. Считаем, что из всех сил на систему действует только сила тяжести. Тогда слагаемые, стоящие в правой части уравнений Лагранжа и соответствующие силам, действующим на систему, сводятся к выражениям

$$-g \sum m \frac{\partial x}{\partial \psi}, \quad -g \sum m \frac{\partial x}{\partial \varphi}, \quad -g \sum m \frac{\partial x}{\partial u}, \quad 0, \quad 0$$

или, поскольку $\sum mx = Ma$, к выражениям

$$-Mg \frac{\partial a}{\partial \psi}, \quad -Mg \frac{\partial a}{\partial \varphi}, \quad -Mg \frac{\partial a}{\partial u}, \quad 0, \quad 0.$$

Очевидно, что a зависит только от φ и u , поэтому первое слагаемое тоже обращается в нуль, так что действующая в задаче сила тяжести будет представлена в правой части дифференциальных уравнений для u и φ только двумя слагаемыми

$$-Mg \frac{\partial a}{\partial \varphi}, \quad -Mg \frac{\partial a}{\partial u}.$$

Уравнение живой силы выглядит так:

$$2(T - T^{(0)}) = 2Mg(a^{(0)} - a). \tag{8}$$



С учетом всего вышесказанного, уравнения Лагранжа в случае скольжения имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial u'} \right) - \frac{\partial T}{\partial u} &= -Mg \frac{\partial a}{\partial u}, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \varphi'} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} &= -Mg \frac{\partial a}{\partial \varphi}, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \psi'} \right) - \frac{\partial T}{\partial \psi} &= 0, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial y'} \right) - \frac{\partial T}{\partial y} &= 0, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial z'} \right) - \frac{\partial T}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \quad (9)$$

При качении уравнения Лагранжа принимают ту же форму, что и уравнения (27) из § 4; роль условных уравнений (26) в нашем случае играют уравнения (1):

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{dt} &\equiv L\varphi' = y' \cos \psi + z' \sin \psi, \\ 0 &= -y' \sin \psi + z' \cos \psi. \end{aligned}$$

В итоге получаем следующие дифференциальные уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial u'} \right) - \frac{\partial T}{\partial u} &= -Mg \frac{\partial a}{\partial u}, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \psi'} \right) - \frac{\partial T}{\partial \psi} &= 0, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \varphi'} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} &= -\lambda L - Mg \frac{\partial a}{\partial \varphi}, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial y'} \right) - \frac{\partial T}{\partial y} &= \lambda \cos \psi - \mu \sin \psi, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial z'} \right) - \frac{\partial T}{\partial z} &= \lambda \sin \psi + \mu \cos \psi. \end{aligned} \quad (10)$$

Кроме того, в обоих случаях есть еще интеграл (18) живой силы. В случае скольжения к нему можно добавить еще два хорошо известных интеграла: последние два уравнения (9) вырождаются в интегралы

$$\frac{\partial T}{\partial y'} = \text{const}, \quad \frac{\partial T}{\partial z'} = \text{const},$$

потому что выражение (7) для величины T вообще не содержит переменных y и z .

В явном виде эти уравнения выглядят так:

$$\begin{aligned} M \left\{ \begin{array}{l} (y' \cos \psi + z' \sin \psi - \psi' c - \rho \varphi' \cos \tau) \cos \psi - \\ - (-y' \sin \psi + z' \cos \psi - u' a + \psi' b - \rho \varphi' \sin \tau \cos u) \sin \psi \end{array} \right\} &= \text{const}, \\ M \left\{ \begin{array}{l} (y' \cos \psi + z' \sin \psi - \psi' c - \rho \varphi' \cos \tau) \sin \psi + \\ + (-y' \sin \psi + z' \cos \psi - u' a + \psi' b - \rho \varphi' \sin \tau \cos u) \cos \psi \end{array} \right\} &= \text{const}. \end{aligned}$$

Нетрудно понять, каков их геометрический смысл: в соответствии с проведенным выше анализом, выражения, стоящие в круглых скобках, обозначают значения движения центра

тяжести по направлениям t и n' , а выражения, стоящие в фигурных скобках, обозначают ту же самую величину, но по направлениям y и z . Иначе говоря, движение центра тяжести, разложенное по осям y и z , является равномерным. *Итак, если плоская поверхность скользит по горизонтальной плоскости под действием силы тяжести, то проекция ее центра тяжести на горизонтальную плоскость движется прямолинейно и равномерно.*

Более того, в случае скольжения можно записать еще один интеграл, если предварительно преобразовать выражение (7) для живой силы, а именно: в силу уравнения (2), коэффициент, стоящий при массе M в этом выражении, обозначает квадрат скорости центра тяжести, а в соответствии с нашими предыдущими рассуждениями его первое слагаемое — это квадрат скорости относительно оси x' , то есть в вертикальном направлении; тогда остальные два слагаемых представляют собой квадраты скорости проекции S' центра тяжести на горизонтальную плоскость. Следовательно, их можно заменить на сумму $y_\sigma'^2 + z_\sigma'^2$, где y_σ, z_σ обозначают координаты точки S' . В результате мы можем переписать представление (7) живой силы в форме

$$2T = M \{ (u'c - \rho\varphi' \cos \tau \sin u)^2 + y_\sigma'^2 + z_\sigma'^2 \} + \mathfrak{M}_1\omega_1^2 + \mathfrak{M}_2\omega_2^2 + \mathfrak{M}_3\omega_3^2, \quad (11)$$

где помимо производных от y_σ, z_σ еще стоят производные от переменных ψ, φ, u . В случае скольжения вышеупомянутые пять переменных не зависят друг от друга, так что применимость уравнений Лагранжа к уравнению (11) не вызывает никаких сомнений, и первые три дифференциальные уравнения (9) для переменных u, φ, ψ остаются в силе без каких-либо изменений. Но тогда уравнение для переменной ψ , в котором величины c, ρ, τ зависят только от u и φ , а величины (3) ω_i содержат только ψ' , а не саму функцию ψ , вырождается в интеграл

$$\frac{\partial T}{\partial \psi'} = \text{const},$$

который в соответствии с правилом 7 из §2 представляет собой теорему площадей для той оси, вокруг которой вращалось бы подвижное тело, если бы изменялся один только угол ψ . В нашем случае эта ось, очевидно, перпендикулярна горизонтальной плоскости; если же учесть, к примеру, что переменные y_σ, z_σ при таком вращении не изменяются, то легко понять, что она должна проходить через центр тяжести. В итоге получаем следующее **утверждение**:

Пусть плоская поверхность скользит по горизонтальной плоскости под действием силы тяжести. Тогда для вертикали, проходящей через центр тяжести, справедлива теорема площадей.³¹

³¹В силу только что полученного утверждения горизонтальная проекция центра тяжести, а вместе с ней и вертикальная ось, проходящая через этот центр, участвуют в равномерном прямолинейном движении; тогда, как следует из известной теоремы механики, обсуждавшаяся в тексте теорема площадей справедлива и для любой неподвижной вертикальной оси. Впрочем, только что сформулированное утверждение вытекает и непосредственно из общих принципов механики, так как все возникающие у нас силы (а именно, сила тяжести и сила реакции горизонтальной плоскости) действуют перпендикулярно этой последней плоскости. Более того, из тех же соображений понятно, что мы могли бы получить упоминавшееся выше утверждение о движении центра тяжести сразу из общих принципов механики.

Заметим, что оба найденные здесь интеграла были получены еще д-ром Максом Рихтером в случае тела, скользящего по горизонтальной плоскости (Max Richter, Über die Bewegung eines Körpers auf einer Horizontalebene, Leipzig, 1887, §11).

§9. Применение найденных формул к качению однородного кругового диска

В дальнейшем мы займемся частным случаем движения *однородного кругового диска* по горизонтальной плоскости под действием силы тяжести. Для начала, в данном параграфе, мы рассмотрим *качение*.

Заметим, что вместо гипотезы об однородности мы могли бы выдвинуть и более общее предположение о том, что плотность зависит только от радиуса.

В интересующем нас случае выражение (7) для живой силы существенно упрощается, поскольку все нормали к граничной окружности пересекаются в центральной точке, то есть в центре тяжести диска, так что отрезок ρ все время равен нулю.

В дальнейшем будем считать, что величины a, b, c , то есть координаты центра тяжести в системе координат $x'tn'$, принимают значения

$$a = A \sin u, \quad b = 0, \quad c = A \cos u,$$

где A обозначает радиус диска.

Наконец, заметим, что в случае однородного кругового диска, масса которого равна M , справедливы соотношения

$$\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{M}_2 + \mathfrak{M}_3, \quad \mathfrak{M}_2 = \mathfrak{M}_3 = \frac{1}{4}MA^2,$$

так что выражение (7) принимает вид

$$2T = MA^2 \left\{ \begin{array}{l} u'^2 \cos^2 u + \left(\frac{y'}{A} \cos \psi + \frac{z'}{A} \sin \psi - \psi' \cos u \right)^2 + \\ + \left(-\frac{y'}{A} \sin \psi + \frac{z'}{A} \cos \psi - u' \sin u \right)^2 + \\ + \frac{1}{2}(\psi' \cos u - \varphi')^2 + \frac{1}{4}(\psi'^2 \sin^2 u + u'^2) \end{array} \right\}, \quad (12)$$

а уравнение (8) живой силы теперь выглядит так:

$$2(T - T^{(0)}) = 2MgA(\sin u_0 - \sin u). \quad (13)$$

Условные уравнения (1) в нашем случае принимают форму

$$\begin{aligned} \varphi' &= \frac{y'}{A} \cos \psi + \frac{z'}{A} \sin \psi, \\ 0 &= -\frac{y'}{A} \sin \psi + \frac{z'}{A} \cos \psi. \end{aligned} \quad (14)$$

С учетом всего вышесказанного, если заметить еще, что сами переменные φ, y, z в выражение (12) не входят, уравнения Лагранжа (10) записываются в следующей форме:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial u'} \right) - \frac{\partial T}{\partial u} = -MgA \cos u, \quad (15a)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \psi'} \right) - \frac{\partial T}{\partial \psi} = 0, \quad (15b)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \varphi'} \right) = -\lambda, \quad (15c)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial y'} \right) = \frac{\lambda}{A} \cos \psi - \frac{\mu}{A} \sin \psi, \quad (15d)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial z'} \right) = \frac{\lambda}{A} \sin \psi + \frac{\mu}{A} \cos \psi. \quad (15e)$$

Для начала перепишем последние два уравнения в явном виде, для чего найдем стоящие в левой части частные производные и воспользуемся условными уравнениями (14):

$$MA^2 \frac{d}{dt} [(\varphi' - \psi' \cos u) \cos \psi + u' \sin u \sin \psi] = \lambda \cos \psi - \mu \sin \psi,$$

$$MA^2 \frac{d}{dt} [(\varphi' - \psi' \cos u) \sin \psi - u' \sin u \cos \psi] = \lambda \sin \psi + \mu \cos \psi.$$

Складывая эти соотношения, предварительно умноженные на $\cos \psi$ и $\sin \psi$ соответственно, получаем

$$MA^2 \left[\frac{d}{dt} (\varphi' - \psi' \cos u) + u' \sin u \psi' \right] = \lambda.$$

Добавляя сюда уравнение (15с), которое в явной форме имеет вид

$$\frac{1}{2} MA^2 \frac{d}{dt} (\varphi' - \psi' \cos u) = -\lambda,$$

находим

$$\frac{3}{2} \frac{d}{dt} (\varphi' - \psi' \cos u) + u' \sin u \psi' = 0. \quad (16)$$

Кроме того, рассмотрим уравнение (15b); если взять в нем частные производные, воспользоваться условными уравнениями (14), а также сократить множитель MA^2 , то это уравнение записывается в явном виде

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{3}{2} (\psi' \cos u - \varphi') \cos u + \frac{1}{4} \psi' \sin^2 u \right] - \sin u u' \varphi' = 0.$$

Находя здесь полную производную с учетом полученного выше уравнения (16) и выполняя элементарные преобразования, приходим к уравнению

$$\psi'' \sin u + 2\varphi' u' = 0, \quad (17)$$

в котором мы сократили обе части на множитель $\sin u$, так как он обращается в нуль, только когда $u = 0$ или $u = \pi$, то есть когда подвижное тело плашмя лежит на горизонтальной плоскости.

С другой стороны, уравнение (16) после дифференцирования принимает простой вид

$$3\varphi'' - 3\psi'' \cos u + 5\psi' \sin u u' = 0. \quad (18)$$

Уравнения (17) и (18) вместе с уравнением (13) живой силы, из которого надо предварительно исключить переменные y и z , воспользовавшись условными уравнениями (14), определяют величины φ , ψ , u как функции времени. Затем условные уравнения (14) позволят нам найти кривую качения на плоскости.

Исследуя уравнения (17) и (18), можно сделать несколько важных выводов о природе интересующего нас движения. Данные уравнения однородны по φ'' , ψ'' , u' и помимо этих величин содержат в качестве переменной только u , поэтому φ' и ψ' можно представить в виде функций от одной только переменной u . Действительно, положим

$$\varphi' = f_1(u), \quad \psi' = f_2(u) \quad (19)$$



и, соответственно,

$$\varphi'' = \frac{df_1}{du}u', \quad \psi'' = \frac{df_2}{du}u'$$

и подставим данные значения в формулы (17) и (18); затем избавимся от u' , после чего у нас останутся соотношения

$$\begin{aligned} \frac{df_2}{du} \sin u + f_1 &= 0, \\ 3 \frac{df_1}{du} - 3 \frac{df_2}{du} \cos u + 5f_2 &= 0. \end{aligned} \tag{20}$$

Проинтегрировав эту систему дифференциальных уравнений, мы получим функции f_1, f_2 , то есть величины φ', ψ' как функции от u . Подставляя данные значения в уравнение (13) живой силы и одновременно исключая из него y' и z' с помощью условных уравнений, мы получим одну только u' , представленную как функция от u . Отсюда сразу понятно, что переменная u может изменяться только двумя способами: она либо монотонно убывает, либо монотонно возрастает до граничных значений 0 либо π , означающих *опрокидывание* движущегося тела; или же переменная u все время изменяется между некоторыми граничными значениями, которые всегда остаются одними и теми же, потому что u' обращается в нуль всегда при одном и том же значении u ; в промежутке между этими граничными значениями одним и тем же значениям u всегда соответствуют одни и те же значения величин u', φ', ψ' , иначе говоря, *движение будет периодическим*.

В дальнейшем мы полностью исключаем из рассмотрения первую возможность, то есть опрокидывание, и сосредоточимся только на случае бесконечного периодического движения. Можно дать следующее более точное описание данного движения.

Вертикальный подъем подвижного тела периодически колеблется между двумя постоянными граничными значениями, тогда как кривая качения на плоскости ограничена двумя концентрическими окружностями и состоит исключительно (21) из конгруэнтных участков, каждый из которых к тому же распадается на две симметричные половины.

Первая часть этого утверждения сразу следует из того, что производная u' зависит только от u ; вторая часть вытекает из того, что — в силу самой природы периодического движения — все участки кривой качения, соответствующие полному периоду, конгруэнтны друг другу, более того, каждый следующий из них должен получаться из предыдущего поворотом на один и тот же угол. Начальная и конечная точки для каждого периода лежат на некоторой окружности, и то же самое верно для всех соответствующих друг другу точек из разных периодов. Среди всех этих — очевидно, концентричных — окружностей непременно найдутся наибольшая и наименьшая; кривая качения будет заключена между ними. Если теперь считать границами каждого такого периода два последовательных максимальных значения u , то лежащее между ними минимальное значение u разбивает каждый период на две половины, в пределах которых при одном и том же значении u величины φ' и ψ' одинаковы, а величины φ'', ψ'', u' принимают противоположные значения; отсюда легко понять, что участки кривой качения, соответствующие этим половинам, будут симметричны.

В частном случае обе окружности, ограничивающие кривую качения, могут сливаться в одну, то есть кривая качения превращается в окружность. Выясним, когда это происходит. Пусть r обозначает радиус окружности, так что $\pm r d\psi$, где $d\psi$ обозначает смежный угол кривой качения, — это элемент пути на плоскости. С другой стороны, $\pm A d\varphi$ задает элемент

пути на диске. В случае качения оба элемента должны совпадать, поэтому если предположить, что переменные φ и ψ изменяются в одном и том же направлении — чего, очевидно, всегда можно добиться, выбрав подходящим образом систему координат ξ_1, ξ_2, ξ_3 , — у нас возникает уравнение

$$r\psi' = A\varphi' \quad (22)$$

или

$$\varphi' = k\psi', \quad (23)$$

где

$$k = \frac{r}{A} \quad (23')$$

— некоторая константа.

Используя это соотношение, мы можем переписать уравнения (17) и (18) в виде

$$\begin{aligned} \sin u \psi'' + 2ku' \psi' &= 0, \\ 3(k - \cos u) \psi'' + 5 \sin u u' \psi' &= 0. \end{aligned}$$

Из данных уравнений следует, что либо величины ψ'' и u' , либо определитель

$$\begin{vmatrix} \sin u & 2k \\ 3(k - \cos u) & 5 \sin u \end{vmatrix}$$

равны нулю в течение всего движения.³² В обоих случаях u все время будет константой; тогда в силу (19) то же самое будет верно для φ' и ψ' . Справедлив и обратный результат: если величина u все время постоянна, тогда то же самое верно для φ' и ψ' , а значит, и для радиуса кривизны $\rho = A \frac{\varphi'}{\psi'}$ кривой качения, следовательно, кривая качения представляет собой окружность.

Для того чтобы понять, в каком случае u сохраняет постоянное значение, воспользуемся условными уравнениями (14) и запишем для u дифференциальное уравнение Лагранжа (15а):

$$MA^2 u'' - MA^2 \left[\frac{3}{2}(\varphi' - \psi' \cos u) \psi' \sin u + \frac{1}{4} \psi'^2 \sin u \cos u \right] = MgA \cos u.$$

Если u — константа, то производная u'' , стоящая в этом соотношении, обращается в нуль; уравнению можно придать вид

$$\frac{3}{2} \varphi'_0 \psi'_0 \sin u_0 - \frac{5}{4} \psi_0'^2 \sin u_0 \cos u_0 = \frac{g}{A} \cos u_0, \quad (24)$$

где нулевой индекс мы поставили для того, чтобы напомнить себе, что данное уравнение справедливо, в частности, и для начального состояния. Наоборот, как нетрудно убедиться, записанное выше уравнение (24) служит достаточным условием того, что кривая качения представляет собой окружность.

³²Случай, когда в нуль обращаются ψ'' и ψ' , можно сразу исключить, так как в этом случае в нуль обращаются также φ' , в силу (22), и y' с z' , в силу (15), то есть при движении исследуемого тела изменяться может только u . Но тогда движущееся тело будет попросту опрокидываться около оси t , а мы исключили этот случай из рассмотрения, когда формулировали утверждение (21).

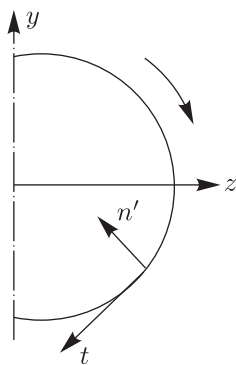
Для того чтобы найти радиус r этой окружности, подставим в уравнение (24) соотношение (22): $\varphi' = \frac{r}{A}\psi'$; получаем

$$r = \frac{1}{6\psi_0'^2}(4g + 5\psi_0'^2 A \sin u_0) \operatorname{ctg} u_0. \quad (25)$$

Как показывает данная формула, размеры окружности качения могут принимать все значения от 0 до ∞ . Нижняя граница достигается, когда $\operatorname{ctg} u_0 = 0$, то есть $u_0 = \frac{\pi}{2}$; верхняя граница — если исключить тот случай, когда $\sin u_0 = 0$ и подвижное тело лежит плашмя на горизонтальной плоскости, — при $\psi_0' = 0$. Впрочем, в последнем случае в силу (24) u_0 опять равно $\frac{\pi}{2}$, так что оба раза в начале движения тело должно располагаться перпендикулярно горизонтальной плоскости. Из (24) следует, что либо φ_0' , либо ψ_0' должны обращаться в нуль; если они обращаются в нуль одновременно, то, поскольку u сохраняет постоянное значение, никакого движения вообще не возникает; если в нуль обращается только φ_0' , то тело вращается с равномерной скоростью вокруг вертикальной прямой, проходящей через точку касания; если, наоборот, в нуль обращается только ψ_0' , то тело вращается с равномерной скоростью вокруг нормали к диску, проходящей через соответствующую точку касания, и катится по некоторой прямой, лежащей в горизонтальной плоскости.

Объединим все полученные результаты в следующем **утверждении**.

Кривая качения на плоскости представляет собой окружность тогда и только тогда, когда в течение всего движения наклон движущегося тела к горизонтальной плоскости не изменяется. Для этого начальные значения φ_0' , ψ_0' , u_0 должны быть связаны друг с другом соотношением (24). Тогда радиус окружности качения должен удовлетворять формуле (25). Окружность вырождается в прямую тогда и только тогда, когда подвижное тело в начальный момент времени перпендикулярно горизонтальной плоскости и вращается вокруг нормали к поверхности, проходящей через точку касания. Кроме того, во всех случаях движение происходит так, что центр тяжести лежит над *вогнутой* стороной окружности.



Последнее утверждение доказывается так: примем за начало системы координат xuz центр окружности, при этом переменная ψ возрастает по направлению часовой стрелки (см. рис.); то же самое будет верно и для переменной φ , так как мы предполагали, что φ и ψ изменяются всегда в одном направлении; но тогда и касательная t , которая по нашему предположению всегда направлена в сторону возрастания φ , расположена по часовой стрелке. Системы координат yz и tn' конгруэнтны, поэтому ось n' направлена *внутрь* окружности. Но центр тяжести A лежит в вертикальной плоскости, проходящей через ось n' , и одновременно на оси n , которая наклонена к n' под углом u , а в силу уравнения (25) этот угол u должен быть острым, так как величина r по своей природе — положительная. Таким образом, точка A лежит с *внутренней* стороны окружности. Q.e.d.

Замечание. В рассмотренном здесь особом случае поверхность с *круговой границей* можно получить *без скачка*, выполнив предельный переход от качения и скольжения *трехмерного тела* к поверхности, что позволяет нам понять, какие ограничения накладываются на утверждение, сформулированное нами в начале § 7. С этой целью будем исходить из движения *эллипсоида вращения* по горизонтальной плоскости. Помимо координат y, z точки касания, положение эллипсоида определяется тремя переменными ψ, φ, u . При этом угол ψ следует понимать в соответствии с определением из главы 1 (§ 2), тогда как φ обозначает

меридианный угол, а u — наклон оси вращения относительно оси x (или внутренней нормали, построенной в точке касания). Если обозначить длину оси вращения эллипсоида через d , а длину других его осей через A , то, выполняя предельный переход, то есть полагая $d = 0$, мы получим только что рассмотренный случай кругового диска, причем переменные ψ , φ , u надо будет понимать так, как указано в § 7.

§10. Скольжение однородного кругового диска

Решая задачу о скольжении кругового диска, мы будем исходить из выражения (11) для живой силы. Поскольку, как было отмечено в начале § 9,

$$\rho = 0, \quad a = A \sin u, \quad b = 0, \quad c = A \cos u,$$

$$\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{M}_2 + \mathfrak{M}_3, \quad \mathfrak{M}_2 = \mathfrak{M}_3 = \frac{1}{4}MA^2,$$

в нашем случае это выражение принимает простой вид

$$2T = MA^2 \left\{ \begin{aligned} &y_\sigma'^2 + z_\sigma'^2 + \left(\frac{1}{4} + \cos^2 u\right) u'^2 + \\ &+ \frac{1}{2}(\varphi' - \psi' \cos u)^2 + \frac{1}{4}\psi'^2 \sin^2 u \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

При этом можно также заметить, что уравнение живой силы выглядит точно так же, как и в предыдущем параграфе (уравнение (13)):

$$2(T - T^{(0)}) = 2MgA(\sin u_0 - \sin u). \quad (27)$$

Общие интегралы, выведенные ранее (§ 8) для скольжения, которое представляет собой равномерное движение горизонтальной проекции центра тяжести, а также закон площадей относительно вертикальной прямой, проходящей через центр тяжести, разумеется, остаются в силе и для нашего случая. С аналитической точки зрения они представляются в виде дифференциальных уравнений Лагранжа для переменных y_σ , z_σ , ψ . Кроме того, в нашем особом случае существует еще один интеграл уравнения Лагранжа для переменной φ , имеющий простой вид

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi'} \equiv \frac{1}{2}MA^2(\varphi' - \psi' \cos u) = \text{const.}$$

Поскольку стоящая здесь величина $\varphi' - \psi' \cos u$ в силу уравнения (3) равна ω_1 , то есть скорости вращения относительно нормали к диску, данный интеграл означает, что эта компонента вращения постоянна.

Итак, пусть круговой диск скользит по горизонтальной плоскости под действием силы тяжести; тогда

во-первых, его скорость вращения относительно нормали к диску постоянна,

во-вторых, справедлив закон площадей относительно вертикальной прямой, проходящей через центр тяжести,

в-третьих, горизонтальная проекция центра тяжести движется равномерно и прямолинейно.

Остается еще траектория точки касания $P(y, z)$ в горизонтальной плоскости. Поскольку движение горизонтальной проекции $S'(y_\sigma, z_\sigma)$ центра тяжести известно нам из всего вышесказанного, эта задача сводится к поиску *относительного* движения точки P по отношению к точке S' , то есть к отысканию координат $y - y_\sigma$, $z - z_\sigma$.

Напомним, что координаты центра тяжести или его проекции S' в системе координат tn' (см. начало §9)

$$b = 0, \quad c = A \cos u,$$

с другой стороны, у нас

$$b = (y_\sigma - y) \cos \psi + (z_\sigma - z) \sin \psi, \quad c = -(y_\sigma - y) \sin \psi + (z_\sigma - z) \cos \psi,$$

поскольку эта система повернута относительно системы координат yz на угол ψ . Отсюда следует

$$\begin{aligned} y - y_\sigma &= A \cos u \sin \psi, \\ z - z_\sigma &= -A \cos u \cos \psi. \end{aligned} \tag{28}$$

Эти уравнения и определяют относительное движение точки P . К этому можно еще добавить, что с учетом интегралов $\frac{\partial T}{\partial \psi'} = \text{const}$, $\frac{\partial T}{\partial \varphi'} = \text{const}$ и уравнения (27) живой силы величины φ' , ψ' , u' можно представить в виде функций, зависящих только от u , в точности как в предыдущем параграфе. Тогда, по аналогии со сказанным там, получаем следующий результат.

Относительная траектория точки контакта в горизонтальной плоскости, взятая по отношению к горизонтальной проекции центра тяжести подвижного тела, расположена между двумя концентрическими окружностями и состоит из последовательности конгруэнтных участков, каждый из которых распадается на две симметричные половины.

Настоящая кривая скольжения в горизонтальной плоскости получается при сложении относительного периодического движения точки P с прямолинейным поступательным движением точки S' ; в общем случае можно утверждать только то, что эта кривая должна быть ограничена двумя параллельными прямыми, расстояние между которыми не должно превосходить модуля $\text{abs}(2A \cos u_m)$, где u_m обозначает минимальный угол наклона движущегося тела к горизонтальной плоскости. Вырождаться в прямую линию эта кривая может только тогда, когда траектория движения точки P относительно S' вырождается в одну точку, то есть, в силу (28), когда и угол u , и угол ψ — константы. Для этого в начальный момент времени должно быть $\psi'_0 = u'_0 = u''_0 = 0$. Исходя из (26) и (27), запишем, как выглядит дифференциальное уравнение Лагранжа для u при этом предположении:

$$\frac{d}{dt}[(1 + \cos^2 u)u'] + \frac{1}{2}(\varphi' - \psi' \cos u)\psi' \sin u + \frac{1}{4}\psi'^2 \sin u \cos u = -\frac{g}{A} \cos u,$$

в том числе и в момент начала движения, так что у нас $u_0 = \frac{\pi}{2}$. Иначе говоря, кривая скольжения на плоскости представляет собой прямую только в том случае, когда в начале движения движущееся тело перпендикулярно горизонтальной плоскости и не обладает вертикальной скоростью вращения.

В заключение отметим, что производную u' можно представить как функцию одной только переменной u , поэтому, рассуждая так же, как и в предыдущем параграфе, мы получим, что вертикальный подъем центра тяжести над горизонтальной плоскостью периодически колеблется между двумя постоянными значениями.

Über gleitende und rollende Bewegung

Alfred Vierkandt

Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2015, vol. 11, no. 2, pp. 397–442 (Russian)

