Нелинейная динамика. 2015. Т. 11. № 2. С. 219–240.
Полнотекстовая версия в свободном доступе
http://nd.ics.org.ru

ОРИГИНАЛЬНЫЕ СТАТЬИ

УДК: 517.957
MSC 2010: 35Q55, 37K10

Квазирациональные решения нелинейного уравнения Шрёдингера

В. Б. Матвеев, Ф. Дюбард, А. О. Смирнов

Рассматривается метод построения квазирациональных решений нелинейного уравнения Шрёдингера, уравнения Кадомцева – Петвиашвили и некоторых других интегрируемых нелинейных уравнений. Приводятся примеры решений ранга 2 и 3.

Ключевые слова: волны-убийцы, странные волны, нелинейное уравнение Шрёдингера, уравнение КП, преобразование Дарбу

Введение

В этой статье мы обсуждаем мультибризерные (multi-rogue) волны, являющиеся решениями фокусирующего нелинейного уравнения Шрёдингера (НШ)

$$iu_t + u_{xx} + 2|u|^2u = 0, \tag{0.1}$$

уравнения Кадомцева – Петвиашвили-I (КП-I)

$$(4v_t + 6vv_x + v_{xxx})_x = 3v_{yy} \tag{0.2}$$

и некоторых других интегрируемых нелинейных уравнений.

Получено 25 октября 2014 года
После доработки 17 января 2015 года

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 14-01-00589_а).

Матвеев Владимир Борисович
vladimir.matveev9@gmail.com
Смирнов Александр Олегович
alsmir@guap.ru
Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения (ГУАП)
190000, г. Санкт-Петербург, ул. Большая Морская, д. 67

Дюбард Филипп
philippe.dubard@aliceadsl.fr
Department of Mathematics and Applied Mathematics, University of Cape Town, South Africa

В последнее время было осознано, что простейшей и наиболее универсальной моделью для описания возникновения экстремальных волн в океане или оптическом волокне являются именно эти уравнения. Начиная с 1968 года уравнение (0.1) используется при описании распространения на поверхности океана слабо нелинейных квазимонохроматических волновых пакетов с относительно большой крутизной фронтов [1]. Приложения этого уравнения к задачам нелинейной оптики были известны еще раньше [2]. Поскольку уравнение (0.1) является моделью первого приближения, то оно появляется при моделировании многих слабо нелинейных явлений. Область применения этого уравнения чрезвычайно широка и, помимо упомянутых выше, включает в себя физику плазмы [3], теорию финансовых рынков [4], теорию Бозе-конденсатов и многое другое.

Одной из особенностей уравнения (0.1) является наличие модуляционной неустойчивости, приводящей к возникновению так называемых «странных волн» (в гидродинамике известных под названием «волн-убийц») [5]. Эти волны представляют собой локализованные в пространстве и времени всплески амплитуды. В последние 20 лет сначала в гидродинамике, а затем в нелинейной оптике эти волны были объектом многочисленных теоретических и экспериментальных исследований [6]. Такое внимание к проблеме «волн-убийц» объясняется, в частности, убытками от разрушения «волнами-убийцами» нефтяных платформ, танкеров, контейнеровозов и других крупнотоннажных судов.

Существует множество более сложных моделей, которые дают более точное описание «странных волн» [6]. Эти модели условно можно разбить на два класса. К некоторым моделям, как и к уравнению (0.1), можно применять аналитические методы. Другие модели являются неинтегрируемыми и могут быть решены только численными методами. К аналитическим методам, применяемым для решения интегрируемых нелинейных уравнений, относятся метод обратной задачи рассеяния, метод конечнозонного интегрирования [7], метод задачи Римана, метод преобразования Дарбу [8], метод Хироты. В настоящей работе используются формулы, полученные методом преобразования Дарбу.

В основу метода преобразования Дарбу положена его короткая заметка 1882 года, в которой была указана процедура получения бесконечной серии новых одномерных уравнений Шрёдингера и их решений исходя из произвольно выбранного исходного уравнения. При этом решения новых уравнений выражаются в терминах решений исходного уравнения, соответствующих различным значениям спектрального параметра, при помощи простых детерминантных формул, найденных в 1954 году английским математиком Крамом. В работах одного из авторов [9–11] было предложено широкое обобщение этой идеи, названное им методом преобразований Дарбу. Метод преобразований Дарбу позволяет находить широкие классы точных решений линейных дифференциальных уравнений и нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных, допускающих представление Лакса. В своей первоначальной формулировке этот метод был применен к бесконечной иерархии уравнений Кадомцева – Петвиашвили (КП-I) и ее некоммутативным и разностным аналогам [9–11]. Дальнейшее развитие этого метода, включающее в себя, в частности, результаты работ [12–14], содержится в широко цитируемой монографии [8] и обзорной статье [15], а также в тысячах новых публикаций, которые мы не будем здесь цитировать за недостатком места.

Решения уравнения (0.1) обладают фундаментальным свойством трансляционной, масштабной, галилеевой и фазовой инвариантности: вместе с решением $u(x,t)$ решениями уравнения (0.1) являются также функции

$$u(x-x_0, t-t_0), \tag{0.3}$$

$$qu(q^2x, qt), \quad q>0, \tag{0.4}$$

$$u(x,t) \to u(x - Vt, t)\exp(iVx/2 - iV^2t/4), \quad V \in \mathbb{R}, \tag{0.5}$$

$$u(x,t) \to e^{i\chi}u(x,t), \quad \chi \in \mathbb{R}. \tag{0.6}$$

Уравнение (0.1) обладает простейшими, не зависящими от x, решениями $p(t)$ типа простой волны: $u(t) = \exp(2it)$, $|u(t)| = 1$. В дальнейшем мы будем интересоваться рациональными модуляциями этого решения, то есть решениями вида

$$u(x,t) = R(x,t)\exp(2it), \quad R(x,t) \to 1 \quad \text{при} \quad x^2 + t^2 \to \infty,$$

где $R(x,t)$ — рациональная функция, числитель и знаменатель которой представляют собой полиномы степени $n(n+1)$ от x и t. Целое положительное число n мы называем рангом решения. При этом сам рациональный множитель $R(x,t)$ автоматически удовлетворяет уравнению Гросса–Питаевского:

$$iR_t + 2R(|R|^2 - B^2) + R_{xx} = 0, \quad |R| = |u|. \tag{0.7}$$

Переход к более общим квазирациональным решениям осуществляется тривиальным применением пространственных и временных трансляций (0.3), а также масштабных (0.4), галилеевых (0.5) и фазовых (0.6) преобразований. В период с 1983 года по 2010 год деятельность по описанию квазирациональных решений насчитывала небольшое число важных событий.

В 1983 году английский математик Хоуэлл Перегрин нашел квазирациональное решение уравнения (0.1) следующего вида [16]:

$$u(x,t) := \left(1 - 4\frac{1 + iT}{1 + X^2 + T^2}\right)e^{iT/2}, \quad X := 2x, \quad T := 4t. \tag{0.8}$$

Это решение единственно с точностью до деформаций его при помощи преобразований, упомянутых в начале раздела. Его абсолютная величина имеет единственный локальный максимум в точке x $= 0$, $t = 0$ ($|u(0,0)| = 3$) и два минимума. При $x^2 + t^2 \to \infty$ второе слагаемое в скобке стремится к нулю и, следовательно,

$$u(x,t) \sim e^{2it}, \quad |u| \to 1 \quad \text{при} \quad x^2 + t^2 \to \infty.$$

Решение Перегрина, график которого показан на рисунке 1, представляет собой пример волны, амплитуда которой достигает единственного резкого максимума высоты 3 в единственной точке пространства-времени и, таким образом, хорошо соответствует свойству волн-убийц возникать ниоткуда и затем исчезать бесследно [17], которое часто закладывают в их определение.

Следующим важным этапом было открытие нового квазирационального решения ранга 2 или, как мы его называем, P_2-бризера, сделанное в 1985 году в работе Ахмедиева, Елеонского и Кулагина [18]. Данное решение описывается формулой, аналогичной предыдущей, в которой полиномы, стоящие в числителе и в знаменателе рационального фактора решения, имеют степень 6 по каждой из переменных x и t. Максимум абсолютной величины этого решения равен 5 и имеется еще 4 значительно меньших локальных максимумов. Открытие этого изолированного, но очень важного решения поставило вопрос об описании более широких семейств квазирациональных решений.

Годом позже работы [18] в работе Елеонского, Кричевера и Кулагина [19] возникла первая общая формула для квазирациональных решений уравнения (0.1), содержавшая первую

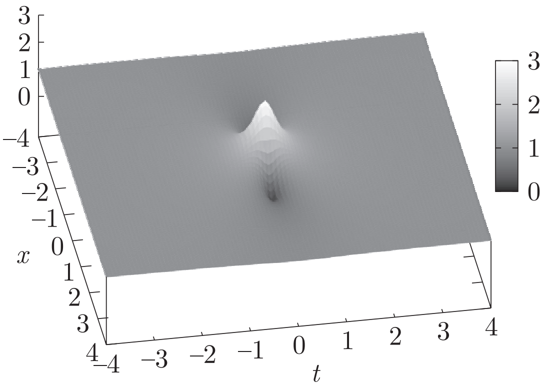

Рис. 1. Солитон Перегрина.

общую конструкцию этих решений произвольного ранга. В отличие от предыдущих работ, полученные в ней решения ранга n зависели от $2n$ вещественных параметров, первые два из которых соответствовали пространственным и временным трансляциям, а остальные параметры были нетривиальны. Работа эта, несмотря на правильность общей стратегии и всех формул, исключая специальный выбор некоторых «сигнатур» m_j (их точные определения даны ниже), не была, однако, как следует осознана вплоть до самого последнего времени (до 2010 года). В частности, в течение 25 лет оставалось невыясненным, можно ли получить формулу для P_2-бризера как редукцию решений ранга 2 из [19].

Лишь в 2009 году Ахмедиев, Анкевич и Сото-Креспо [20], применяя метод преобразований Дарбу, построили изолированное решение ранга 3, то есть P_3-бризер с асимптотической амплитудой 1, в котором рациональный фактор представлял отношение двух полиномов 12-й степени по x и t и максимумом абсолютной величины, равным 7. В этой работе и в серии последующих работ они выдвинули гипотезу о существовании бесконечной серии высших перегриновских бризеров — P_n-бризеров с асимптотической амплитудой 1 и максимумом абсолютной величины, равном $2n + 1$. Однако сами они не смогли продвинуться в подтверждении этой гипотезы за пределы ранга 3. В 2010 году им удалось лишь явно описать $P_4(x, 0)$. Вопрос о соотношении их решений с формулами работы [19] также оставался открытым до самого последнего времени.

В 2010 один из авторов этой работы (В. Б. Матвеев) выдвинул широкую программу исследования квазирациональных решений уравнения (0.1). В данной работе мы представляем основные результаты, полученные в ходе реализации этой программы, в том числе и полученные в последнее время.

1. Основные формулы

Пусть n есть натуральное число. Следуя [19], мы определяем полиномы $q_{2n}(k)$ и $\Phi(k)$ следующими формулами:

$$q_{2n}(k) := \prod_{j=1}^{n} \left(k^2 - \frac{\omega^{2m_j+1}+1}{\omega^{2m_j+1}-1} B^2\right), \quad \omega := \exp\left(\frac{i\pi}{2n+1}\right), \tag{1.1}$$

$$\Phi(k) := i \sum_{l=1}^{2n} \varphi_l (ik)^l, \quad B > 0, \tag{1.2}$$

где коэффициенты $\varphi_l \in \mathbb{R}$, а m_j удовлетворяют соотношениям

$$0 \leqslant m_j \leqslant 2n-1, \quad m_l \neq 2n - m_j. \tag{1.3}$$

В частности, эти условия выполняются при выборе $m_j = j-1$. Всюду ниже мы используем именно этот выбор m_j. В работе [19] этот последний выбор был заменен соотношением $m_j = j$, не удовлетворяющим общим условиям (1.3)[1]. Рассмотрим теперь функцию f, определяемую формулой

$$f(k,x,t) := \frac{\exp(kx + ik^2t + \Phi(k))}{q_{2n}(k)} \tag{1.4}$$

и при любом значении параметра k являющуюся решением линейного нестационарного уравнения Шрёдингера с нулевым потенциалом

$$-if_t = f_{xx}. \tag{1.5}$$

Нетрудно проверить, что функции $f_1, \ldots, f_{2n}$, определяемые формулами

$$\begin{aligned} &f_j(x,t) := D_k^{2j-1} f(k,x,t)\big|_{k=B}, \qquad D_k := \frac{k^2}{k^2+B^2}\frac{\partial}{\partial k}, \quad j = 1,\ldots,n, \\ &f_{n+j}(x,t) := D_k^{2j-1} f(k,x,t)\big|_{k=-B}, \end{aligned} \tag{1.6}$$

также являются решениями уравнения (1.5).

Обозначим через W_1, W_2 определители Вронского, составленные из функций f_j и f, определенных выше,

$$W_1 := W(f_1,\ldots,f_n) \equiv \det A, \quad A_{lj} = \partial_x^{l-1} f_j, \quad W_2 := W(f_1,\ldots,f_n,f).$$

Теорема 1. *Функция*

$$u_n(x,t) := (-1)^n q_{2n}(0) B^{1-2n} e^{2iB^2t} \frac{W_2\,|_{k=0}}{W_1} \tag{1.7}$$

описывает семейство решений уравнения (0.1)*, зависящее от* $2n+1$ *вещественных параметров* $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$*,* B*.*

Будем называть это решение квазирациональным решением ранга n. В обозначениях, не использующих определителей Вронского, это решение было впервые получено в работе [19]. При $n = 1$ оно совпадает с так называемым бризером Перегрина или, как мы будем называть его для краткости, P_1-бризером [16].

2. Нестационарное линейное уравнение Шрёдингера и уравнение Кадомцева–Петвиашвили-I

Система Лакса для уравнения Кадомцева–Петвиашвили-I (КП-I) имеет вид

$$-\,i\psi_y = \psi_{xx} + v(x,y,t)\psi, \tag{2.1}$$

$$-\,4\psi_t = 4\psi_{xxx} + 6v\psi_x + 3w(x,y,t)\psi. \tag{2.2}$$

[1] Общий анализ условий (1.3), уточняющий результаты [19], и дальнейшие комментарии по этому поводу содержатся в диссертации Ф. Дюбарда [21].

Первое из уравнений этой системы есть нестационарное линейное уравнение Шрёдингера с потенциалом $v(x, y)$, в котором роль времени играет переменная y, тогда как t является параметром. Уравнение КП-I является условием совместности вышеописанной системы Лакса. По отношению к этому уравнению x и y являются пространственными переменными, а t — временной переменной.

Пусть $v(x, y, t)$ — любое решение уравнения КП-I (0.2), а $f_1, \ldots, f_n$, f — линейно независимые решения системы (2.1), (2.2). Тогда имеет место следующий результат[2]

Теорема 2. *Функция*

$$\psi := \frac{W(f_1, \ldots, f_n, f)}{W(f_1, \ldots, f_n)} \tag{2.3}$$

удовлетворяет системе (2.1), (2.2) *с потенциалом*

$$v_n(x, y, t) := v(x, y, t) + 2\partial_x^2 \ln W(f_1, \ldots, f_n). \tag{2.4}$$

При этом функция $v_n(x, y, t)$ является новым решением уравнения КП-I (0.2).

В частности, это верно при $v(x, y, t) = 0$ и $w = 0$. Очевидно, что функции f, f_j, $j = 1, \ldots, 2n$, определенные формулами (1.6), удовлетворяют системе Лакса (2.1)–(2.2) с $v = 0$, $w = 0$ при условии, что мы заменим t на y и φ_3 на $-t$. Отсюда мы получаем следующий результат.

Теорема 3. *Последовательность функций*

$$v_{2n}(x, y, t) := 2\partial_x^2 \log W\left(\widetilde{f}_1, \ldots, \widetilde{f}_{2n}\right), \quad \widetilde{f}_j(x, y, t) := f_j\big|_{t=y, \varphi_3=-t}, \tag{2.5}$$

где

$$\widetilde{f}_j(x, y, t) := f_j\big|_{t=y, \varphi_3=-t},$$

а f_j определены в (1.6), *является семейством вещественных рациональных (как функция от x, y и t) решений уравнения КП-I. Эти решения удовлетворяют соотношению*

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} v_{2n}(x, y, t)\, dx = 0. \tag{2.6}$$

Решения (2.5) *также являются рациональными функциями от $2n - 1$ параметров $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_4, \ldots, \varphi_{2n}$.*

Данные решения уравнения КП-I являются вещественными гладкими функциями в силу обнаруженного нами следующего важного соотношения, которое мы называем соответствием НШ-КП:

Теорема 4. *Решение* (2.5) *может быть также записано в виде*

$$v_{2n} = 2\left(|\widetilde{u}_n|^2 - B^2\right), \quad \widetilde{u}_n(x, y, t) := u_n(x, t, \varphi_1, \ldots, \varphi_{2n})\big|_{t=y, \varphi_3=-t}. \tag{2.7}$$

Соответственно, функция $v_{2n}(x, y, t)$ удовлетворяет неравенству

$$v_{2n} \geqslant -2B^2. \tag{2.8}$$

[2]Работы [9] и [15] содержат более общие результаты, непосредственно приложимые к некоммутативным иерархиям уравнений КП-I и КП-II и их различным редукциям.

Имеет место следующая общая гипотеза: максимальное значение функции $|u_n(x,t)|$ в классе квазирациональных решений ранга n с асимптотической магнитудой B описывается формулой

$$\max_{x,t,\varphi_1,\ldots,\varphi_{2n}\in R}|u_n(x,t,\varphi_1,\ldots,\varphi_{2n})| = B(2n+1). \tag{2.9}$$

Решение, для которого параметры $\varphi_1,\ldots,\varphi_{2n}$ выбраны таким образом, что этот максимум реализуется при некоторых x и t, обозначается $P_n(x,t)$ и называется P_n-бризером или перегриновским бризером ранга n.

Гипотеза существования бесконечной иерархии P_n-бризеров была впервые высказана Ахмедиевым и подтверждена им и его соавторами для $n \leqslant 3$ (см., например, [20])[3]. В настоящее время эта гипотеза проверена для $n \leqslant 10$ в работах Гайарда [39], хотя общее доказательство по-прежнему отсутствует. Современная строгая формулировка этой гипотезы была предложена Матвеевым. Эта формулировка исходит из того, что следует начинать с аналитического описания всего класса квазирациональных решений с фиксированной асимптотической магнитудой 1 на бесконечности. Матвеев и Дюбард [22, 24] показали, что в общем положении абсолютная величина этих (комплексных) решений имеет $n(n+1)/2$ максимумов высоты близкой к 3, то есть к высоте магнитуды P_1-бризеров, и (при любых значениях параметров) $n(n+1)$ минимумов. При специальном выборе параметров (трудность которого существенно зависит от удачного выбора параметризации) возникает решение, имеющее один очень высокий максимум высоты $2n+1$ и $n(n+1)-1$ локальных максимумов очень незначительной высоты и (как и в остальных случаях) $n(n+1)$ локальных минимумов магнитуды. Это последнее решение и есть P_n-бризер. Эти оценки числа максимумов, в отличие от минимумов, не являются абсолютно универсальными, как будет объяснено ниже на примере решений ранга 2 и 3.

Заметим, что во всех этих случаях в принципе можно ограничиться, без потери общности, анализом решений уравнения НШ с асимптотической магнитудой 1. Действительно, масштабное преобразование

$$u(x,t) \to Bu(Bx, B^2t)$$

переводит решения с асимптотической магнитудой 1 в решения с асимптотической магнитудой B.

Если описанная гипотеза верна применительно к уравнению НШ для всех рангов n, то, в силу соответствия НШ-КП, соответствующий абсолютный максимум решения (2.5) уравнения КП-I описывается формулой

$$\max_{x,y,t\in R} v(x,y,t) = 8B^2n(n+1), \tag{2.10}$$

то есть его значение равно числу максимумов (пиков) решения общего положения ранга n, помноженному на $16B^2$. Последний фактор есть ни что иное, как образ P_1-бризера в соответствии НШ-КП.

[3]Сама формулировка была при этом недостаточно четкой. В ней отсутствовало описание всего класса квазирациоанльных многопараметрических решений уравнения НШ, специальными редукциями которых являются P_n-бризеры, и, таким образом, отсутствовал общий механизм их получения.

3. Редукция к нелинейному уравнению Шрёдингера

Согласно теореме 2, функция

$$\psi(x,t,k) := \frac{W(f_1,\ldots,f_{2n},f)}{W(f_1,\ldots,f_{2n})} \tag{3.1}$$

удовлетворяет уравнению

$$i\psi_t + \psi_{xx} + v\psi = 0 \tag{3.2}$$

с потенциалом

$$v(x,t) := 2\partial_x^2 \log W(f_1,\ldots,f_{2n}). \tag{3.3}$$

Отметим, что это верно и для выражения

$$R_C(x,t) := C\psi(x,t,0). \tag{3.4}$$

Этот общий результат верен всегда, если функции f_j являются решениями уравнения (1.5). Отметим, что R_C — рациональное решение уравнения (3.2). Специальный выбор f_j и правильный выбор постоянной C позволяет нам свести уравнение (3.2) к уравнению (0.1).

Теорема 5. *Пусть $C = e^{i\chi}q_{2n}(0)B^{1-2n}$. Тогда v и R, определяемые формулами* (3.3) *и* (3.4)*, удовлетворяют соотношению*

$$v = 2\left(|R|^2 - B^2\right).$$

Наше доказательство этого утверждения приведено в работе [22][4].

4. Решения ранга 1 и 2

В этом разделе мы полагаем, что $B = 1$, $v = 0$, $\chi = 0$. Переход к общему выбору этих (вещественных) параметров легко осуществляется при помощи масштабного (0.4), галилеевского (0.5) и фазового (0.6) преобразований соответственно.

Фазовые параметры φ_1 и φ_2 имеют смысл пространственного и временного сдвига соответственно. Поэтому мы можем подобрать их значения так, чтобы получить наиболее компактный вид формул. Среди $2n+2$ параметров χ, $B\varphi_1,\ldots,\varphi_{2n}$ лишь $2n-2$ параметров, а именно $\varphi_3,\ldots,\varphi_{2n}$, имеют нетривиальное влияние на вид графика магнитуды решений.

В случае ранга $n = 1$ это означает, что с точностью до упомянутых выше тривиальных преобразований решение, описываемое формулой (1.7), единственно. При выборе $\varphi_1 = 0$ и $\varphi_2 = \sqrt{3}/4$ мы получаем классическое решение (0.8), найденное Перегрином. График его абсолютной величины как функции от x и t представлен на рисунке 1.

Случай ранга $n = 2$ является первым, в котором мы получаем семейство квазирациональных решений, зависящих от четырех параметров, в том числе от двух нетривиальных

[4]Наше доказательство этого утверждения совпадает с приведенным в [19] с точностью до модификации обозначений. Доказательство гладкости полученных решений (1.7) в [19] излишне сложно. Оно прямо вытекает из самой структуры фокусирующего уравнения НШ и мероморфности обсуждаемых решений как функций от x и совпадает с доказательством гладкости, проведенным в [23] для класса тригонометрических многофазных решений.

параметров φ_3, φ_4. Мы уже объяснили выше, что параметр φ_3 связан с уравнением КП-I. Для удобства записи полагаем $\varphi_1 = 3\varphi_3$ и $\varphi_2 = 2\varphi_4 + (3+\sqrt{5})\sin(\pi/5)/4$ и переходим от пары параметров $\{\varphi_3, \varphi_4\}$ к новым параметрам $\{\alpha, \beta\}$, определяемым формулами

$$\begin{aligned} \alpha &:= 48\varphi_3, \\ \beta &:= 4(5+\sqrt{5})\sin(\pi/5) - 96\varphi_4. \end{aligned}$$

В терминах этих новых параметров решение ранга 2 принимает вид

$$u_2(x,t,\alpha,\beta) = \left(1 - 12\frac{G(2x,4t) + iH(2x,4t)}{Q(2x,4t)}\right)e^{2it}, \tag{4.1}$$

где

$$\begin{aligned} G(X,T) &:= X^4 + 6(T^2+1)X^2 + 4\alpha X + 5T^4 + 18T^2 - 4\beta T - 3, \\ H(X,T) &:= TX^4 + 2(T^3 - 3T + \beta)X^2 + 4\alpha TX + T^5 + 2T^3 - \\ &\quad - 2\beta T^2 - 15T + 2\beta, \\ Q(X,T) &:= (1 + X^2 + T^2)^3 - 4\alpha X^3 - 12(2T^2 - \beta T - 2)X^2 + \\ &\quad + 4(3\alpha(T^2+1)X + 6T^4 - \beta T^3 + 24T^2 - 9\beta T + \\ &\quad + \alpha^2 + \beta^2 + 2). \end{aligned} \tag{4.2}$$

При $\alpha = \beta = 0$ это решение совпадает с P_2-бризером, для которого максимум магнитуды равен 5 и достигается в точке $x = t = 0$. Для достаточно малых значений $\alpha^2 + \beta^2$ решение очень близко к P_2-бризеру. Формулы (4.1), (4.2) показывают, что решение $u_2(x,t,\alpha,\beta)$ может рассматриваться как двухпараметрическая квадратичная деформация P_2-бризера. Если хотя бы один (или оба) из параметров α, β достаточно велик, то решение имеет общую форму, соответствующую трем взаимодействующим волнам-убийцам. График абсолютной величины этого решения имеет три резко выраженных максимума в пространстве-времени (x,t), и высота максимумов близка к высоте перегриновского P_1-бризера.

Эти два случая хорошо иллюстрируются графиками на рисунках 2 и 3. При промежуточных значениях параметров возможно слияние двух из этих максимумов в один максимум большей высоты и тем самым возможно образование решения с двумя максимумами.

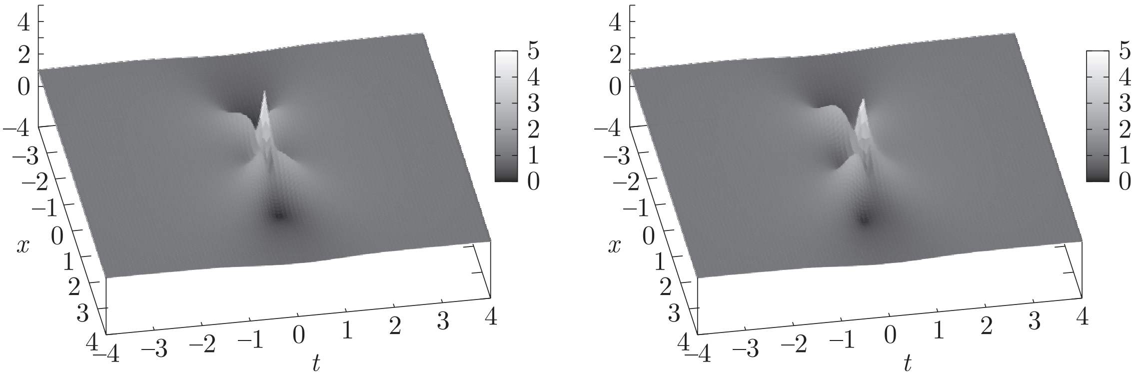

Рис. 2. Амплитуда решения ранга 2 (4.1) для $\alpha = 0$ и $\beta = 0$ (слева) и для $\alpha = 0$ и $\beta = 3$ (справа).

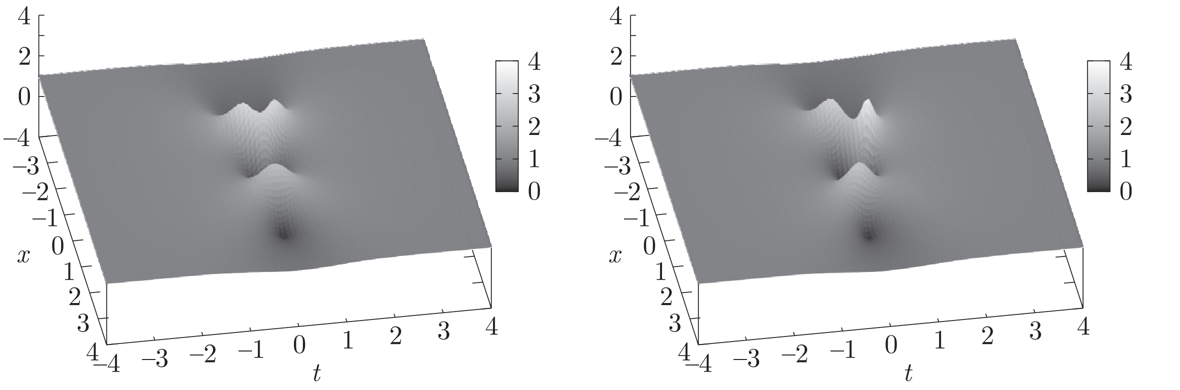

Рис. 3. Амплитуда решения ранга 2 (4.1) для $\alpha = 6$ и $\beta = 0$ (слева) и для $\alpha = 5$ и $\beta = 5$ (справа).

Запись решения с помощью формул (4.1), (4.2) впервые была представлена в [21, 22, 24][5]. Она очень важна, так впервые показала что, в отличие от P_1-бризера, открытого Перегрином, его высшие аналоги не изолированы, а составляют часть многопараметрического семейства решений с очень интересными свойствами.

Формула (4.1), в частности, содержит бесконечное множество решений, полученных малыми вариациями параметров α, β в окрестности нуля. Эти решения по своим экстремальным свойствам оказываются сколь угодно близки к P_2-бризеру, что создает дополнительные возможности для гидродинамических и оптических экспериментов и показывает определенный вид его устойчивости. Формула (4.1) также дает ясный ответ на вопрос, поставленный работой Ахмедиева, Елеонского и Кулагина [25] почти 30 лет назад: каким образом погрузить P_2-бризер в более широкое семейство квазирациональных решений уравнения НШ?

Решение $u_2(x, t, \alpha, \beta)$ стремится к простой волне e^{2it}, когда $\alpha^2 + \beta^2$ стремится к бесконечности. Таким образом, простая волна, то есть решение ранга 0, может быть интерпретировано как предел трехбризерного решения при $\alpha^2 + \beta^2 \to \infty$. Ниже мы покажем, что поведение решений высших рангов при больших значениях параметров более разнообразно.

5. Решения ранга 2 уравнений, связанных с нелинейным уравнением Шрёдингера

Для построения решений этих уравнений воспользуемся другой параметризацией. Введем новые обозначения

$$X = 2x + 6\varphi_3, \quad T = 4t + 8\varphi_4,$$

$$\varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = \frac{\sqrt{2}}{8}\left(\sqrt{5+\sqrt{5}} + \sqrt{5-\sqrt{5}}\right),$$

$$\varphi_3 = \frac{Y}{96}, \quad \varphi_4 = \frac{Z}{192} + \frac{\sqrt{2}}{48}\left(\sqrt{5+\sqrt{5}} + 2\sqrt{5-\sqrt{5}}\right)$$

и функцию

$$u_2(X,T,Y,Z) = \left(1 - 12\frac{G(X,T,Y,Z) + iH(X,T,Y,Z)}{Q(X,T,Y,Z)}\right) e^{2it}, \tag{5.1}$$

[5]В [21, 24] параметры были определены слегка иначе. Они пропорциональны использованным здесь с целью максимального сокращения длины формул.

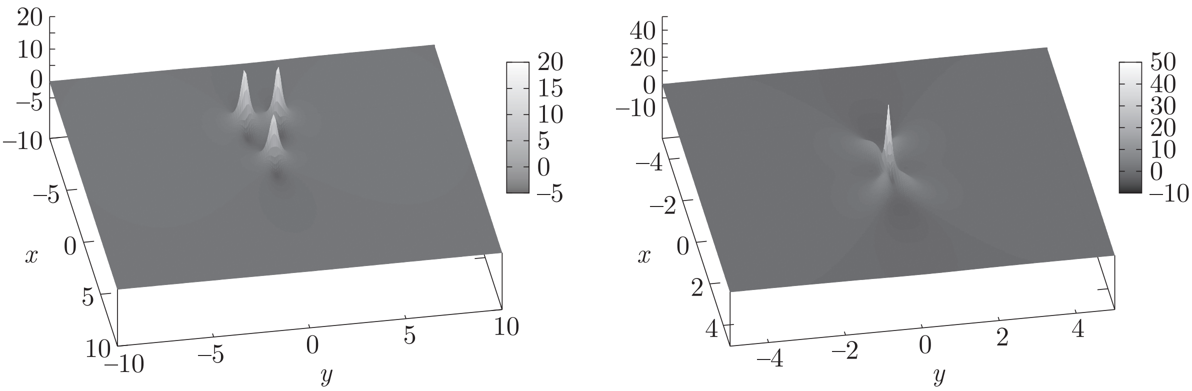

Рис. 4. Решение уравнения КП-I (0.2) для $t = -1$ (слева) и для $t = 0$ (справа).

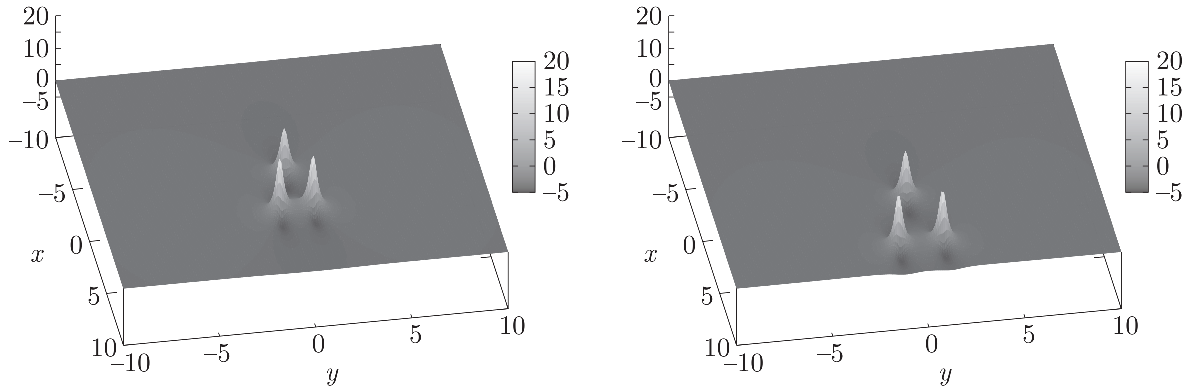

Рис. 5. Решение уравнения КП-I (0.2) для $t = 1$ (слева) и для $t = 2$ (справа).

где

$$
\begin{aligned}
G(X,T,Y,Z) =&(X^2+3T^2+3)^2-4T^4+2XY+2TZ-12,\\
H(X,T,Y,Z) =&T(X^2+T^2+1)^2+2XYT+Z(T^2-X^2-1)-8T(X^2+2),\\
Q(X,T,Y,Z) =&(X^2+T^2+1)^3+Y^2+2XY(3T^2-X^2+3)+Z^2+2TZ(T^2-3X^2+9)+\\
&+24T^4-24T^2X^2+96T^2+24X^2+8.
\end{aligned}
$$

Отметим, что функция $u_2(X,T,0,Z)$ является четной функцией относительно X, а $u_2(X,T,Y,0)$ — четной относительно T.

В новых обозначениях решением уравнения НШ (0.1) будет функция $u_2(2x,4t,Y,Z)$, а решение уравнения КП-I (0.2) имеет вид

$$v(x,y,t) = 2(|u_2(2x-6t,4y,-96t,Z)|^2-1). \tag{5.2}$$

Графики решения (5.2) при $Z = 0$ в различные моменты времени t изображены на рисунках 4 и 5. Динамика решения уравнения КП-I ранга 2 при $Z = 0$ описывается достаточно простым образом: три пика прибегают из бесконечности в одну точку и затем разбегаются, продолжая свое движение дальше.

Заметим, что функция

$$u_{mkdv}(x,y) = u_2(2x-12y,T,-96y,Z)$$

удовлетворяет следующему за уравнением НШ интегрируемому уравнению из АКНС-иерархии [26], иногда называемому модифицированным уравнением Кортевега – де Фриза (мКдФ)

$$u_y + u_{xxx} + 6|u|^2 u_x = 0. \tag{5.3}$$

Отметим, что обычное уравнение мКдФ не содержит знака модуля и у него рассматриваются только вещественные решения. На рисунках 6 и 7 изображено решение $u_{mkdv}(x, y)$ при некоторых значениях параметров T и Z.

Легко видеть, что есть существенное различие в поведении квазирациональных решений уравнений (0.1) и (5.3). Решение ранга 2 уравнения (5.3), в отличие от аналогичного решения уравнения НШ (0.1), не является локализованным на плоскости. Вернее, оно локализовано в окрестности прямой $x - 2y = 0$.

Кроме того, нетрудно проверить, что функция

$$u_{lpd}(x, z) = u_2(2x, T + 24z, Y, 192z)e^{6iz}$$

является решением третьего уравнения из АКНС-иерархии

$$iu_z + u_{xxxx} + 8|u|^2 u_{xx} + 2u^2 u^*_{xx} + 6u_x^2 u^* + 4u|u_x|^2 + 6|u|^4 u = 0, \tag{5.4}$$

которое иногда называют обобщенным нелинейным уравнением Шрёдингера [27–30] или уравнением Лакшманана – Порсециана – Даниеля [31].

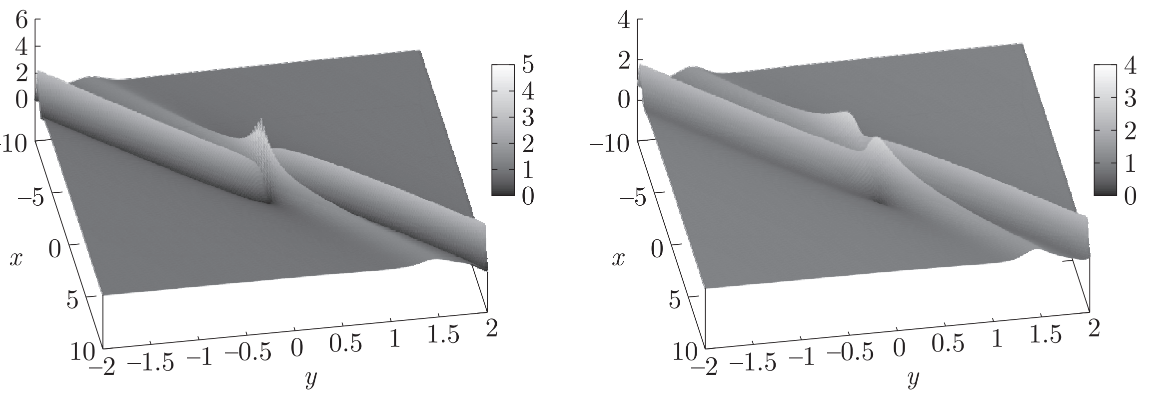

Рис. 6. Амплитуда решения уравнения (5.3) для $T = 0$ и $Z = 0$ (слева) и для $T = 1$ и $Z = 0$ (справа).

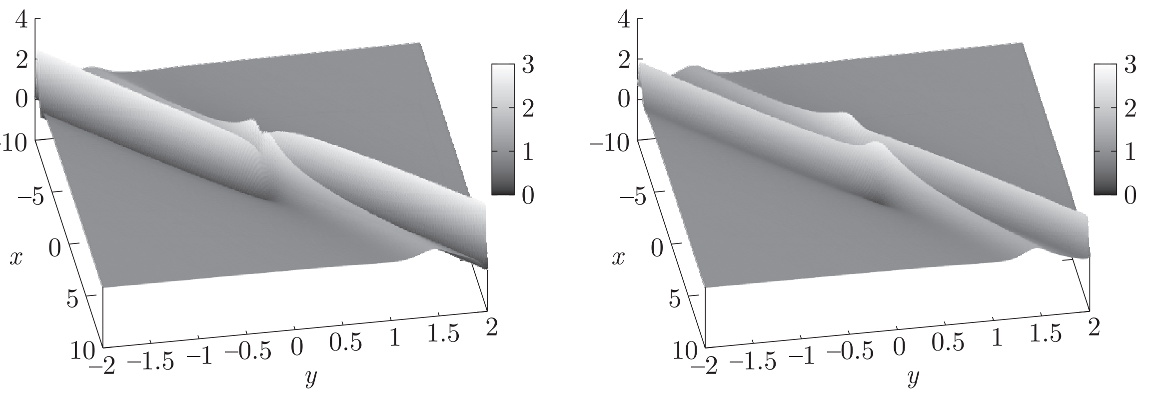

Рис. 7. Амплитуда решения уравнения (5.3) для $T = 0$ и $Z = 5$ (слева) и для $T = 1$ и $Z = 5$ (справа).

Графики решения $u_{lpd}(x, z)$ уравнения (5.4) при различных значениях параметров изображены на рисунках 8 и 9. Анализ этих графиков показывает, что за счет вхождения переменной z во вторую фазу поведение решения уравнения (5.4) слабо отличается от соответствующего решения уравнения НШ (0.1).

Поскольку уравнения (0.1), (5.3), (5.4) инвариантны относительно сдвига по независимым переменным, то функция

$$U_2(x, t, y, z) = u_2(2x - 12y, 4t + 24z, -96y, 192z)e^{6iz}$$

является одновременно решением всех трех этих уравнений.

Комбинируя уравнение (0.1) и (5.3), получаем интегрируемое уравнение Хироты [31–34]

$$iu_t + u_{xx} + 2|u|^2u - i\alpha(u_{xxx} + 6|u|^2u_x) = 0, \tag{5.5}$$

решение ранга 2 которого имеет вид

$$u_{hir}(x, t) = u_2(2x + 12\alpha t, T_0 + 4t, Y_0 + 96\alpha t, Z).$$

Графики решения уравнения Хироты (5.5) при $\alpha = 0.1$ и некоторых значениях начальных фаз T_0, Y_0 и Z изображены на рисунках 10 и 11.

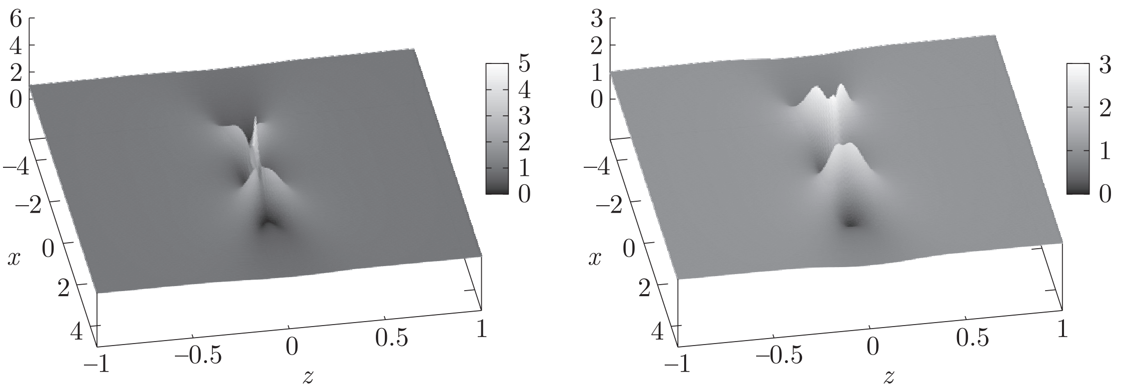

Рис. 8. Амплитуда решения уравнения (5.4) для $T = 0$ и $Y = 0$ (слева) и для $T = 0$ и $Y = 10$ (справа).

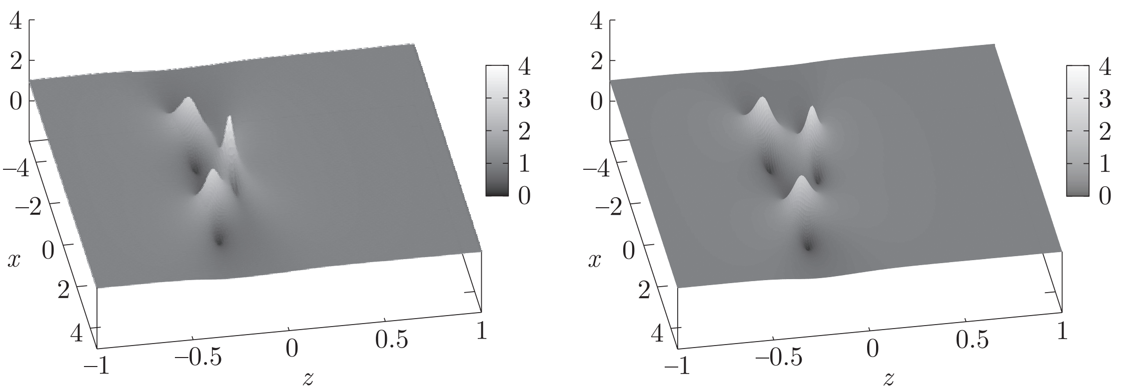

Рис. 9. Амплитуда решения уравнения (5.4) для $T = 5$ и $Y = 0$ (слева) и для $T = 5$ и $Y = 50$ (справа).

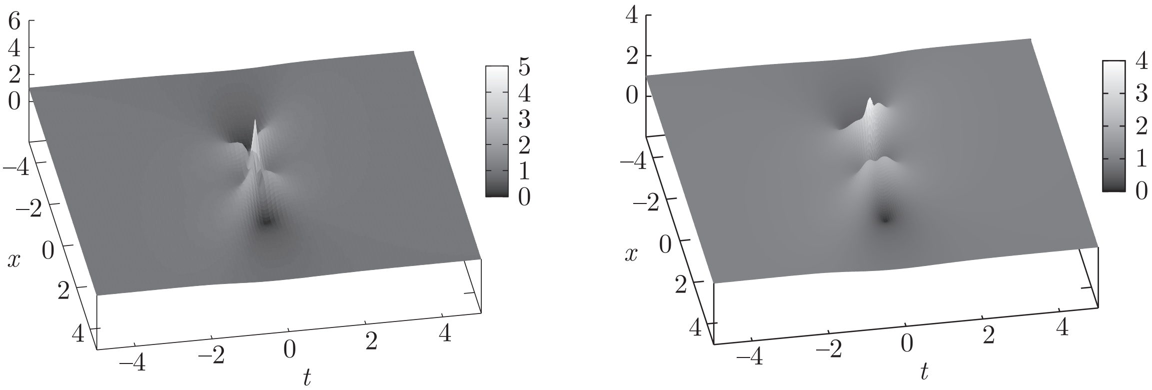

Рис. 10. Амплитуда решения уравнения (5.5) для $T_0 = 0$, $Y_0 = 0$ и $Z = 0$ (слева) и для $T_0 = 0$, $Y_0 = 5$ и $Z = 0$ (справа).

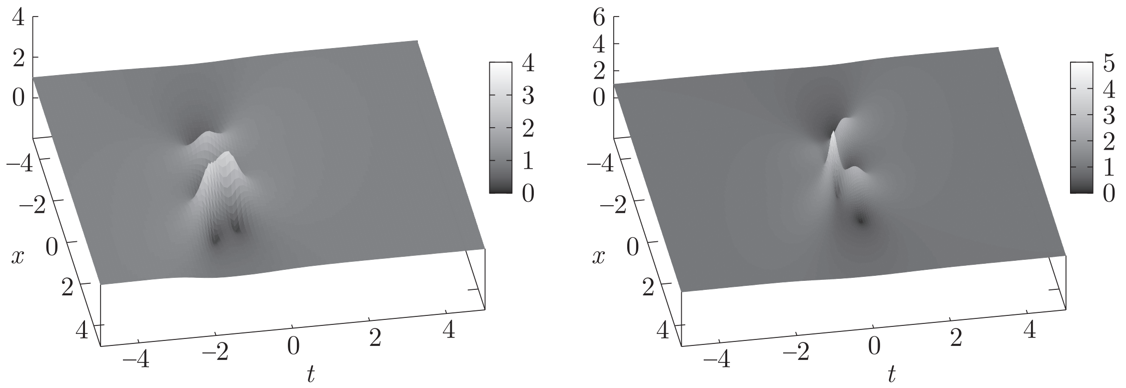

Рис. 11. Амплитуда решения уравнения (5.5) для $T_0 = 5$, $Y_0 = 0$ и $Z = 0$ (слева) и для $T_0 = 0$, $Y_0 = 0$ и $Z = 10$ (справа).

Другим интегрируемым обобщением уравнения НШ является уравнение [30, 31]

$$iu_t + u_{xx} + 2|u|^2u - i\alpha(u_{xxx} + 6|u|^2u_x) + \\ + \gamma(u_{xxxx} + 6u_x^2u^* + 4u|u_x|^2 + 8u_{xx}|u|^2 + 2u_{xx}^*u^2 + 6u|u|^4) = 0.$$

Нетрудно понять, что, поскольку оно представляет собой комбинацию уравнений (0.1), (5.3) и (5.4), его решение ранга 2 имеет вид

$$u_{gnls} = u_2(2x + 12\alpha t, (4+\gamma)t, 96\alpha t, 192\gamma t)e^{6i\gamma t}.$$

Графики этого решения мы не приводим, поскольку нет принципиальных отличий от графиков решений уравнений (0.1), (5.4) и (5.5).

6. Решения ранга 3

Фазовая параметризация (с помощью φ_j), описанная выше, трудна для нахождения значений фаз, описывающих P_n-бризеры высшего ранга. Как это было сделано в разделе 4, здесь мы вводим четыре новых существенных параметра α_1, β_1, α_2, β_2. Фазовые параметры мы выбираем следующим образом:

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &= 3\varphi_3 - 5\varphi_5,\\
\varphi_2 &= 2\varphi_4 - 3\varphi_6 + \frac{\sin(\pi/7)}{4(1-\cos(\pi/7))},\\
768\varphi_3 &= 26\alpha_1 - \alpha_2,\\
1920\varphi_4 &= -40\beta_1 + \beta_2 + 96(3\sin(\pi/7) + 8\sin(2\pi/7) + 2\sin(3\pi/7)),\\
3840\varphi_5 &= 10\alpha_1 - \alpha_2,\\
7680\varphi_6 &= -20\beta_1 + \beta_2 + 32(4\sin(\pi/7) + 14\sin(2\pi/7) + \sin(3\pi/7)).
\end{aligned} \tag{6.1}$$

Подставляя эти формулы в выражение (1.7) для $n = 3$, мы нашли при помощи длинных вычислений с использованием MAPLE следующую формулу для «волн-убийц» ранга 3:

$$u_3(x,t,\alpha_1,\beta_1,\alpha_2,\beta_2) = \left(1 - 24\frac{G_3(2x,4t) + iH_3(2x,4t)}{Q_3(2x,4t)}\right)e^{2it}, \tag{6.2}$$

в которой

$$\begin{aligned}
G_3(X,T) &= X^{10} + 15(T^2+1)X^8 + \sum_{n=0}^{6} g_n(T)X^n,\\
H_3(X,T) &= TX^{10} + 5(T^3 - 3T + \beta_1)X^8 + \sum_{n=0}^{6} h_n(T)X^n,\\
Q_3(X,T) &= (1 + X^2 + T^2)^6 - 20\alpha_1X^9 - 60(2T^2 - \beta_1T - 2)X^8 + 4\sum_{n=0}^{7} q_n(T)X^n,
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
g_6 &= 50T^4 - 60T^2 + 80\beta_1T + 210,\\
g_5 &= 120\alpha_1T^2 - 18\alpha_2 + 300\alpha_1,\\
g_4 &= 70T^6 - 150T^4 + 200\beta_1T^3 + 450T^2 + 30\beta_2T - 450 + 150\alpha_1^2 - 50\beta_1^2,\\
g_3 &= 400\alpha_1T^4 + (3000\alpha_1 - 60\alpha_2)T^2 - 800\alpha_1\beta_1T - 600\alpha_1 - 60\alpha_2,\\
g_2 &= 45T^8 + 420T^6 + 6750T^4 - (6000\beta_1 - 180\beta_2)T^3 - (300\alpha_1^2 - 900\beta_1^2 + 13500)T^2 +\\
&\quad + (3600\beta_1 + 180\beta_2)T - 675 - 300\alpha_1^2 - 300\beta_1^2,\\
g_1 &= 280\alpha_1T^6 + (150\alpha_2 - 2100\alpha_1)T^4 + 800\alpha_1\beta_1T^3 - (3600\alpha_1 - 540\alpha_2)T^2 +\\
&\quad + (120\beta_2\alpha_1 + 1200\alpha_1\beta_1 - 120\alpha_2\beta_1)T - 200\alpha_1\beta_1^2 - 900\alpha_1 - 90\alpha_2 - 200\alpha_1^3,\\
g_0 &= 11T^{10} + 495T^8 - 120\beta_1T^7 + 2190T^6 - (42\beta_2 + 1200\beta_1)T^5 +\\
&\quad + (350\alpha_1^2 + 150\beta_1^2 - 7650)T^4 + (6600\beta_1 - 420\beta_2)T^3 -\\
&\quad - (2100\beta_1^2 + 2025 - 120\beta_2\beta_1 - 120\alpha_2\alpha_1 + 900\alpha_1^2)T^2 + (200\alpha_1^2\beta_1 + 200\beta_1^3 - 90\beta_2)T +\\
&\quad + 675 + 150\alpha_1^2 + 6\alpha_2^2 + 150\beta_1^2 + 6\beta_2^2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h_6 &= 10T^5 - 140T^3 + 40\beta_1T^2 - 150T + 60\beta_1 - 5\beta_2,\\
h_5 &= 40\alpha_1T^3 + (60\alpha_1 - 18\alpha_2)T + 40\alpha_1\beta_1,\\
h_4 &= 10T^7 - 210T^5 + 50\beta_1T^4 - 450T^3 + 15\beta_2T^2 - (50\beta_1^2 + 1350 - 150\alpha_1^2)T +\\
&\quad + 150\beta_1 - 15\beta_2,
\end{aligned}$$

$$h_3 = 80\alpha_1 T^5 + (1000\alpha_1 - 20\alpha_2)T^3 - 400\alpha_1\beta_1 T^2 - (1800\alpha_1 - 60\alpha_2)T + \\ + 200\alpha_1\beta_1 + 20\beta_2\alpha_1 - 20\alpha_2\beta_1,$$

$$h_2 = 5T^9 - 60T^7 + 1710T^5 + (45\beta_2 - 2100\beta_1)T^4 + (300\beta_1^2 - 6300 - 100\alpha_1^2)T^3 + \\ + (1800\beta_1 - 90\beta_2)T^2 + (4725 + 300\alpha_1^2 + 300\beta_1^2)T - 135\beta_2 - 100\beta_1^3 - \\ - 100\alpha_1^2\beta_1 - 900\beta_1,$$

$$h_1 = 40\alpha_1 T^7 + (30\alpha_2 - 1140\alpha_1)T^5 + 200\alpha_1\beta_1 T^4 - (2400\alpha_1 - 60\alpha_2)T^3 + \\ + (60\beta_2\alpha_1 - 60\alpha_2\beta_1 + 600\alpha_1\beta_1)T^2 - (900\alpha_1 + 450\alpha_2 + 200\alpha_1^3 + 200\alpha_1\beta_1^2)T + \\ + 60\alpha_2\beta_1 - 60\beta_2\alpha_1,$$

$$h_0 = T^{11} + 25T^9 - 15\beta_1 T^8 - 870T^7 + (40\beta_1 - 7\beta_2)T^6 + (70\alpha_1^2 - 9630 + 30\beta_1^2)T^5 + \\ + (5850\beta_1 - 75\beta_2)T^4 + (40\beta_2\beta_1 + 40\alpha_2\alpha_1 - 2475 - 900\alpha_1^2 - 1300\beta_1^2)T^3 + \\ + (100\alpha_1^2\beta_1 + 495\beta_2 + 100\beta_1^3)T^2 + (6\alpha_2^2 + 4725 - 240\alpha_2\alpha_1 - 240\beta_2\beta_1 + \\ + 750\beta_1^2 + 6\beta_2^2 + 750\alpha_1^2)T - 20\alpha_1^2\beta_2 - 675\beta_1 - 45\beta_2 - 100\alpha_1^2\beta_1 - 100\beta_1^3 + \\ + 40\alpha_2\alpha_1\beta_1 + 20\beta_1^2\beta_2,$$

$$q_7 = 3\alpha_2 - 30\alpha_1,$$

$$q_6 = -60T^4 + 40\beta_1 T^3 + 120T^2 - (15\beta_2 - 60\beta_1)T + 35\beta_1^2 + 15\alpha_1^2 + 580,$$

$$q_5 = 30\alpha_1 T^4 - (27\alpha_2 - 90\alpha_1)T^2 + 120\alpha_1\beta_1 T - 27\alpha_2 + 540\alpha_1,$$

$$q_4 = 30\beta_1 T^5 - 360T^4 + (15\beta_2 + 600\beta_1)T^3 + (3360 + 225\alpha_1^2 - 75\beta_1^2)T^2 + \\ + (135\beta_2 - 1350\beta_1)T + 225\beta_1^2 - 30\alpha_2\alpha_1 + 525\alpha_1^2 - 30\beta_2\beta_1 + 840,$$

$$q_3 = 40\alpha_1 T^6 + (1950\alpha_1 - 15\alpha_2)T^4 - 400\alpha_1\beta_1 T^3 + (90\alpha_2 + 4500\alpha_1)T^2 + \\ + (60\beta_2\alpha_1 - 1800\alpha_1\beta_1 - 60\alpha_2\beta_1)T - 450\alpha_1 + 100\alpha_1^3 + 100\alpha_1\beta_1^2 - 135\alpha_2,$$

$$q_2 = 60T^8 + 3360T^6 - (1620\beta_1 - 27\beta_2)T^5 + (225\beta_1^2 - 75\alpha_1^2 + 19560)T^4 - \\ - (16200\beta_1 - 270\beta_2)T^3 + (450\alpha_1^2 - 9120 + 4050\beta_1^2)T^2 + \\ + (675\beta_2 + 2700\beta_1 - 300\beta_1^3 - 300\alpha_1^2\beta_1)T + 3036 + 9\alpha_2^2 - 180\alpha_2\alpha_1 + \\ + 225\beta_1^2 + 225\alpha_1^2 + 9\beta_2^2 - 180\beta_2\beta_1,$$

$$q_1 = 15\alpha_1 T^8 + (15\alpha_2 - 90\alpha_1)T^6 + 120\alpha_1\beta_1 T^5 + (405\alpha_2 - 5400\alpha_1)T^4 + \\ + (3000\alpha_1\beta_1 - 60\alpha_2\beta_1 + 60\beta_2\alpha_1)T^3 + (1485\alpha_2 - 300\alpha_1\beta_1^2 - 1350\alpha_1 - 300\alpha_1^3)T^2 + \\ + (540\beta_2\alpha_1 - 540\alpha_2\beta_1)T + 300\alpha_1^3 - 120\alpha_1\beta_1\beta_2 - 60\alpha_2\alpha_1^2 + 135\alpha_2 + 60\alpha_2\beta_1^2 + \\ + 300\alpha_1\beta_1^2 + 2025\alpha_1,$$

$$q_0 = 30T^{10} - 5\beta_1 T^9 + 930T^8 - (240\beta_1 + 3\beta_2)T^7 + (15\beta_1^2 + 3820 + 35\alpha_1^2)T^6 + \\ + (1710\beta_1 - 153\beta_2)T^5 + (30\beta_2\beta_1 + 30\alpha_2\alpha_1 - 975\beta_1^2 + 35940 - 75\alpha_1^2)T^4 + \\ + (100\beta_1^3 + 100\alpha_1^2\beta_1 + 135\beta_2 - 23400\beta_1)T^3 + \\ + (9\beta_2^2 + 23286 + 9\alpha_2^2 - 360\beta_2\beta_1 - 360\alpha_2\alpha_1 + 4725\alpha_1^2 + 8325\beta_1^2)T^2 + \\ + (120\alpha_2\alpha_1\beta_1 - 60\alpha_1^2\beta_2 - 1500\alpha_1^2\beta_1 + 60\beta_1^2\beta_2 - 7425\beta_1 - 675\beta_2 - 1500\beta_1^3)T + \\ + 506 + 9\beta_2^2 + 100\beta_1^4 + 675\alpha_1^2 + 100\alpha_1^4 + 9\alpha_2^2 + 90\beta_2\beta_1 + 200\alpha_1^2\beta_1^2 + \\ + 675\beta_1^2 + 90\alpha_2\alpha_1.$$

Параметры α_j, β_j выражаются через фазовые параметры φ_j следующим образом:

$$\begin{aligned}
&\alpha_1 = 48(\varphi_3 - 5\varphi_5),\\
&\alpha_2 = 480(\varphi_3 - 13\varphi_5),\\
&\beta_1 = 96(4\varphi_6 - \varphi_4) + 8(\sin(\pi/7) + 2\sin(2\pi/7) + \sin(3\pi/7)),\\
&\beta_2 = 1920(8\varphi_6 - \varphi_4) + 32(\sin(\pi/7) - 4\sin(2\pi/7) + 4\sin(3\pi/7)).
\end{aligned}$$

Основное удобство новой параметризации состоит в том, что P_3-бризер описывается формулой

$$P_3(x,t) = u_3(x,t,0,0,0,0),$$

то есть мы получаем его, просто полагая $\alpha_1 = \beta_1 = \alpha_2 = \beta_2 = 0$. Максимум абсолютной величины при этом достигается в точке $x = 0,\ t = 0$: $|P_3(0,0)| = 7$. Отметим, что выбор параметров φ_j, соответствующий P_3-бризеру, выглядит намного сложнее:

$$\begin{aligned}
&\varphi_1 = \varphi_3 = \varphi_5 = 0,\\
&\varphi_4 = (3\sin(\pi/7) + 8\sin(2\pi/7) + 2\sin(3\pi/7))/20,\\
&\varphi_6 = (4\sin(\pi/7) + 14\sin(2\pi/7) + \sin(3\pi/7)/240,\\
&\varphi_2 = 2\varphi_4 - 3\varphi_6 + \frac{\sin(\pi/7)}{4(1-\cos(\pi/7))}.
\end{aligned}$$

Формулы, аналогичные вышеприведенным, но значительно более громоздкие, были получены в работе [22] для решений ранга 4. В этой работе также имеется доступ к фильмам, содержащим визуализации эволюций решений ранга 3 уравнения КП-I (0.2), показывающих, как экстремальные «волны-убийцы» могут возникать в результате столкновения нескольких простых «волн-убийц».

Одно из преимуществ (α,β)-параметризации решений состоит в возможности легко исследовать их асимптотику при больших значениях любого из параметров, предполагая, что x и t ограничены.

- Если α_2 и β_2 ограничены, то $u_3(x,t,\alpha_1,\beta_1,\alpha_2,\beta_2) \to e^{2it}$ при $\alpha_1^2 + \beta_1^2 \to \infty$.
- Если α_1 и β_1 ограничены, то $u_3(x,t,\alpha_1,\beta_1,\alpha_2,\beta_2) \to P_1(x,t)$ при $\alpha_2^2 + \beta_2^2 \to \infty$.
- Если α_1, β_1, α_2, β_2 стремятся к бесконечности так, что $\beta_1 \sim b\alpha_1$, $\alpha_2 \sim c\alpha_1^r$, $\beta_2 \sim d\alpha_1^r$, то предельные значения $\widetilde{u}_3(x,t)$ решения $u_3(x,t,\alpha_1,\beta_1,\alpha_2,\beta_2)$ в зависимости от r описываются следующими соотношениями:

  $$\widetilde{u}_3(x,t)|_{r<2} = e^{2it}, \quad \widetilde{u}_3(x,t)|_{r>2} = u_1(x,t), \quad \widetilde{u}_3(x,t)|_{r=2} = u_1(x-x_1, t-t_1),$$

  где x_1 и t_1 определяются равенствами

  $$x_1 = \frac{10(1-b^2)c + 20bd}{3(c^2+d^2)}, \quad t_1 = \frac{10(1-b^2)d - 20bc}{3(c^2+d^2)}.$$

Таким образом установлено, что u_3 содержит решения рангов 0 и 1, как соответствующие асимптотики при больших значениях правильно выбранных параметров.

Графики решений $u_3(x,t,\alpha_1,\beta_1,\alpha_2,\beta_2)$ при некоторых характерных выборах параметров показаны на рисунках 12 и 13.

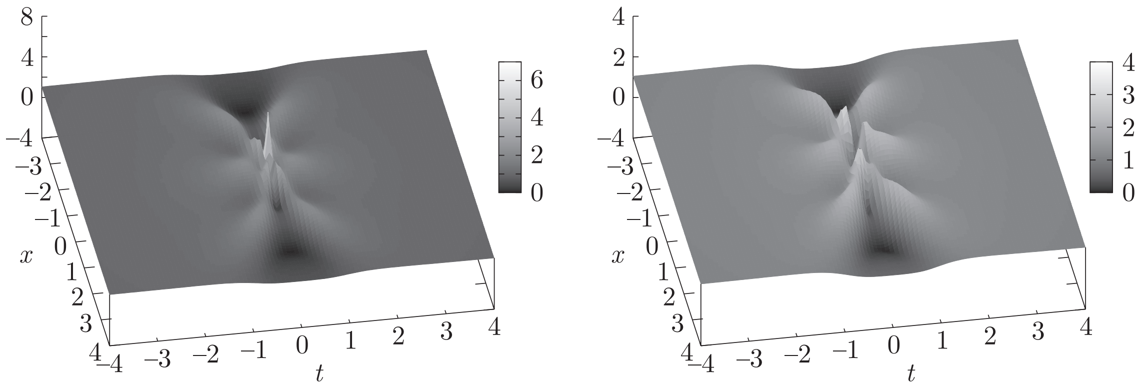

Рис. 12. Амплитуда решения ранга 3 (6.2) для $\alpha_1 = \beta_1 = \alpha_2 = \beta_2 = 0$ (слева) и для $\alpha_1 = \beta_1 = 0$ и $\alpha_2 = \beta_2 = 10$ (справа).

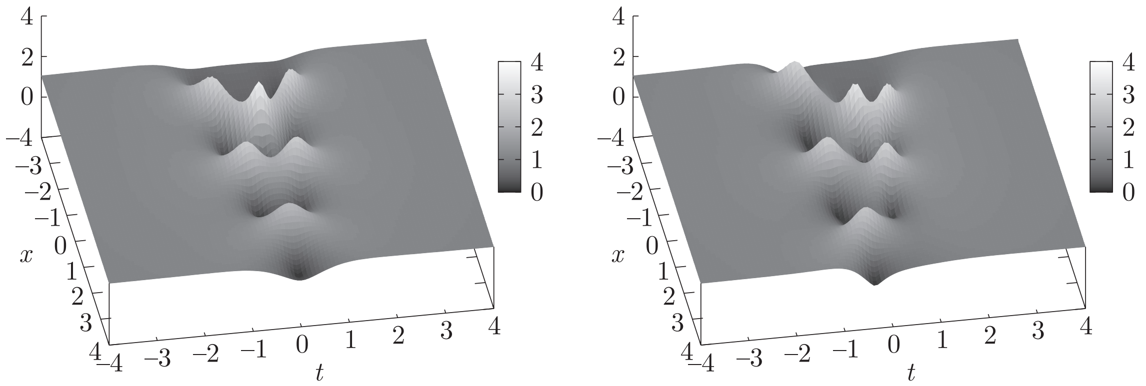

Рис. 13. Амплитуда решения ранга 3 (6.2) для $\alpha_1 = \alpha_2 = 10$ и $\beta_1 = \beta_2 = 0$ (слева) и для $\alpha_1 = \beta_1 = \alpha_2 = \beta_2 = 10$ (справа).

В заключение данного раздела отметим, что для квазирациональных решений ранга 3 можно ввести параметризацию, аналогичную параметризации раздела 5, позволяющую легко получать квазирациональные решения уравнений (5.3), (5.4), (5.5), а также двух следующих уравнений из АКНС-иерархии и их различных линейных комбинаций.

7. Некоторые свойства P_n-бризеров

Предполагая, что центральный максимум P_n-бризера ранга n совпадает с точкой $(X, T) = (0, 0)$ и что $B = 1$, $Q_n(x, t) > 0$, а также что начальное значение $P_n(X, 0)$ вещественно, можно утверждать, что P_n-бризер имеет следующую структуру:

$$P_n(x, t) = \left(1 - 2n(n+1)\frac{G_n(X, T) + iH_n(X, T)}{Q_n(X, T)}\right) e^{iT/2},$$

где

$$Q_n \sim (X^2 + T^2)^{n(n+1)/2}, \quad H_n \sim T(X^2 + T^2)^{n(n+1)/2-1}, \quad X^2 + T^2 \to \infty,$$
$$\deg Q_n(X, T) = n(n+1), \quad \deg G_n = n(n+1) - 2,$$

$$H_n := TL_n(X,T), \quad \deg L_n = n(n+1) - 2,$$
$$Q_n(0,0) = 1^{2n}3^{2(n-1)}5^{2(n-2)}\dots(2n-1)^2 > 0.$$

Отметим, что все полиномы P_n, Q_n, L_n являются четными функциями по X и T:

$$Q_n(X,T) = Q_n(-X,T) = Q_n(X,-T),$$
$$G_n(X,T) = G_n(-X,T) = G_n(X,-T),$$
$$L_n(X,T) = L_n(-X,T) = L_n(X,-T).$$

Абсолютный максимум функции $|P_n(X,T)|$ равен $|P_n(0,0)| = 2n+1$. Он всегда окружен $n(n+1)-2$ значительно меньшими локальными максимумами. Соответственно, общее число $N_{\max}$ локальных максимумов $|P_n(X,T)|$ дается формулой $N_{\max} = n(n+1)-1$, а число локальных минимумов $N_{\min}$ всегда неизменно, $N_{\min} = n(n+1)$, и сохраняется для квазирациональных решений ранга n общего положения.

Величины $Q_n(0,0)$ и $G_n(0,0)$ описываются следующими простыми формулами:

$$\frac{Q_{n+1}(0,0)}{Q_n(0,0)} = 1^2 3^2 \cdots (2n+1)^2 = \frac{2^{2(n+1)}}{\pi}\Gamma^2\left(n+\frac{3}{2}\right) = [(2n+1)!!]^2,$$
$$Q_{2n}(0,0) = -(2n+1)G_{2n}(0,0), \quad Q_{2n-1}(0,0) = (2n-1)G_{2n-1}(0,0),$$
$$G_{2n-1}(0,0) > 0, \quad G_{2n}(0,0) < 0, \quad \forall n \geqslant 1.$$

Из этих формул следует, что

$$P_n(0,0) = (-1)^n(2n+1), \quad n \geqslant 1.$$

Общего вида квазирациональные решения ранга n могут, как было показано в работах [22, 24, 35], описываться полиномиальными (по параметрам α_j и β_j) деформациями полиномов Q_n, H_n и G_n. При этом, как хорошо видно из приведенных примеров, параметризацию можно выбрать так, что P_n-бризер соответствует приравниванию всех параметров нулю. Кроме того, фазы φ_j оказываются линейными комбинациями новых вещественных параметров α_j и β_j, $j = 1, \dots, (n-1)$, таким образом, что $Q_n(0,0)$, $G_n(0,0)$, $H_n(0,0)$ становятся полиномами степени $\leqslant (2n-2)$ по отношению к α_j и β_j. Деформированные полиномы

$$Q_n(x,t,\alpha_1,\dots,\beta_{n-1}), \quad H_n(x,t,\alpha_1,\dots,\beta_{n-1}), \quad G_n(x,t,\alpha_1,\dots,\beta_{n-1})$$

при конечных значениях параметров α_j и β_j всегда имеют тот же старший член асимптотики (когда $X^2+T^2 \to \infty$), что и при их нулевых значениях. Иными словами, старший член асимптотики P_n-бризера и общего квазирационального решения ранга n, вырождающегося в P_n-бризер при нулевых значениях параметров, совпадают. Иными словами, при $X^2+T^2 \to \infty$ имеет место асимптотика:

$$u_n = \left(1 - 2n(n+1)\frac{1+iT}{X^2+T^2} + \dots\right) e^{iT/2}.$$

Следует отметить, что часть формул, упомянутых в этом разделе, подтверждена лишь для рангов $n \leqslant 10$, хотя их справедливость в общем случае не вызывает сомнения.

Заключительные замечания

Поскольку квазирациональные решения могут быть получены вырождением конечнозонных (или алгебро-геометрических) решений, то свойства квазирациональных решений тесно связаны со свойствами соответствующих конечнозонных решений. Из того, что решение u_n зависит от $2n$ независимых фаз, следует, что соответствующее конечнозонное решение является $2n$-фазным и спектральная кривая соответствующего алгебро-геометрического решения $\widetilde{u}_n$ имеет род $g = 2n$. Из формул для решения u_n следует, что оно имеет $n(n+1)/2$ простых полюсов в верхней полуплоскости и столько же — в нижней. Поэтому если соответствующее конечнозонное решение является эллиптическим, как в работе [36], то спектральная кривая $n(n+1)$-листно накрывает эллиптическую. Отсюда получается, что квазирациональному решению ранга $n = 2$ соответствует четырехзонное эллиптическое решение, построенное по 6-листному накрытию тора, а решению ранга $n = 3$ — конечнозонное эллиптическое решение, построенное по 12-листному накрытию рода $g = 6$.

Отметим также, что спектральная кривая

$$w^2 = \prod_{j=1}^{2n+1} (E - E_j) = E^{2n+1} + \sum_{j=0}^{2n} c_j E^{2n-j}, \quad c_j \in \mathbb{R}, \tag{7.1}$$

ассоциированная с n-зонным потенциалом Ламе, является $n(n+1)/2$-листным накрытием тора, а соответствующее конечнозонное эллиптическое решение уравнения Кортевега–де Фриза имеет $n(n+1)/2$ полюсов второго порядка [37]. Построим по кривой (7.1) спектральную кривую

$$w^2 = \prod_{j=1}^{2n+1} ((\lambda - \lambda_0)^2 + \kappa_0 - E_j), \tag{7.2}$$

ассоциированную с $2n$-зонным решением уравнения НШ (0.1). Здесь λ_0, $\kappa_0 \in \mathbb{R}$ — произвольные постоянные, $\kappa_0 > \max(\operatorname{Re} E_j)$.

Нетрудно убедиться, что кривая (7.2) является $n(n+1)$-листным накрытием тора, и по ней можно построить эллиптическое решение уравнения НШ с $n(n+1)$ простыми полюсами. Таким образом, кривая (7.2) удовлетворяет перечисленным выше предположениям на кривую, ассоциированную с решением $\widetilde{u}_n$. Нам кажется, что это не случайно, и вполне возможно, что вырождением эллиптического $2n$-зонного решения, построенного по кривой (7.2), можно получить квазирациональное решение ранга n. Заметим, что для $n = 1$ это утверждение является верным [36]. Соответственно, по-видимому, из трехфазного решения уравнения НШ [38] невозможно получить гладкие квазирациональные решения в виде P_n-бризеров. Однако хочется отметить, что данное трехфазное решение само по себе представляет достаточно большой интерес и может быть использовано, помимо прочего, и для построения довольно нетривиальных решений уравнения Хироты (5.5).

Список литературы

[1] Захаров В. Е. Стабильность периодических волн конечной амплитуды на поверхности глубокой жидкости // Журн. прикл. мех. и техн. физ., 1968, т. 9, № 2, с. 86–94.

[2] Chiao R., Garmire E., Townes C. H. Self-trapping of optical beams // Phys. Rev. Lett., 1964, vol. 13, no. 15, pp. 479–482.

[3] Кузнецов Е. А. Солитоны в параметрически нестабильной плазме // Докл. АН СССР, 1977, т. 236, № 1–3, с. 575.

[4] Yan Zh. Vector financial rogue waves // Phys. Lett. A, 2011, vol. 375, no. 48, pp. 4274–4279.

[5] Ахмедиев Н. Н., Анкевич А. Солитоны: Нелинейные импульсы и пучки. Москва: Физматлит, 2003. 304 с.

[6] Discussion & debate: Rogue waves — towards a unifying concept? / N. Akhmediev, E. Pelinovsky (Eds.). (Eur. Phys. J. Special Topics, vol. 185.) Berlin: Springer, 2010. 266 pp.

[7] Belokolos E. D., Bobenko A. I., Enol'skii V. Z., Its A. R., Matveev V. B. Algebro-geometric approach to nonlinear integrable equations. (Springer Ser. Nonlinear Dynamics.) Berlin: Springer, 1994. 337 pp.

[8] Matveev V. B., Salle M. A. Darboux transformations and solitons. (Springer Ser. Nonlinear Dynamics.) Berlin: Springer, 1991. 120 pp.

[9] Matveev V. B. Darboux transformation and explicit solutions of the Kadomtcev – Petviaschvily equation, depending on functional parameters // Lett. Math. Phys., 1979, vol. 3, no. 3, pp. 213–216.

[10] Matveev V. B. Darboux transformation and the explicit solutions of differential-difference and difference-difference evolution equation: 1 // Lett. Math. Phys., 1979, vol. 3, no. 3, pp. 217–222.

[11] Matveev V. B. Some comments on the rational solutions of the Zakharov – Schabat equations // Lett. Math. Phys., 1979, vol. 3, no. 6, pp. 503–512.

[12] Matveev V. B., Salle M. A. Differential-difference evolution equation: 2. Darboux transformation for the Toda lattice // Lett. Math. Phys., 1979, vol. 3, no. 5, pp. 425–429.

[13] Салль М. А. Преобразование Дарбу для неабелевых и нелокальных уравнений типа цепочки Тоды // ТМФ, 1982, т. 53, № 2, с. 227–237.

[14] Салль М. А. $L - A$ пары с рациональной зависимостью от спектральных параметров. Преобразование Дарбу // Зап. научн. семин. ЛОМИ, 1987, т. 161, с. 72–75.

[15] Matveev V. B. Darboux transformations, covariance theorems and integrable systems // L. D. Faddeev's Seminar on Mathematical Physics / M. Semenov-Tian-Shansky (Ed.). (Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, vol. 201.) Providence, R.I.: AMS, 2000. P. 179–209.

[16] Peregrine D. H. Water waves, nonlinear Schrödinger equations and their solutions // J. Austral. Math. Soc. Ser. B, 1983, vol. 25, no. 1, pp. 16–43.

[17] Akhmediev N., Ankiewicz A., Taki M. Waves that appear from nowhere and disappear without a trace // Phys. Lett. A, 2009, vol. 373, no. 6, pp. 675–678.

[18] Ахмедиев Н. Н., Елеонский В. М., Кулагин Н. Е. Генерация периодической последовательности пикосекундных импульсов в оптическом волокне. Точные решения // ЖЭТФ, 1985, т. 89, № 5, с. 1542–1551.

[19] Елеонский В. М., Кричевер И. М., Кулагин Н. Е. Рациональные многосолитонные решения нелинейного уравнения Шрёдингера // Докл. АН СССР, 1986, т. 287, № 3, с. 606–610.

[20] Akhmediev N., Ankiewicz A., Soto-Crespo J. M. Rogue waves and rational solutions of the nonlinear Schrödinger equation // Phys. Rev. E, 2009, vol. 80, no. 2, 026601, 9 pp.

[21] Dubard P. Multi-rogue solutions to the focusing NLS equation: PhD Thesis, https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00625446 (2010).

[22] Dubard P., Matveev V. B. Multi-rogue waves solutions: From the NLS equation to the KP-I equation // Nonlinearity, 2013, vol. 26, no. 12, R93–R125.

[23] Итс А. Р., Рыбин А. В., Салль М. А. К вопросу о точном интегрировании нелинейного уравнения Шрёдингера // ТМФ, 1988, т. 74, № 1, с. 29–45.

[24] Dubard P., Matveev V. B. Multi-rogue waves solutions to the focusing NLS equation and the KP-I equation // Nat. Hazards Earth Syst. Sci., 2011, vol. 11, pp. 667–672.

[25] Ахмедиев Н. Н, Елеонский В. М., Кулагин Н. Е. Точные решения первого порядка нелинейного уравнения Шрёдингера // ТМФ, 1987, т. 72, № 2, с. 183–196.

[26] Gesztesy F., Holden H. Soliton equation and their algebro-geometric solutions: Vol. 1: (1 + 1)-dimensional continuous models. (Cambridge Stud. in Adv. Math., vol. 79.) Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2003. 505 pp.

[27] Lakshmanan M., Porsezian K., Daniel M. Effect of discreteness on the continuum limit of the Heisenberg spin chain // Phys. Lett. A, 1988, vol. 133, no. 9, pp. 483–488.

[28] Porsezian K., Daniel M., Lakshmanan M. On the integrability aspects of the one-dimensional classical continuum isotropic Heisenberg spin chain // J. Math. Phys., 1992, vol. 33, no. 5, pp. 1807–1816.

[29] Daniel M., Porsezian K., Lakshmanan M. On the integrable models of the higher order water wave equation // Phys. Lett. A, 1993, vol. 174, no. 3, pp. 237–240.

[30] Wang L. H., Porsezian K., He J. S. Breather and rogue wave solutions of a generalized nonlinear Schrödinger equation // Phys. Rev. E, 2013, vol. 87, no. 5, 053202, 10 pp.

[31] Ankiewicz A., Akhmediev N. High-order integrable evolution equation and its soliton solutions // Phys. Lett. A, 2014, vol. 378, no. 4, pp. 358–361.

[32] Hirota R. Exact envelope-soliton solutions of a nonlinear wave equation // J. Math. Phys., 1973, vol. 14, pp. 805–809.

[33] Dai Ch.-Q., Zhang J.-F. New solitons for the Hirota equation and generalized higher-order nonlinear Schrödinger equation with variable coefficients // J. Phys. A, 2006, vol. 39, no. 4, pp. 723–737.

[34] Ankiewicz A., Soto-Crespo J. M., Akhmediev N. Rogue waves and rational solutions of the Hirota equation // Phys. Rev. E (3), 2010, vol. 81, no. 4, 046602, 8 pp.

[35] Dubard P., Gaillard P., Klein C., Matveev V. B. On multi-rogue waves solutions of the focusing NLS equation and positon solutions of the KdV equation // Discussion & debate: Rogue waves — towards a unifying concept? / N. Akhmediev, E. Pelinovsky (Eds.). (Eur. Phys. J. Special Topics, vol. 185.) Berlin: Springer, 2010. P. 247–258.

[36] Смирнов А. О. Эллиптический бризер нелинейного уравнения Шрёдингера // Зап. научн. семин. ПОМИ, 2012, т. 398, с. 209–222.

[37] Smirnov A. O. Finite-gap elliptic solutions of the KdV equation // Acta Appl. Math., 1994, vol. 36, nos. 1–2, pp. 125–166.

[38] Смирнов А. О., Головачев Г. М. Трехфазные решения нелинейного уравнения Шрёдингера в эллиптических функциях // Нелинейная динамика, 2013, т. 9, № 3, с. 389–407.

[39] Gaillard P., Gastineau M. Eighteen parameter deformations of the Peregrine breather of order ten solutions of the NLS equation // Int. J. Mod. Phys. C., 2015, vol. 26, no. 02, 1550016, 14 pp.

Quasi-rational solutions of nonlinear Schrödinger equation

Vladimir B. Matveev[1], Philippe Dubard[2], Alexander O. Smirnov

[1,3]Saint Petersburg State University of Airspace Instrumentation (SUAI)
Bolshaya Morskaya St. 67, Saint Petersburg, 190000, Russia
[2]Department of Mathematics and Applied Mathematics, University of Cape Town, South Africa

[1]vladimir.matveev9@gmail.com, [2]philippe.dubard@aliceadsl.fr, [3]alsmir@guap.ru

The method for constructing quasi-rational solutions of the nonlinear Schrödinger equation, Kadomtsev – Petviashvili equation and some other integrable nonlinear equations is considered. Examples of range 2 and 3 solutions are given.

MSC 2010: 35Q55, 37K10
Keywords: rogue waves, freak waves, nonlinear Schrödinger equation, KP equation, Darboux transformation

Received October 25, 2014, accepted January 17, 2015
Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2015, vol. 11, no. 2, pp. 219–240 (Russian)