Министерство образования и науки РФ
ФГБОУ ВПО «Удмуртский государственный университет»
Математический факультет
Кафедра математического анализа

**Н. И. КОРОБЕЙНИКОВА, Н. В. ЛАТЫПОВА,
Т. С. ТИНЮКОВА**

ЧИСЛОВЫЕ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ

Учебно–методическое пособие

Ижевск
2015

УДК 517.502(075.8)
ББК 22.161.3я79
К68

Рекомендовано к изданию Учебно–методическим советом УдГУ

Рецензенты: д.ф.–м.н, профессор, профессор кафедры дифференциальных уравнений УдГУ С. Н. Попова, к.ф.–м.н, доцент, доцент кафедры прикладной математики и информатики ИжГТУ Т. С. Быкова.

Коробейникова Н. И., Латыпова Н. В., Тинюкова Т. С.

К68 Числовые и функциональные ряды: учебно–методическое пособие. Ижевск: Издательский центр «Удмуртский университет», 2015. 132 с.

Предлагаемое учебно-методическое пособие посвящено изучению одного из разделов математического анализа — теории рядов. Приводятся основные понятия и теоремы теории числовых и функциональных рядов, которые подробно иллюстрируются примерами. Даны упражнения для самостоятельного решения и варианты лабораторных работ, предназначенные для организации самостоятельной работы студента. Пособие предназначено для студентов направлений подготовки по укрупнённым группам: 01.00.00 «Математика и механика», 02.00.00 «Компьютерные и информационные науки», а также всем интересующимся математическим анализом.

УДК 517.502(075.8)
ББК 22.161.3я79

Содержание

Введение

Данное учебно–методическое пособие подготовлено преподавателями кафедры математического анализа Удмуртского государственного университета, на протяжении ряда лет читающими курс математического анализа студентам направлений подготовки «Математика и компьютерные науки» и «Механика и математическое моделирование».

Материал, содержащийся в работе относится к модулю «Числовые и функциональные ряды». Современную вычислительную математику просто не возможно представить без теории рядов и это не единственная область математики, где широко применяются результаты этой теории. Важность рассматриваемой темы обусловлена большой ролью, которую играют её приложения не только в математике, но и в компьютерных науках, механике, физике и других научных дисциплинах.

Обычно студенты изучают этот раздел математического анализа в третьем семестре, поэтому они уже должны иметь навыки решения задач по следующим темам: предел числовой последовательности, предел функции в точке, непрерывность функции в точке, применение производной функции вещественного аргумента, определенный интеграл. Конечный результат освоения нового материала сопряжен с тем, на сколько хорошо были усвоены темы первых двух семестров. Для закрепления и лучшего усвоения материала модуля, а также для организации самостоятельной работы студентов в пособии предлагаются варианты лабораторной работы.

Учебно–методическое пособие «Числовые и функциональные ряды» есть дополнение к основной литературе, рекомендуемой студентам при изучении математического анализа и является частью учебно-методического комплекса по данному предмету. Основные учебные пособия, используемые при проведении практических занятий по данному разделу, изучаемого предмета — [1]–[2], полезным при изучении материала этого раздела может быть учебное пособие [3]. Теоретические сведения, не вошедшие в данное учебно–методическое пособие, а также доказательства большинства приведенных здесь теорем можно найти в [4]–[5]. Авторы старались придерживаться современного изложения материала и формулировать утверждения, используя терминологию функционального анализа, например, понятие нормы функции, понятие сходимости. Более полную информацию касательно данных понятий можно найти в книгах [6]–[7]. Для повторения тем, изучаемых в первом семестре, рекомендуем обратиться к литературе [8]–[9].

В пособии материал представлен в шести параграфах, которые разбиты на пункты. Применяется следующая нумерация теорем (определений, примеров): первое число определяет номер параграфа, второе число определяет номер теоремы (определения, примера) в пособии. Нумерация формул: первое число определяет номер параграфа, второе число — номер формулы в параграфе. Нумерация упражнений сквозная.

Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения модуля:

общекультурные компетенции —
способность к самоорганизации и к самообразованию;

общепрофессиональные компетенции, такие как:
готовность использовать фундаментальные знания в области математического анализа в будущей профессиональной деятельности; способность к самостоятельной научно–исследовательской работе; способность находить, анализировать, реализовывать программно и использовать на практике математические алгоритмы, в том числе с применением современных вычислительных систем;

профессиональные компетенции, а именно:
способность к определению общих форм и закономерностей отдельной предметной области; способность математически корректно ставить естественнонаучные задачи, знание постановок классических задач математики и механики; способность строго доказать утверждение, сформулировать результат, увидеть следствия полученного результата; способность публично представлять собственные и известные научные результаты; способность передавать результат проведенных физико–математических и прикладных исследований в виде конкретных рекомендаций, выраженной в терминах предметной области изучавшегося явления; способность представлять и адаптировать знания с учетом уровня аудитории; способность к планированию и осуществлению педагогической деятельности с учетом специфики предметной области в образовательных организациях; способность к проведению методических и экспертных работ в области математики.

§1. Основные понятия числовых рядов

Для успешного освоения данного раздела студент должен знать основные понятия и теоремы теории числовых последовательностей, уметь исследовать числовую последовательность на сходимость, владеть основными приемами вычисления пределов числовой последовательности, владеть аппаратом алгебраических преобразований.

После изучения данного раздела студент должен знать определение числового ряда, определение суммы числового ряда, необходимый признак сходимости числового ряда, уметь исследовать ряд на сходимость и вычислять его сумму.

Задания лабораторной работы по данному разделу — 1, 2.

1.1 Определение сходимости числового ряда

Определение 1.1. Пусть $\{u_n\}$ — числовая последовательность. Выражение вида

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \tag{1.1}$$

называется **числовым рядом**. Числа $u_1, u_2, \ldots$ называются **членами ряда**, а выражение u_n — **общим членом ряда** или n-ым членом ряда.

Определение 1.2. Суммы вида

$$\begin{aligned}
&S_1 = u_1,\\
&S_2 = u_1 + u_2,\\
&S_3 = u_1 + u_2 + u_3,\\
&\ldots\\
&S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n = \sum_{k=1}^{n} u_n,\\
&\ldots
\end{aligned}$$

называются **частичными суммами ряда**. Выражение S_n называется n-ой частичной суммой ряда.

Определение 1.3. Если существует конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ последовательности частичных сумм $\{S_n\}$ ряда (1.1), то ряд называется **сходящимся** и сумма ряда равна значению предела, то есть $S = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$. Если предел последовательности частичных сумм $\{S_n\}$ ряда не существует или последовательность $\{S_n\}$ является бесконечно большой, то ряд (1.1) называется **расходящимся** и суммы не имеет.

Математику считают символьным языком. Любое утверждение можно записать, применив символы математической логики. В большинстве случаев это позволяет сократить запись и упростить необходимые преобразования.

Запишем определение сходящегося ряда на языке «$\varepsilon - \delta$». Для этого нам нужно записать определение предела числовой последовательности. Каким бы ни было положительное число ε найдется номер N элемента последовательности $\{S_n\}$, начиная с которого все элементы указанной последовательности попадают в окрестность точки S радиуса ε. Как принято, словосочетания «для любого» («каким бы ни было») и слово «существует» («найдется») будем заменять символами $\forall$ и $\exists$ соответственно. Словосочетание «начиная с которого» можно переформулировать «для всех номеров n больше или равных N» в символьном виде это запишем так: $\forall n \geqslant N$. Знаком «:» будем заменять слово «выполняется». Итак, числовой ряд сходится, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N = N(\varepsilon) > 0 \quad \forall n \geqslant N: \ |S_n - S| < \varepsilon. \tag{1.2}$$

П р и м е р 1.1. Найти сумму бесконечной геометрической прогрессии $a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} + \ldots = \sum\limits_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$ $(a \neq 0)$.

Р е ш е н и е. Найдем n–ую частичную сумму ряда, используя формулу суммы n членов геометрической прогрессии (см. справочный материал на стр. 127):

$$S_n = a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} = \frac{a(q^n - 1)}{q - 1}.$$

Если $|q| < 1$, то $q^n \to 0$ при $n \to \infty$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \dfrac{a}{1-q}$ и ряд сходится. Если $|q| > 1$, то $q^n \to \infty$ А значит, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$, и ряд расходится. Если $q = 1$, то

$$S_n = a + a \cdot 1 + a \cdot 1^2 + \ldots + a \cdot 1^{n-1} = na \to \infty \text{ при } n \to \infty,$$

следовательно, ряд расходится. Если $q = -1$, то

$$S_n = a + a \cdot (-1) + a \cdot (-1)^2 + \ldots + a \cdot (-1)^{n-1} = \begin{cases} 0, & \text{если } n \text{ — четное,} \\ a, & \text{если } n \text{ — нечетное.} \end{cases}$$

Последовательность $\{S_n\}$ расходится, так как можно выделить две подпоследовательности $S_{2k} = 0$ и $S_{2k-1} = a$, имеющие различные пределы.

Итак, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$ сходится при $|q| < 1$ и расходится при $|q| \geqslant 1$.

П р и м е р 1.2. Для ряда $\frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 5} + \ldots$ выписать n–ый член ряда u_n, найти n–ую частичную сумму S_n. Найти сумму ряда или доказать, что ряд расходится.

Р е ш е н и е. Общий член ряда может быть записан в виде

$$u_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2},$$

отсюда

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}\right) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \\ + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2}.$$

Вычислим предел последовательности частичных сумм ряда:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+2}\right) = \frac{1}{2}.$$

Следовательно, ряд сходится и его сумма $\frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 5} + \ldots = \frac{1}{2}$.

Определение 1.4. Пусть дан ряд (1.1). Если в этом ряде отбросить первые n членов, то получится ряд:

$$u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+k} + \ldots = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k, \tag{1.3}$$

который называется **остатком числового ряда**.

Теорема 1.1. *Ряд* (1.1) *и его любой остаток* (1.3) *сходятся или расходятся одновременно.*

Приведем пример того, как символьный язык способствует формулировке новых утверждений.

Пусть ряд (1.1) сходится и имеет сумму S, тогда остаток этого ряда можно представить в виде $S - S_n = R_n$. Заметим, что по определению 1.2 сходящегося ряда получаем утверждение (определение бесконечно малой числовой последовательности)

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N = N(\varepsilon) > 0 \quad \forall n \geqslant N : \ |R_n| < \varepsilon.$$

Это означает, что последовательность $\{R_n\}$ — бесконечно малая при $n \to \infty$. Таким образом, можно сформулировать еще одну теорему.

Теорема 1.2. *Если ряд* (1.1) *сходится, то последовательность* $\{R_n\}$ *— бесконечно малая при* $n \to \infty$.

На практике использовать остаточный член ряда для исследования сходимости не представляется возможным. Во-первых, если отбросить первые n членов исходного ряда, то получим ряд с аналогичным общим членом. Во-вторых, можем определить остаток числового ряда через сумму ряда, но тогда мы должны уже заранее знать, что ряд сходится и иметь сумму этого ряда. Остаточный член ряда используют на практике для оценки погрешности вычислений.

1.2 Критерий Коши сходимости числового ряда

Для того чтобы последовательность частичных сумм ряда $\{S_n\}$ сходилась, необходимо и достаточно, чтобы последовательность $\{S_n\}$ была фундаментальной или, другими словами, было выполнено условие Коши:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N = N(\varepsilon) > 0 \ \forall n \geqslant N \ \forall p \in \mathbf{N} : \ |S_{n+p} - S_n| < \varepsilon.$$

Сформулируем в символьном виде условие Коши для числового ряда. Так как $S_{n+p} - S_n = \sum\limits_{k=1}^{n+p} u_k - \sum\limits_{k=1}^{n} u_k = \sum\limits_{k=n+1}^{n+p} u_k$, то отсюда вытекает критерий Больцано–Коши сходимости числового ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$.

Теорема 1.3. (Критерий Больцано–Коши). *Для того чтобы ряд* (1.1) *сходился, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие Коши*:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N = N(\varepsilon) > 0 \ \forall n \geqslant N \ \forall p \in \mathbf{N} : \ \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k \right| < \varepsilon. \tag{1.4}$$

Преимущество этого признака перед другими заключается в том, что он является необходимым и достаточным условием сходимости, а также для доказательства сходимости ряда не требуется знать сумму ряда. Отметим, что с помощью критерия сходимости Коши можно получить другие условия сходимости ряда, то есть критерий имеет применение в теории.

П р и м е р 1.3. Доказать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\operatorname{arctg} n}{2^n}$ сходится.

Р е ш е н и е. Рассмотрим отрезок исходного ряда. Возьмем слагаемые с номерами $n+1$, $n+2$, ..., $n+p$ и применим оценки

$$|a+b| \leqslant |a|+|b|, \quad |\operatorname{arctg} a| < \frac{\pi}{2}$$

(см. свойства обратных тригонометрических функций на стр. 129):

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{\operatorname{arctg} k}{2^k}\right| = \left|\frac{\operatorname{arctg}(n+1)}{2^{n+1}} + \frac{\operatorname{arctg}(n+2)}{2^{n+2}} + \ldots + \frac{\operatorname{arctg}(n+p)}{2^{n+p}}\right| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{\pi}{2} \cdot \left(\frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+2}} + \ldots + \frac{1}{2^{n+p}}\right) = \frac{\pi}{2^{n+2}} \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^p - 1}{\frac{1}{2} - 1} =$$
$$= \frac{\pi}{2^{n+1}} \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^p\right) < \frac{\pi}{2^{n+1}}.$$

Последняя оценка $1 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^p < 1$ справедлива для любого $p \in \mathbf{N}$. Определим номер $N(\varepsilon)$ элемента последовательности $\{S_n\}$ частичных сумм ряда, начиная с которого будет выполняться неравенство $\left|\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} u_k\right| < \varepsilon$. Для этого решим неравенство $\dfrac{\pi}{2^{n+1}} < \varepsilon$. Отсюда получаем $n > \log_2 \dfrac{\pi}{2\varepsilon}$, значит, $N(\varepsilon) = \max\left\{1;\ \left[\log_2 \dfrac{\pi}{2\varepsilon}\right] + 1\right\}$, где $[x]$ — целая часть числа x. Таким образом, выполняется условие Коши (1.4). Следовательно, исходный ряд сходится.

У п р а ж н е н и е 1. Используя критерий Больцано–Коши, доказать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos n}{n^2}$ сходится.

Указание к упражнению 1. Использовать неравенство
$$\frac{1}{(n+p)^2} \leqslant \frac{1}{n+p-1} - \frac{1}{n+p}.$$

Использование кванторов не только сокращает запись, но и позволяет весьма простым способом строить отрицания предложений (определений, утверждений), записанных с помощью кванторов. Для построения отрицания нужно квантор $\forall$ заменить на квантор $\exists$, а квантор $\exists$ — на квантор $\forall$ и стоящее после двоеточия неравенство заменить ему противоположным.

Согласно критерию Больцано–Коши, если условие Коши не выполнено, то есть
$$\exists \varepsilon > 0 \ \forall N \in \mathbf{N} \ \exists n \geqslant N \ \exists p \in \mathbf{N}: \ \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k \right| \geqslant \varepsilon, \tag{1.5}$$
то числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ расходится.

Пример 1.4. Доказать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\ln(n+1)}$ расходится.

Решение. Рассмотрим отрезок исходного ряда. Возьмем слагаемые с номерами $n+1$, $n+2$, $\ldots$, $n+p$. В силу того, что члены ряда положительны и справедлива оценка $\dfrac{1}{\ln(n+1)} > \dfrac{1}{n}$, имеем
$$\left| \sum_{r=n+1}^{n+p} \frac{1}{\ln(r+1)} \right| = \frac{1}{\ln(n+1)} + \frac{1}{\ln(n+2)} + \ldots + \frac{1}{\ln(n+p)} >$$
$$> \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n+p}.$$
Пусть $p = n$, тогда
$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n+p} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n+n} > \frac{1}{2n} \cdot n = \frac{1}{2}.$$
Таким образом, определено число $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$, при котором выполняется условие (1.5). Следовательно, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\ln(n+1)}$ расходится.

Упражнение 2. Доказать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ расходится.

1.3 Необходимое условие сходимости ряда

Если в условии Коши (1.4) выбрать $p = 1$, то получим

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N = N(\varepsilon) > 0 \ \forall n \geqslant N : \ |u_{n+1}| < \varepsilon. \tag{1.6}$$

Это означает, что если числовой ряд сходится, то общий член ряда является величиной бесконечно малой.

П р и м е р 1.5. Доказать, что ряд

$$1 - 1 - 1 + 1 + 1 + 1 - 1 - 1 - 1 - 1 + \ldots$$

расходится.

Р е ш е н и е. Если числовой ряд сходится, то выполняется условие (1.6). Так как для всех $n \in \mathbf{N}$ выполнено $|u_{n+1}| = 1$, то ряд расходится.

Сформулируем необходимый признак сходимости числового ряда.

Теорема 1.4. (Необходимый признак сходимости ряда). *Если числовой ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *сходится, то последовательность* $\{u_n\}$, *составленная из элементов ряда, бесконечно малая при* $n \to \infty$, *то есть выполнено условие* $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

З а м е ч а н и е 1.1. Обратное утверждение неверно. Последовательность $\left\{\dfrac{1}{\ln(n+1)}\right\}$ является бесконечно малой $\left(\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\ln(n+1)} = 0\right)$, но ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\ln(n+1)}$ расходится (см. пример 1.4, стр. 11).

П р и м е р 1.6. Доказать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ расходится.

Р е ш е н и е. Последовательность $\left\{\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n\right\}$ не является бесконечно малой, так как $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = e \neq 0$. Необходимое условие сходимости числового ряда не выполнено, исходный ряд расходится.

Рассмотрим ещё один пример.

П р и м е р 1.7. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n \cdot \arccos\dfrac{n^2}{n^2+1}$.

Р е ш е н и е. Предположим, что наш ряд сходится. Проверим, выполняется ли необходимый признак сходимости для нашего ряда, вычислим предел

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} n \cdot \arccos\frac{n^2}{n^2+1} = (\infty \cdot 0).$$

Неопределенность вида $\infty \cdot 0$ можно привести к виду $\dfrac{0}{0}$, затем воспользоваться правилом Лопиталя:

$$\lim_{x\to+\infty} x \cdot \arccos\frac{x^2}{x^2+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\arccos\dfrac{x^2}{x^2+1}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^3}{\sqrt{2x^2+1}(x^2+1)} =$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{\sqrt{2+\dfrac{1}{x^2}}\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)} = \sqrt{2}.$$

Таким образом, $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \sqrt{2} \neq 0$. Необходимый признак сходимости ряда не выполнен. Ряд расходится.

У п р а ж н е н и е 3. Доказать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{3n^3-1}{3n^3+2}\right)^{n^3}$ расходится.

§2. Ряды с положительными членами

Приступая к изучению нового раздела студент должен знать теорию числовых последовательностей, определение числового ряда и его суммы, уметь находить предел числовой последовательности.

Результатом освоения материала данного раздела является знание критериев и признаков сходимости рядов с положительными членами, умение применять рассмотренные в этом разделе признаки для исследования положительных рядов.

Задания лабораторной работы — 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

2.1 Сходимость рядов с положительными членами

Будем рассматривать числовые ряды, элементы которых сохраняют свой знак, то есть $\forall n \in \mathbf{N}: \ u_n > 0$ или $\forall n \in \mathbf{N}: \ u_n < 0$. В силу того, что общий множитель (-1) можно вынести за знак суммы, числовые ряды с отрицательными членами по своим свойствам будут идентичны рядам с положительными членами. Поэтому нет необходимости рассматривать их отдельно.

Если к элементам числового ряда с положительными членами добавить (конечное или бесконечное число) элементы тождественно равные нулю, то, очевидно, на сходимость исходного ряда это не повлияет. Следовательно, можем рассматривать общий случай, когда $\forall n \in \mathbf{N}$ элементы ряда неотрицательны $(u_n \geqslant 0)$.

Определение 2.5. Если все $(\forall n \in \mathbf{N})$ элементы числового ряда неотрицательны $(u_n \geqslant 0)$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ называется рядом с положительными членами или **положительным рядом**.

Все, что было сказано о рядах в первом параграфе, справедливо и для положительных рядов. Сформулируем критерий сходимости положительного ряда.

Теорема 2.5. (Критерий сходимости положительного ряда.) *Для того, чтобы положительный ряд был сходящимся, необходимо и достаточно, чтобы последовательность его частичных сумм $\{S_n\}$ была ограничена, то есть $\exists C > 0 \quad \forall n \in \mathbf{N}: \ |S_n| \leqslant C$.*

П р и м е р 2.8. Доказать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin \dfrac{1}{2^n}$ сходится.

Р е ш е н и е. Докажем, что последовательность частичных сумм данного ряда $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \sin\dfrac{1}{2^k}$ ограничена. Оценки $|\sin a| \leqslant 1$ и $|S_n| \leqslant n$ не дают нам возможности говорить об ограниченности последовательности частичных сумм $\{S_n\}$ ряда. Так как аргумент синуса удовлетворяет двойному неравенству $0 < \dfrac{1}{2^n} \leqslant \dfrac{1}{2}$, то можем использовать оценку $|\sin a| \leqslant |a|$ (см. справочный материал на стр. 129). Тогда получим

$$|S_n| = \left|\sum_{k=1}^{n} \sin\frac{1}{2^k}\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} = \frac{\frac{1}{2}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)}{1-\frac{1}{2}} < 1.$$

Таким образом, последовательность $\{S_n\}$ является ограниченной. Значит, исходный ряд сходится.

Приведем ещё один признак сходимости положительного ряда.

Теорема 2.6. (Признак сгущения Коши). *Пусть элементы положительного ряда не возрастают*

$$u_1 \geqslant u_2 \geqslant u_3 \geqslant \ldots \geqslant u_n \geqslant \ldots \geqslant 0.$$

Тогда ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *и* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} 2^k u_{2^k}$ либо оба *сходятся, либо оба расходятся* (*сходятся или расходятся одновременно*).

П р и м е р 2.9. Исследовать на сходимость числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^p}$, где $p \in \mathbf{R}$.

Р е ш е н и е. Возможны два случая: $p \leqslant 0$ и $p > 0$. В первом случае для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^p}$ не выполнено необходимое условие сходимости ряда, так как $u_n = \dfrac{1}{n^p} \not\to 0$ при $n \to \infty$ и ряд расходится. При $p > 0$ получим $u_n = \dfrac{1}{n^p} \to 0$ при $n \to \infty$, ряд положительный и его члены убывают. Рассмотрим числовой ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} 2^k \cdot \dfrac{1}{2^{kp}} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} 2^{k(1-p)}$. Имеем сумму геометрической прогрессии со знаменателем $q = 2^{1-p}$. Тогда если знаменатель прогрессии $q = 2^{1-p} < 1$, то $1-p < 0$, $p > 1$ и ряд сходится. При $q = 2^{1-p} > 1$ следует $1 - p > 0$, $p < 1$ и ряд расходится. При $p = 1$ следует $q = 1$ и ряд так же расходится.

Итак, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ сходится при $p > 1$ и расходится при $p \leqslant 1$.

З а м е ч а н и е 2.2. Ряд вида $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ при $0 < p < 1$ и $p > 1$ называется **обобщенным гармоническим рядом**. Если $p = 1$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ называется **гармоническим**.

2.2 Теоремы сравнения и их следствия

Рассмотрим два положительных ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots, \tag{u}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n = v_1 + v_2 + \ldots + v_n + \ldots \tag{v}$$

Теорема 2.7. (Признак сравнения 1). *Пусть даны два положительных ряда* (u) *и* (v). *Если* $u_n = O(v_n)$ $(n \to \infty)$, *то из сходимости ряда* (v) *следует сходимость ряда* (u), *а из расходимости ряда* (u) *следует расходимость ряда* (v).

Следствие 2.1. (Признак сравнения 2). *Пусть даны два положительных ряда* (u) *и* (v). *Если, начиная с некоторого номера, выполняется неравенство* $u_n \leqslant v_n$, *то из сходимости ряда* (v) *следует сходимость ряда* (u), *а из расходимости ряда* (u) следует расходимость ряда (v).

Другими словами, из сходимости ряда с большими членами следует сходимость ряда с меньшими членами. И наоборот, из расходимости ряда с меньшими членами следует расходимость ряда с большими членами.

Когда применяют признак сравнения 2, то часто приходится оценивать дробь. Если хотим оценить дробь сверху, то нужно увеличить числитель дроби и уменьшить знаменатель. Если оцениваем дробь снизу, то уменьшаем числитель, увеличиваем знаменатель.

П р и м е р 2.10. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2+(-1)^n}{3^n}$.

Р е ш е н и е. Оценим сверху n-ый член ряда:

$$u_n = \frac{2+(-1)^n}{3^n} \leqslant \frac{2+1}{3^n} = \frac{1}{3^{n-1}}.$$

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{3^{n-1}}$ сходится, так как является суммой геометрической прогресси со знаменателем $q = \dfrac{1}{3}$. Следовательно, исходный ряд сходится по признаку сравнения 2.

П р и м е р 2.11. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n-1} \cos \dfrac{\pi}{4n}$.

Р е ш е н и е. Так как $0 < \dfrac{\pi}{4n} \leqslant \dfrac{\pi}{4}$, то $\dfrac{\sqrt{2}}{2} \leqslant \cos \dfrac{\pi}{4n} < 1$. Оценим снизу n-ый член ряда:

$$\frac{1}{n-1} \cos \frac{\pi}{4n} \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2(n-1)} > \frac{\sqrt{2}}{2n}.$$

Гармонический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ расходится. Следовательно, исходный ряд расходится по признаку сравнения 2.

Следствие 2.2. (Признак сравнения 3). *Пусть даны два положительных ряда* (u) *и* (v). *Если* $u_n = O^*(v_n)$ $(n \to \infty)$, *то ряды* (u) *и* (v) *либо оба сходятся, либо оба расходятся.*

Если при исследовании ряда на сходимость используется признак сравнения 3, то удобно использовать таблицу эквивалентных функций, которая размещена в конце пособия (см. стр. 128).

П р и м е р 2.12. Исследовать на сходимость числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\ln\left(1+\frac{4}{n}\right)} \cdot \left(e^{1+4/\sqrt{n}} - 1\right).$$

Р е ш е н и е. Заметим, что при $n \to \infty$

$$\sqrt{\ln\left(1+\frac{4}{n}\right)\cdot\left(e^{1+4/\sqrt{n}}-1\right)} \sim \sqrt{\frac{4}{n}}\cdot\left(1+\frac{4}{\sqrt{n}}\right)=\frac{2}{\sqrt{n}}+\frac{8}{n}.$$

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\sqrt{n}}$ расходится, так как является обобщенным гармоническим рядом при $p=\frac{1}{2}$. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{8}{n}$ расходится, так как является гармоническим. Следовательно, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{\sqrt{n}}+\frac{8}{n}\right)$ расходится. Делаем вывод: исходный ряд расходится по признаку сравнения 3.

Следствие 2.3. (Признак сравнения 4). *Пусть* (u) *положительный ряд. Если* $u_n = O^*\left(\frac{1}{n^p}\right)$ $(n\to\infty)$, *то при* $p>1$ *ряд* (u) *сходится, а при* $p\leqslant 1$ *ряд* (u) *расходится.*

П р и м е р 2.13. Исследовать ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\arcsin\frac{n+1}{n^3+n+2}$ на сходимость.

Р е ш е н и е. Так как $\arcsin\frac{n+1}{n^3+n+2}\sim\frac{1}{n^2}$ при $n\to\infty$ и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ сходится (обобщенный гармонический ряд с $p=2>1$), то согласно признаку сравнения 4, исходный ряд сходится.

Обобщим все выше изложенные признаки.

Теорема 2.8. (Признак сравнения 5). *Пусть даны два положительных ряда* (u) *и* (v). *Пусть существует* $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=K$.

1) *Если* $0\leqslant K<+\infty$, *то из сходимости числового ряда* (v) *следует сходимость числового ряда* (u).

2) *Если* $0<K\leqslant+\infty$, *то из сходимости числового ряда* (u) *следует сходимость числового ряда* (v).

3) *Если* $0<K<+\infty$, *то оба ряда либо сходятся, либо расходятся.*

2.3 Признак Даламбера

Теорема 2.9. (Признак сходимости Даламбера). *Пусть для положительного ряда существует* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = l$. *Тогда если* $l < 1$, *то ряд* (u) *сходится; если* $l > 1$, *то ряд* (u) *расходится; если* $l = 1$, *то признак ответа не даёт.*

П р и м е р 2.14. Исследовать ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!a^n}{n^n}$ при $a \neq e$, $a > 0$ на сходимость.

Р е ш е н и е. Вычислим предел отношения элементов ряда с номерами $n+1$ и n:

$$l = \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!a^{n+1}n^n}{(n+1)^{n+1}n!a^n} = a \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{a}{e}.$$

С помощью признака Даламбера делаем вывод: если $a > e$, то исходный ряд расходится; если $a < e$, то исходный ряд сходится.

2.4 Признак Коши (радикальный)

Теорема 2.10. (Радикальный признак сходимости Коши). *Пусть для положительного ряда* (u) *существует* $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{u_n} = l$. *Тогда если* $l < 1$, *то ряд* (u) *сходится; если* $l > 1$, *то ряд* (u) *расходится; если* $l = 1$, *то признак ответа не даёт.*

П р и м е р 2.15. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{an}{n+1}\right)^n$, при $a > 0$.

Р е ш е н и е. Вычислим предел :

$$l = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{an}{n+1} = a.$$

По признаку Коши при $a < 1$ исходный ряд сходится; при $a \geqslant 1$ исходный ряд расходится. Рассмотрим случай, когда $a = 1$ имеем

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = e^{-1} \neq 0.$$

Так как не выполнено необходимое условие сходимости числового ряда, то ряд расходится.

2.5 Признаки Гаусса, Куммера, Раабе и Бертрана

Теорема 2.11. (Признак сходимости Гаусса). *Пусть для элементов положительного числового ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$, *где* $u_n \neq 0$ *для всех* $n \in \mathbf{N}$ *выполняется*

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \alpha + \frac{\beta}{n} + \frac{\gamma_n}{n^{1+\delta}}, \quad |\gamma_n| < c,\ \delta > 0, \tag{2.1}$$

тогда

1) *при* $\alpha > 1$ *ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *сходится, а при* $\alpha < 1$ *расходится;*

2) *при* $\alpha = 1$ *этот ряд сходится в случае, если* $\beta > 1$, *и расходится в случае, если* $\beta \leqslant 1$.

П р и м е р 2.16. Исследовать ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n+1)}{2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (2n)}$ на сходимость.

Р е ш е н и е. Рассмотрим отношение

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{2n+2}{2n+3} = 1 - \frac{1}{2n+3} = 1 - \frac{1}{2n} \cdot \frac{1}{1 + \dfrac{3}{2n}}.$$

Воспользуемся разложением функции $\frac{1}{1+x}$ в ряд Тейлора в окрестности точки $x_0 = 0$ с остаточным членом в форме Лагранжа (см. стр. 130):

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + \frac{1}{(1+c)^3} x^2, \tag{2.2}$$

где c принадлежит окрестности точки $x_0 = 0$. Подставим в разложение (2.2) вместо x выражение $\frac{3}{2n}$, тогда согласно формуле (2.1) получим

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = 1 - \frac{1}{2n} \cdot \left(1 - \frac{3}{2n} + \frac{1}{(1+c)^3} \cdot \left(\frac{3}{2n}\right)^2\right) = 1 - \frac{1}{2n} + \frac{3}{4n^2} - \frac{1}{(1+c)^3} \cdot \frac{9}{8n^3},$$

где $\alpha = 1$, $\beta = -\frac{1}{2}$, $\gamma_n = \frac{3}{4} - \frac{1}{(1+c)^3} \cdot \frac{9}{8n}$ и $\delta = 1$. Покажем, что последовательность $\{\gamma_n\}$ ограничена:

$$|\gamma_n| = \left|\frac{3}{4} - \frac{1}{(1+c)^3} \cdot \frac{9}{8n}\right| \leqslant \frac{3}{4} + \frac{1}{(1+c)^3} \cdot \frac{9}{8}.$$

Параметр $\alpha = 1$, значит, пользуемся вторым условием в признаке сходимости Гаусса. Параметр $\beta = -\dfrac{1}{2}$, следовательно, исходный ряд расходится.

Теорема 2.12. (Признак сходимости Куммера). *Пусть* $\{c_n\}$ *— последовательность положительных чисел такая, что ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{c_n}$ *расходится, и пусть для положительного числового ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$, *где* $u_n \neq 0$ *для всех* $n \in \mathbf{N}$, *существует*

$$\lim_{n\to\infty} \left(c_n \cdot \frac{u_n}{u_{n+1}} - c_{n+1} \right) = K.$$

Тогда если $K > 0$, *то ряд сходится; если* $K < 0$, *то ряд расходится.*

Замечание 2.3. При $K = 0$ признак Куммера не работает.

Пример 2.17. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$.

Решение. В качестве последовательности c_n выберем последовательность n. Гармонический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ расходится. Рассмотрим отношение

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{(2n)!!(2n+3)!!}{(2n+1)!!(2n+2)!!} = \frac{2n+3}{2n+2}.$$

Вычислим предел

$$\lim_{n\to\infty} \left(n \cdot \frac{2n+3}{2n+2} - (n+1) \right) = \lim_{n\to\infty} \frac{-n-2}{2n+2} = -\frac{1}{2} < 0.$$

Таким образом, делаем вывод, что исходный ряд расходится по признаку Куммера.

Теорема 2.13. (Признак сходимости Раабе). *Пусть для положительного числового ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$, *где* $u_n \neq 0$ *при всех* $n \in \mathbf{N}$, *существует*

$$\lim_{n\to\infty} n \left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \right) = R.$$

Тогда если $R > 1$, *то ряд сходится; если* $R < 1$, *то ряд расходится.*

П р и м е р 2.18. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!!}{n^2(2n+1)!!}$.

Р е ш е н и е. Отношение элементов ряда с номерами n и $n+1$ имеет вид

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{(2n)!!(n+1)^2(2n+3)!!}{n^2(2n+1)!!(2n+2)!!} = \frac{(2n+3)(n+1)^2}{(2n+2)n^2}.$$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$, то признак Даламбера здесь не работает. Вычислим предел

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{(2n+3)(n+1)^2}{(2n+2)n^2} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{n(5n^2+8n+3)}{(2n+2)n^2} = \frac{5}{2} > 1.$$

Исходный ряд сходится по признаку Раабе.

Теорема 2.14. (Признак сходимости Бертрана). *Пусть для положительного числового ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$, *где* $u_n \neq 0$ *при всех* $n \in \mathbf{N}$, *существует*

$$\lim_{n\to\infty} \ln n\left[n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) - 1\right] = B.$$

Тогда если $B > 1$, *то ряд сходится; если* $B < 1$, *то ряд расходится.*

П р и м е р 2.19. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)\left(\frac{1}{2}+2\right)\cdot\ldots\cdot\left(\frac{1}{2}+n\right)\sqrt{n}}$ исследовать на сходимость.

Р е ш е н и е. Отношение элементов ряда с номерами n и $n+1$ имеет вид

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{\sqrt{n+1}\left(n+\frac{3}{2}\right)}{\sqrt{n}(n+2)}.$$

Вычислим предел

$$\lim_{n\to\infty} \ln n \cdot \left[n\left(\frac{\sqrt{n+1}\left(n+\frac{3}{2}\right)}{\sqrt{n}(n+2)} - 1\right) - 1\right] =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \ln n \cdot \frac{\sqrt{n}\sqrt{n+1}\left(n+\frac{3}{2}\right) - n^2 - 3n - 2}{n+2} = -\infty.$$

Исходный ряд расходится (по признаку Бертрана).

2.6 Интегральный признак Коши

Теорема 2.15. (Интегральный признак сходимости Коши). *Пусть $f(x)$ — непрерывная, неотрицательная и монотонно убывающая на множестве $[1, +\infty)$ функция. Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ и несобственный интеграл $\int\limits_{1}^{+\infty} f(x)dx$ сходятся или расходятся одновременно.*

П р и м е р 2.20. Исследовать на сходимость числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)}.$$

Р е ш е н и е. Рассмотрим $f(x) = \dfrac{1}{(x+1)\ln^2(x+1)}$. Проверим, что выполняются условия теоремы на $[1, +\infty)$: $f(x) \geqslant 0$, $f(x)$ непрерывна и монотонно убывает. Исследуем на сходимость несобственный интеграл:

$$\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{1}{(x+1)\ln^2(x+1)}\,dx = \int\limits_{1}^{+\infty} \frac{d\ln(x+1)}{\ln^2(x+1)} = \lim_{b\to+\infty} \left(-\frac{1}{\ln(x+1)} \right)\Bigg|_{1}^{b} = \frac{1}{\ln 2}.$$

Несобственный интеграл сходится. Следовательно, исходный ряд сходится (по интегральному признаку Коши).

§3. Ряды с членами произвольного знака

Для успешного изучения данного раздела студент должен знать теорию числовых последовательностей, уметь находить предел числовой последовательности, исследовать последовательность на монотонность и ограниченность.

После изучения раздела студент должен уметь различать знакочередующиеся ряды и исследовать их на сходимость, знать достаточные признаки сходимости рядов с членами произвольного знака, уметь исследовать ряд на абсолютную и условную сходимости.

Задания лабораторной работы — 10,11,12,13.

3.1 Признак Лейбница

Определение 3.6. Ряд вида

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots + (-1)^{n-1}u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n, \tag{3.1}$$

где $u_n \geqslant 0$, называется **знакочередующимся**.

Теорема 3.16. (Признак сходимости Лейбница). *Если для знакочередующегося ряда* (3.1) *выполнены условия*:

1) *последовательность* $\{u_n\}$ *не возрастает, то есть* $\exists N \in \mathbf{N}\ \forall n \geqslant N:$ $u_n \geqslant u_{n+1}$,

2) *последовательность* $\{u_n\}$ *бесконечно малая при* $n \to \infty$, *то есть* $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$,

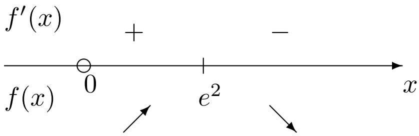
то ряд (3.1) *сходится.*

П р и м е р 3.21. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n \ln n}{\sqrt{n}}$.

Р е ш е н и е. Вычислим предел, используя правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0.$$

Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln n}{\sqrt{n}} = 0$. Исследуем функцию $f(x) = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$ на монотонность. Область определения функции $(0; +\infty)$. Вычислим производную $f'(x) = \dfrac{1 - 0,5\ln x}{x\sqrt{x}}$. Найдем промежутки, где сохраняется знак производной.



При $x > e^2$ функция $f(x) = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$ убывает. Значит при $n > 7$ выполняется неравенство $u_n = \dfrac{\ln n}{\sqrt{n}} > \dfrac{\ln(n+1)}{\sqrt{n+1}} = u_{n+1}$. Выполнены оба условия признака Лейбница. Делаем вывод: ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n \ln n}{\sqrt{n}}$ сходится.

Теорема 3.17. (Об оценке остатка знакочередующегося ряда). *Сумма остатка знакочередующегося ряда* (3.1), *удовлетворяющего условиям признака Лейбница, имеет знак первого оставшегося члена и не превосходит его по модулю, то есть* $|R_n| \leqslant u_{n+1}$.

П р и м е р 3.22. Вычислить с точностью до $0,01$ сумму ряда

$$\frac{1}{1!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{(2n-1)!} + \ldots$$

Р е ш е н и е. Нетрудно убедиться, что данный ряд сходится по признаку Лейбница. Так как сумма ряда должна быть вычислена с точностью до $0,01$, то достаточно, чтобы выполнялось неравенство $|R_n| \leqslant u_{n+1} \leqslant 0,01$, или $\dfrac{1}{(2n+1)!} \leqslant 0,01$. Это неравенство выполняется, начиная с $n = 2$. Таким образом,

$$S \approx S_3 = \frac{1}{1!} - \frac{1}{3!} \approx 1 - 0,16 \approx 0,84.$$

3.2 Признак Дирихле

Теорема 3.18. (Признак Дирихле). *Если последовательность* $\{a_n\}$ монотонная и бесконечно малая, то есть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, *а последовательность частичных сумм* $S_n = \sum\limits_{j=1}^{n} b_j$ *ограничена, то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ *сходится.*

П р и м е р 3.23. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin n}{\sqrt{n}}$.

Р е ш е н и е. Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin n$. Преобразуем его n–ую частичную сумму $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \sin k$. Для этого воспользуемся равенством (см. справочный материал на стр. 129)

$$\sum_{k=0}^{n} \sin(x + k\alpha) = \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\alpha\right)\sin\left(x + \frac{n}{2}\right)\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}}, \quad \alpha \neq 2\pi l, \quad l \in \mathbf{Z},$$

которое при $x = 0$, $\alpha = 1$ примет вид

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \sin k = -\sin 0 + \sum_{k=0}^{n} \sin k = \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\right)\sin\left(\frac{n}{2}\right)}{\sin\frac{1}{2}}.$$

Оценим модуль n–ой частичной суммы S_n ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin n$:

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \sin k\right| = \left|\frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\right)\sin\left(\frac{n}{2}\right)}{\sin\frac{1}{2}}\right| \leqslant \frac{1}{\sin\frac{1}{2}}.$$

Последовательность $\left\{\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right\}$ монотонно убывает, так как $\dfrac{1}{\sqrt{n}} > \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$ и является бесконечно малой при $n \to \infty$. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin n}{\sqrt{n}}$ сходится (по признаку Дирихле).

3.3 Признак Абеля

Теорема 3.19. (Признак сходимости Абеля). *Если последовательность* $\{a_n\}$ *монотонна и ограничена, а ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *сходится, то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ *также сходится.*

П р и м е р 3.24. Исследовать ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n\cos 2n}{1+n^2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^3$ на сходимость.

Р е ш е н и е. Последовательность $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^3\right\}$ монотонно убывает, причем справедлива оценка $\left(1+\frac{1}{n}\right)^3 \leqslant 2^3 = 8$. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n\cos 2n}{1+n^2}$ сходится по признаку Дирихле, так как последовательность частичных сумм $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \cos 2k$ ограничена, а последовательность $\left\{\frac{n}{1+n^2}\right\}$ — бесконечно малая и монотонно убывает. Исходный ряд сходится по признаку Абеля.

У п р а ж н е н и е 4. Докажите, что последовательность частичных сумм $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \cos 2k$ ограничена.

Указание к упражнению 4. Преобразовать сумму косинусов, формулу можно найти в разделе «Справочный материал» на стр. 129.

3.4 Абсолютная и условная сходимость

Рассмотрим числовой ряд с произвольными элементами

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots \tag{u}$$

Составим новый ряд из абсолютных величин элементов ряда (u), то есть для всех $n \in \mathbf{N}$ берем $|u_n|$:

$$|u_1| + |u_2| + \ldots + |u_n| + \ldots \tag{$|u|$}$$

Очевидно, что новый ряд будет положительным.

Теорема 3.20. *Если сходится ряд* $(|u|)$, *то сходится и ряд* (u).

Определение 3.7. Если сходится ряд $(|u|)$, то ряд (u) называется **абсолютно сходящимся**.

Исследовать ряд на абсолютную сходимость можно с помощью признаков сходимости для положительных рядов (см. §2. Ряды с положительными членами, стр. 14).

Определение 3.8. Если ряд (u) сходится, а ряд $(|u|)$ расходится, то ряд (u) называется **условно сходящимся**.

Пример 3.25. Исследовать на сходимость и абсолютную сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\sqrt[3]{n}}{1+\sqrt{n}}$.

Решение. Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n\dfrac{\sqrt[3]{n}}{1+\sqrt{n}}\right| = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n}}{1+\sqrt{n}}$. Так как $\dfrac{\sqrt[3]{n}}{1+\sqrt{n}} \sim \dfrac{1}{n^{1/6}}$ при $n\to\infty$ и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{1/6}}$ расходится как обобщенный гармонический ряд с $p=\dfrac{1}{6}<1$, то по признаку сравнения 3 расходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n}}{1+\sqrt{n}}$. Следовательно, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\sqrt[3]{n}}{1+\sqrt{n}}$ не сходится абсолютно. Этот ряд является знакочередующимся, покажем, что он сходится по признаку Лейбница:

1) последовательность $\left\{\dfrac{\sqrt[3]{n}}{1+\sqrt{n}}\right\}$ является бесконечно малой, так как $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n}}{1+\sqrt{n}}=0$;

2) последовательность $\left\{\dfrac{\sqrt[3]{n}}{1+\sqrt{n}}\right\}$ монотонно убывает при $n\geqslant 4$.

Исходный ряд сходится условно.

Упражнение 5. Докажите, что начиная с четвертого номера последовательность $\left\{\dfrac{\sqrt[3]{n}}{1+\sqrt{n}}\right\}$ монотонно убывает.

§4. Функциональные ряды

Для успешного освоения материала раздела студент должен знать теорию числовых последовательностей, уметь находить предел числовой последовательности, уметь находить область определения функции, владеть аппаратом теории числовых рядов, рассмотренным в предыдущих разделах.

После изучения данного раздела студент должен знать, что такое предельная функция, уметь находить области сходимости функциональных рядов, уметь исследовать функциональные последовательности и ряды на сходимость и равномерную сходимость, знать свойства равномерно сходящихся функциональных последовательностей и рядов.

Задания лабораторной работы — 14, 15, 16, 17, 18, 19.

4.1 Предельная функция

Пусть на множестве $X \subset \mathbf{R}$ определены функции

$$f_1(x),\ f_2(x),\ \ldots, f_n(x),\ \ldots,$$

то есть на множестве X задана функциональная последовательность $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ (далее ∞ и $n = 1$ будут опускаться). Зафиксируем точку $x_0 \in X$ и найдем значения функций $f_n(x)$ в этой точке для всех $n \in \mathbf{N}$. Получим числовую последовательность $\{f_n(x_0)\}$.

Определение 4.9. Если существует конечный предел числовой последовательности $\{f_n(x_0)\}$, то говорят, что функциональная последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится в точке x_0, то есть $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_0) = A_{x_0}$. Сходимость функциональной последовательности $\{f_n(x)\}$ в точке $x_0 \in X$ называют **поточечной сходимостью** функциональной последовательности.

Поточечная сходимость $\{f_n(x)\}$ в точке $x_0 \in X$ записывается на языке «$\varepsilon - \delta$» следующим образом:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N(\varepsilon) \quad \forall n \geqslant N: \quad |f_n(x_0) - A_{x_0}| < \varepsilon.$$

П р и м е р 4.26. На отрезке $[0,\, 1]$ задана функциональная последовательность

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 - nx, & 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{1}{n}, \\ 0, & \dfrac{1}{n} < x \leqslant 1. \end{cases}$$

Выяснить сходится ли данная функциональная последовательность в точках $x = 0$, $x = \dfrac{1}{2}$, $x = \dfrac{1}{n}$ при $n \geqslant 3$ и $x = 1$.

Р е ш е н и е. Выпишем элементы этой последовательности:

$$f_1(x) = 1 - x, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \quad f_2(x) = \begin{cases} 1 - 2x, & 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{1}{2}, \\ 0, & \dfrac{1}{2} < x \leqslant 1, \end{cases}$$

$$f_3(x) = \begin{cases} 1 - 3x, & 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{1}{3}, \\ 0, & \dfrac{1}{3} < x \leqslant 1, \end{cases} \quad \ldots \quad f_n(x) = \begin{cases} 1 - nx, & 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{1}{n}, \\ 0, & \dfrac{1}{n} < x \leqslant 1, \end{cases} \quad \ldots$$

Найдем значения этих функций в точке $x = 0$, получим

$$f_1(0) = 1,\ f_2(0) = 1,\ f_3(0) = 1, \ldots,\ f_n(0) = 1,\ \ldots$$

Таким образом, получили числовую последовательность, каждый элемент которой равен единице. Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(0) = 1$.

Подставим $x = \dfrac{1}{2}$, тогда

$$f_1\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2},\ f_2\left(\frac{1}{2}\right) = 0,\ f_3\left(\frac{1}{2}\right) = 0,\ \ldots,\ f_n\left(\frac{1}{2}\right) = 0,\ \ldots$$

и предел числовой последовательности $\left\{f_n\left(\dfrac{1}{2}\right)\right\}$ равен нулю.

При $x = \dfrac{1}{n}$ $(n > 3)$ получим числовую последовательность

$$f_1\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{n-1}{n},\ f_2\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{n-2}{n},\ f_3\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{n-3}{n},\ \ldots,$$

$$f_n\left(\frac{1}{n}\right) = 0,\ f_{n+1}\left(\frac{1}{n}\right) = 0,\ f_{n+2}\left(\frac{1}{n}\right) = 0,\ \ldots,$$

предел которой равен нулю.

Если $x = 1$, то получим последовательность состоящую из нулей, значит, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(1) = 0$.

Определение 4.10. Множество точек, в которых заданная функциональная последовательность сходится, называется **множеством сходимости** (областью сходимости) функциональной последовательности.

Определение 4.11. Пусть X — область сходимости последовательности $\{f_n(x)\}$. Каждой точке $x_0 \in X$ функциональной последовательности сопоставляется число A_{x_0}. Таким образом, на множестве X задана функция $f(x)$, значения которой определяются равенством $f(x_0) = A_{x_0}$. Функцию $f(x)$ называют **предельной функцией** функциональной последовательности $\{f_n(x)\}$ на множестве X. Пишут

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \quad \text{или} \quad f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{X} f(x).$$

Отметим, что большую роль при нахождении предельной функции играет множество X, если его изменить, то и предельная функция может измениться.

Сходимость функциональной последовательности $\{f_n(x)\}$ к функции $f(x)$ на множестве X записывается на языке «$\varepsilon - \delta$» следующим образом:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall x \in X \quad \exists N(\varepsilon, x) \quad \forall n \geqslant N : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Пример 4.27. Найти предельную функцию для функциональной последовательности из примера 4.26.

Решение. По определению 4.11 на отрезке $[0,\ 1]$ предельной будет функция

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x = 0, \\ 0, & 0 < x \leqslant 1. \end{cases}$$

Пример 4.28. Найти предельную функцию для функциональной последовательности $f_n(x) = n \sin\left(\dfrac{x+1}{nx^2}\right)$ на множестве $[1,\ +\infty)$.

Решение. Зафиксируем $x \in [1,\ +\infty)$ и найдем предел, учитывая $\sin\alpha \sim \alpha$ при $\alpha \to 0$:

$$\lim_{n\to\infty} n \sin\left(\frac{x+1}{nx^2}\right) = \lim_{n\to\infty} n \cdot \frac{x+1}{nx^2} = \frac{x+1}{x^2}.$$

Значение x — фиксированное, но произвольное, и найденный предел определен для всех x из указанного множества. Предельная функция имеет вид $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2}$.

У п р а ж н е н и е 6. Для функциональной последовательности $f_n(x) = x^n$: 1) определить множество сходимости; 2) на множестве сходимости найти предельную функцию.

О т в е т: 1) $(-1, 1]$; 2) $f(x) = \begin{cases} 0, & |x| < 1, \\ 1, & x = 1. \end{cases}$

4.2 Понятие равномерной сходимости

Определение 4.12. Говорят, что функциональная последовательность $\{f_n(x)\}$ **сходится равномерно** к функции $f(x)$ на множестве X, если каким бы ни было положительное число ε, найдется номер N элемента последовательности, зависящий только от ε, такой что для всех элементов функциональной последовательности $\{f_n(x)\}$, начиная с номера N, и для всех x из множества X будет выполнено условие: модуль разности элемента последовательности $f_n(x)$ и предельной функции $f(x)$ окажется меньше заданного числа ε. Пишут $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\overset{X}{\rightrightarrows}} f(x)$.

На языке «$\varepsilon - \delta$» равномерная сходимость функциональной последовательности $\{f_n(x)\}$ к предельной функции на множестве X будет записана следующим образом:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N(\varepsilon) \quad \forall n \geqslant N \quad \forall x \in X: \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

З а м е ч а н и е 4.4. Из равномерной сходимости функциональной последовательности $\{f_n(x)\}$ на множестве X следует поточечная сходимость на этом множестве. Обратное утверждение не верно.

Использовать определение для доказательства равномерной сходимости на практике в большинстве случаев не представляется возможным. Поэтому для доказательства применяют чаще критерии равномерной сходимости функциональной последовательности. Сформулируем их.

Теорема 4.21. (Достаточное условие равномерной сходимости). *Если существует числовая последовательность $\{a_n\}$ и номер N такие, что для всех $n \geqslant N$ и для всех $x \in X$ выполняется неравенство*

$$|f_n(x) - f(x)| \leqslant a_n \quad \textit{при этом} \lim_{n\to\infty} a_n = 0,$$

то функциональная последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится равномерно к функции $f(x)$ на множестве X.

Пример 4.29. Доказать, что функциональная последовательность $f_n(x) = \dfrac{2n^3}{n^3 + x^4}$ равномерно сходится на отрезке $[-5,\ 2]$.

Решение. Найдем предельную функцию $f(x)$. Зафиксируем число x из отрезка $[-5,\ 2]$, тогда

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^3}{n^3 + x^4} = 2, \quad \text{то есть} \quad f(x) = 2.$$

Оценим модуль разности функциональной последовательности $f_n(x)$ и предельной функции $f(x)$ на отрезке $[-5,\ 2]$:

$$\left|\frac{2n^3}{n^3 + x^4} - 2\right| = \left|\frac{2x^4}{n^3 + x^4}\right| \leqslant \frac{2 \cdot |-5|^4}{n^3 + 0^4} = \frac{1250}{n^3}.$$

Для того чтобы оценить дробь сверху, увеличили числитель и уменьшили знаменатель. Функция $y = x^4$ на отрезке $[-5,\ 2]$ наибольшее значение принимает в точке $x = -5$, а наименьшее в точке $x = 0$. Потому в числителе вместо x^4 записываем $(-5)^4$, а в знаменателе x заменяем нулем. Последовательность $a_n = \dfrac{1250}{n^3}$ является бесконечно малой. Таким образом, функциональная последовательность $f_n(x) = \dfrac{2n^3}{n^3 + x^4}$ равномерно сходится на отрезке $[-5,\ 2]$.

Пример 4.30. Доказать, что функциональная последовательность $f_n(x) = \dfrac{\operatorname{arctg}(n\sqrt{x})}{\sqrt{n^3 + 2nx + x^2 + 1}}$ равномерно сходится на множестве $[0,\ +\infty)$.

Решение. В данном случае предельной функцией является функция тождественно равная нулю: $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\operatorname{arctg}(n\sqrt{x})}{\sqrt{n^3 + 2nx + x^2 + 1}} = 0$. Функция $\operatorname{arctg}(n\sqrt{x})$ является ограниченной на своей области определения: $|\operatorname{arctg}(n\sqrt{x})| < \dfrac{\pi}{2}$ (см. свойства функции $y = \operatorname{arctg} x$, стр. 129). При каждом фиксированном n функция $g(x) = n^3 + 2nx + x^2 + 1$ на множестве $[0,\ +\infty)$ возрастает и принимает наименьшее значение в нуле. Тогда справедлива оценка

$$\left|\frac{\operatorname{arctg}(n\sqrt{x})}{\sqrt{n^3 + 2nx + x^2 + 1}}\right| < \frac{\pi/2}{\sqrt{n^3 + 1}} < \frac{\pi}{2n\sqrt{n}} \quad \text{и} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{2n\sqrt{n}} = 0.$$

Делаем вывод: последовательность $f_n(x) = \dfrac{\operatorname{arctg}(n\sqrt{x})}{\sqrt{n^3 + 2nx + x^2 + 1}}$ сходится равномерно на множестве $[0, +\infty)$.

На практике очень удобно пользоваться следующим необходимым и достаточным условием равномерной сходимости.

Теорема 4.22. (Необходимое и достаточное условие равномерной сходимости). *Для того чтобы функциональная последовательность $\{f_n(x)\}$ равномерно сходилась на множестве X к предельной функции $f(x)$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in X} |f_n(x) - f(x)| = 0. \tag{4.1}$$

Определение 4.13. Выражение $\sup\limits_{x\in X} |f(x)| = \|f\|$ называется **нормой функции** $f(x)$ на множестве X.

Заметим, что норма функции — это число. Подробнее о нормах см. [6]. Условие (4.1) в новых обозначениях можно записать так

$$\|f - f_n\| = \sup_{x\in X} |f(x) - f_n(x)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

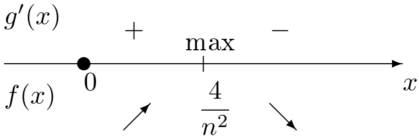
Рассмотрим примеры.

П р и м е р 4.31. Доказать, что функциональная последовательность $f_n(x) = x^4 e^{-n^2 x}$ сходится равномерно на множестве $[0; +\infty)$ к своей предельной функции.

Р е ш е н и е. Найдем предельную функцию. Зафиксируем произвольное число x_0 из промежутка $[0; +\infty)$. Получим числовую последовательность $f_n(x_0) = x_0^4 e^{-n^2 x_0}$. Эта числовая последовательность является бесконечно малой. Следовательно, предельной функцией является функция тождественно равная нулю: $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} x^4 e^{-n^2 x} = 0$. Исследуем поведение функции $g(x) = f_n(x) - f(x) = x^4 e^{-n^2 x}$ на промежутке $[0; +\infty)$ при фиксированном n. Производная равна

$$g'(x) = x^3 e^{-n^2 x}(4 - n^2 x).$$

Определим, где производная принимает положительные, а где отрицательные значения на промежутке $[0; +\infty)$.



Тогда $\|f - f_n\| = \sup\limits_{x \in [0;\, +\infty)} \left| x^4 e^{-n^2 x} \right| = g\left(\dfrac{4}{n^2}\right) = \left(\dfrac{4}{n^2}\right)^4 \cdot e^{-n^2 \cdot \frac{4}{n^2}}$ и

$$\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\| = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{4}{e}\right)^4 \cdot \frac{1}{n^8} = 0.$$

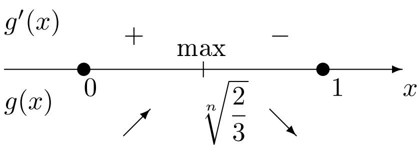
Так как условие (4.1) выполнено, то функциональная последовательность $f_n(x) = x^4 e^{-n^2 x}$ сходится равномерно к своей предельной функции на множестве $[0;\, +\infty)$.

П р и м е р 4.32. Доказать, что функциональная последовательность $f_n(x) = x^{2n} - x^{3n}$ не сходится равномерно к своей предельной функции на множестве $[0;\, 1]$.

Р е ш е н и е. Найдем предельную функцию. Зафиксируем произвольное число x_0 из промежутка $[0;\, 1]$. Получим числовую последовательность $f_n(x_0) = x_0^{2n} - x_0^{3n}$. Эта числовая последовательность является бесконечно малой. Следовательно, $f(x) = 0$. Исследуем поведение функции $g(x) = f_n(x) - f(x) = x^{2n} - x^{3n}$ на отрезке $[0;\, 1]$ при фиксированном n. Выпишем производную

$$g'(x) = nx^{2n-1}(2 - 3x^n),$$

найдем промежутки её знакопостоянства на отрезке $[0;\, 1]$.



Проверим, выполняется ли условие (4.1):

$$\|f - f_n\| = \sup_{x \in [0;\, 1]} |x^{2n} - x^{3n} - 0| = \left| g\left(\sqrt[n]{\frac{2}{3}}\right) \right| = \frac{4}{27}.$$

Тогда $\lim\limits_{n\to\infty}\|f-f_n\| = \dfrac{4}{27} \neq 0$. Так как условие (4.1) не выполнено, то функциональная последовательность $f_n(x) = x^{2n} - x^{3n}$ не сходится равномерно к своей предельной функции на множестве $[0;\,1]$.

Приведем ещё один критерий равномерной сходимости функциональной последовательности $\{f_n(x)\}$ на множестве X. Преимущество этого критерия заключается в том, что для исследования равномерной сходимости не требуется знать предельную функцию $f(x)$ функциональной последовательности $\{f_n(x)\}$ на множестве X.

Теорема 4.23. (Критерий Больцано–Коши равномерной сходимости функциональной последовательности). *Для того чтобы функциональная последовательность $\{f_n(x)\}$ равномерно сходилась на множестве X к предельной функции $f(x)$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие Коши*

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon)\ \forall n \geqslant N\ \forall p \in \mathbf{N}\ \forall x \in X:\ \ |f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon.$$

П р и м е р 4.33. Доказать равномерную сходимость функциональной последовательности $f_n(x) = \dfrac{\arccos\dfrac{1}{nx}}{(x+n)(x+n+1)}$ на множестве $[1;\,2]$.

Р е ш е н и е. Оценим модуль разности элементов функциональной последовательности с номерами $n+p$ и n:

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| = \left|\frac{\arccos\dfrac{1}{(n+p)x}}{(x+n+p)(x+n+p+1)} - \frac{\arccos\dfrac{1}{nx}}{(x+n)(x+n+1)}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\pi}{(x+n+p)(x+n+p+1)} + \frac{\pi}{(x+n)(x+n+1)} < \frac{2\pi}{(n+1)(n+2)} < \frac{2\pi}{n^2}.$$

Оценка выполнена для любого $x \in [1;\,2]$ и для любого $p \in \mathbf{N}$. Определим номер $N(\varepsilon)$ элемента последовательности, начиная с которого будет выполняться неравенство $|f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon$. Для этого решим неравенство $\dfrac{2\pi}{n^2} < \varepsilon$. Учитывая, что $N(\varepsilon) > 0$, получим $N(\varepsilon) = \left[\sqrt{\dfrac{2\pi}{\varepsilon}}\right] + 1$. Таким образом, выполнено условие Коши. А значит, исходная функциональная последовательность сходится равномерно к своей предельной функции на множестве $[1;\,2]$.

4.3 Сходимость функционального ряда

Определение 4.14. Пусть на множестве X определены для любого $n \in \mathbf{N}$ функции $u_n(x)$. Ряд, у которого общий член $u_n(x)$ есть функция, называется **функциональным**:

$$u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x). \tag{4.2}$$

Выберем точку $x_0 \in X$, тогда $u_n(x_0)$ — есть число, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ — числовой ряд.

Определение 4.15. Если числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ сходится, то говорят, что функциональный ряд (4.2) сходится в точке x_0. Точка x_0 называется **точкой сходимости функционального ряда**, а множество всех точек сходимости — **областью сходимости ряда**.

Определение (4.15) задает **поточечную сходимость** функционального ряда.

Далее, область сходимости будем обозначать E. Если $x \in E$ — это означает, что ряд (4.2) сходится в точке x. Очевидно, что справедливо включение $E \subseteq X$.

Рассмотрим примеры, которые иллюстрируют выше сказанное.

Пример 4.34. Найти область определения и область сходимости функционального ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n$.

Решение. При любом $n \in \mathbf{N}$ функция $u_n(x) = x^n$ определена на всей числовой прямой. Значит, область определения функционального ряда $X = \mathbf{R}$. Зафиксируем произвольное число $x_0 \in \mathbf{R}$. Получим числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_0^n$. Этот ряд сходится, если $x_0 \in (-1;\, 1)$. Это множество является областью сходимости.

Пример 4.35. Найти область сходимости функционального ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}.$$

Р е ш е н и е. Зафиксируем $x_0 \in \mathbf{R}$, получим числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x_0^{n+1}}{n(n+1)}$. Вычислим предел

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty} |x_0| \cdot \frac{n}{n+2} = |x_0|.$$

Для того чтобы числовой ряд сходился, должно быть выполнено $|x_0| < 1$. Пусть $x_0 = 1$ получим числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(n+1)}$. Так как $\dfrac{1}{n(n+1)} < \dfrac{1}{n^2}$ и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ сходится (обобщенный гармонический ряд с $p = 2 > 1$), то по признаку сравнения 2 (следствие 2.1) сходится числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(n+1)}$. Если $x_0 = -1$, то получаем числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)}$. Этот числовой ряд сходится абсолютно, а значит сходится. Делаем вывод: функциональный ряд сходится на промежутке $[-1; 1]$.

П р и м е р 4.36. Найти область определения и область сходимости функционального ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 - \dfrac{1}{(x^2+n)^2}\right)$.

Р е ш е н и е. При $n = 1$ функция $u_1(x) = \ln\left(1 - \dfrac{1}{(x^2+1)^2}\right)$ не определена в нуле. В остальных случаях ($n > 1$) функция

$$u_n(x) = \ln\left(1 - \frac{1}{(x^2+n)^2}\right) = \ln\frac{(x^2+n-1)(x^2+n+1)}{(x^2+n)^2}$$

определена на всей числовой прямой. Таким образом, область определения $X = \mathbf{R} \setminus \{0\}$. Зафиксируем произвольное число $x_0 \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$. Получим числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 - \dfrac{1}{(x_0^2+n)^2}\right)$. Исследуем, при каких значениях x_0 этот ряд сходится. Рассмотрим числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\ln\left(1 - \frac{1}{(x_0^2+n)^2}\right)\right|. \tag{4.3}$$

При $n \to \infty$ имеем $\left|\ln\left(1 - \dfrac{1}{(x_0^2+n)^2}\right)\right| \sim \dfrac{1}{(x_0^2+n)^2} \sim \dfrac{1}{n^2}$. Так как числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ является обобщенным гармоническим рядом при $p = 2 > 1$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(x_0^2+n)^2}$ сходится при любом $x_0 \in X$, следовательно, по признаку сравнения сходится числовой ряд (4.3). Из абсолютной сходимости следует сходимость. Делаем вывод: в данном примере $E = X$.

П р и м е р 4.37. Найти область определения и область сходимости функционального ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{2}{x-1}\right)^n$.

Р е ш е н и е. При всех $n \in \mathbf{N}$ функции $u_n(x) = \left(\dfrac{2}{x-1}\right)^n$ терпят разрыв в точке $x = 1$. Область определения данного функционального ряда $X = \mathbf{R} \setminus \{1\}$. Зафиксируем произвольное число $x_0 \in \mathbf{R} \setminus \{1\}$. Получим числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{2}{x_0-1}\right)^n$. Исследуем, при каких значениях x_0 этот ряд сходится. Рассмотрим числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left|\left(\dfrac{2}{x_0-1}\right)^n\right|$. Последний ряд является положительным числовым рядом. Воспользуемся радикальным признаком Коши:

$$l = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{2}{|x_0-1|}\right)^n} = \frac{2}{|x_0-1|}.$$

Для того чтобы ряд сходился требуем, чтобы выполнялось неравенство $\dfrac{2}{|x_0-1|} < 1$. Решением этого неравенства является множество $(-\infty;\,-1) \cup (3;\,+\infty)$. При $x_0 = -1$ и $x_0 = 3$ имеем $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 1$ соответственно. Оба числовых ряда расходятся, так как не выполнено необходимое условие сходимости ряда. Делаем вывод: область сходимости функционального ряда $E = (-\infty;\,-1) \cup (3;\,+\infty)$.

Далее рассмотрим вопрос о сумме функционального ряда. Подобно тому, как определялась сумма числового ряда дадим определение суммы функционального ряда. Обозначим n-ую частичную сумму функционального ряда (4.2) через $S_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k(x)$.

Определение 4.16. Пусть $x \in E$. **Суммой** функционального ряда (4.2) называется конечный предел функциональной последовательности его частичных сумм, то есть $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x) = S(x)$.

Пишут: $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$.

П р и м е р 4.38. Для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 - \dfrac{1}{(x^2+n)^2}\right)$ найти сумму на множестве $\mathbf{R} \setminus \{0\}$.

Р е ш е н и е. Частичная сумма этого функционального ряда с номером n имеет вид $S_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} \ln\left(1 - \dfrac{1}{(x^2+k)^2}\right)$. Преобразуем её, пользуясь свойством суммы логарифмов

$$S_n(x) = \ln\frac{x^2(x^2+2)}{(x^2+1)^2} + \ln\frac{(x^2+1)(x^2+3)}{(x^2+2)^2} + \ln\frac{(x^2+2)(x^2+4)}{(x^2+3)^2} + \ldots +$$
$$+ \ln\frac{(x^2+n-2)(x^2+n)}{(x^2+n-1)^2} + \ln\frac{(x^2+n-1)(x^2+n+1)}{(x^2+n)^2} =$$
$$= \ln\frac{x^2(x^2+n+1)}{(x^2+1)(x^2+n)}.$$

Переходя к пределу при $n \to \infty$, получаем ответ

$$S(x) = \lim_{n\to\infty} \ln\frac{x^2(x^2+n+1)}{(x^2+1)(x^2+n)} = \ln\frac{x^2}{x^2+1}.$$

У п р а ж н е н и е 7. Найти сумму функционального ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n$ на множестве $(-1;\, 1)$

О т в е т: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n = \dfrac{x}{1-x}$.

4.4 Равномерная сходимость функционального ряда

Определение 4.17. Функциональный ряд (4.2) называется **равномерно сходящимся** на E, если на этом множестве равномерно сходится функциональная последовательность его частичных сумм.

На языке «$\varepsilon - \delta$» тот факт, что функциональный ряд (4.2) равномерно сходится на множестве E запишем так

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N = N(\varepsilon) \ \forall n \geqslant N \ \forall x \in X: \quad |S(x) - S_n(x)| < \varepsilon. \tag{4.4}$$

Как и раньше, обозначим остаток ряда (4.2) через

$$R_n(x) = S(x) - S_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x).$$

Тогда условие (4.4) примет вид

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N = N(\varepsilon) \ \forall n \geqslant N \ \forall x \in X: \quad |R_n(x)| < \varepsilon.$$

П р и м е р 4.39. Доказать по определению равномерную сходимость ряда $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{(x^2+n)^2}\right)$ на множестве $\mathbf{R} \setminus \{0\}$.

Р е ш е н и е. Оценим модуль разности суммы ряда и элемента с номером n последовательности частичных сумм этого ряда:

$$|S(x) - S_n(x)| = \left|\ln\frac{x^2}{x^2+1} - \ln\frac{x^2(x^2+n+1)}{(x^2+1)(x^2+n)}\right| = \left|\ln\frac{x^2+n}{x^2+n+1}\right| =$$
$$= \left|\ln\left(1 - \frac{1}{x^2+n+1}\right)\right| \leqslant \frac{1}{x^2+n+1} < \frac{1}{n}.$$

Оценка выполнена при всех $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$. Решив неравенство $\dfrac{1}{n} < \varepsilon$, определим $N(\varepsilon) = \left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right] + 1$. Таким образом, выполнено определение равномерной сходимости функционального ряда.

У п р а ж н е н и е 8. Доказать по определению равномерную сходимость ряда $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ на множестве $[-q;\, q]$, где $0 < q < 1$.

З а м е ч а н и е 4.5. Из равномерной сходимости функционального ряда (4.2) на множестве E следует поточечная сходимость даного ряда на этом множестве. Обратное утверждение не верно.

Из определений равномерной сходимости функциональных последовательностей и рядов имеют место следующие свойства.

Свойство 1. Если функциональные последовательности $\{f_n(x)\}$ и $\{g_n(x)\}$ $\left(\text{ряды} \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x) \text{ и } \sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n(x)\right)$ равномерно сходятся на множестве E, то любая их линейная комбинация $\{\alpha f_n(x) + \beta g_n(x)\}$ $\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} [\alpha u_n(x) + \beta v_n(x)]\right)$, где α и β — постоянные, равномерно сходится на E.

Свойство 2. Если функциональная последовательность (ряд) сходится равномерно на множестве E, то сходимость будет равномерной и на любом множестве $E_1 \subset E$.

Свойство 3. Если функциональная последовательность (ряд) равномерно сходится на каждом из множеств E_1 и E_2, то на множестве $E = E_1 \cup E_2$ эта последовательность (ряд) сходится равномерно.

З а м е ч а н и е 4.6. Последнее свойство нельзя перенести на бесконечное объединение множеств.

Теорема 4.24. (Критерий Больцано–Коши). *Для того, чтобы ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *равномерно сходился на* E, *необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие Коши*:

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N = N(\varepsilon) > 0 \;\; \forall n \geqslant N \;\; \forall p \in \mathbf{N} \;\; \forall x \in E : \;\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x)\right| < \varepsilon. \quad (4.5)$$

П р и м е р 4.40. Доказать равномерную сходимость функционального ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{-nx} \cos nx$ на множестве $[1; +\infty)$.

Р е ш е н и е. Оценим модуль суммы элементов исходного ряда с номерами $n+1,\, n+2, \ldots, n+p:$

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x)\right| = \left|\frac{\cos(n+1)x}{e^{(n+1)x}} + \ldots + \frac{\cos(n+p)x}{e^{(n+p)x}}\right| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{|\cos(n+1)x|}{e^{(n+1)x}} + \ldots + \frac{|\cos(n+p)x|}{e^{(n+p)x}} \leqslant \frac{1}{e^{(n+1)x}} + \ldots + \frac{1}{e^{(n+p)x}}.$$

Далее вынесем общий множитель e^{-nx} за скобки. В скобках найдем сумму p элементов геометрической прогрессии со знаменателем e^{-x}:

$$\frac{1}{e^x} + \ldots + \frac{1}{(e^x)^p} = \frac{e^{-x}\left(1-(e^{-x})^p\right)}{1-e^{-x}} \leqslant \frac{1}{e^x-1}.$$

Таким образом, имеем

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x)\right| \leqslant \frac{1}{e^{nx}} \cdot \frac{1}{e^x-1} \leqslant \frac{1}{e^n} \cdot \frac{1}{e-1}.$$

Последние оценки выполнены для всех $p \in \mathbf{N}$ и для всех $x \in [1;\, +\infty)$. Определим номер элемента $N(\varepsilon)$. Для этого решим неравенство $\dfrac{1}{e^n} \cdot \dfrac{1}{e-1} < \varepsilon$ относительно n. Отсюда $N(\varepsilon) = \max\{1;\, \left[\ln(\varepsilon(e-1))^{-1}\right] + 1\}$. Условие Коши (4.5) выполнено, функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{-nx}\cos nx$ сходится равномерно на множестве $[1;\, +\infty)$.

Из критерия Больцано–Коши получаем необходимый признак равномерной сходимости функционального ряда.

Теорема 4.25. (Необходимый признак сходимости функционального ряда). *Если функциональный ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *сходится равномерно на* E, *то последовательность* $\{u_n(x)\}$ *сходится равномерно к функции тождественно равной нулю на* E.

Необходимым признаком можно воспользоваться, если мы хотим показать, что функциональный ряд равномерно не сходится на множестве.

П р и м е р 4.41. Доказать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(x^{2n} - x^{3n}\right)$ на множестве $(0;\, 1)$ не сходится равномерно к своей сумме.

Р е ш е н и е. Выше было показано (см. пример 4.32, стр. 35), что последовательность $f_n(x) = x^{2n} - x^{3n}$ не сходится равномерно к функции $f(x) = 0$ на множестве $[0;\,1]$. В силу свойства 2, эта последовательность не сходится равномерно к функции $f(x) = 0$ и на множестве $(0;\,1)$. Следовательно, функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(x^{2n} - x^{3n}\right)$ на множестве $(0;\,1)$ не сходится равномерно к своей сумме.

Теорема 4.26. (Критерий равномерной сходимости для рядов). *Для того чтобы ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *равномерно сходился на* E *к своей сумме* $S(x)$, *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\|S_n - S\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0. \tag{4.6}$$

П р и м е р 4.42. Доказать равномерную сходимость функционального ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(x+n)(x+n+1)}$ на множестве $[0;\,+\infty)$.

Р е ш е н и е. Для последовательности $\{S_n(x)\}$ частичных сумм данного ряда имеем

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(x+k)(x+k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{x+k} - \frac{1}{x+k+1}\right) = \\ = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+n+1}.$$

Вычислим предельную функцию последовательности $\{S_n(x)\}$:

$$S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+n+1}\right) = \frac{1}{x+1}.$$

Поскольку

$$\|S_n - S\| = \left\|\frac{1}{x+n+1}\right\| = \sup_{x\in[0;\,+\infty]} \left|\frac{1}{x+n+1}\right| = \frac{1}{n+1},$$

то $\lim\limits_{n\to\infty} \|S_n - S\| = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n+1} = 0$ и, согласно критерию равномерной сходимости функционального ряда, исходный ряд сходится равномерно.

Самым удобным признаком равномерной сходимости функционального ряда является признак Вейерштрасса. Вопрос о равномерной сходимости функционального ряда сводится к исследованию сходимости положительного числового ряда.

Теорема 4.27. (Признак равномерной сходимости Вейерштрасса). *Если для функционального ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *можно указать такой сходящийся числовой ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$, *что для всех* $x \in E$ *и для всех* $n \in \mathbf{N}$ *выполнено неравенство* $|u_n(x)| \leqslant c_n$, *то функциональный ряд равномерно сходится на множестве* E.

Пример 4.43. Доказать равномерную сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n}$ на множестве $[-q;\, q]$, где $0 < q < 1$.

Решение. Для всех $x \in [-q;\, q]$ выполнено $\left|\dfrac{x^n}{n}\right| \leqslant \dfrac{q^n}{n}$. Ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{q^n}{n}$ сходится (по признаку Даламбера), так как

$$l = \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{q^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{n}{q^n} = q \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = q < 1.$$

Делаем вывод: по признаку Вейерштрасса ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n}$ сходится равномерно на отрезке $[-q;\, q]$, где $0 < q < 1$.

Пример 4.44. Доказать равномерную сходимость функционального ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x}{n(x^2+n^2)}$ на множестве $x \in \mathbf{R}$.

Решение. Воспользуемся неравенством $2|nx| \leqslant x^2 + n^2$ для оценки модуля n–го члена ряда:

$$\left|\frac{x}{n(x^2+n^2)}\right| = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{|xn|}{x^2+n^2} \leqslant \frac{1}{2n^2}, \text{ для всех } x \in \mathbf{R}.$$

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ сходится (обобщенный гармонический ряд с $p = 2 > 1$). По признаку Вейерштрасса функциональный ряд сходится равномерно.

П р и м е р 4.45. Доказать равномерную сходимость функционального ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n \cdot 2^n}$ на множестве $\left[-\dfrac{3}{2}; \dfrac{3}{2}\right]$.

Р е ш е н и е. Оценим модуль n–го члена ряда:

$$\left|\frac{x^n}{n \cdot 2^n}\right| = \frac{|x|^n}{n \cdot 2^n} \leqslant \frac{(3/2)^n}{n \cdot 2^n} \leqslant \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n, \text{ при } x \in \left[-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right].$$

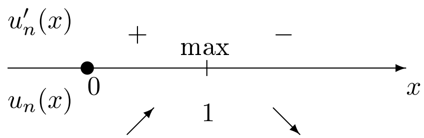
Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n} \cdot \left(\dfrac{3}{4}\right)^n$ сходится по признаку Даламбера, так как

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n}{4(n+1)} = \frac{3}{4} < 1.$$

Функциональный ряд сходится равномерно по признаку Вейерштрасса.

П р и м е р 4.46. Доказать равномерную сходимость функционального ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n e^{-nx}$ на множестве $x \in [0; +\infty)$.

Р е ш е н и е. Исследуем функцию $u_n(x) = x^n e^{-nx}$ на монотонность. Для этого найдем производную $u_n'(x) = n(1-x)x^{n-1}e^{-nx}$.



Оценим модуль n–го члена ряда: $|x^n e^{-nx}| \leqslant 1 \cdot e^{-n} = \dfrac{1}{e^n}$. Числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{-n}$ сходится, как сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии. По признаку Вейерштрасса функциональный ряд сходится равномерно.

На практике признак Вейерштасса применить удается не всегда. Например, если при оценке общего члена функционального ряда, получим общий член числового ряда, который расходится или при оценке общего члена функционального ряда не можем избавиться от x. Могут быть полезными следующие два признака: признак Дирихле и признак Абеля.

Теорема 4.28. (Признак Дирихле). *Ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x)$ *сходится равномерно на множестве* E, *если выполнены следующие условия:*

1) *последовательность частичных сумм ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n(x)$ *равномерно ограничена на множестве* E, *то есть*
$$\exists M > 0 \ \forall n \in \mathbf{N} \ \forall x \in E : \ \left| \sum_{k=1}^{n} b_k(x) \right| \leqslant M;$$

2) *последовательность* $\{a_n(x)\}$ *монотонна при каждом* $x \in E$ *и равномерно стремится к нулю, то есть*
$$\forall n \in \mathbf{N} \quad \forall x \in E \quad a_{n+1}(x) \leqslant a_n(x) \quad (\textit{или} \quad a_{n+1}(x) \geqslant a_n(x))$$
$$\textit{и} \quad a_n(x) \underset{n\to\infty}{\overset{E}{\rightrightarrows}} 0.$$

П р и м е р 4.47. Доказать равномерную сходимость функционального ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin x \sin nx}{\sqrt{n^3 + x^4}}$ на множестве $\mathbf{R}$.

Р е ш е н и е. Пусть $b_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \sin x \sin kx$ и $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n^3 + x^4}}$. Так как (см. справочный материал на стр. 129)
$$\sum_{k=0}^{n} \sin(y + k\alpha) = \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\alpha\right) \sin\left(y + \frac{n}{2}\right)\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}}, \quad \alpha \neq 2\pi k, \quad k \in \mathbf{Z},$$
то при $y = 0$, $\alpha = x$ имеем
$$\sum_{k=1}^{n} \sin(kx) = -\sin 0 + \sum_{k=0}^{n} \sin(kx) = \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right) \sin\left(\frac{n}{2}x\right)}{\sin\frac{x}{2}}. \tag{4.7}$$
Воспользуемся формулами $\sin x = 2 \sin \dfrac{x}{2} \cos \dfrac{x}{2}$ и (4.7), тогда
$$\left| \sin x \sum_{k=1}^{n} \sin kx \right| = \left| 2 \cos\frac{x}{2} \sin\frac{n+1}{2} x \sin\frac{n}{2} x \right| \leqslant 2.$$

Последовательность $\{b_n\}$ равномерно ограничена на множестве $\mathbf{R}$. При любом фиксированном $x \in \mathbf{R}$ последовательность $\{a_n\}$ монотонна, так как $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n^3+x^4}} > \dfrac{1}{\sqrt{(n+1)^3+x^4}} = a_{n+1}$. Докажем равномерную сходимость этой последовательности к нулю:

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\mathbf{R}} \frac{1}{\sqrt{n^3+x^4}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3}} = 0.$$

Функциональный ряд сходится равномерно на множестве $\mathbf{R}$ по признаку Дирихле.

Теорема 4.29. (Признак Абеля). *Функциональный ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$ *сходится равномерно на множестве* E, *если выполнены следующие условия*:

1) *ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n(x)$ *равномерно сходится на множестве* E;

2) *последовательность* $\{a_n(x)\}$ *ограничена на множестве* E *и монотонна при каждом* $x \in E$.

Пример 4.48. Доказать равномерную сходимость функционального ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\dfrac{x}{n\ln^2(n+1)}\right)\cdot\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n$ на множестве $[0;\ 1]$.

Решение. Обозначим $b_n = \ln\left(1+\dfrac{x}{n\ln^2(n+1)}\right)$ и $a_n = \left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n$. Функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\dfrac{x}{n\ln^2(n+1)}\right)$ равномерно сходится на множестве $[0;\ 1]$, так как для всех $x \in [0;\ 1]$ выполнена оценка

$$0 \leqslant b_n \leqslant \frac{x}{n\ln^2(n+1)} \leqslant \frac{1}{n\ln^2(n+1)}$$

и числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n\ln^2(n+1)}$ сходится. Докажем это. Для всех $n \in \mathbf{N}$ выполнено $\dfrac{1}{n\ln^2(n+1)} < \dfrac{1}{n\ln^2 n}$. Ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n\ln^2 n}$ сходится (по интегральному признаку Коши) (см. пример 2.20, стр. 23). По признаку сравнения 2 (см. следствие 2.1, стр. 16) будет сходиться ряд с меньшими членами. Последовательность $\{a_n\}$ ограничена на множестве $[0;\, 1]$, так как

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \leqslant \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e,$$

и монотонная при каждом $x \in [0;\, 1]$, поскольку $\varphi(t) = \left(1+\dfrac{x}{t}\right)^t$ — возрастающая функция при $t \geqslant 1$ для каждого $x \in [0;\, 1]$. По признаку Абеля функциональный ряд сходится равномерно на множестве $[0;\, 1]$.

4.5 Свойства равномерно сходящихся рядов

Как известно, операции дифференцирования и интегрирования обладают свойством линейности. Мы можем записать следующие равенства:

$$\left(\sum_{k=1}^{n} u_k(x)\right)' = \sum_{k=1}^{n} u_k'(x) \quad \text{и} \quad \int\limits_a^b \sum_{k=1}^{n} u_k(x)\, dx = \sum_{k=1}^{n} \int\limits_a^b u_k(x)\, dx.$$

В случае бесконечного числа слагаемых перестановка операций дифференцирования (интегрирования) и суммирования требует обоснования. Большую роль здесь играет свойство равномерной сходимости функционального ряда.

Ниже приведены теоремы, позволяющие нам дифференцировать (интегрировать) функциональные последовательности и ряды.

Пусть $\{f_n(x)\}$ — функциональная последовательность и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ функциональный ряд. Далее $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ — предельная функция и $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ — сумма ряда.

Теорема 4.30. (О непрерывности предельной функции). *Если функциональная последовательность $\{f_n(x)\}$ равномерно сходится к функции $f(x)$ на X и все элементы функциональной последовательности $\{f_n(x)\}$ непрерывны в точке $x_0 \in X$, то предельная функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, и справедливо равенство*

$$\lim_{x\to x_0}\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\lim_{x\to x_0} f_n(x)\right).$$

Теорема 4.31. (О непрерывности суммы ряда). *Если функциональный ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *равномерно сходится к функции* $S(x)$ *на множестве* X *и все элементы* $u_n(x)$ *функционального ряда непрерывны в точке* $x_0 \in X$, *то сумма ряда* $S(x)$ *непрерывна в точке* x_0 *и справедливо равенство*

$$\lim_{x\to x_0}\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\lim_{x\to x_0} u_n(x)\right).$$

П р и м е р 4.49. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 1-0}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n)!}\cdot\dfrac{x^n}{x^n+1}$.

Р е ш е н и е. Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n)!}\cdot\dfrac{x^n}{x^n+1}$ на отрезке $[0;\,1]$. На этом множестве для всех x справедливо неравенство

$$\left|\frac{(-1)^n}{(2n)!}\cdot\frac{x^n}{x^n+1}\right| \leqslant \frac{1}{(2n)!}.$$

Числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n)!}$ сходится по признаку Даламбера, так как

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{(2n+1)(2n+2)} = 0 < 1.$$

Функциональный ряд сходится равномерно на этом множестве по признаку Вейерштрасса. Каждая из функций $(\forall n \in \mathbf{N})$ $u_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{(2n)!}\dfrac{x^n}{x^n+1}$ является непрерывной на отрезке $[0;\,1]$ и

$$\lim_{x\to 1-0}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\cdot\frac{x^n}{x^n+1} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{(2n)!}\cdot\lim_{x\to 1-0}\frac{x^n}{x^n+1}\right) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}.$$

Так как $\cos x = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$ (см. стр. 131), то $\cos 1 = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n)!}$. Получаем $\lim\limits_{x\to 1-0}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n)!}\cdot\dfrac{x^n}{x^n+1} = \dfrac{1}{2}\cos 1.$

Теорема 4.32. (О предельном переходе под знаком интеграла). *Если функциональная последовательность $\{f_n(x)\}$ равномерно сходится к функции $f(x)$ на $[a,\, b]$ и все элементы функциональной последовательности $\{f_n(x)\}$ непрерывны на отрезке $[a,\, b]$, то для любого $x_0 \in [a,\, b]$*

$$\int\limits_{x_0}^{x} f_n(t)\,dt \underset{n\to\infty}{\overset{[a;\,b]}{\rightrightarrows}} \int\limits_{x_0}^{x} f(t)\,dt.$$

Теорема 4.33. (О почленном интегрировании ряда). *Если функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ равномерно сходится на отрезке $[a,\, b]$ и все элементы $u_n(x)$ функционального ряда непрерывны на отрезке $[a,\, b]$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \int\limits_{x_0}^{x} u_n(t)\,dt$, где $x_0 \in [a;\, b]$, сходится равномерно на отрезке $[a,\, b]$ и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ можно почленно интегрировать, то есть*

$$\int\limits_{x_0}^{x} \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)\right) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{x_0}^{x} u_n(t)\,dt.$$

П р и м е р 4.50. Найти сумму $S(x)$ ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$, а затем вычислить сумму ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{(n+1)2^{n+1}}$.

Р е ш е н и е. Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$. Этот ряд сходится на интервале $(-1;\, 1)$ (см. пример 4.34, стр. 37), а его сумма равна $\dfrac{1}{1-x}$. На отрезке $[-q;\, q]$, где $0 < q < 1$, ряд сходится равномерно по признаку Вейерштрасса, так как для всех $x \in [-q;\, q]$ выполнено $|x^n| \leqslant q^n$, а ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n$ сходится как сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии. Члены функционального ряда $u_n = x^n$ — непрерывные функции. Интегрируя этот ряд почленно на отрезке $[0;\, x]$, где $x \in (-1;\, 1)$, получаем

$$\int\limits_0^x \frac{dt}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} \int\limits_0^x t^n\, dt,$$

или

$$-\ln|1-x| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}. \tag{4.8}$$

Таким образом, $S(x) = -\ln|1-x|$. Полагая в (4.8) $x = \dfrac{1}{2}$, получаем $\ln 2 = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{(n+1)2^{n+1}}$.

Теорема 4.34. (О дифференцировании функциональной последовательности). *Если последовательность $\{f_n(x)\}$ дифференцируемых на отрезке $[a;\, b]$ функций сходится хотя бы в одной точке $x_0 \in [a;\, b]$, а последовательность $\{f'_n(x)\}$ сходится равномерно на $[a;\, b]$, то последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится равномерно на отрезке $[a;\, b]$ к некоторой непрерывно дифференцируемой функции $f(x)$ и*

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} f'_n(x), \quad x \in [a;\, b].$$

Теорема 4.35. (О почленном дифференцировании ряда). *Если функции $u_n(x)$, $n \in \mathbf{N}$, имеют непрерывные производные на отрезке $[a;\, b]$, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$ сходится равномерно на $[a;\, b]$, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится хотя бы в одной точке $x_0 \in [a;\, b]$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится равномерно на $[a;\, b]$, его сумма имеет непрерывную производную на $[a;\, b]$, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ можно почленно дифференцировать, то есть*

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x).$$

П р и м е р 4.51. Найти сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^{n+1}}{n(n+1)}$.

Р е ш е н и е. Ряд сходится на отрезке $[-1;\,1]$ (см. пример 4.35, стр. 37). Производные $u'_n(x) = \dfrac{x^n}{n}$ функций $u_n(x) = \dfrac{x^{n+1}}{n(n+1)}$ непрерывны на отрезке $[-1;\,1]$. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n}$ сходится равномерно на отрезке $[-q;\,q]$, где $0 < q < 1$ (см. пример 4.43, стр. 45). Таким образом, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^{n+1}}{n(n+1)}$ сходится равномерно на отрезке $[-q;\,q]$. Дифференцируя почленно ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^{n+1}}{n(n+1)} = f(x)$, получаем $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n} = f'(x)$. Откуда, в силу (4.8), находим $f'(x) = -\ln(1-x)$. Следовательно,

$$\int\limits_0^x f'(t)\,dt = f(x) - f(0) = -\int\limits_0^x \ln(1-t)\,dt,$$

или

$$f(x) - f(0) = \int\limits_0^x \ln(1-t)\,d(1-t) = (1-t)\ln(1-t)\Big|_0^x + \int\limits_0^x dt.$$

Откуда находим сумму ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)} = x + (1-x)\ln(1-x).$$

§5. Применение функциональных рядов

Приступая к изучению нового раздела студент должен знать теорию функциональных последовательностей и рядов, знать понятия области сходимости, равномерной сходимости, уметь находить область сходимости и исследовать функциональные последовательности и ряды на сходимость и равномерную сходимость.

После изучения данного раздела студент должен уметь находит радиус сходимости степенного ряда, раскладывать функции в степенные ряды, используя свойства предыдущего раздела, владеть приемами приближённых вычислений.

Задания лабораторной работы — 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32.

5.1 Степенные ряды

Определение 5.18. Функциональный ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n(x-a)^n,\ C_n \in \mathbf{R},\ a \in \mathbf{R} \tag{5.1}$$

называется **степенным рядом**. Точка a называется **центром** степенного ряда, C_n — **коэффициентом** степенного ряда.

Теорема 5.36. (теорема Коши–Адамара). *Всякий степенной ряд* (5.1) *имеет интервал сходимости* $(a-R, a+R)$, *внутри которого данный ряд сходится и притом абсолютно, и вне которого ряд расходится. Число* R *находится по формуле*

$$R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|C_n|}} \quad \text{или} \quad R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{C_n}{C_{n+1}}\right|.$$

Определение 5.19. Интервал $(a-R, a+R)$ называется **интервалом сходимости** степенного ряда. Число R называется **радиусом** сходимости степенного ряда, причем $0 \leqslant R \leqslant \infty$.

Замечание 5.7. В точке $x = a$ любой степенной ряд сходится.

Область сходимости — это интервал сходимости и, быть может, его концы. Другими словами, для нахождения области сходимости надо вычислить радиус сходимости и центр ряда, записать интервал сходимости и проверить дополнительно будет ли сходится функциональный ряд на концах полученного интервала.

П р и м е р 5.52. Для степенного ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{5n-1}{n^2+1}(x+2)^n$ найти область сходимости.

Р е ш е н и е. Центром степенного ряда является точка $a=-2$. Вычислим радиус сходимости:

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{C_n}{C_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)^2+1}{n^2+1}\cdot\frac{5n-1}{5n+1}\right|=1.$$

Ряд сходится на интервале $(-3;\,-1)$. При $x=-3$ получаем знакочередующийся ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(5n-1)}{n^2+1}$, который сходится по признаку Лейбница. При $x=-1$ получаем положительный ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{5n-1}{n^2+1}$. Так как $\frac{5n-1}{n^2+1}\underset{n\to\infty}{\sim}\frac{5}{n}$ и ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{5}{n}$ расходится (гармонический), то по признаку сравнения расходится ряд с положительными членами. Делаем вывод: область сходимости — $x\in[-3;\,-1)$.

Теорема 5.37. *Степенной ряд* (5.1) *равномерно сходится на всяком отрезке* $[c,d]\subset(a-R,a+R)$.

Теорема 5.38. (О непрерывности суммы степенного ряда). *Сумма степенного ряда есть функция непрерывная во всякой точке интервала сходимости.*

Обозначим радиусы сходимости рядов

$$\sum_{n=0}^{\infty}C_n(x-a)^n, \tag{5.2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}nC_n(x-a)^{n-1}, \tag{5.3}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}C_n\frac{(x-a)^{n+1}}{n+1} \tag{5.4}$$

R, R', R'' соответственно.

Теорема 5.39. (О почленном интегрировании и дифференцировании степенного ряда). *Для степенных рядов* (5.2), (5.3), (5.4) *имеют место утверждения*:

1) *степенные ряды* (5.2), (5.3), (5.4) *имеют один и тот же интервал сходимости, то есть* $R = R' = R''$;

2) *степенной ряд* (5.2) *можно почленно дифференцировать во всякой точке его интервала сходимости;*

3) *степенной ряд* (5.2) *можно почленно интегрировать на* $[a, x]$, *где* x *— произвольная точка интервала сходимости.*

П р и м е р 5.53. Используя разложение в степенной ряд для функции $\dfrac{1}{1+x^2}$, найти разложение для функции $\operatorname{arctg} x$.

Р е ш е н и е. Функцию $\dfrac{1}{1+x^2}$ можно рассматривать как сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии со знаменателем $-x^2$:

$$1 - x^2 + x^4 + \ldots + (-1)^{n-1}x^{2n} + \ldots = \frac{1}{1+x^2}.$$

Правую часть равенства можем записать в виде $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$. Получили степенной ряд, интервал сходимости которого $(-1;\, 1)$. По теореме 5.39 степенной ряд можно интегрировать, причем новый степенной ряд будет иметь тот же интервал сходимости:

$$\int\limits_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \int\limits_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^{2n}\right) dt \;\Rightarrow\; \operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \int\limits_0^x t^{2n}\, dt.$$

Таким образом, $\operatorname{arctg} x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$, $|x| < 1$.

У п р а ж н е н и е 9. Проверить, что полученное в примере 5.53 разложение для $\operatorname{arctg} x$ будет справедливо и при $x = \pm 1$.

5.2 Ряд Тейлора

Определение 5.20. Ряд вида

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n,\ x \in (a-R, a+R)$$

называется **рядом Тейлора** функции $f(x)$.

Пусть дана некоторая функция $f(x)$. Будем искать степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} C_n(x-a)^n$, для которого $f(x)$ — сумма на промежутке X. Если разложение происходит в точке a, то $a \in X$, а сам промежуток X должен быть симметричен относительно точки a, и функция $f(x)$ должна иметь производные любого порядка в данной точке a. Тогда

$$C_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}.$$

Коэффициенты определяются единственным образом. Полученный степенной ряд не обязан сходиться, а если он сходится, то не обязан сходиться к самой функции $f(x)$:

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Теорема 5.40. (Критерий разложения функции в степенной ряд). *Для того чтобы $f(x)$ раскладывалась на промежутке X в степенной ряд, необходимо и достаточно, чтобы остаточный член $R_n(x)$ формулы Тейлора стремился к нулю для каждого $x \in X$:*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(x-a)^n,\ x \in X \quad \Leftrightarrow \quad \forall x \in X \quad R_n(x) \to 0\ (n \to \infty).$$

Теорема 5.41. (Признак разложения функции в степенной ряд). *Если функция $f(x)$ имеет в промежутке X производные всех порядков, ограниченные одной и той же константой, то есть*

$$\exists M > 0\ \forall n \in \mathbf{N}\ \forall x \in X :\ \left| f^{(n)}(x) \right| \leqslant M,$$

то функция раскладывается на этом промежутке в степенной ряд

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(x-a)^n, \quad \forall x \in X.$$

З а м е ч а н и е 5.8. Ряд Тейлора с центром в точке $a = 0$ называют **рядом Маклорена**:

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

Для элементарных функций ряды Маклорена приведены в конце данного пособия в разделе «Справочный материал» (см. стр. 131).

П р и м е р 5.54. Разложить функцию $f(x) = \dfrac{1}{x+7}$ в степенной ряд по степеням x.

Р е ш е н и е. Применяя разложение $\dfrac{1}{1+t} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n$ при $|t| < 1$, получим

$$\frac{1}{x+7} = \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{1+\dfrac{x}{7}} = \frac{1}{7} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{x}{7}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^k}{7^{k+1}},$$

где $\left|\dfrac{x}{7}\right| < 1$, то есть $|x| < 7$.

П р и м е р 5.55. Разложить функцию $f(x) = \dfrac{1}{2-x}$ по степеням $(x-1)$.

Р е ш е н и е. В силу разложения $\dfrac{1}{1-t} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} t^n$ при $|t| < 1$, имеем

$$\frac{1}{2-x} = \frac{1}{1-(x-1)} = \sum_{k=0}^{\infty} (x-1)^k,$$

где $|x-1| < 1$ или $x \in (0;\, 2)$.

П р и м е р 5.56. Разложить функцию $f(x) = \dfrac{1}{(x+7)^2}$ по степеням x.

Р е ш е н и е. Так как при $|x| < 7$ верно равенство $\dfrac{1}{x+7} = \sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k \dfrac{x^k}{7^{k+1}}$, то дифференцируя его, получим $-\dfrac{1}{(x+7)^2} = \sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^k \dfrac{kx^{k-1}}{7^{k+1}}$. Откуда имеем разложение

$$\frac{1}{(x+7)^2} = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{kx^{k-1}}{7^{k+1}} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(k+1)x^k}{7^{k+2}},$$

также верное при $|x| < 7$.

П р и м е р 5.57. Разложить функцию $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[4]{2-x^3}}$ по степеням x.

Р е ш е н и е. Воспользуемся разложением $(1+t)^\alpha = \sum\limits_{k=0}^{\infty} C_k^\alpha t^k, \ |t| < 1$, при $\alpha = -\dfrac{1}{4}$: $(1+t)^{-\frac{1}{4}} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} C_k^{-\frac{1}{4}} t^k$, где коэффициенты $C_0^{-\frac{1}{4}} = 1$,

$$C_k^{-\frac{1}{4}} = \frac{-\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{4}-1\right)\cdot\ldots\cdot\left(-\frac{1}{4}-k+1\right)}{k!} = \frac{(-1)^k 1\cdot 5\cdot 9\cdot\ldots\cdot(4k-3)}{4^k k!}.$$

Далее вынесем 2 из–под знака корня, подставим вместо t в полученное разложение $-\dfrac{x^3}{2}$, имеем

$$\frac{1}{\sqrt[4]{2-x^3}} = \frac{1}{\sqrt[4]{2}}\left(1-\frac{x^3}{2}\right)^{-\frac{1}{4}} =$$
$$= \frac{1}{\sqrt[4]{2}}\left[1+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{1\cdot 5\cdot 9\cdot\ldots\cdot(4k-3)}{4^k k!}\left(-\frac{x^3}{2}\right)^k\right] =$$
$$= \frac{1}{\sqrt[4]{2}}\left[1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1\cdot 5\cdot 9\cdot\ldots\cdot(4k-3)}{2^{3k}k!}x^{3k}\right].$$

Так как $|t| < 1$, значит $\left|\dfrac{x^3}{2}\right| < 1$. Решая последнее неравенство, получим $|x| < \sqrt[3]{2}$ или $x \in (-\sqrt[3]{2};\ \sqrt[3]{2})$.

5.3 Приближенные вычисления с помощью рядов

С помощью рядов можно вычислять приближенные значения логарифмов, корней различной степени, тригонометрических функций, определенных интегралов. Именно такого рода разложения лежат в основе алгоритмов, позволяющих использовать математические пакеты при вычислениях, а также применять разного рода вычислительную технику.

Пусть неизвестное число A каким–то образом представлено сходящимся рядом: $A = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$, где a_k — некоторые числа. Обозначим через $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ сумму первых n членов (частичную сумму). Тогда погрешность при замене A на S_n выражается суммой остатка

$$R_n = A - S_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k.$$

Так как ряд сходится, то $R_n \to 0$ при $n \to \infty$ и поэтому при достаточно большом n погрешность станет сколь угодно малой. Другими словами, искомое число A с помощью суммы S_n указанного ряда можно выразить с любой заданной точностью. Как же оценить погрешность R_n?

Если рассматриваемый ряд оказывается знакочередующимся $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}a_k$ $(a_k > 0)$ и удовлетворяющим условиям признака Лейбница, то сумма остатка ряда имеет знак своего первого члена и по модулю не превышает его: $|R_n| \leqslant a_{n+1}$ (см. теорему 3.16, стр. 25).

В случае ряда с положительными членами $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ $(a_k > 0)$ необходимо найти новый ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ с большими членами $(a_k \leqslant b_k)$, и в качестве оценки для R_n взять сумму r_n остатка второго ряда $(R_n \leqslant r_n)$.

Рассмотрим как это делается на **примере**. При вычислении логарифмов натуральных чисел применяется следующая формула:

$$\ln(N+1) - \ln N = 2\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)(2N+1)^{2k+1}}. \tag{5.5}$$

Погрешность при замене суммы ряда суммой его первых n членов определяется выражением

$$R_n = \frac{2}{2n+1} \cdot \frac{1}{(2N+1)^{2n+1}} + \frac{2}{2n+3} \cdot \frac{1}{(2N+1)^{2n+3}} + \\ + \frac{2}{2n+5} \cdot \frac{1}{(2N+1)^{2n+5}} + \cdots$$

Заменив множители $2n+3$, $2n+5$ и т.д. на $2n+1$, получим новый ряд

$$R_n < r_n = \frac{2}{(2n+1)(2N+1)^{2n+1}} \left[1 + \frac{1}{(2N+1)^2} + \frac{1}{(2N+1)^4} + \cdots \right],$$

который легко просуммировать. Поскольку в квадратных скобках находится геометрическая прогрессия с первым членом 1 и знаменателем $q = \frac{1}{(2N+1)^2}$, то, вычисляя её сумму, получаем

$$S = \frac{1}{1 - \frac{1}{(2N+1)^2}} = \frac{(2N+1)^2}{4N(N+1)}$$

и оценка погрешности определяется неравенством:

$$R_n < r_n = \frac{1}{2(2n+1)(2N+1)^{2n-1}N(N+1)}.$$

П р и м е р 5.58. Вычислить $\ln 2$ с точностью до 10^{-3}.

Р е ш е н и е. Применим формулу (5.5) при $N = 1$, получим

$$\ln 2 = 2 \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 3^3} + \frac{1}{5 \cdot 3^5} + \cdots \right).$$

Оценка погрешности принимает вид $r_n < \frac{1}{4(2n+1)3^{2n-1}} < 10^{-3}$. Последнее неравенство выполняется, начиная с $n = 3 : \frac{1}{4 \cdot 7 \cdot 3^5} = \frac{1}{6804} < \frac{1}{1000}$. Следовательно, в формуле разложения в ряд для $\ln 2$ можно ограничиться тремя слагаемыми, чтобы вычислить искомое значение с заданной точностью: $\ln 2 \approx 2 \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5 \cdot 3^5} \right) \approx 0,693$.

З а м е ч а н и е 5.9. Если воспользоваться разложением в ряд Маклорена (см. стр. 131): $\ln(1+x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\dfrac{x^k}{k}$ при $x = 1$, то есть $\ln 2 = \sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{k-1}}{k}$, то для достижения заданной точности, в силу оценки остаточного члена

$$|R_n| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\right| \leqslant \frac{1}{n+1} < \frac{1}{1000},$$

придётся взять 1000 слагаемых.

Для вычисления корней из чисел применяют биномиальный ряд. Предположим, что нам известно некоторое приближенное значение a корня $\sqrt[m]{A}$ и требуется найти его более точное значение. Пусть x таково, что $\dfrac{A}{a^m} = 1 + x$. Тогда $\sqrt[m]{A} = a\sqrt[m]{\dfrac{A}{a^m}} = a(1+x)^{\frac{1}{m}}$. Теперь можно применить разложение 10 степенной функции из раздела «Справочный материал» на стр. 131.

П р и м е р 5.59. Вычислить $\sqrt{17}$ с точностью до 10^{-4}.

Р е ш е н и е. Преобразование $\sqrt[m]{A} = a(1+x)^{\frac{1}{m}}$ в данном случае принимает вид:

$$\sqrt{17} = \sqrt{16+1} = \sqrt{16\left(1+\frac{1}{16}\right)} = 4\left(1+\frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Воспользуемся биномиальным рядом при $x = \dfrac{1}{16}$ и $\alpha = \dfrac{1}{2}$:

$$C_0^{\frac{1}{2}} = 1,\ C_1^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2},$$

$$C_k^{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\cdot\ldots\cdot\left(\frac{1}{2}-k+1\right)}{k!} = \frac{(-1)^{k-1}(2k-3)!!}{2^k\cdot k!} \quad (k>1),$$

$$\left(1+\frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2\cdot 16} + \sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}(2k-3)!!}{2^k\cdot k!}\left(\frac{1}{16}\right)^k.$$

Полученный ряд (если не принимать во внимание первый член) знакочередующийся. Проверим удовлетворяет ли он признаку Лейбница.

1) Монотонность — $\forall k\ a_{k+1} \leqslant a_k$. Действительно,

$$\frac{(2k-1)!!}{2^{k+1}\cdot(k+1)!\cdot 16^{k+1}} \leqslant \frac{(2k-3)!!}{2^k\cdot k!\cdot 16^k} \Longleftrightarrow \frac{2k-1}{32(k+1)} \leqslant 1.$$

Последнее неравенство верно при всех $k \geqslant -1,1$. Значит, исходное неравенство справедливо при $k \in \mathbf{N}$.

2) Необходимый признак сходимости — $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = 0$. Вычислим предел

$$\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} \frac{(2k-3)!!}{2^k\cdot k!\cdot 16^k} = \lim_{k\to\infty} \frac{(2k-3)!!}{(2k)!!}\cdot\frac{1}{16^k} = 0,$$

как произведение ограниченной величины $\left(0 < \dfrac{(2k-3)!!}{(2k)!!} < 1\right)$ на бесконечно малую.

Таким образом, условия признака Лейбница выполнены, погрешность при вычислении суммы ряда не превышает по модулю первого отброшенного члена. Так как при $k = 3$ имеем

$$\frac{3}{2^3\cdot 3!\cdot 16^3} = \frac{1}{65536} < \frac{1}{10000},$$

то достаточно взять сумму первых трех членов ряда, чтобы получить искомое значение корня с заданной точностью:

$$\sqrt{17} \approx 4\cdot\left(1 + \frac{1}{2\cdot 16} - \frac{1}{2^3\cdot 16^2}\right) \approx 4,1231.$$

П р и м е р 5.60. Вычислить $\operatorname{arctg} 0,5$ с точностью до $0,001$.

Р е ш е н и е. В примере 5.53 (стр. 56) было получено разложение для функции $\operatorname{arctg} x$ на интервале $(-1;\ 1)$. Используя эту формулу, найдем значение

$$\operatorname{arctg} 0,5 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1}.$$

Числовой ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{2n+1}\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2n+1}$ удовлетворяет условиям признака Лейбница (см. стр 24). Поэтому для его n–го остатка

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{2k+1}$$

справедливо неравенство $|R_n| \leqslant \dfrac{1}{2n+3} \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right)^{2n+3}$. Так как неравенство $|R_n| \leqslant 0,001$ выполняется при $n \geqslant 3$, то

$$\operatorname{arctg}\frac{1}{2} \approx \sum_{n=0}^{3} \frac{(-1)^n}{2n+1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{8} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{32} - \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{128} \approx 0,464.$$

Если подынтегральная функция разлагается в степенной ряд, а пределы интегрирования принадлежат области сходимости ряда, то соответствующий определенный интеграл можно вычислить путем почленного интегрирования.

П р и м е р 5.61. Вычислить $\displaystyle\int_0^{0,5} \frac{\sin x}{x}\,dx$ с точностью до 10^{-4}.

Р е ш е н и е. Соответствующий неопределенный интеграл не может быть выражен в элементарных функциях, он представляет собой так называемый «неберущийся интеграл». Применить формулу Ньютона – Лейбница здесь не удается. Вычислим этот определенный интеграл приближенно.

Рассмотрим разложение $\sin x = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$, $|x| < \infty$. Разделим почленно этот ряд на x : $\dfrac{\sin x}{x} = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k+1)!}$. Интегрируя почленно, находим

$$\int_0^{0,5} \frac{\sin x}{x}dx = \int_0^{0,5} \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k+1)!}dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \cdot \frac{x^{2k+1}}{2k+1}\bigg|_0^{0,5} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^{2k+1}(2k+1)!(2k+1)}.$$

Поскольку этот ряд удовлетворяет признаку Лейбница и при $k = 2$ выполнено неравенство $\dfrac{1}{2^5 \cdot 5! \cdot 5} < \dfrac{1}{19200} < \dfrac{1}{10^4}$, то можно ограничиться первыми двумя членами ($k = 0$ и $k = 1$):

$$\int_0^{0,5} \frac{\sin x}{x}dx \approx \frac{1}{2} - \frac{1}{2^3 \cdot 3! \cdot 3} = \frac{71}{144} \approx 0,4931.$$

§6. Варианты лабораторной работы

6.1. Указания к выполнению лабораторной работы

С целью организации самостоятельной работы студентов в ходе изучения разделов математического анализа «Числовые ряды» и «Функциональные последовательности и ряды» обучающимся предлагается выполнить лабораторную работу. Работа над заданиями позволит закрепить материал, изучаемый на лекционных и практических занятиях.

Лабораторная работа выполняется в течение семестра, если иные сроки не указываются преподавателем. Студент получает от преподавателя номер варианта лабораторной работы, задания которой он должен выполнить в указанный срок. Задания вместе с решениями записываются студентом в отдельную тетрадь, которая периодически сдается на проверку преподавателю. Студент подписывает свою тетрадь (нужно указать номер варианта, свои фамилию, имя, отчество). Если возникают вопросы при решении, то студент **обязан** обратиться к преподавателю за консультацией. Время консультаций можно увидеть на стенде, расположенном рядом с кафедрой математического анализа. Преподаватель имеет право попросить студента объяснить решение задания в устной форме, если записи в тетради выполнены не разборчиво или в решении пропущены ключевые моменты (например, не указаны признаки сходимости рядов, нет соответствующих вычислений и т.д.).

За решенные задачи преподаватель начисляет баллы, которые учитываются в балльно–рейтинговой системе и, в последствии, влияют на экзаменационную оценку.

Вариант 1

1. Выписать n-ый член ряда a_n; найти n-ю частичную сумму ряда S_n; найти $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$ или доказать, что этот предел не существует; сделать вывод о сходимости или расходимости ряда

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \ldots$$

Исследовать ряд на сходимость (2 — 9).

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin^2 \frac{1}{n} - \operatorname{tg}^2 \frac{1}{n}}{n^{-4}}$. **3.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sqrt{n^3+2}}{n^2(2+\sin n)}$. **4.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^{3n}(2n)!}{4^{3n}(n!)^3}$.

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{n}{n+2}\right)^{n^2}$. **6.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n\sqrt{n}}{n+20}$. **7.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin \dfrac{n+4}{1+2n+2n^2}$.

8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos 3n}{n^2+\sin^2 n}$. **9.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(2n+1)!!}{n(2n+2)!!}$.

Исследовать ряд на абсолютную сходимость $(10, 11)$.

10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \cos\left(\dfrac{\pi}{3} + \pi n\right) \ln \dfrac{n+1}{n}$. **11.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin n}{\sqrt{n}}$.

Найти все значения α, при которых ряд 1) абсолютно сходится; 2) условно сходится $(12, 13)$.

12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^{\alpha}}$. **13.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos n}{n^{\alpha}}$.

14. Найти область сходимости E функциональной последовательности $\{f_n(x)\}$, где $f_n(x) = n\left(\sqrt[3]{x + \dfrac{1}{n}} - \sqrt[3]{x}\right)$. Найти предельную функцию $f(x)$ последовательности $\{f_n(x)\}$ на множестве E.

15. Найти предельную функцию $f(x)$ последовательности $\{f_n(x)\}$, где $f_n(x) = n \cdot \operatorname{arcctg}(nx^2)$, на множестве $E = (0; +\infty)$.

Исследовать на сходимость и равномерную сходимость последовательность $\{f_n(x)\}$ на множествах E_1 и E_2 $(16, 17)$.

16. $f_n(x) = \dfrac{nx^2}{1+2n+x}$, $E_1 = [0;\ 1]$, $E_2 = [1; +\infty)$.

17. $f_n(x) = \dfrac{x}{n} \ln \dfrac{x}{n}$, $E_1 = (0; 2)$, $E_2 = (0; +\infty)$.

Исследовать функциональный ряд на равномерную сходимость в указанном промежутке $(18, 19)$.

18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2 x^n}{2^n + x^2 + nx}$, $x \in [-1; 1]$. **19.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+2x+1}}$, $x \in [1, 2]$.

Найти радиус сходимости степенного ряда $(20, 21)$.

20. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\dfrac{n+1}{2n+3}\right)^n (5x-1)^n$. **21.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(n!)^2}{(2n)!}(x+1)^n$.

Найти интервал сходимости степенного ряда $(22, 23)$.

22. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(x+1)^n$. **23.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{2n-1}{3n+2}\right)^n (6x+4)^n$.

24. Найти радиус сходимости R и интервал сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt{\dfrac{n^4+3}{n^4+4n}}(x+2)^n$, исследовать ряд на сходимость и абсолютную сходимость на концах интервала сходимости. Записать область сходимости.

25. Разложить функцию $f(x) = e^{x-2}(1+x)^2$ в ряд Маклорена и найти радиус сходимости R полученного ряда.

Разложить функцию в ряд Тейлора в окрестности точки x_0 и найти радиус сходимости полученного ряда $(26, 27)$.

26. $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 5x + 6}$, $x_0 = 1$.

27. $f(x) = \arcsin\sqrt{1+2x+2x^2}$, $x_0 = -\dfrac{1}{2}$.

Разложить функцию в степенной ряд $(28, 29)$.

28. $\dfrac{4}{x+2}$ по степеням x. **29.** $\dfrac{7}{3-4x}$ по степеням $(x-1)$.

С точностью до 10^{-4} вычислить значения $(30-32)$.

30. $\sqrt[4]{e}$. **31.** $\sqrt[3]{217}$. **32.** $\int\limits_0^{0{,}75} \dfrac{\ln(1+x^2)}{x}dx$.

Вариант 2

1. Выписать n-ый член ряда a_n; найти n-ю частичную сумму ряда S_n; найти $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$ или доказать, что этот предел не существует; сделать вывод о сходимости или расходимости ряда

$$\left(\frac{2}{3}+\frac{4}{5}\right)+\left(\frac{2}{9}-\frac{4}{25}\right)+\left(\frac{2}{27}+\frac{4}{125}\right)+\dots$$

Исследовать ряд на сходимость (2 — 10).

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n+7^n}{2^n-7^{n-1}}$. **3.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos(\pi/6n)}{\sqrt[4]{3n^4+2}}$. **4.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 7\cdot 12\cdot\ldots\cdot(5n-3)}$.

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{3^n}\left(\dfrac{n-1}{n}\right)^{n^2}$. **6.** $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^n\ln^{25}n}{n}$. **7.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\operatorname{tg}\dfrac{(-1)^{n+1}\pi}{4n^q}$, $q>0$.

8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos n}{\sqrt{n}}$. **9.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!e^n}{n^{n+2}}$. **10.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{(2n+3)!!}{(2n+4)!!\sqrt{n}}\right)^2$.

11. Исследовать на абсолютную сходимость ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{\cos n\cdot\arccos\frac{1}{n}}{\sqrt{n}}$.

Найти все значения α, при которых ряд 1) абсолютно сходится; 2) условно сходится (12, 13).

12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n-\alpha}$. **13.** $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{\sin n}{n^\alpha}$.

14. Найти область сходимости E функциональной последовательности $\{f_n(x)\}$, где $f_n(x) = n^2\left(\sqrt[4]{x+\dfrac{1}{n^2}}-\sqrt[4]{x-\dfrac{1}{n^2}}\right)$, $x>0$. Найти предельную функцию $f(x)$ последовательности $\{f_n(x)\}$ на множестве E.

15. Найти предельную функцию $f(x)$ последовательности $\{f_n(x)\}$, где $f_n(x) = n(x^{\frac{1}{n}} - x^{\frac{1}{2n}})$, на множестве $E=(0;+\infty)$.

Исследовать на сходимость и равномерную сходимость последовательность $\{f_n(x)\}$ на множествах E_1 и E_2 (16, 17).

16. $f_n(x) = \dfrac{nx^2}{1+n^2x^4}$, $E_1=[0;\,1]$, $E_2=[1;\,+\infty)$.

17. $f_n(x) = \operatorname{arctg}\dfrac{n}{x}$, $E_1=(0;a]$, $a>0$, $E_2=(0;\,+\infty)$.

Исследовать функциональный ряд на равномерную сходимость в указанном промежутке $(18, 19)$.

18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^2}{1+n^{\frac{3}{2}}x^2}$, $x \in \mathbf{R}$. **19.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+3x+2}}$, $x \in [1;3]$.

Найти радиус сходимости степенного ряда $(20, 21)$.

20. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \Bigl(\ln\cos\dfrac{1}{3^n}\Bigr)(x+4)^n$. **21.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \Bigl(\dfrac{4n+1}{6n+3}\Bigr)^n (2x+6)^n$.

Найти интервал сходимости степенного ряда $(22, 23)$.

22. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt[3]{n}} \left(\dfrac{x-1}{3}\right)^n$. **23.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{5^n+(-3)^n}{n+1} x^n$.

24. Найти радиус сходимости R и интервал сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 4^{n^2}(x+1)^{n^2}$, исследовать ряд на сходимость и абсолютную сходимость на концах интервала сходимости. Записать область сходимости.

25. Разложить функцию $f(x) = e^{1+x}(1-x^2)$ в ряд Маклорена и найти радиус сходимости R полученного ряда.

Разложить функцию в ряд Тейлора в окрестности точки x_0 и найти радиус сходимости R полученного ряда $(26, 27)$.

26. $f(x) = \dfrac{1}{(x^2-6x+18)^2}$, $x_0 = 3$.

27. $f(x) = (x+1)\operatorname{arctg}\dfrac{x-1}{x+3}$, $x_0 = -1$.

Разложить функцию в степенной ряд $(28, 29)$.

28. $\dfrac{2}{x-2}$ по степеням x. **29.** $\dfrac{-1}{2x+5}$ по степеням $(x+2)$.

С точностью до 10^{-4} вычислить значения $(30 - 32)$.

30. $\ln 1{,}05$. **31.** $\sqrt[3]{65}$. **32.** $\int\limits_{0}^{0{,}5} \ln\dfrac{1}{1-x}\,dx$.

Вариант 3

1. Выписать n-ый член ряда a_n; найти n-ю частичную сумму ряда S_n; найти $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$ или доказать, что этот предел не существует; сделать вывод о сходимости или расходимости ряда

$$\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4} + \frac{1}{3\cdot 4\cdot 5} + \frac{1}{4\cdot 5\cdot 6} + \ldots$$

Исследовать ряд на сходимость (2 — 9).

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^3-4}{n} \arcsin\frac{1}{n^2+2}$. **3.** $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{2-\sin n}{\sqrt[3]{n^3-1}}$. **4.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!\cdot 2^n}{n^n}$.

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(n+1)^2-4}{n^2}\right)^{n^2}$. **6.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{(n+1)\sqrt[3]{n+2}}$. **7.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\left((-1)^n \frac{\pi}{3n^2}\right)$.

8. $\sum\limits_{n=10}^{\infty} \frac{\cos 2n}{\ln\ln n}$. **9.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!}\right)^2$.

Исследовать ряд на абсолютную сходимость $(10, 11)$.

10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{(n+3)\sqrt[4]{n+1}}$. **11.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n}$.

Найти все значения α, при которых ряд 1) абсолютно сходится; 2) условно сходится $(12, 13)$.

12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+\alpha}}{n^{\alpha}}$. **13.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 3n}{n^{[\alpha]}}$.

14. Найти область сходимости E функциональной последовательности $\{f_n(x)\}$, где $f_n(x) = \sqrt[n]{1+3(\sqrt{x})^n + x^n}$, $x > 0$. Найти предельную функцию $f(x)$ последовательности $\{f_n(x)\}$ на множестве E.

15. Найти предельную функцию $f(x)$ последовательности $\{f_n(x)\}$, где $f_n(x) = n(x^{\frac{1}{n}} - 1)$, на множестве $E = [1; 3]$.

Исследовать на сходимость и равномерную сходимость последовательность $\{f_n(x)\}$ на множествах E_1 и E_2 $(16, 17)$.

16. $f_n(x) = e^{-x^2-nx}$, $E_1 = (0;\,1)$, $E_2 = (1; +\infty)$.

17. $f_n(x) = \frac{\ln(n^2 x)}{n^2 x}$, $E_1 = (0; 1)$, $E_2 = (1; +\infty)$.

Исследовать функциональный ряд на равномерную сходимость в указанном промежутке $(18, 19)$.

18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sqrt{n}e^{nx}}{1+n^{\frac{7}{4}}e^{nx}}$, $x \in \mathbf{R}$. **19.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{\arccos x + n}$, $x \in [-1/2; 1]$.

Найти радиус сходимости степенного ряда $(20, 21)$.

20. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(n+1)(x-2)^n}{4^{n+2}}$. **21.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n\left(\cos\dfrac{1}{n}\right)^{2n^3}(x-1)^n$.

Найти интервал сходимости степенного ряда $(22, 23)$.

22. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\left(\dfrac{n^2}{2^n}\right)\cdot(x-3)^n$. **23.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt{\dfrac{n^4+3}{n^3+4n}}(x+2)^n$.

24. Найти радиус сходимости R и интервал сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^{n^2} x^n$, исследовать ряд на сходимость и абсолютную сходимость на концах интервала сходимости. Записать область сходимости.

25. Разложить функцию $f(x) = \dfrac{1}{2x^2+5x-3}$ в ряд Маклорена и найти радиус сходимости R полученного ряда.

Разложить функцию в ряд Тейлора в окрестности точки x_0 и найти радиус сходимости R полученного ряда $(26, 27)$.

26. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-4x+8}}$, $x_0 = 2$.

27. $f(x) = (x+1)\cos^2 x$, $x_0 = -1$.

Разложить функцию в степенной ряд $(28, 29)$.

28. $\dfrac{5}{x+3}$ по степеням x. **29.** $\dfrac{1}{3x-5}$ по степеням $(x+1)$.

С точностью до 10^{-4} вычислить значения $(30 - 32)$.

30. $\operatorname{arctg} 0,95$. **31.** $\sqrt[3]{7}$. **32.** $\displaystyle\int\limits_0^{0,25} \ln(1-x^2)dx$.

Вариант 4

1. Выписать n-ый член ряда a_n; найти n-ю частичную сумму ряда S_n; найти $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$ или доказать, что этот предел не существует; сделать вывод о сходимости или расходимости ряда

$$1 - 3 + 5 - 7 + \ldots$$

Исследовать ряд на сходимость (2 — 10).

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + \sqrt{n} - 1}{2 + 7 + 12 + \ldots + (5n-3)}$. **3.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{2-(-1)^n}{n^2-2}$. **4.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^n+3}$.

5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^4 \operatorname{arctg}^{2n}\frac{\pi}{4n}$. **6.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln(n+1)}{\sqrt{n+1}}$. **7.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \operatorname{arctg}\frac{n^2+1}{1+n^3}$.

8. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2n}{n}$. **9.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! e^n}{n^{n-3}}$. **10.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{n^3}} \left(\frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!}\right)^{1/2}$.

Исследовать ряд на абсолютную сходимость (11, 12).

11. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} \sin(2n) \arccos\frac{1}{\sqrt{n}}$. **12.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{(-1)^{n-1}}{3n^{2/3}}\right)$.

13. Найти все значения α, при которых 1) абсолютно сходится; 2) условно сходится ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^{\alpha+1}}$.

14. Найти область сходимости E функциональной последовательности $\{f_n(x)\}$, где $f_n(x) = \dfrac{1 + x^n + x^{2n}}{1 + 3x^n + x^{2n}}$. Найти предельную функцию $f(x)$ последовательности $\{f_n(x)\}$ на множестве E.

15. Найти предельную функцию $f(x)$ последовательности $\{f_n(x)\}$, где $f_n(x) = n^3 x^2 e^{-nx}$, на множестве $E = [0; +\infty)$.

Исследовать на сходимость и равномерную сходимость последовательность $\{f_n(x)\}$ на множествах E_1 и E_2 (16, 17).

16. $f_n(x) = e^{-(x-n)^2}$, $E_1 = [-2; 2]$, $E_2 = \mathbf{R}$.

17. $f_n(x) = \dfrac{1}{x^2}\sqrt{1 + \dfrac{x}{n}}$, $E_1 = (0; 1)$, $E_2 = (1; +\infty)$.

Исследовать функциональный ряд на равномерную сходимость в указанном промежутке (18, 19).

18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\operatorname{arctg}(nx)}{x^4 + n\sqrt[3]{n}} \cdot \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$, $x \in \mathbf{R}$.

19. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos(nx)}{\sqrt[3]{n^2 + x}}$, $x \in [2;\, 5]$.

Найти радиус сходимости степенного ряда (20, 21).

20. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{x-1}{\sqrt{n}}\right)^n$.   **21.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(2n+5)^2}{3^n + 4^{n-1}} x^n$.

Найти интервал сходимости степенного ряда (22, 23).

22. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n}{n^n} (x-1)^n$.   **23.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n n!}{(2n)!!} x^n$.

24. Найти радиус сходимости R и интервал сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 3^n (n^3 + 2)(x-1)^{2n}$, исследовать ряд на сходимость и абсолютную сходимость на концах интервала сходимости. Записать область сходимости.

25. Разложить функцию $f(x) = \ln\left(\dfrac{2+x^2}{1-x}\right)$ в ряд Маклорена и найти радиус сходимости R полученного ряда.

Разложить функцию в ряд Тейлора в окрестности точки x_0 и найти радиус сходимости R полученного ряда (26, 27).

26. $f(x) = \dfrac{1}{(x^2 - 2x + 3)^2}$, $x_0 = 1$.

27. $f(x) = (x-2)\sin^2 x$, $x_0 = 2$.

Разложить функцию в степенной ряд (28, 29).

28. $\dfrac{4}{3x+7}$ по степеням x.   **29.** $\dfrac{3}{x-5}$ по степеням $(x+2)$.

С точностью до 10^{-4} вычислить значения (30 — 32).

30. $\sqrt[3]{e}$.   **31.** $\sqrt[4]{82}$.   **32.** $\int\limits_0^{0,5} \ln(1+x^2)\,dx$.

Вариант 5

1. Выписать n-ый член ряда a_n; найти n-ю частичную сумму ряда S_n; найти $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$ или доказать, что этот предел не существует; сделать вывод о сходимости или расходимости ряда

$$\left(-\frac{2}{5}-\frac{1}{9}\right)+\left(\frac{2}{25}-\frac{1}{27}\right)+\left(-\frac{2}{125}-\frac{1}{81}\right)+\ldots$$

Исследовать ряд на сходимость (2 — 10).

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2+2}{1+2+3+\ldots+n}-\frac{2}{3}\right)$. **3.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{arctg}(2n)}{\sqrt{(n+1)n^3}}$.

4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 6\cdot 11\cdot\ldots\cdot(5n-4)}{n!3^n}$. **5.** $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{2+n}{n-1}\right)^{n^2}\cdot\frac{1}{4^n}$.

6. $\displaystyle\sum_{n=5}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2-4n+1}}$. **7.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin\left(\frac{n}{(n+1)\sqrt[4]{n+2}}\right)$.

8. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{\sqrt{n+1}}$. **9.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n n!}{n^n}$. **10.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{(n-1)!}}{(1+\sqrt{2})(1+\sqrt{3})\cdot\ldots\cdot(1+\sqrt{n})}$.

11. Исследовать на абсолютную сходимость ряд $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\cos n\cdot\arcsin\left(1-\frac{1}{2n}\right)}{1-n}$.

Найти все значения α, при которых ряд 1) абсолютно сходится; 2) условно сходится (12, 13).

12. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{1+n}n^{\alpha}$. **13.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2n}{n^{\alpha-1}}$.

14. Найти область сходимости E функциональной последовательности $\{f_n(x)\}$, где $f_n(x) = (x+1)\operatorname{arctg} x^n$. Найти предельную функцию $f(x)$ последовательности $\{f_n(x)\}$ на множестве E.

15. Найти предельную функцию $f(x)$ последовательности $\{f_n(x)\}$, где $f_n(x) = n\left(\sqrt{x^2+\dfrac{1}{n}}-x\right)$, на множестве $E = (0; +\infty)$.

Исследовать на сходимость и равномерную сходимость последовательность $\{f_n(x)\}$ на множествах E_1 и E_2 (16, 17).

16. $f_n(x) = \dfrac{\operatorname{arctg}(n^2 x)}{x}$, $E_1 = (0;\, 1)$, $E_2 = (1; +\infty)$.

17. $f_n(x) = nx^2 e^{-(n+1)x^2}$, $E_1 = [0; 1]$, $E_2 = [\delta;\, 1]$, $0 < \delta < 1$.

Исследовать функциональный ряд на равномерную сходимость в указанном промежутке $(18, 19)$.

18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x-1)^n}{(3n+1)3^n}$, $x \in [-1; 3]$. **19.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n n + 1}{n\sqrt{n+x+5}}$, $x \in [0; +\infty)$.

Найти радиус сходимости степенного ряда $(20, 21)$.

20. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n (2x+4)^n}{n^2+3n-7}$. **21.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{n! \cos(3/4n)}{3^n} (3x+2)^n$.

Найти интервал сходимости степенного ряда $(22, 23)$.

22. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(e^{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}} - 1\right)(x+2)^n$. **23.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos\dfrac{1}{2^n}\right)^n (x+1)^n$.

24. Найти радиус сходимости R и интервал сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x+1)^n}{\sqrt{n+1}} \ln\left(\dfrac{3n-2}{3n+2}\right)$, исследовать ряд на сходимость и абсолютную сходимость на концах интервала сходимости. Записать область сходимости.

25. Разложить функцию $f(x) = (1-x)(1+x^2)^{-\frac{3}{2}}$ в ряд Маклорена и найти радиус сходимости R полученного ряда.

Разложить функцию в ряд Тейлора в окрестности точки x_0 и найти радиус сходимости R полученного ряда $(26, 27)$.

26. $f(x) = \dfrac{1}{(x^2+2x+9)^3}$, $x_0 = -1$.

27. $f(x) = (x^2+4x+5) \operatorname{arctg} 3(x+2)^2$, $x_0 = -2$.

Разложить функцию в степенной ряд (28,29).

28. $\dfrac{3}{3x-4}$ по степеням x. **29.** $\dfrac{-3}{x-8}$ по степеням $(x-1)$.

С точностью до 10^{-4} вычислить значения $(30 - 32)$.

30. $\operatorname{arctg} 0,1$. **31.** $\sqrt[4]{18}$. **32.** $\int\limits_0^{0,5} \sqrt[4]{1+x^2}\,dx$.

Вариант 6

1. Выписать n-ый член ряда a_n; найти n-ю частичную сумму ряда S_n; найти $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$ или доказать, что этот предел не существует; сделать вывод о сходимости или расходимости ряда

$$\frac{1}{2\cdot 4} + \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{4\cdot 6} + \ldots$$

Исследовать ряд на сходимость (2 — 10).

2. $\sum\limits_{n=3}^{\infty}(n^2-1)\left(\ln(n^2-4)-\ln n^2\right)$. **3.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^n+4}{4^n+3}$. **4.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(n-1)^2}{(2+\frac{1}{n})^{n+1}}$.

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt[4]{n}\left(\dfrac{n+2}{1+2n}\right)^{4n}$. **6.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{\frac{n^2}{2}-n+5}}$. **7.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin 2n}{n+\sin n}$.

8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\operatorname{ch}\dfrac{n+1}{1+n^2}-1\right)$. **9.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!3^n}{n^{n-5}}$.

10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sqrt{n!}}{(3+\sqrt{2})(3+\sqrt{3})\ldots(3+\sqrt{n+1})}$.

Исследовать ряд на абсолютную сходимость (11, 12).

11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(1-\cos\dfrac{\pi}{\sqrt{n}}\right)$. **12.** $\sum\limits_{n=3}^{\infty}(-1)^n\left(\sqrt{n^2+3n+1}-\sqrt{n^2-3n+1}\right)$.

13. Найти все значения α, при которых ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n+\alpha}$ 1) абсолютно сходится; 2) условно сходится.

14. Найти область сходимости E функциональной последовательности $\{f_n(x)\}$, где $f_n(x) = \left(x^n + x^{2n}\right)^{\frac{1}{n}}$. Найти предельную функцию $f(x)$ последовательности $\{f_n(x)\}$ на множестве E.

15. Найти предельную функцию $f(x)$ последовательности $\{f_n(x)\}$, где $f_n(x) = n\cdot\operatorname{arcctg}(nx^2)$, на множестве $E = (0; +\infty)$.

Исследовать на сходимость и равномерную сходимость последовательность $\{f_n(x)\}$ на множествах E_1 и E_2 (16, 17).

16. $f_n(x) = \sqrt{n}(\sqrt{1+nx}-\sqrt{nx})$, $E_1 = (0;\ 1)$, $E_2 = (1; +\infty)$.

17. $f_n(x) = \dfrac{\sqrt{n}+\operatorname{arctg}(nx)}{\sqrt{nx}}$, $E_1 = (0; 1)$, $E_2 = (1; +\infty)$.

Исследовать функциональный ряд на равномерную сходимость в указанном промежутке (18, 19).

18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(n+2)^3(2x)^{2n}}{x^2+3n+4}$, $x \in \left[-\dfrac{1}{4}; \dfrac{1}{4}\right]$.

19. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{(-1)^n x^n}{n+\sin x}$, $x \in [-q; q]$, $q \in (0; 1)$.

Найти радиус сходимости степенного ряда (20, 21).

20. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{n+2}{n+5}\right)^{n^2} (x+3)^n$. **21.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^{\ln^2 n}(x-3)^n$.

Найти интервал сходимости степенного ряда (22, 23).

22. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1-\cos\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\right)(x-2)^n$. **23.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\left(3^{1/n}-1\right)(2x+3)^n$.

24. Найти радиус сходимости R и интервал сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 3^{n^2}(x+1)^{n^2}$, исследовать ряд на сходимость и абсолютную сходимость на концах интервала сходимости. Записать область сходимости.

25. Разложить функцию $f(x) = (1-x)\ln(1-x)$ в ряд Маклорена и найти радиус сходимости R полученного ряда.

Разложить функцию в ряд Тейлора в окрестности точки x_0 и найти радиус сходимости R полученного ряда (26, 27).

26. $f(x) = \dfrac{x^3-3x^2+4x-1}{x^2-2x+2}$, $x_0 = 1$.

27. $f(x) = (x^2-4x)\sin^2(x-2)$, $x_0 = 2$.

Разложить функцию в степенной ряд (28, 29).

28. $\dfrac{5}{6-7x}$ по степеням x. **29.** $\dfrac{2}{4-x}$ по степеням $(x+2)$.

С точностью до 10^{-4} вычислить значения (30 — 32).

30. $\sin 80^\circ$. **31.** $\sqrt[3]{215}$. **32.** $\int\limits_0^{0,5} \operatorname{ch} x^2 dx$.

Вариант 7

1. Выписать n-ый член ряда a_n; найти n-ю частичную сумму ряда S_n; найти $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$ или доказать, что этот предел не существует; сделать вывод о сходимости или расходимости ряда

$$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \ldots$$

Исследовать ряд на сходимость (2 — 9).

2. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{n! + (n+2)!}{(n-1)! + (n+2)!}$. **3.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sqrt{n} + \sqrt[3]{n}}{n + \sqrt[3]{n^5}}$. **4.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{4^{3n}(n!)^3}{(2n)!(n+2)!}$.

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{n-3}{1+n}\right)^{\sqrt{1+2n+n^5}}$. **6.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}(n-1)}{n\sqrt{n+2}}$.

7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(1 - \cos\dfrac{\sqrt{n}}{1+n}\right)$. **8.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(1+n)\sin 2n}{(2+n)^2}$. **9.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\ln n!}{n^{\alpha}}$, $\alpha > 2$.

Исследовать ряд на абсолютную сходимость $(10, 11)$.

10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\sqrt{n^2 - 6n + 3} - \sqrt{n^2 + 6n + 3}\right)$. **11.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{\ln^2 n}{n}$.

Найти все значения α, при которых ряд 1) абсолютно сходится; 2) условно сходится $(12, 13)$.

12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{(2n + (-1)^n)^{\alpha}}$. **13.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{\alpha}\ln\left(1 + \dfrac{(-1)^n}{4n^{3/4}}\right)$.

14. Найти область сходимости E функциональной последовательности $\{f_n(x)\}$, где $f_n(x) = (x+1)\,\mathrm{arctg}\,\dfrac{1}{x^{2n}+1}$. Найти предельную функцию $f(x)$ последовательности $\{f_n(x)\}$ на множестве E.

15. Найти предельную функцию $f(x)$ последовательности $\{f_n(x)\}$, где $f_n(x) = n(x^{\frac{1}{n}} - 1)$, на множестве $E = [1; 3]$.

Исследовать на сходимость и равномерную сходимость последовательность $\{f_n(x)\}$ на множествах E_1 и E_2 $(16, 17)$.

16. $f_n(x) = \dfrac{xn}{n + x^n}$, $E_1 = (0; 1)$, $E_2 = (1; +\infty)$.

17. $f_n(x) = \mathrm{arctg}\dfrac{1 + xn}{x^2 + n}$, $E_1 = (0; 1)$, $E_2 = (1; +\infty)$.

Исследовать функциональный ряд на равномерную сходимость в указанном промежутке (18 — 19).

18. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2(2nx)}{4^n \cdot \sqrt[3]{n^4 + x^2}}$, $x \in \mathbf{R}$.

19. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n e^{-nx}}{(1 + x^2)(2 + x^2) \cdot \ldots \cdot (n + x^2)}$, $x \in [2; +\infty)$.

Найти радиус сходимости степенного ряда $(20, 21)$.

20. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^n}}{n!}(x-5)^n$. **21.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \operatorname{sh}(1/n)}{n+4}(5x+2)^n$.

Найти интервал сходимости степенного ряда $(22, 23)$.

22. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)(4x-3)^n$.

23. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} - \frac{1}{n^2}\right)^{1/n} (1-x)^n$.

24. Найти радиус сходимости R и интервал сходимости степенного ряда $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n + (-3)^n}{n+1} x^n$, исследовать ряд на сходимость и абсолютную сходимость на концах интервала сходимости. Записать область сходимости.

25. Разложить функцию $f(x) = (1+x)^2 \ln(1-x)$ в ряд Маклорена и найти радиус сходимости R полученного ряда.

Разложить функцию в ряд Тейлора в окрестности точки x_0 и найти радиус сходимости R полученного ряда $(26, 27)$.

26. $f(x) = \dfrac{1}{(x^2 - 4x + 1)^2}$, $x_0 = 2$.

27. $f(x) = (x^2 - 4x + 1)\cos^2(x-2)$, $x_0 = 2$.

Разложить функцию в степенной ряд $(28, 29)$.

28. $\dfrac{2}{5-4x}$ по степеням x. **29.** $\dfrac{-2}{2x-7}$ по степеням $(x-1)$.

С точностью до 10^{-4} вычислить значения (30 — 32).

30. $\cos 70°$. **31.** $\sqrt[3]{127}$. **32.** $\displaystyle\int_0^{0{,}75} \operatorname{sh} x^2 \, dx$.

Вариант 8

1. Выписать n-ый член ряда a_n; найти n-ю частичную сумму ряда S_n; найти $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$ или доказать, что этот предел не существует; сделать вывод о сходимости или расходимости ряда

$$\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 7} + \ldots$$

Исследовать ряд на сходимость $(2 - 9)$.

2. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \left(\dfrac{n+1}{n-1}\right)^{3n+4}$. **3.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(n+1)!}$. **4.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(6n)!}{36^n (2n)!(4n)!}$.

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^{n+2}}{(2n^2+1)^{\frac{n}{2}}}$. **6.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \dfrac{\sqrt[3]{n}}{4+\sqrt{n}}$. **7.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \cos\left(\dfrac{\pi}{4} - \pi n\right) \sin \dfrac{\sqrt{n}}{1+n^{\frac{3}{2}}}$.

8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(n+2)\cos 3n}{(4+n)^2}$. **9.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1^2\cdot 4^2\cdot \ldots \cdot (3n-2)^2}{n!(n+1)!8^n}$.

Исследовать ряд на абсолютную сходимость $(10, 11)$.

10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\sin\dfrac{1}{n} + \cos\dfrac{1}{n}\right)^n (-1)^{n^2-1}$. **11.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \dfrac{\sqrt[3]{n+1}}{\sqrt{n}+2}$.

Найти все значения α, при которых ряд 1) абсолютно сходится; 2) условно сходится $(12, 13)$.

12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n-\alpha}$. **13.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos^2(2n) - \sin^2(2n)}{n^{\{\alpha\}}}$.

14. Найти область сходимости E функциональной последовательности $\{f_n(x)\}$, где $f_n(x) = (x^2-1)\operatorname{arctg}\dfrac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1}$. Найти предельную функцию $f(x)$ последовательности $\{f_n(x)\}$ на множестве E.

15. Найти предельную функцию $f(x)$ последовательности $\{f_n(x)\}$, где $f_n(x) = x\left(1+e^{-nx}\right)$, на множестве $E = \mathbf{R}$.

Исследовать на сходимость и равномерную сходимость последовательность $\{f_n(x)\}$ на множествах E_1 и E_2 $(16, 17)$.

16. $f_n(x) = \dfrac{1}{x^2 + nx + 1}$, $E_1 = [1; +\infty)$, $E_2 = [0; 1]$.

17. $f_n(x) = \operatorname{arctg} \dfrac{1 - x^{2n}}{1 + x^{2n}}$, $E_1 = (0; \frac{1}{2})$, $E_2 = (\frac{1}{2}; 1)$.

Исследовать функциональный ряд на равномерную сходимость в указанном промежутке (18, 19).

18. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 2^n + |x|}$, $x \in [-2; 3/2]$. **19.** $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + x^2 + x + 5}$, $x \in \mathbf{R}$.

Найти радиус сходимости степенного ряда (20, 21).

20. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{6^n \cdot x^n}{\ln n}$. **21.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4n)!}{(n!)^4}(x+2)^n$.

Найти интервал сходимости степенного ряда (22, 23).

22. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n \cdot x^n}{2 - 4n + 9n^2}$. **23.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\operatorname{sh}(1/n)}{1/n} \right)^{n^2} (1 - 2x)^n$.

24. Найти радиус сходимости R и интервал сходимости степенного ряда $\displaystyle\sum_{n=8}^{\infty} \frac{2^n + (-5)^n}{n - 7} x^{2n}$, исследовать ряд на сходимость и абсолютную сходимость на концах интервала сходимости. Записать область сходимости.

25. Разложить функцию $f(x) = \sin x \cos x$ в ряд Маклорена и найти радиус сходимости R полученного ряда.

Разложить функцию в ряд Тейлора в окрестности точки x_0 и найти радиус сходимости R полученного ряда (26, 27).

26. $f(x) = \log_3 \dfrac{1}{x^2 - 6x + 18}$, $x_0 = 3$. **27.** $f(x) = (x - 1) \sin^2 x$, $x_0 = 1$.

Разложить функцию в степенной ряд (28, 29).

28. $\dfrac{3}{3x - 5}$ по степеням x. **29.** $\dfrac{-2}{x + 6}$ по степеням $(x + 3)$.

С точностью до 10^{-4} вычислить значения (30 — 32).

30. $\sin 50^\circ$. **31.** $\sqrt[3]{63}$. **32.** $\displaystyle\int_0^{0,5} \sqrt[3]{1 - x^3}\, dx$.

Вариант 9

1. Выписать n-ый член ряда a_n; найти n-ю частичную сумму ряда S_n; найти $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$ или доказать, что этот предел не существует; сделать вывод о сходимости или расходимости ряда

$$\frac{3}{4\cdot 1} - \frac{3}{4\cdot 2} + \frac{3}{4\cdot 4} - \frac{3}{4\cdot 8} + \ldots$$

Исследовать ряд на сходимость (2 — 9).

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sqrt[3]{n^3+5} - \sqrt{3n^4+2}}{1+3+5+\ldots+(2n-1)}$. **3.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\left(\dfrac{n^2+1}{n^2}\right)$. **4.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n! \sin\dfrac{\pi}{2^n}$.

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^{n-1}e^{-n}$. **6.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{\ln n}{n^{\frac{3}{2}}}$. **7.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{n}{1+n^2} \operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{n}}{1+n^2}$.

8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \dfrac{n+3}{n^2+4}$. **9.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!}\right)^2$.

Исследовать на абсолютную сходимость ряд $(10, 11)$.

10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{4+5(-1)^n}{10}\right)^n$. **11.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n+1}}$.

Найти все значения α, при которых ряд 1) абсолютно сходится; 2) условно сходится $(12, 13)$.

12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{(3n+(-1)^n)^\alpha}$. **13.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n^{\alpha+n^{-1}}}$.

14. Найти область сходимости E функциональной последовательности $\{f_n(x)\}$, где $f_n(x) = (1-x^2)\operatorname{arctg}\dfrac{x^{2n}+1}{x^{2n}-1}$. Найти предельную функцию $f(x)$ последовательности $\{f_n(x)\}$ на множестве E.

15. Найти предельную функцию $f(x)$ последовательности $\{f_n(x)\}$, где $f_n(x) = n^5x^3e^{-2nx^2}$, на множестве $E = \mathbf{R}$.

Исследовать на сходимость и равномерную сходимость последовательность $\{f_n(x)\}$ на множествах E_1 и E_2 (16, 17)

16. $f_n(x) = n\ln\left(1+\frac{1}{nx}\right)$, $E_1 = (0;2)$, $E_2 = (2;+\infty)$.
17. $f_n(x) = \sin^{2n} x + \dfrac{1}{n^2}$, $E_1 = [0;\pi]$, $E_2 = [\delta;\ \pi-\delta]$, $\delta > 0$.

Исследовать функциональный ряд на равномерную сходимость в указанном промежутке $(18, 19)$.

18. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\pi - x)\cos^2 nx}{\sqrt[5]{n^7+e^x}}$, $x \in [0;\pi]$. **19.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{\sqrt{n}\ln^2(n+1)}$, $x \in \mathbf{R}$.

Найти радиус сходимости степенного ряда $(20, 21)$.

20. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{7^n}{n\sqrt{\ln n}}(x+3)^n$. **21.** $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{1+\frac{1}{n^2}}-1}{3^n+2^n}(x-2)^n$.

Найти интервал сходимости степенного ряда $(22, 23)$.

22. $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(x-4)^n}{n\cdot\ln n\cdot\ln(\ln n)}$. **23.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3-5x)^n}{1+3^n}$.

24. Найти радиус сходимости R и интервал сходимости степенного ряда $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{\sqrt{n}}{n^2+1}(x-2)^n$, исследовать ряд на сходимость и абсолютную сходимость на концах интервала сходимости. Записать область сходимости.

25. Разложить функцию $f(x) = \sqrt[3]{1-4x}$ в ряд Маклорена и найти радиус сходимости R полученного ряда.

Разложить функцию в ряд Тейлора в окрестности точки x_0 и найти радиус сходимости R полученного ряда $(26, 27)$.

26. $f(x) = \dfrac{x}{x^2+4x+3}$, $x_0 = 0,5$. **27.** $f(x) = (x^2+1)e^{-x^2}$, $x_0 = 0$.

Разложить функцию в степенной ряд $(28, 29)$.

28. $\dfrac{2}{4x-3}$ по степеням x. **29.** $\dfrac{8}{5-x}$ по степеням $(x-1)$.

С точностью до 10^{-4} вычислить значения $(30 - 32)$.

30. $\cos 40^\circ$. **31.** $\sqrt[3]{26}$. **32.** $\displaystyle\int_0^{0,25} \frac{\operatorname{sh} x}{x}dx$.

Вариант 10

1. Выписать n-ый член ряда a_n; найти n-ю частичную сумму ряда S_n; найти $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$ или доказать, что этот предел не существует; сделать вывод о сходимости или расходимости ряда

$$\frac{1}{2\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 8} + \frac{1}{8\cdot 11} + \ldots$$

Исследовать ряд на сходимость (2 — 9).

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-3}{n+2}\right)^{n}$. **3.** $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\operatorname{arcctg}^2(3n)}{(n-1)n}$. **4.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot(2n)}{n!}\operatorname{arctg}\frac{1}{3^n}$.

5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n-1}{3n+1}\right)^{\frac{n^2}{2}}$. **6.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\sin\frac{3\sqrt{n}}{n^2+3}$. **7.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln(n+1)}{(n+1)^{\frac{4}{3}}}$.

8. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\frac{1}{n\operatorname{arctg} n}$. **9.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^2\cdot 8^2\cdot\ldots\cdot(3n+2)}{n!(n+1)!10^n}$.

Исследовать на абсолютную сходимость ряд $(10, 11)$.

10. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3+4(-1)^n}{9}\right)^{n}$. **11.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-n)^n}{(2n)!}$.

Найти все значения α, при которых ряд 1) абсолютно сходится; 2) условно сходится $(12, 13)$.

12. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^{\alpha-\frac{1}{n}}}$. **13.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^{\alpha}$.

14. Найти область определения E функциональной последовательности $\{f_n(x)\}$, где $f_n(x) = \dfrac{e^{nx}-1}{e^{nx}+1}$. Найти предельную функцию $f(x)$ последовательности $\{f_n(x)\}$ на множестве E.

15. Найти предельную функцию $f(x)$ последовательности $\{f_n(x)\}$, где $f_n(x) = \sin(n^2 e^{-nx})$, на множестве $E = [1; +\infty)$.

Исследовать на сходимость и равномерную сходимость последовательность $\{f_n(x)\}$ на множествах E_1 и E_2 $(16, 17)$.

16. $f_n(x) = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}\right)$, $E_1 = (0; 1/2)$, $E_2 = (1/2; 1)$.

17. $f_n(x) = \dfrac{1}{x}\cos\left(\dfrac{x-1}{n}\right)$, $E_1 = (0; 2)$, $E_2 = (2; +\infty)$.

Исследовать равномерную сходимость функционального ряда на указанном промежутке (18, 19).

18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\operatorname{tg}(x/n)}{\sqrt{2^x + n^5}}$, $x \in [0; \pi/4]$. **19.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos(4n+1)x}{\sqrt[3]{n^3+1}}$, $x \in \mathbf{R}$.

Найти радиус сходимости степенного ряда (20, 21).

20. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{x+1}{n}\right)^n$. **21.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\sin\dfrac{1}{2^n} - \sin\dfrac{1}{3^n}\right)(x-9)^n$.

Найти интервал сходимости степенного ряда (22, 23).

22. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg}^n\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{1}{n}\right)x^n$. **23.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\dfrac{2^n+3^n}{2}\right)^{(n^2+1)/n} (x+1)^n$.

24. Найти радиус сходимости R и интервал сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-3)^n \left(\dfrac{x+2}{2}\right)^n$, исследовать ряд на сходимость и абсолютную сходимость на концах интервала сходимости. Записать область сходимости.

25. Разложить функцию $f(x) = \dfrac{1}{2x^2 - 3x + 1}$ в ряд Маклорена и найти радиус сходимости R полученного ряда.

Разложить функцию в ряд Тейлора в окрестности точки x_0 и найти радиус сходимости R полученного ряда (26, 27).

26. $f(x) = \ln\dfrac{2x}{x+3}$, $x_0 = 3$. **27.** $f(x) = \left(x - \dfrac{x^3}{2}\right)\sin x^2$, $x_0 = 0$.

Разложить функцию в степенной ряд (28, 29).

28. $\dfrac{3}{2x-1}$ по степеням x. **29.** $\dfrac{1}{3-x}$ по степеням $(x+1)$.

С точностью до 10^{-4} вычислить значения (30 — 32).

30. $\sin 20^\circ$. **31.** $\sqrt[3]{9}$. **32.** $\int\limits_0^{0{,}75} \sqrt{1+x^2}\,dx$.

Вариант 11

1. Выписать n-ый член ряда a_n; найти n-ю частичную сумму ряда S_n; найти $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$ или доказать, что этот предел не существует; сделать вывод о сходимости или расходимости ряда

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{9}\right) + \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{27}\right) + \ldots$$

Исследовать ряд на сходимость (2 — 9).

2. $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \frac{n^3 + 2n - 4}{4 - 2n} \operatorname{arctg} \frac{1}{n^2}$. **3.** $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{2 - \cos(3n)}{\sqrt{n^2 - n}}$. **4.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{10^n \cdot n^{10}}{(2n)!!}$.

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{n+3} \operatorname{arctg}^n \frac{\pi}{3n}$. **6.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sqrt{n-1}}{n+2}$.

7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(\operatorname{ch} \frac{\sqrt{n}}{1+n} - 1\right)$. **8.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \frac{\sqrt{n}}{n+1}$.

9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(1 - \cos \frac{(-1)^n}{2\sqrt{n}}\right)$.

Исследовать на абсолютную сходимость ряд $(10, 11)$.

10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \lg \frac{100 + n^2}{1 + 100n^2}$. **11.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{(n+1)} \ln n}{\sqrt{n+2}}$.

Найти все значения α, при которых ряд 1) абсолютно сходится; 2) условно сходится $(12, 13)$.

12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+3}}{n^{\alpha}}$. **13.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 4n}{n^{3\alpha - 4}}$.

14. Найти область сходимости E функциональной последовательности $\{f_n(x)\}$, где $f_n(x) = \frac{x + e^{nx}}{e^{nx} + 1}$. Найти предельную функцию $f(x)$ последовательности $\{f_n(x)\}$ на множестве E.

15. Найти предельную функцию $f(x)$ последовательности $\{f_n(x)\}$, где $f_n(x) = \frac{\ln(nx)}{\sqrt{nx}}$, на множестве $E = (0; 1)$.

Исследовать на сходимость и равномерную сходимость последовательность $\{f_n(x)\}$ на множествах E_1 и E_2 $(16, 17)$.

16. $f_n(x) = \cos\left(\dfrac{1}{2nx^2}\right)$, $E_1 = (0; \pi)$, $E_2 = (\pi; +\infty)$.

17. $f_n(x) = \dfrac{x^4 + x^2 n + x n^2}{x^2 + n^2}$, $E_1 = (0; a)$, $E_2 = (0; +\infty)$.

Исследовать функциональный ряд на равномерную сходимость в указанном промежутке $(18, 19)$.

18. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!\cos(nx)}{n^4 \cdot n!}$, $x \in \mathbf{R}$. **19.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-n|x|}}{x^2 + n}$, $x \in \mathbf{R}$.

Найти радиус сходимости степенного ряда $(20, 21)$.

20. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n^4\sqrt{\ln n}}$. **21.** $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n^2 + 5n} \cdot \left(\frac{x+3}{4}\right)^n$.

Найти интервал сходимости степенного ряда $(22, 23)$.

22. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3x-1)^n}{n!(n^2+7)}$. **23.** $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[7]{n^3}} \left(\frac{3x-2}{5}\right)^n$.

24. Найти радиус сходимости R и интервал сходимости степенного ряда $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x+2)^n}{3^n + 5^n}$, исследовать ряд на сходимость и абсолютную сходимость на концах интервала сходимости. Записать область сходимости.

25. Разложить функцию $f(x) = \ln(2x^2 - 3x + 1)$ в ряд Маклорена и найти радиус сходимости R полученного ряда.

Разложить функцию в ряд Тейлора в окрестности точки x_0 и найти радиус сходимости R полученного ряда $(26, 27)$.

26. $f(x) = \operatorname{sh}^2 x$, $x_0 = 0$. **27.** $f(x) = \dfrac{1}{2^{3x-2}}$, $x_0 = -1$.

Разложить функцию в степенные ряды $(28, 29)$.

28. $\dfrac{4}{5x-2}$ по степеням x. **29.** $\dfrac{3}{7-5x}$ по степеням $(x-2)$.

С точностью до 10^{-4} вычислить значения $(30 - 32)$.

30. $\cos 10^\circ$. **31.** $\sqrt{80}$. **32.** $\displaystyle\int_0^{0{,}5} \sin x^2 dx$.

Вариант 12

1. Выписать n-ый член ряда a_n; найти n-ю частичную сумму ряда S_n; найти $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$ или доказать, что этот предел не существует; сделать вывод о сходимости или расходимости ряда

$$1 + 2 + 3 + 4 + \ldots$$

Исследовать ряд на сходимость (2 — 10).

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1}\right)$. **3.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin^2(3^n)}{3^n}$. **4.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!\sqrt[3]{n}}{3^n+2}$.

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 4^n\left(\dfrac{3+2n}{2n+5}\right)^{(n-4)^2}$. **6.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{n^3}{(1+n^2)^6}$.

7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(1-\cos\dfrac{n+1}{\sqrt{n^3}}\right)$. **8.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}\dfrac{n+4}{1+2n+2n^2}$.

9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!\pi^n}{n^{n+3}}$. **10.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin n}{\sqrt[8]{n+1}}$.

11. Исследовать на абсолютную сходимость ряд $\sum\limits_{n=10}^{\infty}\dfrac{\cos \pi n}{n(\ln n)^2(\ln\ln n)^3}$.

Найти все значения α, при которых ряд 1) абсолютно сходится; 2) условно сходится (12, 13).

12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+4}}{n+1-\alpha}$. **13.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(n+1)!}{2(2+1)(2+2)\cdot\ldots\cdot(2+n)n^{\alpha}}$.

14. Найти область сходимости E функциональной последовательности $\{f_n(x)\}$, где $f_n(x) = \dfrac{x+e^{nx}}{xe^{nx}+1}$. Найти предельную функцию $f(x)$ последовательности $\{f_n(x)\}$ на множестве E.

15. Найти предельную функцию $f(x)$ последовательности $\{f_n(x)\}$, где $f_n(x) = x^2e^{-nx}$, на множестве $E = (0; +\infty)$.

Исследовать на сходимость и равномерную сходимость последовательность $\{f_n(x)\}$ на множествах E_1 и E_2 (16, 17).

16. $f_n(x) = \ln\left(x^4 + \dfrac{1}{n}\right)$, $E_1 = (0; +\infty)$, $E_2 = (\alpha; +\infty)$, $\alpha > 0$.

17. $f_n(x) = \cos\left(\dfrac{\pi}{4} e^{\frac{x^2}{n^2}}\right)$, $E_1 = (0; \alpha)$, $\alpha > 0$, $E_2 = [0; +\infty)$.

Исследовать функциональный ряд на равномерную сходимость в указанном промежутке $(18, 19)$.

18. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-n^2x^2}}{|x| + n^2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$, $x \in \mathbf{R}$. **19.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x\cos(nx)}{\sqrt{n}x^2 + \sqrt{n^3}}$, $x \in (0, \pi/2)$.

Найти радиус сходимости степенного ряда $(20, 21)$,

20. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \operatorname{tg}\frac{1}{n}\right)^{n^2} x^n$. **21.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (x+5)^n}{n(5^n + 1)}$.

Найти интервал сходимости степенного ряда $(22, 23)$.

22. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\cos^n \frac{1}{n}\right)(2x+3)^n$. **23.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \arcsin\left(\frac{n^3}{4^n}\right)(x-6)^n$.

24. Найти радиус сходимости R и интервал сходимости степенного ряда $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \arcsin\frac{\sqrt{n}}{n^2+1}(x-2)^n$, исследовать ряд на сходимость и абсолютную сходимость на концах интервала сходимости. Записать область сходимости.

25. Разложить функцию $f(x) = (1+2x)\ln\left(1 - \dfrac{x}{2}\right)$ в ряд Маклорена и найти радиус сходимости R полученного ряда.

Разложить функцию в ряд Тейлора в окрестности точки x_0 и найти радиус сходимости R полученного ряда $(26, 27)$.

26. $f(x) = (x+2)\cos(x-1)^2$, $x_0 = 1$. **27.** $f(x) = \dfrac{2x-3}{\sqrt{3x+4}}$, $x_0 = 1$.

Разложить функцию в степенной ряд $(28, 29)$.

28. $\dfrac{3}{4x-3}$ по степеням x. **29.** $\dfrac{-8}{5-2x}$ по степеням $(x-1)$.

С точностью до 10^{-4} вычислить значения $(30 - 32)$.

30. $\sin 10^\circ$. **31.** $\sqrt{79}$. **32.** $\displaystyle\int_0^{0,5} \cos x^2 dx$.

Вариант 13

1. Выписать n-ый член ряда a_n; найти n-ю частичную сумму ряда S_n; найти $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$ или доказать, что этот предел не существует; сделать вывод о сходимости или расходимости ряда

$$\ln(1+1) + \ln\left(1+\frac{1}{2}\right) + \ln\left(1+\frac{1}{3}\right) + \ldots$$

Исследовать ряд на сходимость $(2-9)$.

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2+4+6+\ldots+2n}{1+3+5+\ldots+(2n-1)}$. **3.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1-\sin n}{(n+1)n}$. **4.** $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{4^{n-1}\sqrt{n^2+5}}{(n-1)!}$.

5. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \left(\cos\dfrac{2}{\sqrt{n-1}}\right)^{(n+2)^2}$. **6.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \operatorname{sh}\dfrac{\sqrt{n}}{1+n^2}$.

7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\dfrac{n^2}{(1+n^3)^4}$. **8.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+\pi n\right)\right)^{\frac{n+1}{2}} \sin\dfrac{1}{n}$.

9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin^2\left(2n+\frac{\pi}{4}\right)}{n\sqrt[3]{n+2}}$.

Исследовать на абсолютную сходимость ряд $(10, 11)$.

10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{[n]}}{\sqrt{n}}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$. **11.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n n}{(n+2)\sqrt[4]{n+1}}$.

Найти все значения α, при которых ряд 1) абсолютно сходится; 2) условно сходится $(12, 13)$.

12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{\alpha n^{\alpha}}$. **13.** $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \dfrac{n!}{3(3+1)(3+2)\cdot\ldots\cdot(3+(n-1))(n-1)^{\alpha}}$.

14. Найти область сходимости E функциональной последовательности $\{f_n(x)\}$, где $f_n(x) = \dfrac{x^2e^{nx}+x}{e^{nx}+1}$. Найти предельную функцию $f(x)$ последовательности $\{f_n(x)\}$ на множестве E.

15. Найти предельную функцию $f(x)$ последовательности $\{f_n(x)\}$, где $f_n(x) = n\left(\dfrac{x}{\sqrt[3]{n}} - \operatorname{arctg}\dfrac{x}{\sqrt[3]{n}}\right)$, на множестве $E = (1; +\infty)$.

Исследовать на сходимость и равномерную сходимость последовательность $\{f_n(x)\}$ на множествах E_1 и E_2 $(16, 17)$.

16. $f_n(x) = (x-1)\operatorname{arctg}(x^2 n)$, $E_1 = [0; 1]$, $E_2 = (1; +\infty)$.

17. $f_n(x) = e^{-2x^2-3nx}$, $E_1 = (0; 1)$, $E_2 = (1; +\infty)$.

Исследовать функциональный ряд на равномерную сходимость в указанном промежутке $(18, 19)$.

18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^{nx}}{n!}$, $x \in (-\infty; 1]$. **19.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin x \cos(nx)}{\ln(n+x^2)}$, $x \in \mathbf{R}$.

Найти радиус сходимости степенного ряда $(20, 21)$.

20. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{5^n(2x+7)^n}{3n^3+2}$. **21.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n(x+6)^n}{3^n \cdot n!}$.

Найти интервал сходимости степенного ряда $(22, 23)$.

22. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n(x+4)^n}{n^2+5n-1}$. **23.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{10^n}{(2n+1)^n}(4x+9)^n$.

24. Найти радиус сходимости R и интервал сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n\sqrt{n}}{7^n}(x-2)^n$, исследовать ряд на сходимость и абсолютную сходимость на концах интервала сходимости.Записать область сходимости.

25. Разложить функцию $f(x) = \dfrac{2-x+x^2}{1-x}$ в ряд Маклорена и найти радиус сходимости R полученного ряда.

Разложить функцию в ряд Тейлора в окрестности точки x_0 и найти радиус сходимости R полученного ряда $(26, 27)$.

26. $f(x) = \operatorname{arctg}\dfrac{2-2x}{1+4x}$, $x_0 = 0$. **27.** $f(x) = \dfrac{1}{e^{-4x+4}}$, $x_0 = 1$.

Разложить функцию в степенной ряд $(28, 29)$.

28. $\dfrac{4}{5x-3}$ по степеням x. **29.** $\dfrac{2}{3-x}$ по степеням $(x+2)$.

С точностью до 10^{-4} вычислить значения $(30 - 32)$.

30. $\cos 0,5$. **31.** $\sqrt{63}$. **32.** $\int\limits_0^{0,5} \sqrt{x^3+1}\,dx$.

Вариант 14

1. Выписать n-ый член ряда a_n; найти n-ю частичную сумму ряда S_n; найти $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$ или доказать, что этот предел не существует; сделать вывод о сходимости или расходимости ряда

$$3 + 5 + 7 + 9 + \ldots$$

Исследовать ряд на сходимость (2 — 10).

2. $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \dfrac{\sqrt[4]{n+3}}{\ln^2(3n-4)}$. **3.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{4+2(-1)^n}{3^{n+3}}$. **4.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{5^n}{(n+1)!2^n}$.

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n \cdot n^2}{(3n+1)^n}$. **6.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \operatorname{tg}^2 \dfrac{(-1)^n}{1+4n^2}$. **7.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}\sqrt{n+1}}{n}$.

8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\sin\left(\dfrac{\pi}{4} - \pi n\right)\right)^{\frac{n-1}{2}} \dfrac{\ln^2 n}{n}$. **9.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\operatorname{arctg} n^n}{\sqrt[4]{2n^6+3n+1}}$.

10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \dfrac{1}{\sqrt[n]{n^2+2n+1}}$.

11. Исследовать на абсолютную сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n\sqrt[4]{n}}$.

Найти все значения α, при которых ряд 1) абсолютно сходится; 2) условно сходится (12, 13).

12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \dfrac{(-1)^n}{(n+1)^{2\alpha}}\right)$. **13.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\cdot\ldots\cdot(\alpha+(n-1))(n-1)^2}$.

14. Найти область сходимости E функциональной последовательности $\{f_n(x)\}$, где $f_n(x) = (1+|x|)\dfrac{e^{nx}-e^{-nx}}{e^{nx}+e^{-nx}}$. Найти предельную функцию $f(x)$ последовательности $\{f_n(x)\}$ на множестве E.

15. Найти предельную функцию $f(x)$ последовательности $\{f_n(x)\}$, где $f_n(x) = \dfrac{\ln(nx)}{\sqrt{nx}}$, на множестве $E = [1; +\infty)$.

Исследовать на сходимость и равномерную сходимость последовательность $\{f_n(x)\}$ на множествах E_1 и E_2 (16, 17).

16. $f_n(x) = \arcsin \dfrac{2x^n}{1+2x^n}$, $E_1 = [0;\alpha)$, $0 < \alpha < 1$, $E_2 = [0;1)$.
17. $f_n(x) = nx^2 e^{-nx}$, $E_1 = [2;+\infty)$, $E_2 = [0;2]$.

Исследовать функциональный ряд на равномерную сходимость в указанном промежуткее $(18, 19)$.

18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^3 2^{xn}}{1+5^n 2^{xn}}$, $x \in \mathbf{R}$. **19.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n \ln n}{n+x}$, $x \in [1;+\infty)$.

Найти радиус сходимости степенного ряда $(20, 21)$.

20. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\dfrac{n+1}{2n+1}\right)^{n^2} (3x+6)^n$. **21.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^{n+1}}{n!}(5x+1)^n$.

Найти интервал сходимости степенного ряда $(22, 23)$.

22. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n(x-4)^n}{\sqrt{3^n \cdot n^3 + 6}}$. **23.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^{n^3/(n^2+1)}(7x-2)^n$.

24. Найти радиус сходимости R и интервал сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\ln(1+n^2)}{n^2}(x-2)^n$, исследовать ряд на сходимость и абсолютную сходимость на концах интервала сходимости. Записать область сходимости.

25. Разложить функцию $f(x) = e^{3x} - 2e^{-x}$ в ряд Маклорена и найти радиус сходимости R полученного ряда.

Разложить функцию в ряд Тейлора в окрестности точки x_0 и найти радиус сходимости R полученного ряда $(26, 27)$.
26. $f(x) = x \sin x$, $x_0 = \pi$. **27.** $f(x) = \ln(x^2 + x)$, $x_0 = 2$.

Разложить функцию в степенной ряд $(28, 29)$.

28. $\dfrac{-1}{\sqrt{x^2+3}}$ по степеням x. **29.** $\dfrac{2}{1-4x}$ по степеням $(x+1)$.

С точностью до 10^{-4} вычислить значения $(30 - 32)$.

30. $\cos 0,25$. **31.** $\sqrt{48}$. **32.** $\int\limits_0^{0,5} e^{-x^2} dx$.

Вариант 15

1. Выписать n-ый член ряда a_n; найти n-ю частичную сумму ряда S_n; найти $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$ или доказать, что этот предел не существует; сделать вывод о сходимости или расходимости ряда

$$\left(\frac{1}{6} - \frac{5}{4}\right) + \left(\frac{1}{6^2} + \frac{5}{16}\right) + \left(\frac{1}{6^3} - \frac{5}{64}\right) + \dots$$

Исследовать ряд на сходимость $(2 - 9)$.

2. $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n+4]{\ln n}}$. **3.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^5 \cdot \operatorname{tg}^3 \frac{2}{n^2}$. **4.** $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \frac{(2n-4)!!}{1 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (3n+1)}$.

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4n-1}{4n+2}\right)^{n^2+2n}$. **6.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln^3 n}{n^2}$. **7.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}\right) \operatorname{tg} \frac{n\sqrt{n}}{1+n^2}$.

8. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{\cos 2n}{n \ln n}$. **9.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2,57)^n (n+1)!}{(n-1)^n + 1}$.

Исследовать ряд на абсолютную сходимость $(10, 11)$.

10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{4}}{n\sqrt{n} + \cos \frac{n\pi}{4}}$. **11.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n-2}{\sqrt{n^2 - 3n + 4}} \operatorname{arctg} \frac{\pi}{\sqrt{n+1}}$.

Найти все значения α, при которых ряд 1) абсолютно сходится; 2) условно сходится $(12, 13)$.

12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(\sqrt{n+1} + (-1)^n)^{\alpha}}$. **13.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin 3n}{n^{\alpha}}$.

14. Найти область сходимости E функциональной последовательности $\{f_n(x)\}$, где $f_n(x) = \dfrac{(1 + x|x|)e^{-nx} + 1 - x}{e^{-nx} + 1}$. Найти предельную функцию $f(x)$ последовательности $\{f_n(x)\}$ на множестве E.

15. Найти предельную функцию $f(x)$ последовательности $\{f_n(x)\}$, где $f_n(x) = \sin\left(e^{-nx} + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$, на множестве $E = (0; +\infty)$.

Исследовать на сходимость и равномерную сходимость последовательность $\{f_n(x)\}$ на множествах E_1 и E_2 $(16, 17)$.

16. $f_n(x) = \dfrac{nx^2}{n+x}$, $E_1 = [1; +\infty)$, $E_2 = [0; 2]$.

17. $f_n(x) = e^{-(x-3n)^2}$, $E_1 = (-a; a)$, $a > 0$, $E_2 = \mathbf{R}$.

Исследовать функциональный ряд на равномерную сходимость в указанном промежутке $(18, 19)$.

18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x+1)^n}{10^n(2n-1)}$, $x \in [-4, 1]$.

19. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x}{(1+nx)(1+(n+1)x)}$, $x \in [1; +\infty)$.

Найти радиус сходимости степенного ряда $(20, 21)$.

20. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg}^n \left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{1}{n}\right) x^n$. **21.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n x^n}{5^n \cdot \sqrt[3]{n^2+1}}$.

Найти интервал сходимости степенного ряда $(22, 23)$.

22. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(4n)!}{(n!)^4}(x+1)^n$. **23.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(1 - \operatorname{ch}\dfrac{1}{n}\right)^{n^2} (1-3x)^n$.

24. Найти радиус сходимости R и интервал сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{(-1)^n 5^n}{n^2+5n-6}(x+1)^n$, исследовать ряд на сходимость и абсолютную сходимость на концах интервала сходимости. Записать область сходимости.

25. Разложить функцию $f(x) = \dfrac{x}{1+x^4}$ в ряд Маклорена и найти радиус сходимости R полученного ряда.

Разложить функцию в ряд Тейлора в окрестности точки x_0 и найти радиус сходимости R полученного ряда $(26, 27)$.

26. $f(x) = \dfrac{x-2}{x^2+4x+8}$, $x_0 = -2$.

27. $f(x) = (x^2 - 6x + 10)\operatorname{ch}^2(x-3)$, $x_0 = 3$.

Разложить функцию в степенной ряд $(28, 29)$.

28. $\sqrt{x^2+1}$ по степеням x. **29.** $\dfrac{3}{5x-3}$ по степеням $(x+2)$.

С точностью до 10^{-4} вычислить значения $(30 - 32)$.

30. $\sin 0,25$. **31.** $\sqrt{37}$. **32.** $\int\limits_0^{0,2} (1 + e^{x^2})dx$.

Вариант 16

1. Выписать n-ый член ряда a_n; найти n-ю частичную сумму ряда S_n; найти $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$ или доказать, что этот предел не существует; сделать вывод о сходимости или расходимости ряда

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 5} + \ldots$$

Исследовать ряды на сходимость (2 — 10).

2. $\sum\limits_{n=3}^{\infty}(n-2)\ln\dfrac{n+2n^2+3n^3+n^4}{5+n^4}$. **3.** $\sum\limits_{n=5}^{\infty}\dfrac{\cos^2(3n)}{n\sqrt[6]{n-4}}$. **4.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^{2n+1}(2n)!}{2^{2n+1}(n!)^3}$.

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\dfrac{1}{2n}\right)^{n^2}\cdot\dfrac{1}{3^n}$. **6.** $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^n\dfrac{n+1}{(n-1)\sqrt{n}}$.

7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\ln\dfrac{en^2}{1+n^2}-1\right)$. **8.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin\left(-\frac{\pi}{2}+\pi n\right)}{n^2}\arcsin\dfrac{1}{n}$.

9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos(\pi n/6)}{(n+3)\sqrt{\ln^3 n}}$. **10.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\dfrac{\pi}{\sqrt{n}}\right)$.

11. Исследовать на абсолютную сходимость ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[n^3]{n-1}}.$$

Найти все значения α, при которых ряд 1) абсолютно сходится; 2) условно сходится (12, 13).

12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^{\alpha+n-1}}$. **13.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin^2 3n-\cos^2 3n}{n^{\alpha+1}}$.

14. Найти область сходимости E функциональной последовательности $\{f_n(x)\}$, где $f_n(x) = \sqrt[n]{1+x^n+\left(\dfrac{x}{2}\right)^n}$, $x > 0$. Найти предельную функцию $f(x)$ последовательности $\{f_n(x)\}$ на множестве E.

15. Найти предельную функцию $f(x)$ последовательности $\{f_n(x)\}$, где $f_n(x) = \cos\left(\dfrac{1}{2nx^2}\right)$, на множестве $E = (0;\pi)$.

Исследовать на сходимость и равномерную сходимость последовательность $\{f_n(x)\}$ на множествах E_1 и E_2 (16, 17).

16. $f_n(x) = \dfrac{2nx}{1+n^2x}$, $E_1 = [0;1]$, $E_2 = (1;+\infty)$.

17. $f_n(x) = \sin^2(\sqrt{1+nx^2} - \sqrt{n}x)$, $E_1 = (0;1)$, $E_2 = (1;+\infty)$.

Исследовать функциональный ряд на равномерную сходимость в указанном промежутке $(18, 19)$.

18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2} \left(\dfrac{3x - x^2 + 2}{x-1}\right)^n$, $x \in [2;+\infty)$.

19. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos(x+n)}{n+2x+5}$, $x \in [0;+\infty)$.

Найти радиус сходимости степенного ряда $(20, 21)$.

20. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n x^n}{3^n(n+1)^{\frac{3}{2}}}$. **21.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^3(x+4)^n}{(n+1)!}$.

Найти интервал сходимости степенного ряда $(22, 23)$.

22. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\dfrac{n+3}{4n+1}\right)^n (5x+2)^n$. **23.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \ln\left(1 + 2^n(2n+3)\right)(6x+3)^n$.

24. Найти радиус сходимости R и интервал сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1-\cos\frac{1}{n}}{n^2}(4x+6)^n$, исследовать ряд на сходимость и абсолютную сходимость на концах интервала сходимости. Записать область сходимости.

25. Разложить функцию $f(x) = (x-1)e^{2x}$ в ряд Маклорена и найти радиус сходимости R полученного ряда.

Разложить функцию в ряд Тейлора в окрестности точки x_0 и найти радиус сходимости R полученного ряда $(26, 27)$.

26. $f(x) = (x+3)e^{x-2}$, $x_0 = 1$. **27.** $f(x) = \dfrac{x+1}{(x^2-2x+2)^2}$, $x_0 = 1$.

Разложить функцию в степенной ряд $(28, 29)$.

28. $\dfrac{3}{(x+6)^2}$ по степеням x. **29.** $\dfrac{6}{5-4x}$ по степеням $(x-2)$.

С точностью до 10^{-4} вычислить значения $(30 - 32)$.

30. $\ln 0,5$. **31.** $\sqrt{26}$. **32.** $\int\limits_0^{0,5} \sqrt[3]{1-x^2}\,dx$.

Вариант 17

1. Выписать n-ый член ряда a_n; найти n-ю частичную сумму ряда S_n; найти $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$ или доказать, что этот предел не существует; сделать вывод о сходимости или расходимости ряда

$$-3\cdot\frac{1}{2^2}\cdot\frac{1}{7}+3\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{7^2}-3\cdot 1\cdot\frac{1}{7^3}+3\cdot 2\cdot\frac{1}{7^4}-3\cdot 2^2\cdot\frac{1}{7^5}+\ldots$$

Исследовать ряды на сходимость $(2-10)$.

2. $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty}\frac{\arcsin\frac{2}{n}}{\ln\left(e-\frac{1}{n}\right)-1}$. **3.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\frac{4+\sin n}{n^2}\right)$. **4.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^{n+1}\sqrt[3]{n^2}}{(n+1)!}$.

5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n-3)^{2n}}{n^n}\sin^n\frac{\pi}{2n+3}$. **6.** $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln(n-1)^2}{\sqrt{n-1}}$.

7. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\arcsin\frac{n}{n^3+2n+3}$. **8.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\pi n}{n}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^3$.

9. $\displaystyle\sum_{n=4}^{\infty}\frac{2}{(n-3)\sqrt{ln^3(n)}}$ **10.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(1-e^{\pi n^{-1/3}}\right)$.

11. Исследовать на абсолютную сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cos n}{40+n^2}.$$

Найти все значения α, при которых ряд 1) абсолютно сходится; 2) условно сходится $(12, 13)$.

12. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^{\alpha+1}\sqrt[n]{n}}$. **13.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)!}{5(5+1)\cdot\ldots\cdot(5+n)n^{[\alpha]}}$.

14. Найти область сходимости E функциональной последовательности $\{f_n(x)\}$, где $f_n(x) = \sqrt[n]{1+x^{2n}+(x-1)^{2n}}$. Найти предельную функцию $f(x)$ последовательности $\{f_n(x)\}$ на множестве E.

15. Найти предельную функцию $f(x)$ последовательности $\{f_n(x)\}$, где $f_n(x) = \dfrac{nx^3}{x^2+nx+n}$, на множестве $E = [0; +\infty)$.

Исследовать на сходимость и равномерную сходимость последовательность $\{f_n(x)\}$ на множествах E_1 и E_2 $(16, 17)$.

16. $f_n(x) = \dfrac{nx^3}{2nx + x^2}$, $E_1 = [0;1]$, $E_2 = [1;+\infty)$.

17. $f_n(x) = \dfrac{\ln(nx)}{\sqrt{nx}}$, $E_1 = [1;+\infty)$, $E_2 = (0;1)$.

Исследовать функциональный ряд на равномерную сходимость в указанном промежутке $(18, 19)$.

18. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n \operatorname{sh}^2(nx)}{2 + n! \operatorname{sh}^2(nx)}$, $x \in \mathbf{R}$. **19.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln x)^n}{\sqrt{n}}$, $x \in [5;10]$.

Найти радиус сходимости степенного ряда $(20, 21)$.

20. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\ln\cos\left(\frac{2}{5}\right)^n \right)(x+2)^n$. **21.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n^2 + 4n + 2}{15n^2 + 8n - 7} \right)^n (x-9)^n$.

Найти интервал сходимости степенного ряда $(22, 23)$.

22. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{\ln n}}(6x+2)^n$. **23.** $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n \cdot x^n}{7n - n^2 - 100}$.

24. Найти радиус сходимости R и интервал сходимости степенного ряда $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n^2}(2x-1)^{n^2}$, исследовать ряд на сходимость и абсолютную сходимость на концах интервала сходимости. Записать область сходимости.

25. Разложить функцию $f(x) = \dfrac{x}{2}e^{x-1}$ в ряд Маклорена и найти радиус сходимости R полученного ряда.

Разложить функцию в ряд Тейлора в окрестности точки x_0 и найти радиус сходимости R полученного ряда $(26, 27)$.

26. $f(x) = \operatorname{ch}^2 x$, $x_0 = 0$. **27.** $f(x) = \dfrac{x+2}{(x^2+2x)^3}$, $x_0 = -1$.

Разложить функцию в степенной ряд $(28, 29)$.

28. $\dfrac{-4}{(x+8)^2}$ по степеням x. **29.** $\dfrac{3}{3-2x}$ по степеням $(x-1)$.

С точностью до 10^{-4} вычислить значения $(30 - 31)$.

30. $\ln 0,8$. **31.** $\sqrt{24}$. **32.** $\displaystyle\int_0^{0,25} \sqrt{1+x^2}\,dx$.

Вариант 18

1. Выписать n-ый член ряда a_n; найти n-ю частичную сумму ряда S_n; найти $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$ или доказать, что этот предел не существует; сделать вывод о сходимости или расходимости ряда

$$\frac{1}{4\cdot 5\cdot 6} + \frac{1}{5\cdot 6\cdot 7} + \frac{1}{6\cdot 7\cdot 8} + \ldots$$

Исследовать ряды на сходимость (2 — 10).

2. $\sum\limits_{n=3}^{\infty} (-1)^{n+1} \dfrac{2n^3-1}{3-4n^2} \sin\dfrac{2}{n}$. **3.** $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1-\sin\frac{\pi}{4n}}{\sqrt[4]{n^4-1}}$. **4.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!(3n)!}{(4n)!}$.

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\operatorname{ch}\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}\right)^{(n-1)^2}$. **6.** $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{2n^2-4n+3}}$.

7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg}\left(\dfrac{(-1)^n\sqrt{n+1}}{n}\right)$. **8.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{4}+\pi n\right)}{\sqrt{\frac{n^2}{2}-n+5}} \operatorname{arctg}\dfrac{1}{n}$.

9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{\sqrt{n}+3}{\sqrt{n}+5}\right)^{n\sqrt{n}}$. **10.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n\cdot|\cos 3n|}{\sqrt[3]{n^7+5}}$.

11. Исследовать на абсолютную сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\frac{n\pi}{4}}{n^2+\cos\frac{n\pi}{4}}.$$

Найти все значения α, при которых ряд 1) абсолютно сходится; 2) условно сходится (12, 13).

12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n^{\alpha-1+\frac{1}{n}}}$. **13.** $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \ln\left(1+\dfrac{(-1)^{[n]}}{(n-1)^{\alpha}}\right)$.

14. Найти область сходимости E функциональной последовательности $\{f_n(x)\}$, где $f_n(x) = \sqrt[n]{1+(x-1)^{2n}+\dfrac{1}{x^{2n}}}$. Найти предельную функцию $f(x)$ последовательности $\{f_n(x)\}$ на множестве E.

15. Найти предельную функцию $f(x)$ последовательности $\{f_n(x)\}$, где $f_n(x) = \sin\left(\dfrac{1+nx}{2n}\right)$, на множестве $E = (-\infty; +\infty)$.

Исследовать на сходимость и равномерную сходимость последовательность $\{f_n(x)\}$ на множествах E_1 и E_2 (16, 17).

16. $f_n(x) = \dfrac{nx^2+1}{1+n^2x^2}$, $E_1 = [0;1]$, $E_2 = [1;+\infty)$.

17. $f_n(x) = (n+2)\ln\left(1 + \dfrac{n}{n^2x+1}\right)$, $E_1 = [0;1]$, $E_2 = [1;+\infty)$.

Исследовать функциональный ряд на равномерную сходимость в указанном промежутке (18, 19).

18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n!}\left(\dfrac{x^2-1}{x^2-5x+6}\right)^n$, $x \in [2,1;2,9]$.

19. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin(x+2n)}{(1+2x^2)(1+4x^2)\dots(1+2nx^2)}$, $x \in [1;2]$.

Найти радиус сходимости степенного ряда (20, 21).

20. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \cos^n \dfrac{1}{\sqrt{n}} \cdot (3x-1)^n$. **21.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt{5^n + \sqrt{25^n+2}} \cdot x^n$.

Найти интервал сходимости степенного ряда (22, 23).

22. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{x+1}{n}\right)^n$. **23.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \operatorname{tg}^n\left(\dfrac{3\pi}{4} + \dfrac{1}{n^2}\right)(1-x)^n$.

24. Найти радиус сходимости R и интервал сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{n-1}{n}\right)^{n^2} (x+1)^n$, исследовать ряд на сходимость и абсолютную сходимость на концах интервала сходимости. Записать область сходимости.

25. Разложить функцию $f(x) = (1-x^2)\sin x$ в ряд Маклорена и найти радиус сходимости R полученного ряда.

Разложить функцию в ряд Тейлора в окрестности точки x_0 и найти радиус сходимости R полученного ряда (26, 27).

26. $f(x) = \dfrac{x-3}{\sqrt{x^2-8x+17}}$, $x_0 = 4$. **27.** $f(x) = \ln\left(\dfrac{3x}{x+2}\right)$, $x_0 = 1$.

Разложить функцию в степенной ряд (28, 29).

28. $\dfrac{2}{(x+1)^3}$ по степеням x. **29.** $\dfrac{7}{4x-1}$ по степеням $(x+1)$.

С точностью до 10^{-4} вычислить значения (30 — 32).

30. $\sin 3^\circ$. **31.** $\sqrt{35}$. **32.** $\int\limits_0^{0{,}25} e^{-x^3}\,dx$.

Вариант 19

1. Выписать n-ый член ряда a_n; найти n-ю частичную сумму ряда S_n; найти $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$ или доказать, что этот предел не существует; сделать вывод о сходимости или расходимости ряда

$$-5 - 1 + 3 + 7 + 11 + \ldots$$

Исследовать ряды на сходимость (2 — 10).

2. $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{e^{\frac{4\pi}{n}} - 1}{\sqrt[3]{\frac{24}{n} + 8} - 2}$. **3.** $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(\frac{n^6+6}{n^2-1}\right)$. **4.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$.

5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+2}{3n-1}\right)^{n^2}$. **6.** $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n(2n+3)}{4n^2-1}$. **7.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{(-1)^n \ln^3 n}{n^2}\right)$.

8. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}\right)\left(2 + \frac{3}{n}\right)^2$. **9.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(n \sin\frac{1}{2n}\right)^{n^3}$. **10.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n^2+1}}$.

11. Исследовать на абсолютную сходимость ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\cos 2n}{1+n^2}$.

Найти все значения α, при которых ряд 1) абсолютно сходится; 2) условно сходится (12, 13).

12. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n^{\alpha/2}$. **13.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(3n - (-1)^n)^\alpha}$.

14. Найти область сходимости E функциональной последовательности $\{f_n(x)\}$, где $f_n(x) = \sqrt[n]{1 + x^{2n} + \dfrac{1}{(x-1)^{2n}}}$. Найти предельную функцию $f(x)$ последовательности $\{f_n(x)\}$ на множестве E.

15. Найти предельную функцию $f(x)$ последовательности $\{f_n(x)\}$, где $f_n(x) = \sqrt{nx + \ln(nx)} - \sqrt{nx}$, на множестве $E = (1; +\infty)$.

Исследовать на сходимость и равномерную сходимость последовательность $\{f_n(x)\}$ на множествах E_1 и E_2 (16, 17).

16. $f_n(x) = e^{-x^2+nx}$ $E_1 = (-1; 0)$, $E_2 = (-\infty; -1)$.

17. $f_n(x) = \dfrac{nx^2 + x}{1 + 3n + x}$, $E_1 = [0; 1]$, $E_2 = [1; +\infty)$.

Исследовать функциональный ряд на равномерную сходимость в указанном промежутке (18, 19).

18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{5^{nx}}{(2n+1)!!}$, $x \in (-\infty; 1]$. **19.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos(2n+x)}{\sqrt{n+x+2}}$, $x \in [3; 4]$.

Найти радиус сходимости степенного ряда (20, 21).

20. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{3n^2+n-1}{2n^2+2n+5}\right)^{\frac{n^2}{n+1}} (5x+3)^n$. **21.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 - \operatorname{tg}\dfrac{2}{n}\right)^{n^2} (x-3)^n$.

Найти интервал сходимости степенного ряда (22, 23),

22. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(1+(-1)^n \cdot 5)^n}{\sqrt{n^2+1}} (2x+3)^n$. **23.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(2n)!!}{(2n+1)!!} (x+9)^n$.

24. Найти радиус сходимости R и интервал сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n(1+n^2)(x+1)^{2n}$, исследовать ряд на сходимость и абсолютную сходимость на концах интервала сходимости. Записать область сходимости.

25. Разложить функцию $f(x) = x\ln(1-x^2)$ в ряд Маклорена и найти радиус сходимости R полученного ряда.

Разложить функцию в ряд Тейлора в окрестности точки x_0 и найти радиус сходимости R полученного ряда (26, 27).

26. $f(x) = \dfrac{x+4}{(x^2+8x+18)^2}$, $x_0 = -4$.

27. $f(x) = (x^2+2x+2)\sin^2(2x+2)$, $x_0 = -1$.

Разложить функцию в степенной ряд (28, 29).

28. $\dfrac{-3}{(x+2)^3}$ по степеням x. **29.** $\dfrac{6}{x+1}$ по степеням $(x-2)$.

С точностью до 10^{-4} вычислить значения $(30 - 32)$.

30. $\cos 1,5^\circ$. **31.** $\sqrt{14}$. **32.** $\int\limits_0^{0,25} \sqrt{2x^3+1}\,dx$.

Вариант 20

1. Выписать n-ый член ряда a_n; найти n-ю частичную сумму ряда S_n; найти $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$ или доказать, что этот предел не существует; сделать вывод о сходимости или расходимости ряда

$$\left(-\frac{2}{3}+\frac{4}{5}\right)+\left(-\frac{2}{9}+\frac{16}{25}\right)+\left(-\frac{2}{27}+\frac{64}{125}\right)+\dots$$

Исследовать ряды на сходимость (2 — 10).

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n^3-2}{3n^3+4}\right)^{n^3}$. **3.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+3}}\left(e^{\frac{1}{\sqrt{n}}}-1\right)$. **4.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+2)!}{(2n)^n}$.

5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{\sqrt{1+n^5}}$. **6.** $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{\sqrt[3]{3n^4-2}}$.

7. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n \operatorname{arctg}\left(\frac{n+1}{(n-1)\sqrt{n}}\right)$. **8.** $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sin 3n}{n^2\ln n}$.

9. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{2n}}{(2n)!\,\operatorname{sh} n}$. **10.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\sqrt[3]{n}}{\ln^2(n+3)}$.

11. Исследовать на абсолютную сходимость ряд $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n\sin n}{n^2-1}$.

Найти все значения α, при которых ряд 1) абсолютно сходится; 2) условно сходится (12, 13).

12. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-2}}{n^{\alpha+\frac{1}{n}}}$. **13.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{(-1)^{3n}}{n^{\alpha}}\right)$.

14. Найти область сходимости E функциональной последовательности $\{f_n(x)\}$, где $f_n(x) = \sqrt[n]{1+\left(\dfrac{x}{2}\right)^{2n}+\dfrac{1}{x^{2n}}}$. Найти предельную функцию $f(x)$ последовательности $\{f_n(x)\}$ на множестве E.

15. Найти предельную функцию $f(x)$ последовательности $\{f_n(x)\}$, где $f_n(x) = \arcsin\dfrac{nx}{1+nx}$, на множестве $E = (0;1)$.

Исследовать на сходимость и равномерную сходимость последовательность $\{f_n(x)\}$ на множествах E_1 и E_2 (16, 17).

16. $f_n(x) = \sqrt[n]{1+x^{2n}}$, $E_1 = [0;1]$, $E_2 = [4;+\infty)$.

17. $f_n(x) = \dfrac{1+x^n+4x^{2n}}{5+x^n+x^{2n}}$, $E_1 = (0;1)$, $E_2 = [1;+\infty)$.

Исследовать функциональный ряд на равномерную сходимость в указанном промежутке $(18, 19)$.

18. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(x - 9\ln(x+1) - \frac{18}{x+1} \right)^{n}$, $x \in [0; 6]$.

19. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n+x)}{\sqrt{n+5x-2}}$, $x \in [2; 4]$.

Найти радиус сходимости степенного ряда $(20, 21)$.

20. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(2+e^{3n})}{\ln(3+e^{2n})} \cdot (4x-2)^n$. **21.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\sin\frac{1}{3^n}\right)^{n^3} (4x-6)^n$.

Найти интервал сходимости степенного ряда $(22, 23)$.

22. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{\sqrt{n}}{n^2+n+1}(3x-4)^n$. **23.** $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\operatorname{ch}\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{n+1}{n^2+1}} (x+3)^n$.

24. Найти радиус сходимости R и интервал сходимости степенного ряда $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{\sqrt{n}} \ln\left(\frac{2n-1}{2n+1}\right)$, исследовать ряд на сходимость и абсолютную сходимость на концах интервала сходимости. Записать область сходимости.

25. Разложить функцию $f(x) = \sin(2x)\cos(2x)$ в ряд Маклорена и найти радиус сходимости R полученного ряда.

Разложить функцию в ряд Тейлора в окрестности точки x_0 и найти радиус сходимости R полученного ряда $(26, 27)$.

26. $f(x) = \dfrac{8}{\sqrt{x^2+4x+20}}$, $x_0 = -2$.

27. $f(x) = (-x^3+3x^2-2x)\cos^2(3x-3)$, $x_0 = 1$.

Разложить функцию в степенной ряд $(28, 29)$.

28. $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+4}}$ по степеням x. **29.** $\dfrac{8}{x}$ по степеням $(x+5)$.

С точностью до 10^{-4} вычислить значения $(30 - 32)$.

30. $\sin 5^\circ$. **31.** $\sqrt{60}$. **32.** $\displaystyle\int_0^{0{,}3} \cos(3x^2)dx$.

Вариант 21

1. Выписать n-ый член ряда a_n; найти n-ю частичную сумму ряда S_n; найти $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$ или доказать, что этот предел не существует; сделать вывод о сходимости или расходимости ряда

$$\frac{3+2}{6} + \frac{9+4}{36} + \frac{27+8}{216} + \ldots$$

Исследовать ряды на сходимость (2 — 10).

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3^{\frac{5}{n}} - 2^{\frac{1}{n}}}{\frac{1}{n} - \sin\frac{12}{n}}$. **3.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{4+7n}{3^n+n}$. **4.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(3n+2)!}{9^n \cdot n^3}$. **5.** $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \left(\dfrac{2+n}{n-1}\right)^{n^2} \cdot \dfrac{1}{4^n}$.

6. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{(-1)^n(4n^2-3)}{n^3}$. **7.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\operatorname{ch}\dfrac{1}{\sqrt{2n^2+4n+3}} - 1\right)$.

8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} \cdot \dfrac{\cos 3n}{2+3n}$. **9.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (n \cdot \operatorname{sh} n)^{n^3}$. **10.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!}{n^{\sqrt{n}}}$.

11. Исследовать на абсолютную сходимость ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{\sin n \cdot \ln n}{\sqrt{1+n^2}}$.

Найти все значения α, при которых ряд 1) абсолютно сходится; 2) условно сходится (12, 13).

12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+\alpha}}{n^\alpha}$. **13.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos 2n}{n^\alpha}$.

14. Найти область сходимости E функциональной последовательности $\{f_n(x)\}$, где $f_n(x) = \sqrt{1 + x^n + (2x-2)^{2n}}$, $x > 0$. Найти предельную функцию $f(x)$ последовательности $\{f_n(x)\}$ на множестве E.

15. Найти предельную функцию $f(x)$ последовательности $\{f_n(x)\}$, где $f_n(x) = n|x|e^{-nx^2}$, на множестве $E = (-\infty; +\infty)$.

Исследовать на сходимость и равномерную сходимость последовательность $\{f_n(x)\}$ на множествах E_1 и E_2 (16, 17).

16. $f_n(x) = \dfrac{nx + n^2 + x^2}{n^2 + x^2}$, $E_1 = [0; 1]$, $E_2 = [1; +\infty)$.

17. $f_n(x) = \sqrt[n]{1 + \operatorname{arctg}^n x}$, $E_1 = (0; 1)$, $E_2 = [1; +\infty)$.

Исследовать функциональный ряд на равномерную сходимость в указанном промежутке (18, 19).

18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\arcsin\left(1-\frac{1}{nx}\right)}{2^n+x^2+2x}$, $x \in [1;+\infty)$.

19. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{\arcsin x + n}$, $x \in [-1/2;1]$.

Найти радиус сходимости степенного ряда (20, 21).

20. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\sin\dfrac{1}{n} - \sin\dfrac{3}{n}\right) \cdot (2x+7)^n$. **21.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sqrt{3^n-2}}{n!}(7x+3)^n$.

Найти интервал сходимости степенного ряда (22, 23).

22. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{2n+1}{2n+5}\right)^{n^2-n} (6x+5)^n$. **23.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n+3^n}{\sqrt[3]{n^5+n}}(11x+2)^2$.

24. Найти радиус сходимости R и интервал сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3^n+(-2)^n}{n}(x+1)^n$, исследовать ряд на сходимость и абсолютную сходимость на концах интервала сходимости. Записать область сходимости.

25. Разложить функцию $f(x)=\sin^2(2x)$ в ряд Маклорена и найти радиус сходимости R полученного ряда.

Разложить функцию в ряд Тейлора в окрестности точки x_0 и найти радиус сходимости R полученного ряда (26, 27).

26. $f(x)=(x+1)e^{x+2}$, $x_0=-3$. **27.** $f(x)=\ln\left(\dfrac{2x}{x-1}\right)$, $x_0=2$.

Разложить функцию в степенной ряд (28, 29).

28. $\sqrt{9+x^2}$ по степеням x. **29.** $\dfrac{9}{x+1}$ по степеням $(x-1)$.

С точностью до 10^{-4} вычислить значения (30 — 32).

30. $\cos 7^\circ$. **31.** $\sqrt{78}$. **32.** $\int\limits_0^{0,2} \sin(2x^2)dx$.

Вариант 22

1. Выписать n-ый член ряда a_n; найти n-ю частичную сумму ряда S_n; найти $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$ или доказать, что этот предел не существует; сделать вывод о сходимости или расходимости ряда

$$\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 10}+\ldots$$

Исследовать ряды на сходимость (2 — 10).

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{e^{\frac{2}{n}}-e^{\frac{1}{n}}}{\frac{1}{n}+\operatorname{tg}\frac{1}{n^2}}$. **3.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\dfrac{\pi}{\sqrt{n}}\right)$. **4.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!}{n^{n-1}}$.

5. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}4^{-n}\left(\dfrac{n}{n-1}\right)^{n^2}$. **6.** $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^n n}{(n-1)\sqrt{n+2}}$.

7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(1-\cos\dfrac{2n+4}{2n^2-1}\right)$. **8.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}\right)}{n\sqrt{n}}\left(3-\dfrac{1}{n}\right)^2$.

9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\operatorname{arcth}(n^2-n)}{4^n-n^2}$. **10.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n(n^2-3)\ln\dfrac{n^2-1}{n^2}$.

11. Исследовать на абсолютную сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2n\cdot(1+\ln n)}{n}.$$

Найти все значения α, при которых ряд 1) абсолютно сходится; 2) условно сходится (12, 13).

12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!}{9(9+1)(9+2)\cdot\ldots\cdot(9+(n-1))n^{\alpha}}$. **13.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\alpha\cos 2n}{n^{\alpha}}$.

14. Найти область сходимости E функциональной последовательности $\{f_n(x)\}$, где $f_n(x)=\sqrt[n]{1+(2\sin x)^{2n}}$. Найти предельную функцию $f(x)$ последовательности $\{f_n(x)\}$ на множестве E.

15. Найти предельную функцию $f(x)$ последовательности $\{f_n(x)\}$, где $f_n(x)=nx^2e^{-nx}$, на множестве $E=[0;2]$.

Исследовать на сходимость и равномерную сходимость последовательность $\{f_n(x)\}$ на множествах E_1 и E_2 (16,17).

16. $f_n(x)=\sqrt{n}xe^{-\sqrt{nx}}$, $E_1=[0;+\infty)$, $E_2=[a;b], 0<a$.

17. $f_n(x)=\dfrac{n+x}{n+x+\sqrt{nx}}$, $E_1=[0;1]$, $E_2=(0;+\infty)$.

Исследовать функциональный ряд на равномерную сходимость в указанном промежутке (18, 19).

18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{11^n} \left(\frac{x^2}{x-2} \right)^n$, $x \in [3; +\infty)$.

19. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{\sqrt[3]{n+1} + x^2 + 2x + 3}$, $x \in \mathbf{R}$.

Найти радиус сходимости степенного ряда (20, 21).

20. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\cos\frac{1}{n} - \cos\frac{2}{n} \right) \cdot (9x+1)^n$. **21.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[3]{n^3+4n^2+n} - \sqrt[3]{n^3-2n} \right) x^n$.

Найти интервал сходимости степенного ряда (22, 23).

22. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln^{\operatorname{ctg}\frac{1}{n}} \left(e + \frac{1}{n} \right) (x+4)^n$. **23.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} (2-3x)^n$.

24. Найти радиус сходимости R и интервал сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=5}^{\infty} \frac{4^n + (-5)^n}{n-4} (x-2)^{2n}$, исследовать ряд на сходимость и абсолютную сходимость на концах интервала сходимости. Записать область сходимости.

25. Разложить функцию $f(x) = \cos^2\left(\frac{x}{2}\right)$ в ряд Маклорена и найти радиус сходимости R полученного ряда.

Разложить функцию в ряд Тейлора в окрестности точки x_0 и найти радиус сходимости R полученного ряда (26, 27).

26. $f(x) = \sin^4 x$, $x_0 = 1$. **27.** $f(x) = \ln\left(\frac{3x-1}{2x}\right)$, $x_0 = 3$.

Разложить функцию в степенной ряд (28, 29).

28. $\frac{7}{(3x+8)^2}$ по степеням x. **29.** $\sqrt{x^2+2x+2}$ по степеням $(x+1)$.

С точностью до 10^{-4} вычислить значения (30 — 32).

30. $\sin 15^\circ$. **31.** $\sqrt[3]{10}$. **32.** $\int\limits_0^{0,5} \sqrt{1+x^4}\,dx$.

Вариант 23

1. Выписать n-ый член ряда a_n; найти n-ю частичную сумму ряда S_n; найти $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$ или доказать, что этот предел не существует; сделать вывод о сходимости или расходимости ряда

$$\left(\frac{12}{7}+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{48}{49}-\frac{1}{9}\right)+\left(\frac{192}{343}+\frac{1}{27}\right)+\ldots$$

Исследовать ряды на сходимость (2 — 10).

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{4+n^2}{2n} \operatorname{arctg} \frac{n^3+4n}{5-2n^4}$. **3.** $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \left(e^{\frac{\sqrt{n}}{n^3-1}}-1\right)$. **4.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^6}{2^n+4^n}$.

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{3n+2}{2n+1}\right)^n$. **6.** $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot \sqrt[3]{n}}{1+n}$.

7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{\pi}{4}+\pi n\right) \operatorname{arctg} \frac{4n^2-1}{n^3}$. **8.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt{n+1} \cdot \frac{\sin 3n}{n^2+4}$.

9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (2n-3n^3)e^{-\sqrt{n}} \ln n$. **10.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(6n)!}{36^n (2n)!(4n)!}$.

11. Исследовать на абсолютную сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln 2n}{\sqrt{n}}$.

Найти все значения α, при которых ряд 1) абсолютно сходится; 2) условно сходится (12, 13).

12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{\alpha-1}}$. **13.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\ln n}$.

14. Найти область сходимости E функциональной последовательности $\{f_n(x)\}$, где $f_n(x) = \sqrt[n]{1+(2\cos x)^{2n}}$. Найти предельную функцию $f(x)$ последовательности $\{f_n(x)\}$ на множестве E.

15. Найти предельную функцию $f(x)$ последовательности $\{f_n(x)\}$, где $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^4}$, на множестве $E = (-\infty; +\infty)$.

Исследовать на сходимость и равномерную сходимость последовательность $\{f_n(x)\}$ на множествах E_1 и E_2 (16, 17).

16. $f_n(x) = \sin\left(n^2 e^{-nx}\right)$, $E_1 = (0; +\infty)$, $E_2 = [1; +\infty)$.

17. $f_n(x) = nx(2-x)^n$, $E_1 = [0; 1]$, $E_2 = (1; +\infty)$.

Исследовать функциональный ряд на равномерную сходимость в указанном промежутке $(18, 19)$.

18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n \cdot 2 + 1}{(1+2x)(1+2^2x)\cdot\ldots\cdot(1+2^nx)}$, $x \in [1; 2]$.

19. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \dfrac{2^{n|x|}}{1+n!2^{n|x|}}\right)$, $x \in \mathbf{R}$.

Найти радиус сходимости степенного ряда $(20, 21)$.

20. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt{2^n + \sqrt{2^n+1}} \cdot x^n$. **21.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{1-5^{1/n}}{1-3^{1/n}}\right)^{n^2} (3x-5)^n$.

Найти интервал сходимости степенного ряда $(22, 23)$.

22. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2 \left(\ln\cos\dfrac{\pi}{n}\right) \cdot (2x+5)^n$. **23.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\dfrac{9x+2}{n+3}\right)^n$.

24. Найти радиус сходимости R и интервал сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg}\dfrac{3\sqrt{n}}{1+2n^2}(x+3)^n$, исследовать ряд на сходимость и абсолютную сходимость на концах интервала сходимости. Записать область сходимости.

25. Разложить функцию $f(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt[3]{1-x}}$ в ряд Маклорена и найти радиус сходимости R полученного ряда.

Разложить функцию в ряд Тейлора в окрестности точки x_0 и найти радиус сходимости R полученного ряда $(26, 27)$.

26. $f(x) = \cos^4 x$, $x_0 = 0$. **27.** $f(x) = (1+2x)e^{3x-1}$, $x_0 = 2$.

Разложить функции в степенной ряд $(28, 29)$.

28. $\dfrac{-3}{(x+1)^4}$ по степеням x. **29.** $\sqrt{x^2+4x+5}$ по степеням $(x+2)$.

С точностью до 10^{-4} вычислить значения $(30 - 32)$.

30. $\cos 38°$. **31.** $\sqrt[3]{39}$. **32.** $\int\limits_0^{0,2} \dfrac{\operatorname{sh}(2x)}{x}dx$.

Вариант 24

1. Выписать n-ый член ряда a_n; найти n-ю частичную сумму ряда S_n; найти $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$ или доказать, что этот предел не существует; сделать вывод о сходимости или расходимости ряда

$$\left(\frac{2}{5} - \frac{3}{5^2} + \frac{4}{5^3}\right) + \left(\frac{2}{5^2} + \frac{3}{5^3} + \frac{4}{5^4}\right) + \left(\frac{2}{5^3} - \frac{3}{5^4} + \frac{4}{5^5}\right) + \ldots$$

Исследовать ряды на сходимость (2 — 10).

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\cos \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n$. **3.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{8 \cdot 2^n + 3}$. **4.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{((2n)!!)^2}{(4n)!!}$.

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+2}{2n+1}\right)^{3n+1}$. **6.** $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot \sqrt{n}}{n-1}$.

7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt[3]{n}}{1+n} \sin \frac{1}{n}$. **8.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\operatorname{arctg} n}{n}$.

9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^3 \cdot \sin n \cdot e^{-\sqrt{n}}$. **10.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cos^{n^2}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

11. Исследовать на абсолютную сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg}(-n)^{n+1}}{\sqrt[4]{3n^6 - 2}}$.

Найти все значения α, при которых ряд 1) абсолютно сходится; 2) условно сходится (12, 13).

12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{\alpha+n-1}}$. **13.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^2}{\ln n}$.

14. Найти область сходимости E функциональной последовательности $\{f_n(x)\}$, где $f_n(x) = \sqrt[2n]{\cos^{2n} x + \sin^{2n} x}$. Найти предельную функцию $f(x)$ последовательности $\{f_n(x)\}$ на множестве E.

15. Найти предельную функцию $f(x)$ последовательности $\{f_n(x)\}$, где $f_n(x) = nx(1-x)^2$, на множестве $E = [0; 1]$.

Исследовать на сходимость и равномерную сходимость последовательность $\{f_n(x)\}$ на множествах E_1 и E_2 (16, 17).

16. $f_n(x) = x^2 e^{-nx}$, $E_1 = [0; 1]$, $E_2 = (0; +\infty)$.

17. $f_n(x) = \frac{4nx}{1 + 2nx + n^2x^2}$, $E_1 = [0; 1]$, $E_2 = (0; +\infty)$.

Исследовать функциональный ряд на равномерную сходимость в указанном промежутке $(18, 19)$.

18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{(7n-2)\cdot 2^n}$, $x \in [0; 0,5]$. **19.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 4 + 2}{\operatorname{arctg} x + n}$, $x \in [0; +\infty)$.

Найти радиус сходимости степенного ряда $(20, 21)$.

20. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{3+\frac{1}{n!}} - \sqrt{3-\frac{1}{n!}}\right)(x-1)^n$. **21.** $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 8^n}{n^3\sqrt{\ln n}}(2x+7)^n$.

Найти интервал сходимости степенного ряда $(22, 23)$.

22. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1-\sqrt{\cos\frac{1}{n}}}{1-\cos\frac{1}{n}}(3x+8)^n$. **23.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\frac{4n^2+4n+1}{9n^2+9n-2}\right)^{\frac{n^2}{n+1}}(3x+1)^n$.

24. Найти радиус сходимости R и интервал сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-2)^n\left(\frac{x-1}{3}\right)^n$, исследовать ряд на сходимость и абсолютную сходимость на концах интервала сходимости. Записать область сходимости.

25. Разложить функцию $f(x) = e^{4+x}(1+x^3)$ в ряд Маклорена и найти радиус сходимости R полученного ряда.

Разложить функцию в ряд Тейлора в окрестности точки x_0 и найти радиус сходимости R полученного ряда $(26, 27)$.

26. $f(x) = \ln(\sqrt{x^2+1})$, $x_0 = 0$. **27.** $f(x) = (x+5+x^2)e^{x+1}$, $x_0 = 1$.

Разложить функцию в степенной ряд $(28, 29)$.

28. $\frac{-4}{(x-1)^2}$ по степеням x. **29.** $\frac{2}{x+1}$ по степеням $(x-7)$.

С точностью до 10^{-4} вычислить значения $(30 - 32)$.

30. $\sin 52^\circ$. **31.** $\sqrt[3]{58}$. **32.** $\int\limits_0^{0,25} \sqrt[3]{1-x^4}\,dx$.

Вариант 25

1. Выписать n-ый член ряда a_n; найти n-ю частичную сумму ряда S_n; найти $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$ или доказать, что этот предел не существует; сделать вывод о сходимости или расходимости ряда

$$1 - 2 + 3 - 4 + \ldots$$

Исследовать ряды на сходимость (2 — 10).

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(2-\cos\dfrac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n^2}}$.   **3.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n\ln n}{4^n-1}$.   **4.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}\sin\dfrac{\pi}{n^n}$.

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$.   **6.** $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^n \operatorname{sh}\dfrac{n^2}{(2+n)^3}$.   **7.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n n^2}{(1+n)^3}$.

8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\operatorname{arcctg} n}{n^2}\left(-e^{-n}+1\right)$.   **9.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\ln n+\cos n}{3n^2+\ln n}$.   **10.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\cos n}{\sqrt[7]{n+1}}$.

11. Исследовать на абсолютную сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin n}{n}$.

Найти все значения α, при которых ряд 1) абсолютно сходится; 2) условно сходится (12, 13).

12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+\alpha}}{n^{\alpha+1}}$.   **13.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\alpha^n}{n\sqrt{\ln n}}$.

14. Найти область сходимости E функциональной последовательности $\{f_n(x)\}$, где $f_n(x) = n^2\left(x^{1/n^2}-1\right)$. Найти предельную функцию $f(x)$ последовательности $\{f_n(x)\}$ на множестве E.

15. Найти предельную функцию $f(x)$ последовательности $\{f_n(x)\}$, где $f_n(x) = \sqrt[n]{\cos x}$, на множестве $E = \left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$.

Исследовать на сходимость и равномерную сходимость последовательность $\{f_n(x)\}$ на множествах E_1 и E_2 (16, 17).

16. $f_n(x) = \dfrac{1}{x}\cos\dfrac{x-1}{n}$, $E_1 = (0; 2)$, $E_2 = (2; +\infty)$.

17. $f_n(x) = \dfrac{x^2e^{nx}+x}{e^{nx}+1}$, $E_1 = [1; 3]$, $E_2 = (0; +\infty)$.

Исследовать функциональный ряд на равномерную сходимость в указанном промежутке (18,19).

18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(2n)!! \cdot \sin(nx)}{(2n-1)!! \cdot 2^{nx}}$, $x \in [1; +\infty)$. **19.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin(nx)}{\operatorname{ch} x + n}$, $x \in \mathbf{R}$.

Найти радиус сходимости степенного ряда (20, 21).

20. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{n^2+5n-1}{3n^2-n+2}\right)^n (x-5)^n$. **21.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\cos\dfrac{1}{n!}(2x-3)^n$.

Найти интервал сходимости степенного ряда (22, 23).

22. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \arcsin\dfrac{1+n}{1-n^2}(2-x)^n$. **23.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{n(6x+5)^n}{\sqrt[3]{4^n \cdot n^5 + 6}}$.

24. Найти радиус сходимости R и интервал сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n(x-4)^n}{2^n+4^n}$, исследовать ряд на сходимость и абсолютную сходимость на концах интервала сходимости. Записать область сходимости.

25. Разложить функцию $f(x) = \sin^2 x - \cos^2 x$ в ряд Маклорена и найти радиус сходимости R полученного ряда.

Разложить функцию в ряд Тейлора в окрестности точки x_0 и найти радиус сходимости R полученного ряда (26, 27).

26. $f(x) = \ln(\sqrt{4-x^2})$, $x_0 = 0$. **27.** $f(x) = (x^2+2x)\sin^2(x+1)$, $x_0 = -1$.

Разложить функцию в степенной ряд (28, 29).

28. $\dfrac{-2x}{(x+3)^2}$ по степеням x. **29.** $\dfrac{3}{5+4x}$ по степеням $(x-2)$.

С точностью до 10^{-4} вычислить значения (30 — 32).

30. $\cos 85^\circ$. **31.** $\sqrt[3]{130}$. **32.** $\int\limits_0^{0,25} \operatorname{sh} x^2 dx$.

Вариант 26

1. Выписать n-ый член ряда a_n; найти n-ю частичную сумму ряда S_n; найти $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$ или доказать, что этот предел не существует; сделать вывод о сходимости или расходимости ряда

$$1 + 1 - 1 - 1 + 1 + 1 - 1 - 1 + \ldots$$

(Указание: рассмотреть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}$)

Исследовать ряды на сходимость (2—10).

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{\sin(2/n)}{\sin(3/n)}\right)^{\frac{1}{n^2}}$. **3.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n\cdot 3^n}$. **4.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^n n!}{(2n)!!}$.

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n^2}{n^2+2}\right)^{(n+1)^3}$. **6.** $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^n\dfrac{n+1}{n+2n^2}$. **7.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin^2\dfrac{(-1)^n}{2n^2-n}$.

8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos n}{n+1}\left(2-\left(\dfrac{1}{2}\right)^n\right)$. **9.** $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{\sin(2n+1)}{\sqrt[5]{n-1}}$. **10.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\operatorname{ch}\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)^{-(n+1)^2}$.

11. Исследовать на абсолютную сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-n)^n}{(2n)!!}$.

Найти все значения α, при которых ряд 1) абсолютно сходится; 2) условно сходится (12, 13).

12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(3n+(-1)^n)^{\alpha}}$. **13.** $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\dfrac{(2\alpha)^n}{\ln(n-1)}$.

14. Найти область сходимости E функциональной последовательности $\{f_n(x)\}$, где $f_n(x) = \arcsin\dfrac{2x^n}{1+2x^n}$. Найти предельную функцию $f(x)$ последовательности $\{f_n(x)\}$ на множестве E.

15. Найти предельную функцию $f(x)$ последовательности $\{f_n(x)\}$, где $f_n(x) = n\ln\left(1+\dfrac{1}{nx}\right)$, на множестве $E = (0; 2)$.

Исследовать на сходимость и равномерную сходимость последовательность $\{f_n(x)\}$ на множествах E_1 и E_2 (16, 17).

16. $f_n(x) = \dfrac{x^4 + x^2 n + xn^2}{n^2+x^2}$, $E_1 = (0; a)$, $a > 0$, $E_2 = (0; +\infty)$.

17. $f_n(x) = \dfrac{x + e^{nx}}{xe^{nx}+1}$, $E_1 = [2; 5]$, $E_2 = (0; +\infty)$.

Исследовать функциональный ряд на равномерную сходимость в указанном промежутке (18, 19).

18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\arccos \frac{1}{1+(nx)^2}}{n! + (nx)^2}$, $x \in \mathbf{R}$. **19.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos(nx)}{e^x + n}$, $x \in \mathbf{R}$.

Найти радиус сходимости степенного ряда (20, 21).

20. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{ch}^n \dfrac{1}{n} (3x+1)^n$. **21.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg}^n \left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)(6x+4)^n$.

Найти интервал сходимости степенного ряда (22, 23).

22. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\ln\cos(5/n)}{\ln\cos(4/n)}(1-x)^n$. **23.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(1 + \operatorname{arctg} \dfrac{1}{5^n}\right)^{n^2} (4x+2)^n$.

24. Найти радиус сходимости R и интервал сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \dfrac{\sqrt{n}}{1+3n^2}(x-1)^n$, исследовать ряд на сходимость и абсолютную сходимость на концах интервала сходимости. Записать область сходимости.

25. Разложить функцию $f(x) = \dfrac{1+x}{\sqrt[4]{1-x}}$ в ряд Маклорена и найти радиус сходимости R полученного ряда.

Разложить функцию в ряд Тейлора в окрестности точки x_0 и найти радиус сходимости R полученного ряда (26, 27).

26. $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 2}{(2-x)^2}$, $x_0 = 1$. **27.** $f(x) = \ln(x^2 + 4x + 3)$, $x_0 = -1$.

Разложить функцию в степенной ряд (28, 29).

28. $\dfrac{3x}{(x+1)^2}$ по степеням x. **29.** $\dfrac{8x}{5-4x}$ по степеням $(x+3)$.

С точностью до 10^{-4} вычислить значения (30 — 32).

30. $\sin 79^\circ$. **31.** $\sqrt[3]{342}$. **32.** $\int\limits_0^{0,5} x \operatorname{ch} x^2 dx$.

Вариант 27

1. Выписать n-ый член ряда a_n; найти n-ю частичную сумму ряда S_n; найти $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$ или доказать, что этот предел не существует; сделать вывод о сходимости или расходимости ряда

$$\left(\frac{4}{5}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{4}{25}-\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{4}{125}+\frac{1}{16}\right)+\ldots$$

Исследовать ряды на сходимость $(2 - 10)$.

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n\sin n}{n+5}$. **3.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(n-1)^3}{n^4+3n^2+2}$. **4.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(2n)!(3n+1)!}{(5n)!}$.

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{n^2-1}{n^2+1}\right)^{\sqrt{1+n^7}}$. **6.** $\sum\limits_{n=2}^{\infty} (-1)^n \dfrac{n^2-1}{1+n^3}$.

7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\pi n}{2}\right) \operatorname{arctg} \dfrac{\sqrt{n}}{1+2n^2}$. **8.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos 2n}{n+\ln n}$.

9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}(\ln n - \sin 5n)$. **10.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^{2n+1}}{(2n-1)!\operatorname{sh} n}$.

11. Исследовать на абсолютную сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{(2n)!!}$.

Найти все значения α, при которых ряд 1) абсолютно сходится; 2) условно сходится $(12, 13)$.

12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{(\sqrt{n+1}+(-1)^n)^{\alpha}}$. **13.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos n+1}{n^{\alpha}}$.

14. Найти область сходимости E функциональной последовательности $\{f_n(x)\}$, где $f_n(x) = \sqrt[n]{x^n+x^{2n}+1}$, $x > 0$. Найти предельную функцию $f(x)$ последовательности $\{f_n(x)\}$ на множестве E.

15. Найти предельную функцию $f(x)$ последовательности $\{f_n(x)\}$, где $f_n(x) = \ln\left(1+\dfrac{nx^2}{\sqrt{n^2x^2+1}}\right)$, на множестве $E = [0;3]$.

Исследовать на сходимость и равномерную сходимость последовательность $\{f_n(x)\}$ на множествах E_1 и E_2 $(16, 17)$.

16. $f_n(x) = \sin\left(\dfrac{1+nx}{2n}\right)$, $E_1 = (-\infty;+\infty)$, $E_2 = (0;\pi)$.

17. $f_n(x) = n\left(\sqrt{x+\dfrac{1}{n}} - \sqrt{x-\dfrac{1}{n}}\right)$, $E_1 = (0;1)$, $E_2 = [a;+\infty)$, $a > 0$.

Исследовать функциональный ряд на равномерную сходимость в указанном промежутке (18, 19).

18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{10^n} \cdot \left(\dfrac{x^3}{x+3}\right)^n$, $x \in [-2;0]$.

19. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1+\dfrac{x}{3}\right)\left(1+\dfrac{x}{3^2}\right)\ldots\left(1+\dfrac{x}{3^n}\right)$, $x \in [-1;2]$.

Найти радиус сходимости степенного ряда (20, 21).

20. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{1+2^n}{1+5^n}\right)^n \cdot (4x-7)^n$. **21.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\sin\dfrac{1}{n} - \operatorname{tg}\dfrac{1}{n}\right)^n (5x+1)^n$.

Найти интервал сходимости степенного ряда (22, 23).

22. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{7n+2}{3-5n}\right)^n \cdot (4x-1)^n$. **23.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \ln\left(1+\sin\dfrac{1}{n}\right)(7-3x)^n$.

24. Найти радиус сходимости R и интервал сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}\sqrt{n+1}}{3^n}(x-1)^n$, исследовать ряд на сходимость и абсолютную сходимость на концах интервала сходимости. Записать область сходимости.

25. Разложить функцию $f(x) = (1+x^2)\sin\dfrac{x}{3}$ в ряд Маклорена и найти радиус сходимости R полученного ряда.

Разложить функцию в ряд Тейлора в окрестности точки x_0 и найти радиус сходимости R полученного ряда (26, 27).

26. $f(x) = \ln(x^2+3x-4)$, $x_0 = 1$. **27.** $f(x) = \dfrac{-4x}{(3+x)^2}$, $x_0 = -1$.

Разложить функцию в степенной ряд (28, 29).

28. $\dfrac{-2}{(2x+1)^2}$ по степеням x. **29.** $\dfrac{7x}{1+4x}$ по степеням $(x-8)$.

С точностью до 10^{-4} вычислить значения (30 — 32).

30. $\sqrt[8]{2e}$. **31.** $\sqrt[3]{62}$. **32.** $\int\limits_0^{0,1} \ln(1-(2x)^2)dx$.

Вариант 28

1. Выписать n-ый член ряда a_n; найти n-ю частичную сумму ряда S_n; найти $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$ или доказать, что этот предел не существует; сделать вывод о сходимости или расходимости ряда

$$-5 + 10 - 15 + 20 - 25 + 30 - \ldots$$

Исследовать ряды на сходимость (2 — 10).

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{3n^2 - 6n + 7}{3n^2 + 20n + 1} \right)^{-n+1}$. **3.** $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \dfrac{(2n-1)^2}{n^3(n-2)}$.

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (2n)}{4^n (n+1)!}$. **5.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^n}{(1+3n^2)^{\frac{n-1}{2}}}$.

6. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} (-1)^n \dfrac{\sqrt{n}}{2n^2+1}$. **7.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \arcsin \dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+n}$.

8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin 2n}{\sin n + n^3}$. **9.** $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{n^{2n-1}}{(2n-3)! \sin(3n)}$. **10.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(n \cdot \operatorname{sh} \dfrac{1}{n+3} \right)^{(n+1)^3}$.

11. Исследовать на абсолютную сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-n)^n}{(3n-1)!!}$.

Найти все значения α, при которых ряд 1) абсолютно сходится; 2) условно сходится (12, 13).

12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n^{3\alpha}}$. **13.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos 2n}{\sqrt{\alpha} n^{\alpha+1}}$.

14. Найти область сходимости E функциональной последовательности $\{f_n(x)\}$, где $f_n(x) = f_n(x) = \sqrt[n]{x^{2n} + 4x^n + 3}$, $x > 0$. Найти предельную функцию $f(x)$ последовательности $\{f_n(x)\}$ на множестве E.

15. Найти предельную функцию $f(x)$ последовательности $\{f_n(x)\}$, где $f_n(x) = 1 - (1-x^2)^n$, на множестве $E = [-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$.

Исследовать на сходимость и равномерную сходимость последовательность $\{f_n(x)\}$ на множествах E_1 и E_2 (16, 17).

16. $f_n(x) = \dfrac{nx^3}{x^2 + nx + n}$, $E_1 = [0; 2]$, $E_2 = (2; +\infty)$.

17. $f_n(x) = n \operatorname{arcctg} \dfrac{n}{x^2}$, $E_1 = [1; +\infty)$, $E_2 = (\delta; 1)$, $\delta > 0$.

Исследовать функциональный ряд на равномерную сходимость в указанном промежутке (18, 19).

18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\operatorname{arctg}(n^2+x^2)}{5^n \cdot n^2 + x^2 + nx}$, $x \in \mathbf{R}$. **19.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n \cdot 5 - 3}{\operatorname{arctg} x + n}$, $x \in \mathbf{R}$.

Найти радиус сходимости степенного ряда (20, 21).

20. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{1+\sin(1/n)}{1+\sin(2/n)} \right)^n (5x-3)^n$. **21.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\operatorname{arctg} \dfrac{1}{3^n} \right)^n (6x+2)^n$.

Найти интервал сходимости степенного ряда (22, 23).

22. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n \sin \dfrac{\pi}{n} \left(\dfrac{x}{2} \right)^n$. **23.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{n^3+3^n}{n^5+5^n} (2-5x)^n$.

24. Найти радиус сходимости R и интервал сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\ln(1+2n^2)}{3n^2} (x+1)^n$, исследовать ряд на сходимость и абсолютную сходимость на концах интервала сходимости. Записать область сходимости.

25. Разложить функцию $f(x) = (1+x) \operatorname{arctg} \dfrac{x}{2}$ в ряд Маклорена и найти радиус сходимости R полученного ряда.

Разложить функцию в ряд Тейлора в окрестности точки x_0 и найти радиус сходимости R полученного ряда (26, 27).

26. $f(x) = (1+x^2)\sin^2 x$, $x_0 = 0$. **27.** $f(x) = \dfrac{2\sqrt{2}x}{\sqrt{1+2x}}$, $x_0 = \dfrac{1}{2}$.

Разложить функцию в степенной ряд (28, 29).

28. $\dfrac{1}{(3x-4)^2}$ по степеням x. **29.** $\dfrac{x}{1+4x}$ по степеням $(x-6)$.

С точностью до 10^{-4} вычислить значения $(30 - 32)$.

30. $\ln 1{,}02$. **31.** $\sqrt[3]{126}$. **32.** $\int\limits_0^{0{,}2} \ln \dfrac{1}{(1-x)^3} dx$.

Вариант 29

1. Выписать n-ый член ряда a_n; найти n-ю частичную сумму ряда S_n; найти $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$ или доказать, что этот предел не существует; сделать вывод о сходимости или расходимости ряда

$$\left(-3+\frac{1}{3}\right)+\left(3+\frac{1}{9}\right)+\left(-3+\frac{1}{27}\right)+\ldots$$

Исследовать ряды на сходимость (2 — 10).

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln\left(1+\sin\frac{1}{n}\right)}{\sin\left(4\left(\frac{1}{n}-\pi\right)\right)}$. **3.** $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{3n^2}\left(\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2-n-1}\right)$.

4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(4^n-1)(2n)!}$. **5.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{2+n}}{(2n^2-4)^{\frac{n}{2}}}$.

6. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\operatorname{tg}\frac{n^2}{n^3+1}$. **7.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{3n-1}{2n^2+n}$.

8. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\cos n}{n^2-n}$. **9.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\operatorname{arcch}(n+2)}{3^n+4n}$. **10.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left((n-1)\cdot\operatorname{sh}\frac{1}{n}\right)^{(n-1)^3}$.

11. Исследовать на абсолютную сходимость ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(\pi n/4)}{(n+1)\sqrt{\ln^{1,5}(n+2)}}$.

Найти все значения α, при которых ряд 1) абсолютно сходится; 2) условно сходится (12, 13).

12. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-\alpha)^n}{n^\alpha}$. **13.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n)}{n^{\alpha/3}}$.

14. Найти область сходимости E функциональной последовательности $\{f_n(x)\}$, где $f_n(x)=\ln\left(1+\dfrac{e^{nx}}{1+e^{nx}}\right)$. Найти предельную функцию $f(x)$ последовательности $\{f_n(x)\}$ на множестве E.

15. Найти предельную функцию $f(x)$ последовательности $\{f_n(x)\}$, где $f_n(x)=\sin^{2n}x+\dfrac{1}{n^2}$, на множестве $E=[0;\pi]$.

Исследовать на сходимость и равномерную сходимость последовательность $\{f_n(x)\}$ на множествах E_1 и E_2 (16, 17).

16. $f_n(x)=\left(e^{\frac{x^2}{n}}-1\right)\cdot\dfrac{1}{x^2}$, $E_1=[1;+\infty)$, $E_2=(\alpha;1)$, $0<\alpha<\dfrac{1}{2}$.

17. $f_n(x)=\dfrac{nx}{1+n^2x^2}\sin\dfrac{x}{n}$, $E_1=[0;1]$, $E_2=(0;+\infty)$.

Исследовать функциональный ряд на равномерную сходимость в указанном промежутке (18, 19).

18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} \cdot \left(\frac{\ln x}{x}\right)^n$, $x \in [1/e; e]$.

19. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n + \cos x}$, $x \in [-q; q]$, $q \in (0; 1)$.

Найти радиус сходимости степенного ряда (20, 21).

20. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{(n+2)(n+3)} - n\right) (4x+5)^n$. **21.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\arcsin \frac{1}{5^n}\right)^n (5x-2)^n$.

Найти интервал сходимости степенного ряда (22, 23).

22. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \arcsin \frac{1}{n^3} \left(\frac{3x+5}{7}\right)^n$. **23.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot (3n-2)}{5 \cdot 9 \cdot 13 \cdot \ldots \cdot (4n+1)} (x+3)^n$.

24. Найти радиус сходимости R и интервал сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 3^n}{n^2+4} \left(\frac{x+1}{2}\right)^n$, исследовать ряд на сходимость и абсолютную сходимость на концах интервала сходимости. Записать область сходимости.

25. Разложить функцию $f(x) = (1+x^2)\ln(1+x)$ в ряд Маклорена и найти радиус сходимости R полученного ряда.

Разложить функцию в ряд Тейлора в окрестности точки x_0 и найти радиус сходимости R полученного ряда (26, 27).

26. $f(x) = (1-x^2)\cos^2 x$, $x_0 = 0$.

27. $f(x) = (x^2+2x+2)\arcsin 2(x+1)^2$, $x_0 = -1$.

Разложить функцию в степенной ряд (28, 29).

28. $\frac{x}{\left(\frac{x}{2}+3\right)^2}$ по степеням x. **29.** $\frac{3x}{-5+4x}$ по степеням $(x+3)$.

С точностью до 10^{-4} вычислить значения (30 — 32).

30. $\sin 85^\circ$. **31.** $\sqrt[4]{630}$. **32.** $\int\limits_0^{0,3} \sqrt[4]{1+x^3}\,dx$.

Вариант 30

Выписать n-ый член ряда a_n; найти n-ю частичную сумму ряда S_n; найти $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$ или доказать, что этот предел не существует; сделать вывод о сходимости или расходимости ряда

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)+\left(2+\frac{1}{4}\right)+\left(3+\frac{1}{8}\right)+\left(4+\frac{1}{16}\right)+\ldots$$

Исследовать ряды на сходимость $(2-10)$.

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{arctg}\frac{2}{n}}{\sin\left(2\pi\left(\frac{1}{n}+10\right)\right)}$. **3.** $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty}\frac{\sqrt[3]{n+2}}{(n+1)\sqrt{n}}$. **4.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^3\sin^n\frac{\pi}{2n}$.

5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\cos\frac{n}{\sqrt{2n^3}}\right)^{1+n^2}$. **6.** $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sqrt{n}}{n+\sqrt{n+1}}$.

7. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\operatorname{ch}\frac{\sqrt{n}}{1+n^2}-1\right)$. **8.** $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\cos\left(-\frac{\pi}{4}+\pi n\right)}{\sqrt{n}}\operatorname{arcctg} n$.

9. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{\sqrt{n}}$. **10.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)\sin(3n)}{\sqrt[4]{n^8+5n-3}}$.

11. Исследовать на абсолютную сходимость ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(\pi n)}{n}\ln^{-2}(n+5)$.

Найти все значения α, при которых ряд 1) абсолютно сходится; 2) условно сходится $(12, 13)$.

12. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\alpha+n}}{\alpha n^{[\alpha]}}$. **13.** $\displaystyle\frac{\cos n}{(\alpha-3)n^{2\alpha}}$.

14. Найти область сходимости E функциональной последовательности $\{f_n(x)\}$, где $f_n(x)=\ln\left(1+\dfrac{xe^{nx}}{1+e^{nx}}\right)$. Найти предельную функцию $f(x)$ последовательности $\{f_n(x)\}$ на множестве E.

15. Найти предельную функцию $f(x)$ последовательности $\{f_n(x)\}$, где $f_n(x)=\dfrac{1}{2-(x^2-1)^n}$, на множестве $E=[0;4]$.

Исследовать на сходимость и равномерную сходимость последовательность $\{f_n(x)\}$ на множествах E_1 и E_2 $(16, 17)$.

16. $f_n(x)=\sqrt[5]{1+e^{-nx^2}}-1$, $E_1=[-1;1]$, $E_2=(-\infty;+\infty)$.

17. $f_n(x)=\dfrac{nx+1}{2+n^2x^2}\left(e^{-nx}-1\right)$, $E_1=[0;1]$, $E_2=(0;+\infty)$.

Исследовать функциональный ряд на равномерную сходимость в указанном промежутке $(18, 19)$.

18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos^2(2nx)}{n!\sqrt[3]{n^5+x^4}}$, $x \in \mathbf{R}$. **19.** $\dfrac{(-1)^n x^n}{n+\sin x}$, $x \in [-q; q]$, $q \in (0; 0,5)$.

Найти радиус сходимости степенного ряда $(20, 21)$.

20. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[3]{n^3+3n}-n\right)^n (x-1)^n$. **21.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\operatorname{arctg}\dfrac{1}{n^2}+1\right)^{n^2} (2x+5)^n$.

Найти интервал сходимости степенного ряда $(22, 23)$.

22. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{3^n}\operatorname{arctg}\dfrac{1}{n!}(2x+1)^n$. **23.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt[4]{n^2+2}}(4x+1)^n$.

24. Найти радиус сходимости R и интервал сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \sqrt{\dfrac{n^2+2}{n^2-1}}(x-3)^n$, исследовать ряд на сходимость и абсолютную сходимость на концах интервала сходимости. Записать область сходимости.

25. Разложить функцию $f(x) = \left(1-\dfrac{x^2}{2}\right)\ln(1-x)$ в ряд Маклорена и найти радиус сходимости R полученного ряда.

Разложить функцию в ряд Тейлора в окрестности точки x_0 и найти радиус сходимости R полученного ряда $(26, 27)$.

26. $f(x) = \dfrac{1}{(x^2+2x+3)^3}$, $x_0 = 1$.

27. $f(x) = (2x^2-4x+3)\cos^2\left(\dfrac{x-1}{2}\right)$, $x_0 = 1$.

Разложить функцию в степенной ряд $(28, 29)$,

28. $\dfrac{2x}{\left(\frac{x}{3}+1\right)^2}$ по степеням x. **29.** $\dfrac{3-x}{1+4x}$ по степеням $(x-1)$.

С точностью до 10^{-4} вычислить значения $(30 - 32)$.

30. $\sqrt[5]{e}$. **31.** $\sqrt{28}$. **32.** $\int\limits_0^{0,5} \dfrac{\ln(1+x^3)}{x}dx$.

Список литературы

1. Сборник задач и упражнений по математическому анализу: учеб. пособие для вузов/ Б.П. Демидович. — М.: АСТ, 2009. — 558 с. — ISBN 978-5-17-010062-0.

2. Кудрявцев Л.Д., Кутасов А.Д., Чехлов В.И., Шабунин М.И. Сборник задач по математическому анализу. Том 2. Интегралы. Ряды: Учеб. пособие/ Под ред. Л.Д. Кудрявцева. — 2–е изд., перераб. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. — 504 с. — ISBN 5-9221-0307-5.

3. Виноградова И.А., Олехник С.Н., Садовничий В.А. Математический анализ в задачах и упражнениях (числовые и функциональные ряды): Учеб. пособие — М.: Изд-во «Факториал», 1996. — 477 с. — ISBN 5-88688-006-2

4. Фихтенгольц Г.М Курс дифференциального и интегрального исчисления: в 3т. Т.2/ Пред. и прим. А.А. Флоринского. — 8-е из. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. — 864 с. — ISBN 5-9221-0437-3

5. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа: В 2–х ч. Часть II: Учеб.: Для вузов. — 5-е изд. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. — 464 с. — (Курс высшей математики и математической физики). — ISBN 5-9221-0537-X.

6. Тучинский Л.И., Шнейберг И.Я. Основы многомерного математического анализа. Части I и II: Учеб. пособие/ Под общ. ред. Е.Л. Тонкова. — Ижевск: Изд-во «Удмуртский госуниверситет», 2010. — 544 с. ISBN 978-5-904524-82-1.

7. Тучинский Л.И., Шнейберг И.Я. Дифференциальное исчисление функций многих переменных: Учеб. пособие./ Под общ. ред. Е.Л. Тонкова. Ижевск, 2006. 212 с.

8. Тучинский Л.И. Введение в анализ: практикум. Ижевск, 2007. — 83 с.

9. Дерр В.Я. Главная часть функции: Учебное пособие. Ижевск, 2006. 42 с.

Справочный материал

Геометрическая прогрессия

Геометрической прогрессией называют числовую последовательность, первый член которой отличен от нуля, а каждый член, начиная со второго, равен предшествующему члену, умноженному на одно и то же число, не равное нулю. Это число называют знаменателем геометрической прогрессии и обычно обозначают буквой q. Элемент геометрической прогрессии с номером n можно определить одним из следующих способов:

$$b_n = b_{n-1}q, \quad b_n = b_1q^{n-1}, \quad b_n^2 = b_{n-1}b_{n+1}.$$

Сумма n первых членов геометрической прогрессии $S_n = \dfrac{b_1(1-q^n)}{1-q}$.

Бесконечно убывающей геометрической прогрессией называют бесконечную прогрессию, знаменатель которой по модулю меньше единицы, то есть $|q| < 1$.

Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии определяется формулой $S_n = \dfrac{b_1}{1-q}$.

Свойства конечных сумм

1. Сумма не зависит от того, какой буквой обозначается индекс суммирования, то есть
$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{j=1}^{n} a_j = \sum_{p=1}^{n} a_p.$$

2. Операция суммирования обладает свойством линейности, то есть для любых чисел α и β имеет место равенство
$$\sum_{k=1}^{n}(\alpha a_k + \beta b_k) = \alpha \sum_{k=1}^{n} a_k + \beta \sum_{k=1}^{n} b_k.$$

3. Для двойных сумм имеет место равенство
$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} a_{ij} = \sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}.$$

Сравнение функций

Символ $O(f)$. Если существует число $C > 0$, что для всех $x \in X$ справедливо неравенство $|f(x)| \leqslant C|g(x)|$, то говорят, что функция $f(x)$ есть O большое от функции $g(x)$ при $x \in X$, и пишут $f(x) = O(g(x))$ при $x \in X$.

В проколотой окрестности точки x_0 рассматриваем функции $f(x)$ и $g(x)$. Пусть функция $g(x)$ не обращается в нуль в этой окрестности.

Символ $O^*(f)$. Если $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} \neq 0$, то говорят, что функция $f(x)$ есть O большое со звездочкой от функции $g(x)$ при $x \to x_0$, и пишут $f(x) = O^*(g(x))$ при $x \to x_0$.

Эквивалентные функции. Если $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$, то говорят, что функция $f(x)$ эквивалентна функции $g(x)$ при $x \to x_0$, и пишут $f(x) \sim g(x)$ при $x \to x_0$.

Символ $o(f)$. Если $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$, то говорят, что функция $f(x)$ есть o малое от функции $g(x)$ при $x \to x_0$, и пишут $f(x) = o(g(x))$ при $x \to x_0$.

Таблица эквивалентных бесконечно малых при $x \to 0$

$$
\begin{array}{ll}
(1+x)^n - 1 \sim nx & \sqrt[n]{1+x} - 1 \sim \dfrac{1}{n}x \\
a^x - 1 \sim x \ln a & e^{\alpha x} - 1 \sim \alpha x \\
\log_a(1+x) \sim x\log_a e & \ln(1+x) \sim x \\
\sin x \sim x & \operatorname{tg} x \sim x \\
\operatorname{sh} x \sim x & \operatorname{ch} x - 1 \sim \dfrac{1}{2}x^2 \\
\arcsin x \sim x & \operatorname{arctg} x \sim x \\
1 - \cos x \sim \dfrac{1}{2}x^2 & \operatorname{tg} x - \sin x \sim \dfrac{1}{2}x^3 \\
x - \sin x \sim \dfrac{1}{6}x^3 & \operatorname{tg} x - x \sim \dfrac{1}{3}x^3
\end{array}
$$

$$\sqrt[n]{1+\alpha x} - \sqrt[m]{1+\beta x} \sim \left(\frac{\alpha}{n} - \frac{\beta}{m}\right)x$$

Асимптотические формулы для элементарных функций при $x \to 0$

$$(1+x)^n - 1 = nx + o(x) \qquad \sqrt[n]{1+x} - 1 = \frac{1}{n}x + o(x)$$
$$a^x - 1 = x\ln a + o(x) \qquad e^{\alpha x} - 1 = \alpha x + o(x)$$
$$\log_a(1+x) = x\log_a e + o(x) \qquad \ln(1+x) = x + o(x)$$
$$\sin x = x + o(x) \qquad \operatorname{tg} x = x + o(x)$$
$$\operatorname{sh} x = x + o(x) \qquad \operatorname{ch} x - 1 = \frac{1}{2}x^2 + o\left(x^2\right)$$
$$\arcsin x = x + o(x) \qquad \operatorname{arctg} x = x + o(x)$$
$$1 - \cos x = \frac{1}{2}x^2 + o\left(x^2\right) \qquad \operatorname{tg} x - \sin x = \frac{1}{2}x^3 + o(x)$$
$$x - \sin x = \frac{1}{6}x^3 + o\left(x^4\right) \qquad \operatorname{tg} x - x = \frac{1}{3}x^3 + o\left(x^4\right)$$

$$\sqrt[n]{1+\alpha x} - \sqrt[m]{1+\beta x} = \left(\frac{\alpha}{n} - \frac{\beta}{m}\right)x + o\left(x^2\right)$$

Свойства тригонометрических и обратных тригонометрических функций

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2} \qquad \operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}$$
$$1 - \cos 2x = 2\sin^2 x \qquad 1 + \cos 2x = 2\cos^2 x$$
$$|\sin x| \leqslant 1 \qquad |\cos x| \leqslant 1$$
$$|\arcsin x| \leqslant \frac{\pi}{2} \qquad |\operatorname{arctg} x| < \frac{\pi}{2}$$
$$0 \leqslant \arccos x \leqslant \pi \qquad 0 < \operatorname{arcctg} x < \pi$$

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2}[\cos(x-y) + \cos(x+y)]$$

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2}[\cos(x-y) - \cos(x+y)]$$

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2}[\sin(x-y) + \sin(x+y)]$$

При $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ справедливо неравенство $0 < \sin x < x < \operatorname{tg} x$.

$$\sum_{k=0}^{n} \sin(x+k\alpha) = \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\alpha\right)\sin\left(x+\frac{n}{2}\right)\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}}, \quad \alpha \neq 2\pi k, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

$$\sum_{k=0}^{n} \cos(x+k\alpha) = \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\alpha\right)\cos\left(x+\frac{n}{2}\right)\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}}, \quad \alpha \neq 2\pi k, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

Оценки для модуля

Для любых вещественных чисел a и b справедливы неравенства

$$|a+b| \leqslant |a|+|b|, \qquad |a-b| \geqslant |a|-|b|, \qquad 2|ab| \leqslant a^2+b^2.$$

Формула Тейлора

Пусть функция $f(x)$ имеет в некоторой окрестности точки a производную порядка $n+1$ ($\forall n \in \mathbf{N}$). Пусть x есть любое значение аргумента из указанной окрестности, p — произвольное положительное число. Тогда между точками a и x найдется точка ξ такая, что справедлива формула:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_{n+1}(x),$$

где $R_{n+1}(x) = \left(\dfrac{x-a}{x-\xi}\right)^p \cdot \dfrac{(x-\xi)^{n+1}}{n!p} f^{(n+1)}(\xi)$ — остаточный член в общей форме.

Существуют другие способы записать остаточный член $R_{n+1}(x)$ в формуле Тейлора:

- $R_{n+1}(x) = \dfrac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}[a+\theta(x-a)]$, $(0 < \theta < 1)$ — в форме Лагранжа;
- $R_{n+1}(x) = \dfrac{(x-a)^{n+1}(1-\theta)^n}{n!} f^{(n+1)}[a+\theta(x-a)]$ $(0 < \theta < 1)$ — в форме Коши;
- $R_{n+1}(x) = o\left((x-a)^n\right)$ $(x \to a)$ — в форме Пеано;
- $R_{n+1}(x) = \dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,dt$ — в интегральной форме.

Основные разложения элементарных функций

1. $\sin x = \sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k \dfrac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}, \ |x| < \infty$

2. $\cos x = \sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k \dfrac{x^{2k}}{(2k)!}, \ |x| < \infty$

3. $e^x = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{x^k}{k!}, \ |x| < \infty$

4. $\operatorname{sh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}, \ |x| < \infty$

5. $\operatorname{ch} x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{x^{2k}}{(2k)!}, \ |x| < \infty$

6. $\dfrac{1}{1-x} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} x^k, \ |x| < 1, \qquad \dfrac{1}{1+x} = \sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^k, \ |x| < 1$

7. $\ln(1+x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\dfrac{x^k}{k}, \ -1 < x \leqslant 1$

8. $\operatorname{arctg} x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}, \ |x| \leqslant 1$

9. $\arcsin x = x + \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}, \ |x| < 1$

10. $(1+x)^\alpha = \sum\limits_{k=0}^{\infty} C_k^\alpha x^k, \ |x| < 1, \ C_0^\alpha = 1, \ C_k^\alpha = \dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-k+1)}{k!},$
$\alpha \in \mathbf{R}$

Последняя формула позволяет получать разложения в ряды для многих функций. Кроме того, записав x^2 вместо x, можно получать разложения функций $\sqrt{1+x^2}$, $\dfrac{1}{\sqrt[3]{1+x^2}}$ и другие.

Учебное издание

Наталья Ивановна Коробейникова,
Наталья Владимировна Латыпова,
Татьяна Сергеевна Тинюкова

ЧИСЛОВЫЕ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ

Учебно-методическое пособие

Напечатано в авторской редакции
с оригинал-макета заказчика

Компьютерный набор и верстка Н.И. Коробейникова,
Н.В. Латыпова, Т.С. Тинюкова

Оформление обложки Н.И. Коробейникова

Подписано в печать 10.09.15. Формат 60x84 1/16.
Печать офсетная. Усл.печ.л. 8,19. Уч.-изд.л. 3,91.
Тираж 30 экз. Заказ №

Издательский центр «Удмуртский университет»
426034, Ижевск, ул. Университетская, 1, корп.4.
Тел./факс: +7(3412)500-295 E-mail: editorial@udsu.ru