УДК 517.929.2

© **А. В. Васильев, В. Б. Васильев**

# РАЗНОСТНЫЕ И ДИСКРЕТНЫЕ УРАВНЕНИЯ НА ПРЯМОЙ И ПОЛУПРЯМОЙ[1]

Рассматриваются общие разностные уравнения на прямой и полупрямой с точки зрения теории псевдодифференциальных уравнений и краевых задач. Показано, что существенную роль в описании картины разрешимости таких уравнений играет индекс факторизации эллиптического символа разностного уравнения с постоянными коэффициентами. Описана структура решения такого уравнения в пространствах квадратично интегрируемых функций и получены необходимые и достаточные условия разрешимости. Описаны некоторые дискретные аналоги этих уравнений.

*Ключевые слова*: разностное уравнение, дискретное уравнение, символ, индекс факторизации, разрешимость, общее решение.

## Введение

Очень часто разностные уравнения конечного порядка возникают в различных задачах математики и прикладных наук, например, в математической физике и биологии. Теория решения таких уравнений построена давно для уравнений с постоянными коэффициентами [9,10], но практически отсутствуют какие-либо результаты о разрешимости для уравнений с переменными коэффициентами. Отметим, что определенные типы таких уравнений были получены одним из авторов при исследовании общих граничных задач для модельных эллиптических псевдодифференциальных уравнений в канонических негладких областях, однако отсутствуют методы решения таких уравнений [7, 11, 12]. Здесь мы рассмотрим некоторый промежуточный случай между упомянутыми выше двумя, точнее, здесь будут рассмотрены некоторые разностные уравнения бесконечного порядка с постоянными коэффициентами. Ниже мы поясняем, о каких уравнениях мы будем говорить.

Как правило, рассматривались линейные разностные уравнения $n$-го порядка следующего вида [9, 10]:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k(x)u(x+k) = v(x), \quad x \in M \subset \mathbb{R}, \tag{1}$$

где функции $a_k(x), k = 1, \ldots, n, v(x)$ заданы на $M$, $u(x)$ — неизвестная функция, также определенная на $M$. Поскольку $n \in \mathbb{N}$, множество $M$ должно быть либо лучом, либо всей прямой $\mathbb{R}$.

Более общий тип разностного уравнения конечного порядка — это уравнение

$$\sum_{k=0}^{n} a_k(x)u(x+\beta_k) = v(x), \quad x \in M \subset \mathbb{R}, \tag{2}$$

где $\{\beta_k\}_{k=0}^{n} \subset \mathbb{R}$.

Далее, такие уравнения можно рассматривать как с непрерывным, так и с дискретным аргументом. Уравнения с непрерывным аргументом мы называем разностными, а с дискретным — дискретными, хотя к уравнениям типа вполне применим термин «дискретно-разностные». Здесь мы рассмотрим случай непрерывного аргумента $x$, а решение и правая часть рассматриваются в пространстве $L_2(\mathbb{R})$ для всех уравнений.

Если начать рассмотрение с уравнения

$$\sum_{k=0}^{n} a_k u(x+\beta_k) = v(x), \quad x \in \mathbb{R}, \tag{3}$$

[1]Работа поддержана РФФИ и Администрацией Липецкой области (грант № 14–41–03595-р-центр-а).

легко сообразить, что оно немедленно решается с помощью преобразования Фурье:

$$(Fu)(\xi) \equiv \widetilde{u}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix\cdot\xi} u(x)dx.$$

Действительно, применяя преобразование Фурье к уравнению (3), мы получим

$$\widetilde{u}(\xi) \sum_{k=0}^{n} a_k e^{i\beta_k \xi} = \widetilde{v}(\xi),$$

или, переобозначая,

$$\widetilde{u}(\xi) p_n(\xi) = \widetilde{v}(\xi).$$

Функция $p_n(\xi)$ называется символом оператора, стоящего в левой части уравнения (3) (см. [3]). Если $p_n(\xi) \neq 0,\ \forall \xi \in \mathbb{R}$, то уравнение (3) легко решается:

$$u(x) = F^{-1}_{\xi\to x}\left(p_n^{-1}(\xi)\widetilde{v}(\xi)\right).$$

Аналогичные рассуждения применимы и в случае неограниченной последовательности $\{\beta_k\}_{-\infty}^{+\infty}$. В этом случае разностный оператор с комплексными коэффициентами

$$\mathcal{D}\colon u(x) \longmapsto \sum_{-\infty}^{+\infty} a_k u(x+\beta_k), \quad x \in \mathbb{R}, \quad a_k \in \mathbb{C}, \tag{4}$$

имеет следующий символ:

$$\sigma(\xi) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_k e^{i\beta_k \xi}.$$

Л е м м а 1. *Оператор $\mathcal{D}$ является линейным ограниченным оператором $L_2(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R})$, если $\{a_k\}_{-\infty}^{+\infty} \in l^1$.*

Доказательство этого утверждения практически очевидно.

Если рассмотреть оператор (4) только для $x_d \in \mathbb{Z}$,

$$\mathcal{D}\colon u(x_d) \longmapsto \sum_{-\infty}^{+\infty} a_k u(x_d+\beta_k), \quad x_d \in \mathbb{Z}, \tag{5}$$

его символ можно определить дискретным преобразованием Фурье [16, 17]:

$$\sigma_d(\xi) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_k e^{i\beta_k \xi}, \quad \xi \in [-\pi, \pi].$$

Безусловно, существует определенная связь между дискретными и разностными уравнениями. Так, в частности, если $\{\beta_k\}_{-\infty}^{+\infty} = \mathbb{Z}$, то оператор (5) — это оператор дискретной свертки. Для изучения дискретных операторов в полупространстве авторы развили определенную аналитическую технику [13–15]. Ниже мы стараемся расширить границы применимости этой техники, включив более общие ситуации.

## § 1. Общие разностные уравнения

Мы рассматриваем уравнение

$$(\mathcal{D}u)(x) = v(x), \quad x \in \mathbb{R}_+, \tag{6}$$

где $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R},\ x > 0\}$.

Для исследования этого уравнения мы используем методы теории сингулярных интегральных и псевдодифференциальных уравнений [3, 6, 7], которые, насколько нам известно, не очень привычны для теории разностных уравнений. Наша основная цель — это изучение многомерных разностных уравнений, и этот одномерный вариант, который рассматривается здесь, представляет собой простейшую модель для рассмотрения более сложных ситуаций. Этот подход основан на теории классической краевой задачи Римана, одномерных сингулярных интегральных уравнений [1, 2, 5] и технике факторизации [20].

На первом этапе мы будем пользоваться теорией парных уравнений [5] вида

$$(aP_+ + bP_-)U = V \tag{7}$$

в пространстве $L_2(\mathbb{R})$, где $a$, $b$ — операторы свертки с соответствующими ядрами $a(x)$, $b(x)$, $x \in \mathbb{R}$; $P_\pm$ — проекторы на полуоси $\mathbb{R}_\pm$. В развернутом виде

$$(aP_+U)(x) = \int_0^{+\infty} a(x-y)U(y)dy, \quad (bP_-U)(x) = \int_{-\infty}^{0} b(x-y)U(y)dy.$$

Применяя преобразование Фурье к уравнению (7), мы получим [6] следующее одномерное сингулярное интегральное уравнение [1, 2, 5]

$$\widetilde{a}(\xi)(P\widetilde{U})(\xi) + \widetilde{b}(\xi)(Q\widetilde{U})(\xi) = \widetilde{V}(\xi), \tag{8}$$

где $P, Q$ — два проектора, связанные с преобразованием Гильберта

$$(Hu)(x) = v.p.\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u(y)}{x-y}dy,$$

$$P = \frac{1}{2}(I+H), \qquad Q = \frac{1}{2}(I-H).$$

Уравнение (8) тесно связано с краевой задачей Римана [1, 2] для верхней и нижней полуплоскостей. Напомним постановку задачи: найти пару функций $\Phi^\pm(\xi)$, допускающих аналитическое продолжение в верхнюю ($\mathbb{C}_+$) и нижнюю ($\mathbb{C}_-$) полуплоскости в комплексной плоскости $\mathbf{C}$, таких, что их граничные значения на $\mathbb{R}$ связаны линейным соотношением

$$\Phi^+(\xi) = G(\xi)\Phi^-(\xi) + g(\xi), \tag{9}$$

где $G(\xi), g(\xi)$ — заданные функции на $\mathbb{R}$.

Хорошо известно взаимно однозначное соответствие между краевой задачей Римана (9) и сингулярным интегральным уравнением (8),

$$G(\xi) = \widetilde{a}^{-1}(\xi)\widetilde{b}(\xi), \quad \widetilde{V}(\xi) = \widetilde{a}^{-1}(\xi)g(\xi).$$

Мы будем предполагать, что символ $G(\xi)$ — это непрерывная не обращающаяся в нуль функция на одноточечной компактификации $\dot{\mathbb{R}}$ ($G(\xi) \neq 0$ для всех $\xi \in \dot{\mathbb{R}}$) и

$$\operatorname{Ind} G \equiv \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} d\arg G(t) = 0. \tag{10}$$

Последнее условие (10) является необходимым и достаточным для однозначной разрешимости задачи (9) в пространстве $L_2(\mathbb{R})$ [1, 2]. Более того, это единственное решение задачи (9) можно явно построить с помощью преобразования Гильберта:

$$\Phi^+(t) = G_+(t)P\left(G_+^{-1}(t)g(t)\right), \quad \Phi^-(t) = -G_-^{-1}(t)Q\left(G_+^{-1}(t)g(t)\right),$$

где $G_\pm$ — элементы факторизации функции $G(t)$ (см. ниже):

$$G_+(t) = \exp\left(P\left(\ln G(t)\right)\right), \quad G_-(t) = \exp\left(Q\left(\ln G(t)\right)\right).$$

Уравнение (6) легко привести к виду (7) следующим образом. Поскольку правая часть в (6) определена только на $\mathbb{R}_+$, мы продолжим $v(x)$ на все $\mathbb{R}$ так, чтобы это продолжение $lf \in L_2(\mathbb{R})$. Затем переобозначим неизвестную функцию на $u_+(x)$ и определим функцию

$$u_-(x) = (lf)(x) - (\mathcal{D}u_+)(x).$$

Таким образом, мы получили уравнение

$$(\mathcal{D}u_+)(x) + u_-(x) = (lf)(x), \quad x \in \mathbb{R}, \tag{11}$$

на всей вещественной прямой $\mathbb{R}$.

После преобразования Фурье имеем

$$\sigma(\xi)\widetilde{u}_+(\xi) + \widetilde{u}_-(\xi) = \widetilde{lv}(\xi),$$

где $\sigma(\xi)$ является символом оператора $\mathcal{D}$. Мы называем символ эллиптическим, если $\sigma(\xi) \neq 0$ для каждого $\xi \in \dot{\mathbb{R}}$.

Чтобы пояснить технику решения уравнения (11), введем следующее (см. [1,2])

Определение 1. Факторизацией эллиптического символа называется его представление в виде

$$\sigma(\xi) = \sigma_+(\xi) \cdot \sigma_-(\xi),$$

где сомножители $\sigma_+, \sigma_-$ допускают аналитическое продолжение в верхнюю и нижнюю комплексные полуплоскости $\mathbf{C}_\pm$ и $\sigma_\pm^{\pm 1} \in L_\infty(\mathbb{R})$.

Пример 1. Рассмотрим интеграл типа Коши:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u(t)}{z-t}dt \equiv \Phi(z), \quad z = x \pm iy.$$

Хорошо известна его ключевая роль в разложении $L_2(\mathbb{R})$ на два ортогональных подпространства, точнее

$$L_2(\mathbb{R}) = A_+(\mathbb{R}) \oplus A_-(\mathbb{R}),$$

где $A_\pm(\mathbb{R})$ состоит из функций, допускающих аналитическое продолжение в $\mathbb{C}_\pm$.

Граничные значения интеграла $\Phi(z)$ подчинены формулам Сохоцкого [1,2], и, следовательно, проекторы $P$ и $Q$ являются соответствующими проекторами на подпространства $A_\pm(\mathbb{R})$ [5].

Пример нужной факторизации легко предложить в виде

$$\exp(u) = \exp(Pu) \cdot \exp(Qu).$$

Теорема 1. *Пусть* $\sigma(\xi) \in C(\dot{\mathbb{R}})$, $\operatorname{Ind} \sigma = 0$. *Тогда уравнение* (6) *имеет единственное решение в пространстве* $L_2(\mathbb{R}_+)$ *для любой правой части* $v \in L_2(\mathbb{R}_+)$, *преобразование Фурье которого дается формулой*

$$\widetilde{u}(\xi) = \frac{1}{2}\sigma^{-1}(\xi)\widetilde{lv}(\xi) + \frac{\sigma_+^{-1}(\xi)}{2\pi i}\ v.p.\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sigma_-^{-1}(\eta)\widetilde{lv}(\eta)}{\xi - \eta}d\eta.$$

Доказательство. Имеем

$$\sigma_+(\xi)\widetilde{u}_+(\xi) + \sigma_-^{-1}(\xi)\widetilde{u}_-(\xi) = \sigma_-^{-1}(\xi)\widetilde{lv}(\xi).$$

Далее, поскольку $\sigma_-^{-1}(\xi)\widetilde{lv}(\xi) \in L_2(\mathbb{R})$, разложим его на два слагаемых

$$\sigma_-^{-1}(\xi)\widetilde{lv}(\xi) = P\left(\sigma_-^{-1}(\xi)\widetilde{lv}(\xi)\right) + Q\left(\sigma_-^{-1}(\xi)\widetilde{lv}(\xi)\right)$$

и запишем

$$\sigma_+(\xi)\widetilde{u}_+(\xi) - P\left(\sigma_-^{-1}(\xi)\widetilde{lv}(\xi)\right) = Q\left(\sigma_-^{-1}(\xi)\widetilde{lv}(\xi)\right) - \sigma_-^{-1}(\xi)\widetilde{u}_-(\xi).$$

Левая часть последнего равенства принадлежит пространству $A_+(\mathbb{R})$, а правая часть — пространству $A_-(\mathbb{R})$, следовательно, по теореме Лиувилля, они должны быть нулями. Таким образом,

$$\sigma_+(\xi)\widetilde{u}_+(\xi) - P\left(\sigma_-^{-1}(\xi)\widetilde{lv}(\xi)\right) = 0$$

и

$$\widetilde{u}_+(\xi) = \sigma_+^{-1}(\xi)P\left(\sigma_-^{-1}(\xi)\widetilde{lv}(\xi)\right), \tag{12}$$

или (в развернутой форме)

$$\widetilde{u}_+(\xi) = \frac{1}{2}\sigma^{-1}(\xi)\widetilde{lv}(\xi) + \frac{\sigma_+^{-1}(\xi)}{2\pi i}\ v.p.\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sigma_-^{-1}(\eta)\widetilde{lv}(\eta)}{\xi-\eta}d\eta,$$

что и требовалось доказать. □

З а м е ч а н и е 1. Легко убедиться, что результат не зависит от выбора продолжения $lv$. Обозначим $M_\pm(x)$ обратные преобразования Фурье функций $\sigma_\pm^{-1}(\xi)$. Формула (12) будет выглядеть так:

$$u_+(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} M_+(x-y)\left(\int_0^{+\infty} M_-(y-t)(lv)(t)dt\right)dy = \int_{-\infty}^{+\infty} M_+(x-y)\left(\int_0^{+\infty} M_-(y-t)v(t)dt\right)dy.$$

З а м е ч а н и е 2. Ограничение $\sigma(\xi) \in C(\dot{\mathbb{R}})$ не очень обременительно. Во-первых, такие символы существуют хотя бы в случае, когда $\sigma(\xi)$ представлена конечной суммой и $\beta_k \in \mathbb{Q}$. Тогда $\sigma(\xi)$ будет непрерывной периодической функцией. Во-вторых, если символ не является непрерывной функцией, можно воспользоваться аппроксимационными методами в силу устойчивости индекса относительно малых возмущений.

## § 2. Структура решения

Поскольку $\sigma(\xi) \in C(\dot{\mathbb{R}})$, $\mathrm{Ind}\,\sigma$ — целое число, и в этом разделе мы рассмотрим случай $æ \equiv \mathrm{Ind}\,\sigma \in \mathbb{N}$.

Т е о р е м а 2. *Пусть* $\mathrm{Ind}\,\sigma \in \mathbb{N}$. *Тогда общее решение уравнения* (6) *в образах Фурье можно записать в виде*

$$\widetilde{u}_+(\xi) = \sigma_+^{-1}(\xi)\omega^{-æ}(\xi)P\left(\sigma_-^{-1}(\xi)\widetilde{lv}(\xi)\right) + (\xi-i)^{-æ}\sigma_+^{-1}(\xi)P_{æ-1}(\xi),$$

*которое зависит от* $æ$ *произвольных постоянных.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Функция

$$\omega(\xi) = \frac{\xi-i}{\xi+i}$$

имеет индекс, равный 1 [1, 2, 5], следовательно, функция

$$\omega^{-æ}(\xi)\sigma(\xi) = \left(\frac{\xi-i}{\xi+i}\right)^{-æ}\cdot\sigma(\xi)$$

имеет нулевой индекс, следовательно, мы можем факторизовать функцию

$$\omega^{-æ}(\xi)\sigma(\xi) = \sigma_+(\xi)\sigma_-(\xi).$$

Далее, после представления (11) в образах Фурье

$$\omega^{æ}(\xi)\omega^{-æ}(\xi)\sigma(\xi)\widetilde{u}_+(\xi) + \widetilde{u}_-(\xi) = \widetilde{lv}(\xi),$$

мы факторизуем $\omega^{-æ}(\xi)\sigma(\xi)$ и записываем

$$\omega^{æ}(\xi)\sigma_+(\xi)\widetilde{u}_+(\xi) + \sigma_-^{-1}(\xi)\widetilde{u}_-(\xi) = \sigma_-^{-1}(\xi)\widetilde{lv}(\xi).$$

С учетом наших обозначений можно записать

$$\sigma_+(\xi)\widetilde{u}_+(\xi)+\omega^{-æ}(\xi)\sigma_-^{-1}(\xi)\widetilde{u}_-(\xi)=\omega^{-æ}(\xi)P\left(\sigma_-^{-1}(\xi)\widetilde{lv}(\xi)\right)+\omega^{-æ}(\xi)Q\left(\sigma_-^{-1}(\xi)\widetilde{lv}(\xi)\right), \quad (13)$$

поскольку

$$\sigma_-^{-1}(\xi)\widetilde{lv}(\xi)=P\left(\sigma_-^{-1}(\xi)\widetilde{lv}(\xi)\right)+Q\left(\sigma_-^{-1}(\xi)\widetilde{lv}(\xi)\right)$$

и

$$(\xi-i)^{æ}\sigma_+(\xi)\widetilde{u}_+(\xi)-(\xi+i)^{æ}P\left(\sigma_-^{-1}(\xi)\widetilde{lv}(\xi)\right)=(\xi+i)^{æ}Q\left(\sigma_-^{-1}(\xi)\widetilde{lv}(\xi)\right)-$$
$$-(\xi+i)^{æ}\sigma_-^{-1}(\xi)\widetilde{u}_-(\xi). \quad (14)$$

Отсюда по обобщенной теореме Лиувилля [1, 2] мы заключаем, что правая и левая части последнего равенства представляют собой многочлены $P_{æ}(\xi)$ степени æ, поскольку левая часть равенства имеет полюс порядка æ в $\mathbb{C}$ в точке $z=i$. Следовательно,

$$\widetilde{u}_+(\xi)=\sigma_+^{-1}(\xi)\omega^{-æ}(\xi)P\left(\sigma_-^{-1}(\xi)\widetilde{lv}(\xi)\right)+(\xi-i)^{-æ}\sigma_+^{-1}(\xi)P_{æ-1}(\xi),$$

так как полином должен иметь степень $æ-1$, чтобы последнее слагаемое входило в $L_2(\mathbb{R}^m_+)$. □

З а м е ч а н и е 3. Как и выше, можно убедиться, что результат не зависит от выбора продолжения $l$.

С л е д с т в и е 1. *Пусть* $v(x)\equiv 0, æ\in\mathbb{N}$. *Тогда общее решение однородного уравнения* (6) *дается формулой*

$$\widetilde{u}_+(\xi)=(\xi-i)^{-æ}\sigma_+^{-1}(\xi)P_{æ-1}(\xi).$$

## § 3. Условия разрешимости

Т е о р е м а 3. *Пусть* $-\mathrm{Ind}\,\sigma\in\mathbb{N}$. *Тогда уравнение* (6) *имеет решение из* $L_2(\mathbb{R}_+)$ *тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:*

$$\int_{-\infty}^{+\infty}(\xi-i)^{k-1}\sigma_-^{-1}(\xi)\widetilde{lv}(\xi)d\xi=0,\quad k=1,2,\dots,|æ|.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассуждая так же, как и выше, и останавливаясь на равенстве (14), получаем, что (поскольку мы работаем в пространстве $L_2(\mathbb{R})$) как правая, так и левая части (14) обнуляются на бесконечности, следовательно, такая функция — тождественный нуль, и значит

$$\widetilde{u}_+(\xi)=\sigma_+^{-1}(\xi)\left(\frac{\xi-i}{\xi+i}\right)^{-æ}P\left(\sigma_-^{-1}(\xi)\widetilde{lv}(\xi)\right).$$

Однако в последней формуле есть некоторое несоответствие. Действительно, это решение принадлежит пространству $A_+(\mathbb{R})$, но на самом деле оно принадлежит подпространству $A_+^k(\mathbb{R})$. Это подпространство состоит из граничных значений аналитических в $\mathbb{C}_+$ функций с нулями порядка $-æ$ в точке $z=i$. Чтобы получить решение из $L_2(\mathbb{R}_+)$, нужно несколько подкорректировать последнюю формулу. Поскольку оператор $P$ связан с интегралом типа Коши, мы будем использовать некоторые формулы разложения для этого интеграла (см. также [1, 2, 6]).

Обозначим $\sigma_-^{-1}(\xi)\widetilde{lv}(\xi)\equiv g(\xi)$ и рассмотрим следующий интеграл:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{g(\eta)d\eta}{z-\eta},\quad z=\xi+i\tau\in\mathbb{C}.$$

Используя простую формулу для ядра

$$\frac{1}{z-\eta}=\sum_{k=1}^{|æ|}\frac{(\eta-i)^{k-1}}{(z-i)^k}+\frac{(\eta-i)^{|æ|}}{(z-i)^{|æ|}(z-\eta)},$$

мы получим следующее разложение:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{g(\eta)d\eta}{z-\eta}=\sum_{k=1}^{|æ|}(z-i)^{-k}\int_{-\infty}^{+\infty}(\eta-i)^{k-1}g(\eta)d\eta+\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(\eta-i)^{|æ|}g(\eta)d\eta}{(z-i)^{|æ|}(z-\eta)}.$$

Таким образом, мы пришли к следующему свойству. Если выполнены условия

$$\int_{-\infty}^{+\infty}(\eta-i)^{k-1}g(\eta)d\eta=0,\quad k=1,2,\dots,|æ|,$$

то мы имеем

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{g(\eta)d\eta}{z-\eta}=(z-i)^{æ}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(\eta-i)^{|æ|}g(\eta)d\eta}{z-\eta}.$$

Следовательно, граничные значения на $\mathbb{R}$ левой и правой части равны, и тогда

$$P\left(g(\xi)\right)=(\xi-i)^{æ}P\left((\xi-i)^{|æ|}g(\xi)\right).$$

Подставляя последнюю формулу в формулу для решения, мы получаем

$$\widetilde{u}_+(\xi)=\sigma_+^{-1}(\xi)(\xi+i)^{æ}P\left((\xi-i)^{|æ|}\sigma_-^{-1}(\xi)\widetilde{lv}(\xi)\right).$$

□

## Заключение

Рассмотренные ситуации для уравнений с постоянными коэффициентами будут служить основой для описания свойств фредгольмовости уравнений с переменными коэффициентами. По всей видимости, локальный принцип [4] в этой ситуации также будет применим, хотя потребуется определенная адаптация (или модификация, например, для дискретных уравнений) к более общим классам операторов. В многомерной ситуации проблема существенно усложнится, однако и здесь есть возможность получить содержательные результаты, подобные [19].

**Список литературы**


1. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. М.: Наука, 1977. 640 с.
2. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968. 511 с.
3. Mikhlin S.G., Prößdorf S. Singular integral operators. Berlin–Heidelberg–New York: Springer, 1986. 528 p.
4. Симоненко И.Б. Локальный метод в теории инвариантных относительно сдвига операторов и их огибающих. Ростов-на-Дону: Изд-во ЦВВР, 2007. 120 с.
5. Гохберг И.Ц., Крупник Н.Я. Введение в теорию одномерных сингулярных интегральных уравнений. Кишинёв: Штиинца, 1973. 426 с.
6. Эскин Г.И. Краевые задачи для эллиптических псевдодифференциальных уравнений. М.: Наука, 1973. 232 с.
7. Васильев В.Б. Мультипликаторы интегралов Фурье, псевдодифференциальные уравнения, волновая факторизация, краевые задачи. М.: Едиториал УРСС, 2010. 135 с.
8. Титчмарш Е. Введение в теорию интегралов Фурье. М.–Л.: ОГИЗ «Гостехиздат», 1948. 479 с.
9. Milne-Thomson L.M. The calculus of finite differences. New York: Chelsea Publishing Company, 1981. 558 p.
10. Jordan C. Calculus of finite differences. New York: Chelsea Publishing Company, 1965. 654 p.
11. Vasilyev V.B. General boundary value problems for pseudo differential equations and related difference equations // Advances in Difference Equations. 2013. Vol. 2013:289. P. 1–7. DOI: 10.1186/1687-1847-2013-289
12. Vasilyev V.B. On some difference equations of first order // Tatra Mt. Math. Publ. 2013. Vol. 54. P. 165–181.
13. Vasilyev A.V., Vasilyev V.B. Discrete singular operators and equations in a half-space // Azerbaijan Journal of Mathematics. 2013. Vol. 3. №1. P. 84–93.
14. Vasilyev A.V., Vasilyev V.B. Discrete singular integrals in a half-space // Current Trends in Analysis and its Applications. Proceedings of the 9th ISAAC Congress. Krakow, Poland, 2013. P. 663–670.
15. Васильев А.В., Васильев В.Б. Периодическая задача Римана и дискретные уравнения в свертках // Дифференциальные уравнения. 2015. Т. 51. № 5. С. 642–649.

16. Соболев С.Л. Введение в теорию кубатурных формул. М.: Наука, 1974. 808 с.
17. Даджион Д., Мерсеро Р. Цифровая обработка многомерных сигналов. М.: Мир, 1988. 488 с.
18. Курбатов В.Г. Линейные дифференциально-разностные уравнения. Воронеж: Изд-во Воронежского ун-та, 1990. 167 с.
19. Каменский Г.А., Скубачевский А.Л. Линейные краевые задачи для дифференциально-разностных уравнений. М.: Изд-во МАИ, 1992. 190 с.
20. Нобл Б. Применение метода Винера–Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных. М.: ИЛ, 1962. 279 с.

Поступила в редакцию 02.10.2015

Васильев Александр Владимирович, аспирант, кафедра математического анализа, Национальный исследовательский Белгородский государственный университет, 307008, Россия, г. Белгород, ул. Студенческая, 14/1.
E-mail: alexvassel@gmail.com

Васильев Владимир Борисович, д.ф.-м.н., профессор, Липецкий государственный технический университет, 398600, Россия, г. Липецк, ул. Московская, 30.
E-mail: vbv57@inbox.ru

***A. V. Vasil'ev, V. B. Vasil'ev***
**Difference and discrete equations on the real axis and the semiaxis**

*Keywords:* difference equation, discrete equation, symbol, index of factorization, solvability, general solution.

MSC: 39A06, 44A35

We consider general difference equations on the real axis and the semiaxis in terms of the theory of pseudo-differential equations and boundary value problems. It is shown that a principal role for describing the picture of solvability for such equations plays an index of factorization of an elliptic symbol of difference equation with constant coefficients. A form of solution of such equation in the spaces of square integrable functions is described and necessary and sufficient conditions for solvability are obtained. Some discrete analogues of such equations are described.

REFERENCES

1. Gakhov F.D. *Kraevye zadachi* (Boundary value problems), Moskow: Nauka, 1977, 640 p.
2. Muskhelishvili N.I. *Singulyarnye integral'nye uravneniya* (Singular integral equations), Moscow: Nauka, 1968, 511 p.
3. Mikhlin S.G., Prößdorf S. *Singular integral operators*, Berlin–Heidelberg–New York: Springer, 1986, 528 p.
4. Simonenko I.B. *Lokal'nyi metod v teorii invariantnykh otnositel'no sdviga operatorov i ikh ogibayushchikh* (Local method in theory of operators that are invariant under a shift and their envelopes), Rostov-on-Don: TsVVR, 2007, 120 p.
5. Gokhberg I.Ts., Krupnik N.Ya. *Vvedenie v teoriyu odnomernykh singulyarnykh integral'nykh uravnenii* (Introduction to theory of one-dimensional singular integral equations), Chisinau: Shtiintsa, 1973, 426 p.
6. Eskin G.I. *Boundary value problems for elliptic pseudodifferential equations*, Translations of Mathematical Monographs, vol. 52, AMS, 1981, 375 p. Original Russian text published in Eskin G.I. *Kraevye zadachi dlya ellipticheskikh pseudodifferentsial'nykh uravnenii*, Moscow: Nauka, 1973, 232 p.
7. Vasil'ev V.B. *Multiplikatory integralov Fur'e, pseudodifferentsial'nye uravneniya, volnovaya factorizatsiya, kraevye zadachi* (Fourier integral multipliers, pseudodifferential equations, wave factorization, and boundary value problems), Moscow: Editorial URSS, 2010, 135 p.
8. Titchmarsh E. *Introduction to the theory of Fourier integrals*, Oxford: The Clarendon press, 1937, 390 p. Translated under the title *Vvedenie v teoriyu integralov Fur'e*, Moscow–Leningrad: Gostekhizdat, 1948, 479 p.
9. Milne-Thomson L.M. *The calculus of finite differences*, New York: Chelsea Publishing Company, 1981, 558 p.
10. Jordan C. *Calculus of finite differences*, New York: Chelsea Publishing Company, 1965, 654 p.
11. Vasilyev V.B. General boundary value problems for pseudo differential equations and related difference equations, *Advances in difference equations*, 2013, 2013:289, pp. 1–7. DOI: 10.1186/1687-1847-2013-289
12. Vasilyev V.B. On some difference equations of first order, *Tatra Mt. Math. Publ.*, 2013, vol. 54, pp. 165–181.
13. Vasilyev A.V., Vasilyev V.B. Discrete singular operators and equations in a half-space, *Azerbaijan Journal of Mathematics*, 2013, vol. 3, no. 1, pp. 84–93.

14. Vasilyev A.V., Vasilyev V.B. Discrete singular integrals in a half-space, *Current Trends in Analysis and its Applications, Proceedings of the 9th ISAAC Congress*, Krakow, Poland, 2013, pp. 663–670.
15. Vasil'ev A.V., Vasil'ev V.B. Periodic Riemann problem and discrete convolution equations, *Differential Equations*, 2015, vol. 51, no. 5, pp. 652–660. DOI: 10.1134/S0012266115050080
16. Sobolev S.L. *Vvedenie v teoriyu kubaturnykh formul* (Introduction to the theory of cubature formulae), Moscow: Nauka, 1974, 808 p.
17. Dudgeon D., Mersereau R. *Multidimensional digital signal processing*, 1984, Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice Hall, 400 p. Translated under the title *Tsifrovaya obrabotka mnogomernykh signalov*, Moscow: Mir, 1988, 488 p.
18. Kurbatov V.G. *Lineinye differentsial'no-raznostnye uravneniya* (Linear differential-difference equations), Voronezh: Voronezh University Publ., 1990, 167 p.
19. Kamenskii G.A., Skubachevskii A.L. *Lineinye kraevye zadachi dlya differentsial'no-raznostnykh uravnenii* (Linear boundary-value problems for differential-difference equations), Moscow: MAI, 1992, 190 p.
20. Noble B. *Methods based on the Wiener–Hopf technique for the solution of partial differential equations*, London–New York–Paris–Los Angeles: Pergamon Press, 1958, 246 p. Translated under the title *Primenenie metoda Vinera–Khopfa dlya resheniya differentsial'nykh uravnenii v chastnykh proizvodnykh*, Moscow: Inostrannaya Literatura, 1962, 279 p.

Received 02.10.2015

Vasil'ev Aleksandr Vladimirovich, Post-Graduate Student, Department of Mathematical Analysis, National Research Belgorod State University, ul. Studencheskaya, 14/1, Belgorod, 307008, Russia.
E-mail: alexvassel@gmail.com

Vasil'ev Vladimir Borisovich, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Lipetsk State Technical University, ul. Moskovskaya, 30, Lipetsk, 398600, Russia.
E-mail: vbv57@inbox.ru