УДК 517.518.6

© *Л. И. Данилов*

РЕКУРРЕНТНЫЕ И ПОЧТИ АВТОМОРФНЫЕ СЕЧЕНИЯ МНОГОЗНАЧНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

Пусть (U,ρ) — полное метрическое пространство, $(\mathrm{cl}_b\,U,\mathrm{dist})$ — метрическое пространство непустых замкнутых ограниченных подмножеств пространства U с метрикой Хаусдорфа dist. На множестве $M(\mathbb{R},U)$ сильно измеримых функций $f\colon \mathbb{R}\to U$ рассматривается метрика $d^{(\rho)}$, сходимость в которой эквивалентна сходимости по мере Лебега на каждом отрезке $[-l,l]$, $l>0$. Аналогично определяется метрика $d^{(\mathrm{dist})}$ на множестве $M(\mathbb{R},\mathrm{cl}_b\,U)$ сильно измеримых многозначных отображений $f\colon \mathbb{R}\to \mathrm{cl}_b\,U$ (рассматриваемых как функции со значениями в $\mathrm{cl}_b\,U$). Пространства $M(\mathbb{R},U)$ и $M(\mathbb{R},\mathrm{cl}_b\,U)$ являются фазовыми пространствами динамических систем сдвигов. Для многозначного рекуррентного типа Степанова отображения $F\in\mathcal{R}(\mathbb{R},\mathrm{cl}_b\,U)\subseteq M(\mathbb{R},\mathrm{cl}_b\,U)$ и для любых $x_0\in U$ и неубывающей функции $\eta\colon [0,+\infty)\to[0,+\infty)$, для которой $\eta(0)=0$ и $\eta(\xi)>0$ при $\xi>0$, доказано существование гомоморфизма динамических систем $\mathcal{F}\colon \overline{\mathrm{orb}\,F}=\overline{\{F(\cdot+t)\colon t\in\mathbb{R}\}}\to M(\mathbb{R},U)$, для которого $(\mathcal{F}F')(t)\in F'(t)$ и $\rho((\mathcal{F}F')(t),x_0)\leqslant\rho(x_0,F'(t))+\eta\big(\rho(x_0,F'(t))\big)$ при всех $F'\in\overline{\mathrm{orb}\,F}$ и п.в. $t\in\mathbb{R}$. При этом $\mathcal{F}F'$ — рекуррентные типа Степанова функции. Если F — почти автоморфное типа Степанова многозначное отображение, то $\mathcal{F}F$ — почти автоморфная типа Степанова функция.

Ключевые слова: рекуррентная функция, почти автоморфная функция, сечение, многозначное отображение.

В статье исследуется вопрос о существовании рекуррентных типа Степанова сечений многозначных рекуррентных типа Степанова отображений (определенных на $\mathbb{R}$ и принимающих значения в полном метрическом пространстве). Рассматриваются динамические системы сдвигов, фазовые пространства которых — множества сильно измеримых функций и многозначных отображений. Доказано существование гомоморфизмов минимальных динамических систем сдвигов, определяемых рекуррентными типа Степанова многозначными отображениями, в динамическую систему сдвигов (сильно) измеримых функций, при этом многозначным отображениям эти гомоморфизмы ставят в соответствие их (рекуррентные типа Степанова) сечения. Рассматриваются также дополнительные условия, которым такие гомоморфизмы могут удовлетворять. Получены следствия этих утверждений для почти автоморфных многозначных отображений и их сечений.

В § 1 приведены основные результаты статьи. В § 2 эти результаты используются при исследовании многозначных почти автоморфных отображений.

§ 1. Определения, обозначения и основные утверждения

Пусть (U,ρ) — полное метрическое пространство. Через $\overline{X}$ обозначается замыкание множества $X\subseteq U$. Множество $X\subseteq U$ предкомпактно, если $\overline{X}$ — компактное множество.

Множество $T\subseteq\mathbb{R}$ называется относительно плотным, если существует число $a>0$ такое, что $T\cap[t,t+a]\neq\varnothing$ для всех $t\in\mathbb{R}$. Совокупность относительно плотных множеств обозначим через $\mathcal{S}_{\mathrm{rd}}$.

Приведем некоторые определения и простые утверждения из теории (топологических) динамических систем (см., например, [1]).

Динамической системой называется пара (Σ,g^t), где $\Sigma=(\Sigma,\rho_\Sigma)$ — полное метрическое пространство (являющееся *фазовым* пространством динамической системы) и $\{g^t: t\in\mathbb{R}\}$ — однопараметрическая группа преобразований метрического пространства Σ на себя (которая называется *потоком* на Σ), удовлетворяющая следующим условиям:

(1) $g^0\sigma=\sigma$ для всех $\sigma\in\Sigma$;

(2) функция $\mathbb{R}\times\Sigma\ni(t,\sigma)\mapsto g^t\sigma\in\Sigma$ непрерывна по совокупности переменных;

(3) $g^{t_1}g^{t_2}=g^{t_1+t_2}$ (групповое свойство).

При фиксированном $\sigma\in\Sigma$ функция $t\mapsto g^t\sigma$ называется *движением*, $\mathrm{orb}\,\sigma=\{g^t\sigma: t\in\mathbb{R}\}$ — *траектория* движения, $\overline{\mathrm{orb}\,\sigma}$ — ее замыкание в Σ. Движение $t\mapsto g^t\sigma$ *устойчиво по Лагранжу*, если $\overline{\mathrm{orb}\,\sigma}$ — компактное множество. Множество $X\subseteq\Sigma$ *инвариантно*, если $\mathrm{orb}\,x\subseteq X$ для всех $x \in X$. Множество $X \subseteq \Sigma$ называется *минимальным*, если оно непустое, замкнутое, инвариантное и не имеет истинного подмножества, обладающего этими свойствами.

Движение $t \mapsto g^t\sigma$ *рекуррентно*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует число $a = a(\varepsilon) > 0$ такое, что для любых t, $t_1 \in \mathbb{R}$ найдется число $\tau \in [t_1, t_1 + a]$, для которого $\rho_\Sigma(g^t\sigma, g^\tau\sigma) < \varepsilon$. При этом движение $t \mapsto g^t\sigma$ рекуррентно тогда и только тогда, когда оно устойчиво по Лагранжу, и для любого $\varepsilon > 0$ множество чисел $t \in \mathbb{R}$, для которых $\rho_\Sigma(\sigma, g^t\sigma) < \varepsilon$, относительно плотно. Существует связь между минимальными компактными множествами и рекуррентными движениями: если X — минимальное компактное множество и $x \in X$, то движение $t \mapsto g^t x$ рекуррентно, и, наоборот, если $t \mapsto g^t\sigma$ — рекуррентное движение, то $\overline{\operatorname{orb}\sigma}$ — минимальное компактное множество.

Пусть $\mathbf{R}_\Sigma(\sigma)$, $\sigma \in \Sigma$, — множество *возвращающих* последовательностей $\{\tau_j\} \subset \mathbb{R}$, для которых $g^{\tau_j}\sigma \to \sigma$ при $j \to +\infty$, $\mathbf{N}_\Sigma(\sigma)$ — множество *нормальных* последовательностей $\{\tau_j\} \subset \mathbb{R}$, для которых $g^{\tau_j}\sigma \to \sigma'$ при $j \to +\infty$ для некоторого $\sigma' \in \Sigma$. Для всех $\sigma \in \Sigma$ и $t \in \mathbb{R}$ справедливы равенства $\mathbf{R}_\Sigma(g^t\sigma) = \mathbf{R}_\Sigma(\sigma)$, $\mathbf{N}_\Sigma(g^t\sigma) = \mathbf{N}_\Sigma(\sigma)$.

Пусть (Σ, g^t) и $(\Omega, \widetilde{g}^t)$ — динамические системы. Непрерывное отображение $\mathcal{F}\colon \Sigma \to \Omega$ называется *гомоморфизмом динамических систем*, если для всех $\sigma \in \Sigma$ и $t \in \mathbb{R}$ выпоняется равенство $\mathcal{F}(g^t\sigma) = \widetilde{g}^t\mathcal{F}\sigma$. Если отображение $\mathcal{F}$ сюръективно, то гомоморфизм динамических систем называется *эпиморфизмом*. Гомоморфизм динамических систем отображает минимальные множества в минимальные множества. Если Σ и Ω — компактные множества и множество Ω минимально, то любой гомоморфизм динамических систем $\mathcal{F}\colon \Sigma \to \Omega$ является эпиморфизмом. Справедлива простая

Л е м м а 1.1. *Пусть (Σ, g^t) и $(\Omega, \widetilde{g}^t)$ — динамические системы, при этом Σ и Ω — минимальные компактные множества. Тогда для любого гомоморфизма (и, следовательно, эпиморфизма) динамических систем $\mathcal{F}\colon \Sigma \to \Omega$ и любого $\sigma \in \Sigma$*

$$\mathbf{R}_\Sigma(\sigma) \subseteq \mathbf{R}_\Omega(\mathcal{F}\sigma), \quad \mathbf{N}_\Sigma(\sigma) \subseteq \mathbf{N}_\Omega(\mathcal{F}\sigma).$$

И наоборот, если $\sigma \in \Sigma$, $\omega \in \Omega$ и $\mathbf{R}_\Sigma(\sigma) \subseteq \mathbf{R}_\Omega(\omega)$, $\mathbf{N}_\Sigma(\sigma) \subseteq \mathbf{N}_\Omega(\omega)$, то существует эпиморфизм динамических систем $\mathcal{F}\colon \Sigma \to \Omega$ такой, что $\mathcal{F}\sigma = \omega$.

На множестве $C(\mathbb{R}, U)$ непрерывных функций $f\colon \mathbb{R} \to U$ определим метрику

$$d_C^{(\rho)}(f,g) = \sum_{l=1}^{+\infty} 2^{-l} \Big(\max_{\tau \in [-l,l]} \rho(f(\tau), g(\tau)) \Big) \Big(1 + \max_{\tau \in [-l,l]} \rho(f(\tau), g(\tau)) \Big)^{-1}.$$

Полное метрическое пространство $(C(\mathbb{R}, U), d_C^{(\rho)})$ рассматривается как фазовое пространство динамической системы сдвигов: для каждой функции $f \in C(\mathbb{R}, U)$ задается движение $\mathbb{R} \ni t \mapsto$ $\mapsto g_U^t f = f(\cdot + t)$. Пусть $\mathcal{CR}(\mathbb{R}, U)$ — множество *рекуррентных* функций (то есть таких функций f, для которых движение $t \mapsto g_U^t f = f(\cdot + t) \in (C(\mathbb{R}, U), d_C^{(\rho)})$ рекуррентно).

Функция $f\colon T \to U$, определенная почти всюду (п.в.) на измеримом по Лебегу множестве $T \subseteq \mathbb{R}$, *сильно измерима*, если она п.в. совпадает с пределом п.в. сходящейся последовательности простых функций (принимающих конечное число значений на измеримых по Лебегу множествах). Обозначим через $M(\mathbb{R}, U)$ множество сильно измеримых функций $f\colon \mathbb{R} \to U$. Положим

$$d_\infty^{(\rho)}(f,g) = \operatorname*{ess\,sup}_{t \in \mathbb{R}} \rho(f(t), g(t)), \quad f,\, g \in M(\mathbb{R}, U)$$

(допуская значение $+\infty$). Пусть $\big(L^p([-l,l], U), D_{p,l}^{(\rho)}\big)$, $p \geqslant 1$, $l > 0$, — полное метрическое пространство сильно измеримых функций $f\colon [-l,l] \to U$, для которых для некоторого (и, следовательно, для всех) $x_0 \in U$

$$\int_{-l}^{l} \rho^p(f(t), x_0)\, dt < +\infty, \tag{1.1}$$

с метрикой

$$D_{p,l}^{(\rho)}(f,g) = \left(\frac{1}{2l} \int_{-l}^{l} \rho^p(f(\tau), g(\tau))\, d\tau \right)^{\frac{1}{p}};$$

$L^p_{\rm loc}(\mathbb{R},U)$, $p \geqslant 1$, — множество функций $f \in M(\mathbb{R},U)$, для которых неравенство (1.1) выполняется для любого $l > 0$. На множестве $L^p_{\rm loc}(\mathbb{R},U)$ определим метрику

$$d_p^{(\rho)}(f,g) \; = \; \sum_{l=1}^{+\infty} 2^{-l} \, D_{p,\,l}^{(\rho)}\big(f(\cdot|_{[-l,l]}), g(\cdot|_{[-l,l]})\big) \Big(1 + D_{p,\,l}^{(\rho)}\big(f(\cdot|_{[-l,l]}), g(\cdot|_{[-l,l]})\big)\Big)^{-1}.$$

Полное метрическое пространство $\big(L^p_{\rm loc}(\mathbb{R},U), d_p^{(\rho)}\big)$ также рассматривается как фазовое пространство динамической системы сдвигов. Пусть $\mathcal{R}^p(\mathbb{R},U)$ — множество *рекуррентных* (*типа Степанова степени* $p \geqslant 1$) функций $f \in L^p_{\rm loc}(\mathbb{R},U)$, для которых движение

$$\mathbb{R} \ni t \mapsto g^t_U f = f(\cdot + t) \in \big(L^p_{\rm loc}(\mathbb{R},U), D_p^{(\rho)}\big)$$

рекуррентно.

На множестве U (кроме метрики ρ) введем метрику $\rho'(x,y) = \min\{1, \rho(x,y)\}$, $x,\, y \in U$. Метрическое пространство (U,ρ') полное. При этом $M(\mathbb{R},U) = L^1_{\rm loc}(\mathbb{R},(U,\rho'))$ и на множестве $M(\mathbb{R},U)$ определена метрика $d^{(\rho)}(f,g) \doteq d_1^{(\rho')}(f,g)$. Пусть $\mathcal{R}(\mathbb{R},U) \doteq \mathcal{R}^1(\mathbb{R},(U,\rho'))$ — множество *рекуррентных* (*типа Степанова*) функций $f \in M(\mathbb{R},U)$, для которых рекуррентно движение $\mathbb{R} \ni t \mapsto g^t_U f = f(\cdot + t) \in \big(M(\mathbb{R},U), d^{(\rho)}\big) = \big(L^1_{\rm loc}(\mathbb{R},(U,\rho')), d_1^{(\rho')}\big)$. Справедливы вложения $\mathcal{CR}(\mathbb{R},U) \subseteq \mathcal{R}^{p_2}(\mathbb{R},U) \subseteq \mathcal{R}^{p_1}(\mathbb{R},U) \subseteq \mathcal{R}(\mathbb{R},U)$, $1 \leqslant p_1 \leqslant p_2$.

Для каждого $l > 0$ *преобразование Бохнера* функциям $f \in M(\mathbb{R},U)$ ставит в соответствие функции $\mathbb{R} \ni t \mapsto f^B_l(t;\cdot) \in M([-l,l],U)$, для которых $f^B_l(t;\tau) = f(t+\tau)$, $\tau \in [-l,l]$, $t \in \mathbb{R}$. Функция $f \in L^p_{\rm loc}(\mathbb{R},U)$ принадлежит $\mathcal{R}^p(\mathbb{R},U)$ в том и только том случае, если $f^B_l(\cdot;\cdot) \in \mathcal{CR}\big(\mathbb{R}, \big(L^p([-l,l],U), D_{p,\,l}^{(\rho)}\big)\big)$ для некоторого (и, следовательно, для всех) $l > 0$. Функция $f \in M(\mathbb{R},U)$ принадлежит $\mathcal{R}(\mathbb{R},U)$ тогда и только тогда, когда для некоторого (и, следовательно, для всех) $l > 0$ выполняется включение $f^B_l(\cdot;\cdot) \in \mathcal{CR}\big(\mathbb{R}, \big(L^1([-l,l],(U,\rho')), D_{1,\,l}^{(\rho')}\big)\big)$.

Для функций $f \in M(\mathbb{R},U)$ обозначим $\Gamma(f;\varepsilon) = \{t \in \mathbb{R} : d^{(\rho)}(f(\cdot), f(\cdot+\tau)) < \varepsilon\}$, $\varepsilon > 0$. Функция $f \in M(\mathbb{R},U)$ является рекуррентной типа Степанова в том и только том случае, если $\Gamma(f;\varepsilon) \in \mathcal{S}_{\rm rd}$ для всех $\varepsilon > 0$ и для некоторого (и, следовательно, для всех) $l > 0$ множество $\big\{f(\cdot|_{[-l,l]} + \tau) : \tau \in \mathbb{R}\big\}$ предкомпактно в $\big(L^1([-l,l],(U,\rho')), D_{1,\,l}^{(\rho')}\big)$.

Функция $f \in \mathcal{R}(\mathbb{R},U)$ принадлежит $\mathcal{R}^p(\mathbb{R},U)$, $p \geqslant 1$, тогда и только тогда, когда для некоторых (и, следовательно, для всех) $l > 0$ и $x_0 \in U$

$$\lim_{\delta \to +0} \; \sup_{t \in \mathbb{R}} \; \sup_{T \subseteq [t-l,t+l] \,:\, {\rm mes}\, T \leqslant \delta} \; \int_T \rho^p(f(\tau), x_0)\, d\tau = 0, \tag{1.2}$$

где mes — мера Лебега на $\mathbb{R}$ (и рассматриваются измеримые множества T) [2]. Функция $f \in \mathcal{R}(\mathbb{R},U)$ принадлежит $\mathcal{CR}(\mathbb{R},U)$ в том и только том случае, если она равномерно непрерывна.

Пусть $\mathbf{R}(f)$ и $\mathbf{N}(f)$ — множества возвращающих и нормальных последовательностей функции $f \in \mathcal{R}(\mathbb{R},U)$ (для которых $d^{(\rho)}(f(\cdot), f(\cdot+\tau_j)) \to 0$ и $d^{(\rho)}(g(\cdot), f(\cdot+\tau_j)) \to 0$ для какой-либо функции $g \in \mathcal{R}(\mathbb{R},U)$ при $j \to +\infty$). Если $f \in \mathcal{CR}(\mathbb{R},U)$ или $f \in \mathcal{R}^p(\mathbb{R},U)$, то возвращающие и нормальные последовательности можно определять с помощью метрик $d_C^{(\rho)}$ и $d_p^{(\rho)}$ соответственно, при этом функции g также выбираются из пространств $\mathcal{CR}(\mathbb{R},U)$ или $\mathcal{R}^p(\mathbb{R},U)$ (это эквивалентно определению последовательностей из $\mathbf{R}(f)$ и $\mathbf{N}(f)$ с помощью метрики $d^{(\rho)}$).

Если $f \in \mathcal{R}(\mathbb{R},U)$, то $\mathbf{R}(f) = \mathbf{R}(f^B_l)$ и $\mathbf{N}(f) = \mathbf{N}(f^B_l)$ для всех $l > 0$.

Если $f \in \mathcal{R}(\mathbb{R},U)$ и $g \in \mathcal{R}(\mathbb{R},V)$, где $V = (V,\rho_V)$ — некоторое полное метрическое пространство, то $\mathbf{R}(f) \supseteq \mathbf{R}(g)$ тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\varepsilon' > 0$, что $\Gamma(f;\varepsilon) \supseteq \Gamma(g;\varepsilon')$.

Функции $f \in \mathcal{R}(\mathbb{R},U)$ и $g \in \mathcal{R}(\mathbb{R},V)$ *совместно рекуррентны*, если $\Gamma(f;\varepsilon) \cap \Gamma(g;\varepsilon) \in \mathcal{S}_{\rm rd}$ для всех $\varepsilon > 0$. На прямом произведении $M(\mathbb{R},U) \times M(\mathbb{R},V)$ пространств $M(\mathbb{R},U)$ и $M(\mathbb{R},V)$ определим метрику $d^{(\rho,\,\rho_V)}\big((f_1,g_1),(f_2,g_2)\big) = d^{(\rho)}(f_1,f_2) + d^{(\rho_V)}(g_1,g_2)$. Пусть $(M(\mathbb{R},U) \times M(\mathbb{R},V), g^t_{U,\,V})$ — динамическая система сдвигов, для которой $g^t_{U,\,V}(f,g) = (f(\cdot+t), g(\cdot+t))$. Функции $f \in \mathcal{R}(\mathbb{R},U)$ и $g \in \mathcal{R}(\mathbb{R},V)$ совместно рекуррентны тогда и только тогда, когда движение $\mathbb{R} \ni t \mapsto g^t_{U,\,V}(f,g) = (f(\cdot+t), g(\cdot+t)) \in (M(\mathbb{R},U) \times M(\mathbb{R},V), d^{(\rho,\,\rho_V)})$ рекуррентно (в этом случае $\overline{{\rm orb}\,(f,g)}$ — минимальное компактное множество в $(M(\mathbb{R},U) \times M(\mathbb{R},V), d^{(\rho,\rho_V)})$).

Пусть $\mathrm{cl}_b U$ — множество непустых замкнутых ограниченных подмножеств полного метрического пространства (U,ρ). Для $x \in U$ и $Y \in \mathrm{cl}_b U$ обозначим $\rho(x,Y) = \inf_{y \in Y} \rho(x,y)$. На $\mathrm{cl}_b U$ рассматривается метрика Хаусдорфа dist, а также метрика $\mathrm{dist}'(X,Y) = \min\{1, \mathrm{dist}\,(X,Y)\}$, $X,\ Y \in \mathrm{cl}_b U$. Пространства $\mathcal{CR}(\mathbb{R}, \mathrm{cl}_b U)$, $\mathcal{R}^p(\mathbb{R}, \mathrm{cl}_b U)$ и $\mathcal{R}(\mathbb{R}, \mathrm{cl}_b U) \doteq \mathcal{R}^1\big(\mathbb{R}, (\mathrm{cl}_b U, \mathrm{dist}')\big)$ многозначных отображений $\mathbb{R} \to \mathrm{cl}_b U$ определяются как пространства функций со значениями в полном метрическом пространстве $(\mathrm{cl}_b U,\, \mathrm{dist})$.

Функция $f\colon \mathbb{R} \to U$ называется *сечением* многозначного отображения $F \in M(\mathbb{R}, \mathrm{cl}_b U)$, если $f(t) \in F(t)$ при почти всех (п.в.) $t \in \mathbb{R}$.

Т е о р е м а 1.1. *Пусть (U,ρ) — полное метрическое пространство. Предположим, что многозначное отображение $F \in \mathcal{R}(\mathbb{R}, \mathrm{cl}_b U)$ и функция $g \in \mathcal{R}(\mathbb{R}, U)$ совместно рекуррентны. Тогда для любой неубывающей функции $\eta\colon [0,+\infty) \to [0,+\infty)$, для которой $\eta(0) = 0$ и $\eta(\xi) > 0$ при $\xi > 0$, найдется функция $f \in \mathcal{R}(\mathbb{R}, U)$ такая, что $\mathbf{R}(f) \supseteq \mathbf{R}(F) \cap \mathbf{R}(g)$, $\mathbf{N}(f) \supseteq \mathbf{N}(F) \cap \mathbf{N}(g)$, $f(t) \in F(t)$ и $\rho(f(t), g(t)) \leqslant \rho(g(t), F(t)) + \eta\big(\rho(g(t), F(t))\big)$ при п.в. $t \in \mathbb{R}$. Если, кроме того, $F \in \mathcal{R}^p(\mathbb{R}, \mathrm{cl}_b U)$ при некотором $p \geqslant 1$, то также $f \in \mathcal{R}^p(\mathbb{R}, U)$.*

З а м е ч а н и е 1. Если в условиях теоремы 1.1 $d^{(\mathrm{dist})}(F'(\cdot), F(\cdot + \tau_j)) \to 0$, $d^{(\rho)}(g'(\cdot), g(\cdot + \tau_j)) \to 0$ и $d^{(\rho)}(f'(\cdot), f(\cdot + \tau_j)) \to 0$ при $j \to +\infty$ для некоторых $F' \in M(\mathbb{R}, \mathrm{cl}_b U)$ и $g', f' \in M(\mathbb{R}, U)$, то $F' \in \mathcal{R}(\mathbb{R}, \mathrm{cl}_b U)$, $g', f' \in \mathcal{R}(\mathbb{R}, U)$ и $f'(t) \in F'(t)$ при п.в. $t \in \mathbb{R}$. Более того, если η — непрерывная справа функция, то также $\rho(f'(t), g'(t)) \leqslant \rho(g'(t), F'(t)) + \eta\big(\rho(g'(t), F'(t))\big)$ при п.в. $t \in \mathbb{R}$.

Т е о р е м а 1.2. *Пусть (U,ρ) — полное метрическое пространство. Предположим, что многозначное отображение $F \in \mathcal{R}(\mathbb{R}, \mathrm{cl}_b U)$ и функция $g \in \mathcal{R}(\mathbb{R}, U)$ совместно рекуррентны. Тогда для любой неубывающей функции $\eta\colon [0,+\infty) \to [0,+\infty)$, для которой $\eta(0) = 0$ и $\eta(\xi) > 0$ при $\xi > 0$, существует гомоморфизм $\mathcal{F}\colon \overline{\mathrm{orb}\,(F,g)} \to M(\mathbb{R}, U)$ динамических систем сдвигов $\big(\overline{\mathrm{orb}\,(F,g)}, g^t_{\mathrm{cl}_b U, V}\big)$ и $(M(\mathbb{R}, U), g^t_U)$ такой, что любая функция $f' = \mathcal{F}(F', g') \in \mathcal{R}(\mathbb{R}, U)$, где $(F', g') \in \overline{\mathrm{orb}\,(F,g)} \subseteq M(\mathbb{R}, \mathrm{cl}_b U) \times M(\mathbb{R}, U)$, является сечением многозначного отображения F' и $\rho(f'(t), g'(t)) \leqslant \rho(g'(t), F'(t)) + \eta\big(\rho(g'(t), F'(t))\big)$ при п.в. $t \in \mathbb{R}$. При этом гомоморфизм $\mathcal{F}$ является эпиморфизмом динамических систем $\big(\overline{\mathrm{orb}\,(F,g)}, g^t_{\mathrm{cl}_b U, V}\big)$ и $\big(\overline{\mathrm{orb}\,\mathcal{F}(F,g)}, g^t_U\big)$.*

Теорема 1.2 непосредственно следует из теоремы 1.1, леммы 1.1 и замечания 1. Теоремы 1.1 и 1.2 усиливают теорему 1 из [3] и ее более слабый вариант в [2]. Доказательство теоремы 1.1 существенно опирается на приводимую далее теорему 1.4 и во многом следует доказательству теоремы 1 из [3]. Следующая теорема является простым следствием теоремы 1.2.

Т е о р е м а 1.3. *Пусть (U,ρ) — полное метрическое пространство, $x_0 \in U$ и $F \in \mathcal{R}(\mathbb{R}, \mathrm{cl}_b U)$. Тогда для любой неубывающей функции $\eta\colon [0,+\infty) \to [0,+\infty)$, для которой $\eta(0) = 0$ и $\eta(\xi) > 0$ при $\xi > 0$, существует гомоморфизм $\mathcal{F}\colon \overline{\mathrm{orb}\,F} \to M(\mathbb{R}, U)$ динамических систем сдвигов $\big(\overline{\mathrm{orb}\,F}, g^t_{\mathrm{cl}_b U}\big)$ и $(M(\mathbb{R}, U), g^t_U)$ такой, что любая функция $f' = \mathcal{F}F' \in \mathcal{R}(\mathbb{R}, U)$, где $F' \in \overline{\mathrm{orb}\,F} \subseteq M(\mathbb{R}, \mathrm{cl}_b U)$, является сечением многозначного отображения F' и $\rho(f'(t), x_0) \leqslant \rho(x_0, F'(t)) + \eta\big(\rho(x_0, F'(t))\big)$ при п.в. $t \in \mathbb{R}$. Более того, гомоморфизм $\mathcal{F}$ является эпиморфизмом динамических систем $\big(\overline{\mathrm{orb}\,F}, g^t_{\mathrm{cl}_b U}\big)$ и $\big(\overline{\mathrm{orb}\,\mathcal{F}F}, g^t_U\big)$.*

Пусть $\mathcal{N}_{\mathrm{rd}}$ — множество многозначных отображений $(0,+\infty) \ni \varepsilon \to \Gamma(\varepsilon) \in \mathcal{S}_{\mathrm{rd}}$ таких, что $0 \in \Gamma(\varepsilon_1) \subseteq \Gamma(\varepsilon_2)$ для всех $\varepsilon_1 > 0$ и $\varepsilon_2 \geqslant \varepsilon_1$. Обозначим через $\mathbf{R}_\Gamma$, где $\Gamma \in \mathcal{N}_{\mathrm{rd}}$, совокупность последовательностей $\{\tau_j\} \subset \mathbb{R}$ таких, что для любого $\varepsilon > 0$ существует число $j_0 \in \mathbb{N}$ такое, что $\tau_j \in \Gamma(\varepsilon)$ при всех $j \geqslant j_0$. Если $f \in \mathcal{R}(\mathbb{R}, U)$, то $\mathbf{R}(f) \supseteq \mathbf{R}_\Gamma$ тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ найдется число $\varepsilon' > 0$, для которого $\Gamma(f;\varepsilon) \supseteq \Gamma(\varepsilon')$.

Для многозначного отображения $\Gamma \in \mathcal{N}_{\mathrm{rd}}$ и произвольной (непустой) совокупности $\mathbf{N}$ последовательностей $\{\tau_j\} \subset \mathbb{R}$ обозначим через $\mathcal{CR}_{\Gamma;\mathbf{N}}(\mathbb{R}, U)$, $\mathcal{R}^p_{\Gamma;\mathbf{N}}(\mathbb{R}, U)$, $p \geqslant 1$, и $\mathcal{R}_{\Gamma;\mathbf{N}}(\mathbb{R}, U)$ множества функций f из $\mathcal{CR}(\mathbb{R}, U)$, $\mathcal{R}^p(\mathbb{R}, U)$ и $\mathcal{R}(\mathbb{R}, U)$ соответственно, для которых $\mathbf{R}(f) \supseteq \mathbf{R}_\Gamma$ и $\mathbf{N}(f) \supseteq \mathbf{N}$.

Для измеримых по Лебегу множеств $T \subseteq \mathbb{R}$ обозначим

$$\varkappa(T) = \sup_{\xi \in \mathbb{R}} \mathrm{mes}\,[\xi, \xi+1] \bigcap T.$$

Пусть $\mathcal{R}_{\Gamma;\mathbf{N}}\{\mathbb{R}\}$ — совокупность множеств $T \subseteq \mathbb{R}$, характеристические функции χ_T которых принадлежат $\mathcal{R}^1_{\Gamma;\mathbf{N}}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ [1]. Для множеств T_1, $T_2 \in \mathcal{R}_{\Gamma;\mathbf{N}}\{\mathbb{R}\}$ множества $\mathbb{R}\setminus T_1$, $T_1 \cap T_2$, $T_1 \cup T_2$ и $T_1 \setminus T_2$ также принадлежат $\mathcal{R}_{\Gamma;\mathbf{N}}\{\mathbb{R}\}$. Если $T_j \in \mathcal{R}_{\Gamma;\mathbf{N}}\{\mathbb{R}\}$, $j \in \mathbb{N}$, и $\sum\limits_{j\in\mathbb{N}} \varkappa(T_j) < +\infty$, то $\bigcup\limits_{j\in\mathbb{N}} T_j \in \mathcal{R}_{\Gamma;\mathbf{N}}\{\mathbb{R}\}$. Через $\mathfrak{M}_{\Gamma;\mathbf{N}}$ обозначим совокупность последовательностей $\{T_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ попарно непересекающихся множеств $T_j \in \mathcal{R}_{\Gamma;\mathbf{N}}\{\mathbb{R}\}$ таких, что $\varkappa\Bigl(\mathbb{R}\setminus \bigcup\limits_{j\leqslant J} T_j\Bigr) \to 0$ при $J \to +\infty$ (тогда $\operatorname{mes}\Bigl(\mathbb{R}\setminus \bigcup\limits_{j\in\mathbb{N}} T_j\Bigr) = 0$). Для последовательностей $\{T_j\} \in \mathfrak{M}_{\Gamma;\mathbf{N}}$ и точек $x_j \in U$, $j \in \mathbb{N}$, определим *элементарные рекуррентные* (типа Степанова) функции $\mathbb{R} \ni t \mapsto \mathfrak{f}^{(e)}(\{T_j\},\{x_j\};t) \in U$, принимающие значения x_j при $t \in T_j$. При этом $\mathfrak{f}^{(e)}(\{T_j\},\{x_j\};\cdot) \in \mathcal{R}_{\Gamma;\mathbf{N}}(\mathbb{R},U)$. Пусть $\mathcal{E}R_{\Gamma;\mathbf{N}}(\mathbb{R},U)$ — множество элементарных рекуррентных функций $\mathfrak{f}^{(e)}(\{T_j\},\{x_j\};\cdot)$, для которых $\{T_j\} \in \mathfrak{M}_{\Gamma;\mathbf{N}}$. Через $\mathcal{P}R_{\Gamma;\mathbf{N}}(\mathbb{R},U)$ обозначим множество *простых рекуррентных* (типа Степанова) функций $\mathfrak{f}^{(e)}(\{T_j\},\{x_j\};\cdot) \in \mathcal{E}R_{\Gamma;\mathbf{N}}(\mathbb{R},U)$ таких, что $\varkappa(T_j) > 0$ только для конечного числа множеств T_j.

Т е о р е м а 1.4. *Функция $f \in M(\mathbb{R},U)$ принадлежит множеству $\mathcal{R}_{\Gamma;\mathbf{N}}(\mathbb{R},U)$ тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ найдется функция $f_\varepsilon \in \mathcal{E}R_{\Gamma;\mathbf{N}}(\mathbb{R},U)$ такая, что $d^{(\rho)}_\infty(f,f_\varepsilon) < \varepsilon$.*

Из теоремы 1.4, в частности, следует, что для любой функции $f \in \mathcal{R}(\mathbb{R},U)$ и любого числа $\varepsilon > 0$ существует элементарная рекуррентная (типа Степанова) функция $f_\varepsilon \in \mathcal{E}R_{\Gamma(f;\cdot);\mathbf{N}(f)}(\mathbb{R},U)$ (для которой $\mathbf{R}(f_\varepsilon) \supseteq \mathbf{R}(f)$ и $\mathbf{N}(f_\varepsilon) \supseteq \mathbf{N}(f)$) такая, что $d^{(\rho)}_\infty(f,f_\varepsilon) < \varepsilon$.

Функция $f \in M(\mathbb{R},\mathbb{R})$ обладает *σ-свойством* (см. [4]), если $\varkappa(\{t \in \mathbb{R} : |f(t)| < \delta\}) \to 0$ при $\delta \to +0$. Справедлива простая

Л е м м а 1.2. *Если функция $f \in \mathcal{R}_{\Gamma;\mathbf{N}}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ обладает σ-свойством, то*

$$\{t \in \mathbb{R}\colon f(t) \leqslant 0\} \in \mathcal{R}_{\Gamma;\mathbf{N}}\{\mathbb{R}\}.$$

Т е о р е м а 1.5. *Для любой функции $f \in \mathcal{R}_{\Gamma;\mathbf{N}}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ и любого $\varepsilon > 0$ существует множество $T_\varepsilon \in \mathcal{R}_{\Gamma;\mathbf{N}}\{\mathbb{R}\}$ такое, что $f(t) < \varepsilon$ при всех $t \in T_\varepsilon$ и $f(t) > -\varepsilon$ при п.в. $t \in \mathbb{R}\setminus T_\varepsilon$. Если $f \in \mathcal{C}R_{\Gamma;\mathbf{N}}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, то множество T_ε можно выбрать замкнутым.*

Теорема 1.5 вытекает из леммы 1.2 и теорем 20 и 21 из [3], в которых для любой функции $f \in \mathcal{R}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ рассматривался гомоморфизм $\mathcal{F}$ динамической системы $\bigl(\overline{\operatorname{orb} f}, g^t_{\mathbb{R}}\bigr)$ в некоторую вспомогательную динамическую систему $(\mathfrak{R},\mathfrak{g}^t)$ и для любого $\varepsilon > 0$ определялась некоторая непрерывная вещественнозначная функция $\mathfrak{F}_\varepsilon$ на (минимальном) компактном множестве $\mathcal{F}\bigl(\overline{\operatorname{orb} f}\bigr) \subseteq \mathfrak{R}$ такая, что $|\mathfrak{F}_\varepsilon(\mathfrak{r})| < \frac{\varepsilon}{2}$ при всех $\mathfrak{r} \in \mathcal{F}\bigl(\overline{\operatorname{orb} f}\bigr)$ и функция $\mathbb{R} \ni t \mapsto g_\varepsilon(t) \doteq \doteq f(t) + \mathfrak{F}_\varepsilon\bigl(\mathcal{F}(f(\cdot + t))\bigr)$ (принадлежащая $\mathcal{R}(\mathbb{R},\mathbb{R})$) обладает σ-свойством. Действительно, в этом случае для функции $f \in \mathcal{R}_{\Gamma;\mathbf{N}}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ также $g_\varepsilon \in \mathcal{R}_{\Gamma;\mathbf{N}}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $\varepsilon > 0$, и достаточно положить $T_\varepsilon = \{t \in \mathbb{R} : g_\varepsilon(t) \leqslant 0\}$.

Теорема 1.4 является следствием теоремы 1.5 и существования точек $x_j \in U$, $j \in \mathbb{N}$, таких, что $\varkappa\{t \in \mathbb{R} : \rho(f(t),x_j) > \varepsilon$ для всех $j = 1,\dots,N\} \to 0$ при $N \to +\infty$ для любого $\varepsilon > 0$ (см. также доказательство теоремы 4 в [2]).

Теорема 1.4 является ключевым утверждением при доказательстве существования рекуррентных типа Степанова сечений $f \in \mathcal{R}_{\Gamma;\mathbf{N}}(\mathbb{R},U)$ многозначных рекуррентных типа Степанова отображений $F \in \mathcal{R}_{\Gamma;\mathbf{N}}(\mathbb{R},\operatorname{cl}_b U)$. Следующая теорема является вариантом теоремы 1.4.

Т е о р е м а 1.6. *Функция $f \in M(\mathbb{R},U)$ принадлежит множеству $\mathcal{R}_{\Gamma;\mathbf{N}}(\mathbb{R},U)$ и принимает при п.в. $t \in \mathbb{R}$ значения из некоторого компактного множества $K \subseteq U$ тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ найдется функция $f_\varepsilon \in \mathcal{P}R_{\Gamma;\mathbf{N}}(\mathbb{R},U)$ такая, что $d^{(\rho)}_\infty(f,f_\varepsilon) < \varepsilon$.*

С помощью теоремы 1.4 доказываются также следующие две теоремы. Доказательство этих теорем аналогично доказательству соответствующих утверждений в [3] и [5], которые являются их частными случаями.

[1] На $\mathbb{R}$ рассматривается естественная метрика $\rho(x,y) = |x-y|$, x, $y \in \mathbb{R}$.

Т е о р е м а 1.7. *Пусть $T \in \mathcal{R}_{\Gamma;\mathbf{N}}\{\mathbb{R}\}$, при этом $\varkappa(T) > 0$ и $\varkappa(\mathbb{R}\setminus T) > 0$. Тогда для любого $\delta > 0$ найдутся замкнутое множество $K \in \mathcal{R}_{\Gamma;\mathbf{N}}\{\mathbb{R}\}$ и открытое множество $\mathcal{O} \in \mathcal{R}_{\Gamma;\mathbf{N}}\{\mathbb{R}\}$ такие, что $K \subseteq T \subseteq \mathcal{O}$ и $\varkappa(\mathcal{O}\setminus K) < \delta$.*

В теореме 1.8 (и в теореме 2.3 из § 2) в качестве полного метрического пространства (U,ρ) рассматривается (вещественное) банахово пространство $(\mathcal{B}, \|\cdot\|)$, $\rho(x,y) = \|x-y\|$, $x,\, y \in \mathcal{B}$.

Т е о р е м а 1.8. *Пусть $f \in \mathcal{R}_{\Gamma;\mathbf{N}}(\mathbb{R},\mathcal{B})$. Тогда для любого $\delta > 0$ существуют множество $T \in \mathcal{R}_{\Gamma;\mathbf{N}}\{\mathbb{R}\}$ и функция $\mathcal{F} \in \mathcal{C}R_{\Gamma;\mathbf{N}}(\mathbb{R},\mathcal{B})$ такие, что $\varkappa(\mathbb{R}\setminus T) < \delta$ и $f(t) = \mathcal{F}(t)$ при всех $t \in T$. Если функция f не является п.в. постоянной, то множество T можно выбрать замкнутым.*

§ 2. Почти автоморфные сечения многозначных отображений

Пусть $AA(\mathbb{R},U)$ — множество *почти автоморфных* функций $f\colon \mathbb{R}\to U$, то есть таких непрерывных функций f, что для любой последовательности $\{\tau_j'\} \subset \mathbb{R}$ найдется подпоследовательность $\{\tau_j\}$ такая, что для всех $t \in \mathbb{R}$ существует предел

$$g(t) \;=\; \lim_{j\to+\infty} f(t+\tau_j) \tag{2.1}$$

и при этом $f(t) \;=\; \lim\limits_{j\to+\infty} g(t-\tau_j)$. Для любой функции $f \in AA(\mathbb{R},U)$ множество $\{f(t) : t \in \mathbb{R}\}$ предкомпактно в (U,ρ). Через $AA_u(\mathbb{R},U)$ обозначим подмножество множества $AA(\mathbb{R},U)$, состоящее из функций f, для которых (для любой последовательности $\{\tau_j'\} \subset \mathbb{R}$ существует подпоследовательность $\{\tau_j\}$ такая, что) предел в (2.1) является непрерывной функцией. Последнее эквивалентно тому, что предел (2.1) является равномерным на каждом отрезке $[-l,l]$, $l > 0$, а также эквивалентно равномерной непрерывности функции f (см., например, [6]).

Для счетного (или конечного) множества $\Lambda = \{\lambda_s \in \mathbb{R} : s \in \mathbb{N}\}$ обозначим через $\mathfrak{R}(\Lambda)$ совокупность последовательностей $\{\tau_j\} \subset \mathbb{R}$, для которых $e^{\,i\lambda_s\tau_j} \to 1$ при $j \to +\infty$ для всех $s \in \mathbb{N}$ (где $i^2 = -1$). Функция $f \in C(\mathbb{R},U)$ принадлежит множеству $L(\mathbb{R},U)$ *почти периодических по Левитану* функций (см. [7]), если существует счетное множество $\Lambda \subset \mathbb{R}$ такое, что для любого $l > 0$ и любой последовательности $\{\tau_j\} \in \mathfrak{R}(\Lambda)$

$$\max_{\tau\,\in\,[-l,l]} \rho(f(t), f(t+\tau_j)) \to 0$$

при $j \to +\infty$. Справедливо равенство (см. [8])

$$AA_u(\mathbb{R},U) \;=\; \mathcal{C}R(\mathbb{R},U) \bigcap L(\mathbb{R},U). \tag{2.2}$$

Функция $f \in L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R},U)$, $p \geqslant 1$, принадлежит множеству $AS^p(\mathbb{R},U)$ *почти автоморфных типа Степанова* функций *степени* p, если для некоторого (и, следовательно, для всех) $l > 0$ имеет место включение $f^B_l(\cdot;\cdot) \in AA\big(\mathbb{R}, (L^p([-l,l],U), D^{(\rho)}_{p,\,l})\big)$. Более того, в этом случае выполняются также включения

$$f^B_l(\cdot;\cdot) \in AA_u\big(\mathbb{R}, (L^p([-l,l],U), D^{(\rho)}_{p,\,l})\big) \tag{2.3}$$

(см. [9]), поэтому $AS^p(\mathbb{R},U) \subseteq \mathcal{R}^p(\mathbb{R},U)$. Обозначим через $AS(\mathbb{R},U) \doteq AS^1(\mathbb{R},(U,\rho'))$ множество *почти автоморфных типа Степанова* функций. Функция $f \in M(\mathbb{R},U)$ принадлежит $AA(\mathbb{R},U)$ тогда и только тогда, когда для некоторого (и, следовательно, для всех) $l > 0$ выполняется включение $f^B_l(\cdot;\cdot) \in AA\big(\mathbb{R}, \big(L^1([-l,l],(U,\rho')), D^{(\rho')}_{1,\,l}\big)\big)$, что равносильно условиям

$$f^B_l(\cdot;\cdot) \in AA_u\big(\mathbb{R}, \big(L^1([-l,l],(U,\rho')), D^{(\rho')}_{1,\,l}\big)\big). \tag{2.4}$$

Следовательно, $AS(\mathbb{R},U) \subseteq \mathcal{R}(\mathbb{R},U)$. Справедливы вложения $AA_u(\mathbb{R},U) \subseteq AA(\mathbb{R},U) \subseteq$ $\subseteq AS^{p_2}(\mathbb{R},U) \subseteq AS^{p_1}(\mathbb{R},U) \subseteq AS(\mathbb{R},U)$, $1 \leqslant p_1 \leqslant p_2$ (см. [9]).

Функция $f \in AS(\mathbb{R},U)$ принадлежит множеству $AS^p(\mathbb{R},U)$, $p \geqslant 1$, в том и только том случае, если выполняется равенство (1.2). Функция $f \in AS(\mathbb{R},U)$ принадлежит $AA_u(\mathbb{R},U)$ тогда и только тогда, когда она равномерно непрерывна.

Из (2.2), (2.3) и (2.4) следует, что функции из $AA_u(\mathbb{R},U)$, $AS^p(\mathbb{R},U)$ и $AS(\mathbb{R},U)$ — это те и только те функции f из $\mathcal{C}R(\mathbb{R},U)$, $\mathcal{R}^p(\mathbb{R},U)$ и $\mathcal{R}(\mathbb{R},U)$ соответственно, для которых $\mathbf{R}(f) \supseteq \mathfrak{R}(\Lambda)$ для некоторых счетных множеств $\Lambda \subset \mathbb{R}$. Поэтому справедлива простая

Л е м м а 2.1. *Если* $f \in \mathcal{R}(\mathbb{R}, U)$, $g \in AS(\mathbb{R}, U)$ *и* $\mathbf{R}(f) \supseteq \mathbf{R}(g)$, *то* $f \in AS(\mathbb{R}, U)$.

Из леммы 2.1 следует, что результаты, приведенные в предыдущем разделе для рекуррентных типа Степанова функций и многозначных отображений, выполняются также для функций и многозначных отображений, которые являются почти автоморфными типа Степанова.

Пусть $EAS(\mathbb{R}, U)$ — множество *элементарных почти автоморфных* (*типа Степанова*) функций $\mathfrak{f}^{(e)}(\{T_j\}, \{x_j\}; \cdot)$, определенных (как и выше) для попарно непересекающихся множеств $T_j \subseteq \mathbb{R}$, для которых $\chi_{T_j} \in AS^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, и точек $x_j \in U$ (при условии, что $\varkappa\Big(\mathbb{R} \setminus \bigcup\limits_{j \geqslant J} T_j\Big) \to 0$ при $J \to +\infty$), $j \in \mathbb{N}$. Имеет место вложение $EAS(\mathbb{R}, U) \subseteq AS(\mathbb{R}, U)$. При этом в случае, когда рассматриваются множества $T_j \subseteq \mathbb{R}$, для которых $\chi_{T_j} \in \mathcal{R}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, элементарные функции $\mathfrak{f}^{(e)}(\{T_j\}, \{x_j\}; \cdot)$ могут не быть почти рекуррентными (типа Степанова), если не требовать совместной рекуррентности функций χ_{T_j}, $j = 1, \ldots, N$, для всех $N \in \mathbb{N}$ (совместная рекуррентность этих функций имеет место в случае $\mathfrak{f}^{(e)}(\{T_j\}, \{x_j\}; \cdot) \in \mathcal{E}R_{\Gamma;\mathbf{N}}(\mathbb{R}, U)$).

Т е о р е м а 2.1. *Функция* $f \in M(\mathbb{R}, U)$ *принадлежит множеству* $AS(\mathbb{R}, U)$ *тогда и только тогда, когда для любого* $\varepsilon > 0$ *найдется функция* $f_\varepsilon \in EAS(\mathbb{R}, U)$ *такая, что* $d_\infty^{(\rho)}(f, f_\varepsilon) < \varepsilon$. *При этом для заданной функции* $f \in AS(\mathbb{R}, U)$ *функции* $f_\varepsilon = \mathfrak{f}^{(e)}(\{T_j^{(\varepsilon)}\}, \{x_j^{(\varepsilon)}\}; \cdot) \in EAS(\mathbb{R}, U)$ *можно выбирать так, что* $\mathbf{R}(\chi_{T_j^{(\varepsilon)}}) \supseteq \mathbf{R}(f)$ *и* $\mathbf{N}(\chi_{T_j^{(\varepsilon)}}) \supseteq \mathbf{N}(f)$ *при всех* $j \in \mathbb{N}$ (*и* $\varepsilon > 0$).

Т е о р е м а 2.2. *Пусть* (U, ρ) — *полное метрическое пространство,* $F \in AS(\mathbb{R}, \mathrm{cl}_b U)$ *и* $g \in AS(\mathbb{R}, U)$. *Тогда для любой неубывающей функции* $\eta\colon [0, +\infty) \to [0, +\infty)$, *для которой* $\eta(0) = 0$ *и* $\eta(\xi) > 0$ *при* $\xi > 0$, *найдется функция* $f \in AS(\mathbb{R}, U)$ *такая, что* $\mathbf{R}(f) \supseteq \mathbf{R}(F) \cap \mathbf{R}(g)$, $\mathbf{N}(f) \supseteq \mathbf{N}(F) \cap \mathbf{N}(g)$, $f(t) \in F(t)$ *и* $\rho(f(t), g(t)) \leqslant \rho(g(t), F(t)) + \eta\big(\rho(g(t), F(t))\big)$ *при п.в.* $t \in \mathbb{R}$. *Если, кроме того,* $F \in AS^p(\mathbb{R}, \mathrm{cl}_b U)$ *для некоторого* $p \geqslant 1$, *то также* $f \in AS^p(\mathbb{R}, U)$.

Теоремы 2.1 и 2.2 следуют из теорем 1.4 и 1.1 (а также из леммы 2.1). Следующая теорема вытекает из теоремы 1.8.

Т е о р е м а 2.3. *Пусть* $\mathcal{B} = (\mathcal{B}, \|\cdot\|)$ — (*вещественное*) *банахово пространство,* $f \in AS(\mathbb{R}, \mathcal{B})$. *Тогда для любого* $\delta > 0$ *существуют множество* $T \subseteq \mathbb{R}$, *для которого* $\chi_T \in AS^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, *и функция* $\mathcal{F} \in AA_u(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ *такие, что* $\varkappa(\mathbb{R} \setminus T) < \delta$, $\mathbf{R}(\chi_T) \cap \mathbf{R}(\mathcal{F}) \supseteq \mathbf{R}(f)$, $\mathbf{N}(\chi_T) \cap \mathbf{N}(\mathcal{F}) \supseteq \mathbf{N}(f)$ *и* $f(t) = \mathcal{F}(t)$ *при всех* $t \in T$. *Если функция* f *не является п.в. постоянной, то множество* T *можно выбрать замкнутым.*

Для функций $f \in AA(\mathbb{R}, U)$ множества $\mathbf{R}(f)$ и $\mathbf{N}(f)$ определяются как для функций из $AS(\mathbb{R}, U)$ (или $AS^1(\mathbb{R}, U)$).

С л е д с т в и е 2.1. *Пусть* $f \in AA(\mathbb{R}, \mathcal{B})$. *Тогда для любого* $\delta > 0$ *существуют замкнутое множество* $T \subseteq \mathbb{R}$, *для которого* $\chi_T \in AS^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, *и функция* $\mathcal{F} \in AA_u(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ *такие, что* $\varkappa(\mathbb{R} \setminus T) < \delta$, $\mathbf{R}(\chi_T) \cap \mathbf{R}(\mathcal{F}) \supseteq \mathbf{R}(f)$, $\mathbf{N}(\chi_T) \cap \mathbf{N}(\mathcal{F}) \supseteq \mathbf{N}(f)$ *и* $f(t) = \mathcal{F}(t)$ *при всех* $t \in T$.

Список литературы

1. Немыцкий В.В., Степанов В.В. Качественная теория дифференциальных уравнений. М.–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2004. 456 с.
2. Данилов Л.И. Рекуррентные и почти рекуррентные многозначные отображения и их сечения // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2011. Вып. 2. С. 19–51.
3. Данилов Л.И. Рекуррентные и почти рекуррентные многозначные отображения и их сечения. III // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2014. Вып. 4. С. 25–52.
4. Крейн М.Г., Нудельман А.А. Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи. Идеи и проблемы П.Л. Чебышёва и А.А. Маркова и их дальнейшее развитие. М.: Наука, 1973. 551 с.
5. Данилов Л.И. Равномерная аппроксимация рекуррентных и почти рекуррентных функций // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2013. Вып. 4. С. 36–54.

6. N'Guérékata G.M. Comments on almost automorphic and almost periodic functions in Banach spaces // Far East Journal of Mathematical Sciences. 2005. Vol. 17. № 3. P. 337–344.
7. Левитан Б.М. Почти-периодические функции. М.: ГИТТЛ, 1953. 396 с.
8. Болес Басит Р. Связь между почти периодическими функциями Левитана и почти автоморфными функциями // Вестник Московского университета. Сер. Матем. Мех. 1971. Т. 24. № 4. С. 11–15.
9. N'Guérékata G.M., Pankov A. Stepanov-like almost automorphic functions and monotone evolution equations // Nonlinear Analysis. 2008. Vol. 68. P. 2658–2667.

Поступила в редакцию 10.09.2015

Данилов Леонид Иванович, к. ф.-м. н., старший научный сотрудник, Физико-технический институт УрО РАН, 426001, Россия, г. Ижевск, ул. Кирова, 132.
E-mail: lidanilov@mail.ru

L. I. Danilov
Recurrent and almost automorphic selections of multivalued mappings

Keywords: recurrent function, almost automorphic function, selector, multivalued mapping.

MSC: 42A75, 54C65

Let (U,ρ) be a complete metric space and $(\mathrm{cl}_b\,U,\mathrm{dist})$ be the metric space of nonempty closed bounded subsets of the space U with the Hausdorff metric dist. On the set $M(\mathbb{R},U)$ of strongly measurable functions $f\colon\mathbb{R}\to U$ we introduce the metric $d^{(\rho)}$ such that the convergence in this metric is equivalent to the convergence in Lebesgue measure on every closed interval $[-l,l]$, $l>0$. The metric $d^{(\mathrm{dist})}$ on the set $M(\mathbb{R},\mathrm{cl}_b\,U)$ of strongly measurable multivalued mappings $f\colon\mathbb{R}\to\mathrm{cl}_b\,U$ (which are considered as functions with the range in $\mathrm{cl}_b\,U$) is defined by analogy with the metric $d^{(\rho)}$. The spaces $M(\mathbb{R},U)$ and $M(\mathbb{R},\mathrm{cl}_b\,U)$ are the phase spaces of the dynamical systems of translations. For a multivalued Stepanov-like recurrent mapping $F\in\mathcal{R}(\mathbb{R},\mathrm{cl}_b\,U)\subseteq M(\mathbb{R},\mathrm{cl}_b\,U)$ and for any $x_0\in U$ and any nondecreasing function $\eta\colon[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ for which $\eta(0)=0$ and $\eta(\xi)>0$ for $\xi>0$, it is proved that there exists a homomorphism of dynamical systems $\mathcal{F}:\overline{\mathrm{orb}\,F}=\overline{\{F(\cdot+t):t\in\mathbb{R}\}}\to M(\mathbb{R},U)$ such that $(\mathcal{F}F')(t)\in F'(t)$ and $\rho((\mathcal{F}F')(t),x_0)\leqslant\rho(x_0,F'(t))+\eta\bigl(\rho(x_0,F'(t))\bigr)$ for all $F'\in\overline{\mathrm{orb}\,F}$ and a.e. $t\in\mathbb{R}$. Furthermore, the functions $\mathcal{F}F'$ are Stepanov-like recurrent. If the multivalued mapping F is Stepanov-like almost automorphic, then the function $\mathcal{F}F$ is Stepanov-like almost automorphic as well.

REFERENCES

1. Nemytskii V.V., Stepanov V.V. *Kachestvennaya teoriya differentsial'nykh uravnenii* (Qualitative theory of differential equations), Moscow–Izhevsk: RCD, 2004, 456 p.
2. Danilov L.I. Recurrent and almost recurrent multivalued maps and their selections, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2011, no. 2, pp. 19–51 (in Russian).
3. Danilov L.I. Recurrent and almost recurrent multivalued maps and their selections. III, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2014, no. 4, pp. 25–52 (in Russian).
4. Krein M.G., Nudel'man A.A. *Problema momentov Markova i ekstremal'nye zadachi. Idei i problemy P.L. Chebysheva i A.A. Markova i ikh dal'neishee razvitie* (The Markov moment problem and extremal problems. Ideas and problems of P.L. Chebyshev and A.A. Markov and their further development), Moscow: Nauka, 1973, 551 p.
5. Danilov L.I. The uniform approximation of recurrent functions and almost recurrent functions, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2013, no. 4, pp. 36–54 (in Russian).
6. N'Guérékata G.M. Comments on almost automorphic and almost periodic functions in Banach spaces, *Far East Journal of Mathematical Sciences*, 2005, vol. 17, no. 3, pp. 337–344.
7. Levitan B.M. *Pochti periodicheskie funktsii* (Almost periodic functions), Moscow: GITTL, 1953, 396 p.
8. Boles Basit R. The relationship between almost periodic Levitan functions and almost automorphic functions, *Moscow Univ. Math. Bull.*, 1973, vol. 26, no. 3–4, pp. 74–77.
9. N'Guérékata G.M., Pankov A. Stepanov-like almost automorphic functions and monotone evolution equations, *Nonlinear Analysis*, 2008, vol. 68, pp. 2658–2667.

Received 10.09.2015

Danilov Leonid Ivanovich, Candidate of Physics and Mathematics, Senior Researcher, Physical Technical Institute of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. Kirova, 132, Izhevsk, 426001, Russia.
E-mail: lidanilov@mail.ru