УДК 517.977

© ***Я. Ю. Ларина***

СТАТИСТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ С ИМПУЛЬСНЫМ ВОЗДЕЙСТВИЕМ

Рассматриваются управляемые системы, подверженные импульсному воздействию в фиксированные моменты времени. Получены оценки таких статистических характеристик, как верхняя и нижняя относительные частоты попадания решения системы в заранее заданное множество. Также получены условия, при которых множество является статистически инвариантным или статистически слабо инвариантным относительно управляемой системы с импульсным воздействием.

Ключевые слова: управляемые системы, множество достижимости, дифференциальные включения, статистические характеристики.

Введение

Данная работа является продолжением [1], в которой исследуются условия положительной инвариантности, равномерной устойчивости по Ляпунову и равномерной асимптотической устойчивости заданного множества $\mathfrak{M} \doteq \{(t,x) \in [t_0,\infty) \times \mathbb{R}^n : x \in M(t)\}$ относительно управляемой системы с импульсным воздействием. Здесь исследуются такие статистические характеристики, как верхняя и нижняя относительные частоты попадания решения данной системы в множество $\mathfrak{M}$. Пусть $x(t,x_0)$ — решение системы, тогда $\operatorname{freq}(x)$ — относительная частота попадания этого решения в множество $\mathfrak{M}$, определяется как предел при $\vartheta \to \infty$ отношения меры Лебега тех точек отрезка $[0,\vartheta]$, для которых решение $x(t,x_0)$ содержится в множестве $M(t)$, к длине этого отрезка. Если такого предела не существует, то рассматриваются верхний и нижний пределы и, соответственно, верхняя и нижняя относительные частоты $\operatorname{freq}^*(x)$, $\operatorname{freq}_*(x)$. Для дифференциального уравнения с импульсным воздействием исследуются характеристики $\varkappa^*$ и $\varkappa_*$, которые определяются, соответственно, как верхний и нижний пределы при $\vartheta \to \infty$ отношения меры тех точек отрезка $[0,\vartheta]$, для которых решение данного уравнения неположительно, к длине этого отрезка. В работе получены условия, при которых выполнены неравенства $\operatorname{freq}_*(x) \geqslant \varkappa_*$ и $\operatorname{freq}^*(x) \geqslant \varkappa^*$.

Также рассматриваются понятия статистически инвариантного и статистически слабо инвариантного множеств относительно управляемой системы с импульсным воздействием. Получены условия, при которых заданное множество $\mathfrak{M}$ является статистически инвариантным или статистически слабо инвариантным.

§ 1. Основные определения

Рассматриваются управляемые системы с импульсным воздействием:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(t,x,u), \quad t \neq \tau_i, \\ \Delta x|_{t=\tau_i} &= g(x,w_i), \quad (t,x,u,w_i) \in [t_0,+\infty) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p. \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь $\mathbb{R}^n$ — n-мерное евклидово пространство с нормой $\|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle}$, управление u содержится в компактном множестве $U(t,x) \subset \mathbb{R}^m$, векторы w_i, $i = 1,2,\ldots$, являются управляющими воздействиями, влияющими на поведение системы в моменты времени $t = \tau_i$, и принимают значения в заданном компактном множестве $W \subset \mathbb{R}^p$. Предполагаем, что функции $f(t,x,u)$ и $g(x,w)$ непрерывны для всех $(t,x,u) \in [t_0,+\infty) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ и всех $(x,w) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ соответственно, функция $U(t,x)$ полунепрерывна сверху в метрике Хаусдорфа при всех $(t,x) \in [t_0,+\infty) \times \mathbb{R}^n$, решения системы (1) непрерывны справа. Относительно последовательности $\{\tau_i\}_{i=0}^{\infty}$ полагаем, что $t_0 = \tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < \ldots$ и $\lim\limits_{i\to\infty} \tau_i = +\infty$.

О п р е д е л е н и е 1. *Допустимым процессом управляемой системы* (1) назовем функцию

$$t \to (u(t), w(t), x(t)) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^n,$$

которая удовлетворяет следующим условиям:

1) управление $u(t)$ определено на $I = (0, \tau_1) \cup (\tau_1, \tau_2) \cup \ldots$, ограничено и измеримо по Лебегу;

2) функция $w(t) = 0$ при $t \in I$ и $w(\tau_i) = w_i, w_i \in W$ для всех $i = 1, 2, \ldots$,

$$\Delta x|_{t=\tau_i} = x(\tau_i) - x(\tau_i - 0) = g(x, w_i);$$

3) решение $x(t)$ в смысле Каратеодори системы дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(t, x, u(t))$$

определено для всех $t \in (\tau_i, \tau_{i+1})$, $i = 0, 1, 2, \ldots$, и $x(\tau_i) = x(\tau_i - 0) + g(x, w_i)$;

4) имеет место включение $u(t) \in U(t, x(t))$.

Отвечающие допустимому процессу $(u(t), w(t), x(t))$ управления $u(t)$ и $w(t)$ называются *допустимыми управлениями* системы (1).

Введем в рассмотрение множество $\mathfrak{M} \doteq \{(t, x) \in [t_0, +\infty) \times \mathbb{R}^n : x \in M(t)\}$, заданное функцией $t \mapsto M(t)$, непрерывной в метрике Хаусдорфа. Предполагаем, что для каждого $t \in [t_0, +\infty)$ множество $M(t)$ непусто и компактно. Пусть $M^\varepsilon(t)$ — замкнутая ε-окрестность множества $M(t)$, то есть множество таких точек $x \in \mathbb{R}^n$, что $\varrho(x, M(t)) \leqslant \varepsilon$, $N^\varepsilon(t) = M^\varepsilon(t) \backslash M(t)$ — внешняя ε-окрестность границы множества $M(t)$ (здесь $\varrho(x, M) = \inf\limits_{y \in M} \|x - y\|$ — расстояние от точки $x \in \mathbb{R}^n$ до множества $M \subset \mathbb{R}^n$). Построим множества

$$\mathfrak{M}^\varepsilon \doteq \{(t, x) \in [t_0, +\infty) \times \mathbb{R}^n : x \in M^\varepsilon(t)\}, \quad \mathfrak{N}^\varepsilon \doteq \{(t, x) \in [t_0, +\infty) \times \mathbb{R}^n : x \in N^\varepsilon(t)\}.$$

О п р е д е л е н и е 2 (см. [2]). Скалярная функция $V(t, x)$ переменных $(t, x) \in [t_0, +\infty) \times \mathbb{R}^n$ называется *функцией Ляпунова* относительно множества $\mathfrak{M}$, если она удовлетворяет локальному условию Липшица по переменным (t, x) и следующим условиям:

1) $V(t, x) \leqslant 0$ для всех $(t, x) \in \mathfrak{M}$;

2) $V(t, x) > 0$ для некоторого $r > 0$ для всех $(t, x) \in \mathfrak{N}^r$.

Поставим в соответствие системе $\dot{x} = f(t, x, u)$ дифференциальное включение

$$\dot{x} \in F(t, x), \tag{2}$$

где для каждой фиксированной точки $(t, x) \in [t_0, +\infty) \times \mathbb{R}^n$ множество $F(t, x)$ состоит из всех предельных значений функции $f(t_i, x_i, U(t_i, x_i))$ при $(t_i, x_i) \to (t, x)$. Будем предполагать, что $F(t, x)$ непусто, ограниченно, замкнуто и выпукло. Поскольку функция $U(t, x)$ полунепрерывна сверху по (t, x), то функция $F(t, x)$ также полунепрерывна сверху, поэтому для каждой начальной точки $x_0 \in \mathbb{R}^n$ локальное решение включения (2) существует (см. [3, с. 60]).

У с л о в и е 1. Для любого $x_0 \in M^r(t_0)$ каждое решение $\varphi(t, x_0)$ включения (2), удовлетворяющее начальному условию $\varphi(t_0, x_0) = x_0$, определено при всех $t \geqslant t_0$.

О п р е д е л е н и е 3 (см. [4]). Для локально липшицевой функции $V(t, x)$ *обобщенной производной* в точке $(t, x) \in [t_0, +\infty) \times \mathbb{R}^n$ по направлению вектора $q = (1, p)$, $p \in \mathbb{R}^n$ (производной Ф. Кларка), называется следующий верхний предел:

$$V^o(t, x; q) \doteq \limsup_{(\varepsilon, y) \to (0+0, x)} \frac{V(t + \varepsilon, y + \varepsilon p) - V(t, y)}{\varepsilon},$$

а выражения $V^o_{\min}(t, x) \doteq \inf\limits_{p \in F(t,x)} V^o(t, x; q)$, $V^o_{\max}(t, x) \doteq \sup\limits_{p \in F(t,x)} V^o(t, x; q)$ называются соответственно *нижней* и *верхней производной* функции $V(t, x)$ в силу дифференциального включения (2).

Рассмотрим дифференциальное уравнение с импульсным воздействием

$$\dot{z} = q(t,z), \quad t \neq \tau_i, \quad \Delta z|_{t=\tau_i} = l(z), \quad (t,z) \in [t_0,+\infty) \times \mathbb{R}, \tag{3}$$

где функция $q(t,z)$ локально липшицева по z, а функция $l(z)$ непрерывна. Введем в рассмотрение функцию $L(z) = l(z) + z$ в предположении, что $L(z)$ неубывающая для всех $z \in \mathbb{R}$.

О п р е д е л е н и е 4 (см. [5]). *Верхней относительной частотой попадания* решения $x(t,x_0)$ системы (1) в множество $\mathfrak{M} \doteq \big\{(t,x) \in [t_0,\infty) \times \mathbb{R}^n \colon x \in M(t)\big\}$ называется следующий предел:

$$\operatorname{freq}^*(x) \doteq \varlimsup_{\vartheta\to\infty} \frac{\operatorname{mes}\{t \in [0,\vartheta] : x(t,x_0) \in M(t)\}}{\vartheta},$$

где mes — мера Лебега на числовой прямой. Аналогично определяется нижняя относительная частота $\operatorname{freq}_*(x)$ (с заменой верхнего предела на нижний предел). Если $\operatorname{freq}^*(x) = \operatorname{freq}_*(x)$, то существует предел

$$\operatorname{freq}(x) \doteq \lim_{\vartheta\to\infty} \frac{\operatorname{mes}\{t \in [0,\vartheta] \colon x(t,x_0) \in M(t)\}}{\vartheta},$$

который называется *относительной частотой* попадания решения $x(t,x_0)$ в множество $\mathfrak{M}$.

Также введем в рассмотрение характеристику

$$\varkappa \doteq \lim_{\vartheta\to\infty} \frac{\operatorname{mes}\{t \in [0,\vartheta] : z(t) \leqslant 0\}}{\vartheta},$$

где функция $z(t)$ является решением уравнения (3). Если данный предел не существует, то рассматриваются соответственно верхний и нижний пределы:

$$\varkappa^* \doteq \varlimsup_{\vartheta\to\infty} \frac{\operatorname{mes}\{t \in [0,\vartheta] : z(t) \leqslant 0\}}{\vartheta}, \quad \varkappa_* \doteq \varliminf_{\vartheta\to\infty} \frac{\operatorname{mes}\{t \in [0,\vartheta] : z(t) \leqslant 0\}}{\vartheta}.$$

§ 2. Об оценках статистических характеристик управляемых систем с импульсным воздействием

Отметим, что определения и оценки статистических характеристик, а также условия статистической инвариантности множеств для систем без импульсного воздействия получены в работах [5–7]. Приведенные ниже результаты распространяют утверждения работ [5–7] на управляемые системы с импульсами.

Т е о р е м а 1. *Предположим, что существуют функции $V(t,x)$, $q(t,z)$, $l(z)$ такие, что $V(t,x)$ — функция Ляпунова относительно множества $\mathfrak{M}$, и для всех $(t,x) \in [t_0,\infty) \times \mathbb{R}^n$ выполнены неравенства*

$$V^o_{\max}(t,x) \leqslant q(t,V(t,x)), \quad \max_{w\in W} V(\tau_i, x+g(x,w)) \leqslant L\left(V(\tau_i,x)\right), \quad i = 1,2,\ldots. \tag{4}$$

Пусть $z(t)$ — решение уравнения (3), удовлетворяющее начальному условию $z(t_0) = V(t_0,x_0)$. Тогда для любого решения $x(t,x_0)$ системы (1) такого, что $x(t_0,x_0) = x_0$, имеют место неравенства

$$\operatorname{freq}_*(x) \geqslant \varkappa_*, \quad \operatorname{freq}^*(x) \geqslant \varkappa^*.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $x(t,x_0)$ — одно из решений системы (1), удовлетворяющее начальному условию $x(t_0,x_0) = x_0$ и продолжаемое на полуинтервал $[t_0,+\infty)$. Рассмотрим функцию $v(t) = V(t,x(t,x_0))$, для которой, в силу леммы 5 работы [2], в точках дифференцируемости имеет место неравенство

$$\dot{v}(t) \leqslant V^o_{\max}(t,x(t,x_0)),$$

из которого и (4) следует, что неравенство $\dot{v}(t) \leqslant q(t, v(t))$ выполнено в промежутках непрерывности функции $v(t)$. Поскольку

$$v(t_0) = V(t, x(t_0, x_0)) = V(t_0, x_0) = z_0,$$

то в силу теоремы Чаплыгина о дифференциальных неравенствах (см. [8, с. 15]) неравенство $v(t) \leqslant z(t)$ верно при всех $t \in [t_0, \tau_1)$. Из второго неравенства (4) следует, что

$$\begin{aligned} v(\tau_1) = V(\tau_1, x(\tau_1, x)) = V(\tau_1, x(\tau_1 - 0, x_0) + g(x(\tau_1 - 0, x_0), w_1)) \leqslant \\ \leqslant \max_{w \in W} V(\tau_1, x(\tau_1 - 0, x_0) + g(x(\tau_1 - 0, x_0), w)) \leqslant L\left(V(\tau_1, x(\tau_1 - 0, x_0))\right) = L\left(v(\tau_1 - 0)\right). \end{aligned}$$

Тогда $v(\tau_1) \leqslant L\left(v(\tau_1 - 0)\right) \leqslant L(z(\tau_1 - 0))$, так как функция $L(z)$ не убывает. Из равенства $z(\tau_1) = L(z(\tau_1 - 0))$ следует, что $v(\tau_1) \leqslant z(\tau_1)$. Рассуждая подобным образом, то есть применяя далее теорему Чаплыгина на каждом промежутке $[\tau_i, \tau_{i+1})$, $i = 1, 2, \ldots$, получаем, что неравенство $v(t) \leqslant z(t)$ верно для всех $t \in [t_0, +\infty)$. Тогда

$$\operatorname{mes}\{t \in [0, \vartheta] : v(t) \leqslant 0\} \geqslant \operatorname{mes}\{t \in [0, \vartheta] : z(t) \leqslant 0\}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \operatorname{freq}^*(x) \doteq \varlimsup_{\vartheta \to \infty} \frac{\operatorname{mes}\{t \in [0, \vartheta] : x(t, x_0) \in M(t)\}}{\vartheta} = \varlimsup_{\vartheta \to \infty} \frac{\operatorname{mes}\{t \in [0, \vartheta] : v(t) \leqslant 0\}}{\vartheta} \geqslant \\ \geqslant \varlimsup_{\vartheta \to \infty} \frac{\operatorname{mes}\{t \in [0, \vartheta] : z(t) \leqslant 0\}}{\vartheta} = \varkappa^*. \end{aligned}$$

Таким образом, $\operatorname{freq}^*(x) \geqslant \varkappa^*$, аналогично получаем неравенство $\operatorname{freq}_*(x) \geqslant \varkappa_*$. $\square$

Т е о р е м а 2. *Предположим, что существуют функции $V(t, x)$, $q(t, z)$, $l(z)$ такие, что $V(t, x)$ — функция Ляпунова относительно множества $\mathfrak{M}$, и для всех $(t, x) \in [t_0, \infty) \times \mathbb{R}^n$ выполнены неравенства*

$$V^o_{\min}(t, x) \leqslant q(t, V(t, x)), \quad \min_{w \in W} V(\tau_i, x + g(x, w)) \leqslant L\left(V(\tau_i, x)\right), \quad i = 1, 2, \ldots. \tag{5}$$

Пусть $z(t)$ — решение уравнения (3), удовлетворяющее начальному условию $z(t_0) = V(t_0, x_0)$. Тогда существует решение $x(t, x_0)$ системы (1) такое, что $x(t_0, x_0) = x_0$, и имеют место неравенства

$$\operatorname{freq}_*(x) \geqslant \varkappa_*, \quad \operatorname{freq}^*(x) \geqslant \varkappa^*.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Определим непустые множества

$$\widetilde{U}(t, x) \doteq \{u \in U(t, x) : V^o(t, x; f(t, x, u)) \leqslant q(t, V(t, x))\},$$

$$\widetilde{W} \doteq \{w \in W : V(\tau_i, x + g(x, w)) \leqslant V(\tau_i, x), \ i = 1, 2, \ldots\}.$$

Множество $\widetilde{U}(t, x)$ ограничено для каждого $(t, x) \in [t_0, +\infty) \times \mathbb{R}^n$, поскольку $\widetilde{U}(t, x) \subseteq U(t, x)$. Покажем, что множество $\widetilde{U}(t, x)$ замкнуто. Действительно, если последовательность $\{u_i\}_{i=1}^{\infty}$ такова, что $u_i \in \widetilde{U}(t, x)$ и $u_i \to u$, то $f(t, x, u_i) \to f(t, x, u)$, и в силу липшицевости функции $f \to V^o(t, x; f)$ [4, с. 32] выполнено неравенство

$$V^o(t, x; f(t, x, u)) = \lim_{i \to \infty} V^o(t, x; f(t, x, u_i)) \leqslant 0.$$

Поставим в соответствие множеству $\widetilde{U}$ дифференциальное включение

$$\dot{x} \in \widetilde{F}(t, x), \quad \widetilde{F}(t, x) = \operatorname{co}\widetilde{H}(t, x), \tag{6}$$

где $\widetilde{H}(t, x)$ состоит из всех предельных значений функции $f(t_i, x_i, \widetilde{U}(t_i, x_i))$ при $(t_i, x_i) \to (t, x)$, функции $(t, x) \mapsto \widetilde{H}(t, x)$ и $(t, x) \mapsto \widetilde{F}(t, x)$ полунепрерывны сверху. Обозначим через $\widetilde{\varphi}_i(t, x_i)$ решения включения (6), удовлетворяющие начальным условиям $\widetilde{\varphi}_i(\tau_i, x_i) = x_i$, $i = 0, 1, 2, \ldots$.

Поскольку для всех $(t,x) \in [t_0,\infty) \times \mathbb{R}^n$ имеет место включение $\widetilde{U}(t,x) \subseteq U(t,x)$, то $\widetilde{F}(t,x) \subseteq F(t,x)$. Следовательно, $\widetilde{\varphi}_i(t,x_i)$ — решения дифференциального включения (6), также являются и решениями исходного дифференциального включения (2), и каждое из них, в силу условия 1 о нелокальной продолжаемости всех решений вправо, определено при всех $t \geqslant t_0$. Определим решение $x(t,x_0)$ системы (1), удовлетворяющее начальному условию $x(t_0,x_0) = x_0$, которое на промежутке $[t_0,\tau_1)$ совпадает с решением $\widetilde{\varphi}_0(t,x_0)$ и на каждом промежутке $[\tau_i,\tau_{i+1})$ совпадает с решением $\widetilde{\varphi}_i(t,x_i)$, где

$$x_i = \widetilde{\varphi}_{i-1}(\tau_i,x_{i-1}) + g\big(\widetilde{\varphi}_{i-1}(\tau_i,x_{i-1}),w_i\big), \quad w_i \in \widetilde{W}, \quad i = 1,2,\ldots.$$

Для этого решения построим функцию $v(t) = V(t,x(t,x_0))$, для которой, учитывая (5), неравенство $\dot{v}(t) \leqslant q(t,v(t))$ выполнено в промежутках ее непрерывности (см. лемму 9 работы [7]). Далее рассмотрим функцию $v(t)$ в точке τ_1. Из второго неравенства (5) следует, что

$$\begin{aligned} v(\tau_1) = V(\tau_1,x(\tau_1,x_0)) = V(\tau_1,x(\tau_1-0,x_0) + g(x(\tau_1-0,x_0),w)) \leqslant \\ \leqslant L\left(V(\tau_1,x(\tau_1-0,x_0))\right) = L\left(v(\tau_1-0)\right). \end{aligned}$$

Тогда $v(\tau_1) \leqslant L\left(v(\tau_1-0)\right) \leqslant L(z(\tau_1-0))$, так как функция $L(z)$ не убывает. Из равенства $z(\tau_1) = L(z(\tau_1-0))$ следует, что $v(\tau_1) \leqslant z(\tau_1)$. Рассуждая аналогичным образом для всех точек τ_i и применяя теорему о дифференциальных неравенствах, получаем, что неравенство $v(t) \leqslant z(t)$ верно для всех $t \in [t_0,+\infty)$. Тогда

$$\operatorname{mes}\{t \in [0,\vartheta] : v(t) \leqslant 0\} \geqslant \operatorname{mes}\{t \in [0,\vartheta] : z(t) \leqslant 0\}.$$

Следовательно, $\operatorname{freq}_*(x) \geqslant \varkappa_*$ и $\operatorname{freq}^*(x) \geqslant \varkappa^*$. □

Обозначим через $D(t,X)$ множество достижимости системы (1) в момент времени t из начального множества X. Предполагаем, что для каждого X множество достижимости $D(t,X)$ существует для всех $t \geqslant t_0$. Это означает, что для каждой точки $x \in X$ существует решение $x(t,x_0)$ системы (1), удовлетворяющее начальному условию $x(t_0,x_0) = x_0$ и продолжаемое на полуось $\mathbb{R}_+ = [0,\infty)$. Введем в рассмотрение множество

$$\alpha(\vartheta,X) \doteq \big\{t \in [0,\vartheta] : D(t,X) \subseteq M(t)\big\}.$$

О п р е д е л е н и е 5 (см. [6,7]). Относительной частотой поглощения множества достижимости $D(t,X)$ системы (1) множеством $\mathfrak{M}$ называется следующий предел:

$$\operatorname{freq}(X) \doteq \lim_{\vartheta\to\infty} \frac{\operatorname{mes}\alpha(\vartheta,X)}{\vartheta} = \lim_{\vartheta\to\infty} \frac{\operatorname{mes}\{t \in [0,\vartheta] : D(t,X) \subseteq M(t)\}}{\vartheta}, \tag{7}$$

где mes — мера Лебега на числовой прямой. Если предел (7) не существует, то характеристики

$$\operatorname{freq}^*(X) \doteq \varlimsup_{\vartheta\to\infty} \frac{\operatorname{mes}\alpha(\vartheta,X)}{\vartheta}, \quad \operatorname{freq}_*(X) \doteq \varliminf_{\vartheta\to\infty} \frac{\operatorname{mes}\alpha(\vartheta,X)}{\vartheta}$$

называются соответственно верхней и нижней относительной частотой поглощения множества достижимости множеством $\mathfrak{M}$.

О п р е д е л е н и е 6 (см. [6,7]). Множество $\mathfrak{M}$ называется *статистически инвариантным* относительно управляемой системы (1), если предел

$$\operatorname{freq}\big(M(0)\big) \doteq \lim_{\vartheta\to\infty} \frac{\operatorname{mes}\big\{t \in [0,\vartheta] : D\big(t,M(0)\big) \subseteq M(t)\big\}}{\vartheta}$$

существует и имеет место равенство $\operatorname{freq}\big(M(0)\big) = 1$.

С л е д с т в и е 1. *Если существует функция Ляпунова $V(t,x)$ относительно множества $\mathfrak{M}$ такая, что для всех $(t,x) \in [t_0,\infty) \times \mathbb{R}^n$ выполнены неравенства* (4) *и $\varkappa^* = 1$, то множество $\mathfrak{M}$ статистически инвариантно относительно системы* (1).

О п р е д е л е н и е 7 (см. [6, 7]). Множество $\mathfrak{M}$ называется *статистически слабо инвариантным* относительно управляемой системы (1), если для любой точки $x \in M(0)$ найдется хотя бы одно решение $x(t, x_0)$ системы (1), определенное при всех $t \geqslant 0$, удовлетворяющее начальному условию $x(t_0, x_0) = x_0$ и равенству

$$\operatorname{freq}^*(x) \doteq \overline{\lim_{\vartheta \to \infty}} \frac{\operatorname{mes}\{t \in [0, \vartheta] : x(t, x_0) \in M(t)\}}{\vartheta} = 1.$$

С л е д с т в и е 2. *Если существует функция Ляпунова $V(t, x)$ относительно множества $\mathfrak{M}$ такая, что для всех $(t, x) \in [t_0, \infty) \times \mathbb{R}^n$ выполнены неравенства* (5), *и $\varkappa^* = 1$, то множество $\mathfrak{M}$ статистически слабо инвариантно относительно системы* (1).

Список литературы

1. Ларина Я.Ю. Функции Ляпунова и теоремы сравнения для управляемых систем с импульсным воздействием // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2015. Т. 25. Вып. 1. С. 51–59.
2. Панасенко Е.А., Тонков Е.Л. Инвариантные и устойчиво инвариантные множества дифференциальных включений // Труды Математического института им. В.А. Стеклова. 2008. Т. 262. С. 202–221.
3. Филиппов А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985. 223 с.
4. Кларк Ф. Оптимизация и негладкий анализ. М.: Наука, 1988. 300 с.
5. Родина Л.И. Инвариантные и статистически слабо инвариантные множества управляемых систем // Известия Института математики и информатики УдГУ. 2012. Вып. 2 (40). С. 3–164.
6. Родина Л.И. Оценка статистических характеристик множества достижимости управляемых систем // Известия высших учебных заведений. Математика. 2013. № 11. С. 20–32.
7. Родина Л.И., Тонков Е.Л. Статистические характеристики множества достижимости управляемой системы, неблуждаемость и минимальный центр притяжения // Нелинейная динамика. 2009. Т. 5. № 2. С. 265–288.
8. Чаплыгин С.А. Новый метод приближенного интегрирования дифференциальных уравнений. М.–Л.: Гостехиздат, 1950. 102 с.

Поступила в редакцию 28.09.2015

Ларина Яна Юрьевна, аспирант, кафедра математического анализа, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.
E-mail: yana_larina89@mail.ru

Ya. Yu. Larina

Statistical characteristics of control systems with impulsive action

Keywords: control systems, attainability set, differential inclusions, statistical characteristics.

MSC: 34A60, 37N35

We consider the control systems with impulsive action at fixed time moments. We get estimations of statistical characteristics such as upper and lower relative frequency of entering solutions to a predetermined set. We also obtain the conditions under which the set is statistically invariant or statistically weakly invariant with respect to the control system with impulsive effect.

REFERENCES

1. Larina Ya.Yu. Lyapunov functions and comparison theorems for control systems with impulsive actions, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2015, vol. 25, no. 1, pp. 51–59 (in Russian).
2. Panasenko E.A., Tonkov E.L. Invariant and stably invariant sets for differential inclusions, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2008, vol. 262, pp. 194–212.
3. Filippov A.F. *Differentsial'nye uravneniya s razryvnoi pravoi chast'yu* (Differential equations with discontinuous right-hand side), Moscow: Nauka, 1985, 223 p.
4. Clarke F. *Optimization and nonsmooth analysis*, Wiley, 1983. Translated under the title *Optimizatsiya i negladkii analiz*, Moscow: Nauka, 1988, 300 p.
5. Rodina L.I. Invariant and statistically weakly invariant sets of control systems, *Izv. Inst. Mat. Inform. Udmurt. Gos. Univ.*, 2012, no. 2 (40), pp. 3–164 (in Russian).

6. Rodina L.I. Estimation of statistical characteristics of attainability sets of controllable systems, *Russian Mathematics*, 2013, vol. 57, no. 11, pp. 17–27.
7. Rodina L.I., Tonkov E.L. Statistical characteristics of attainable set of controllable system, nonwandering, and minimal attraction center, *Nelin. Dinam.*, 2009, vol. 5, no. 2, pp. 265–288 (in Russian).
8. Chaplygin S.A. *Novyi metod priblizhennogo integrirovaniya differentsial'nykh uravnenii* (A new method of approximate integration of differential equations), Moscow–Leningrad: Gostekhizdat, 1950, 102 p.

Received 28.09.2015

Larina Yana Yur'evna, Post-graduate student, Department of Mathematical Analysis, Udmurt State University, ul. Universitetskaya, 1, Izhevsk, 426034, Russia.
E-mail: yana_larina89@mail.ru