УДК 517.926.4

© *М. Д. Лысак*

ОЦЕНКИ СКОРОСТИ БЛУЖДАНИЯ РЕШЕНИЙ НЕКОТОРЫХ ТИПОВ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

В статье исследуется спектр скорости блуждания на множестве линейных дифференциальных систем с ограниченными коэффициентами общего вида, а также на подмножествах данного множества: множестве диагональных систем произвольного порядка и множестве дифференциальных систем, отвечающих линейным дифференциальным уравнениям второго порядка. Показано, что спектр скорости блуждания на множестве систем общего вида с ограниченными коэффициентами четного порядка, а также на подмножестве диагональных систем представляет собой отрезок. Приводится оценка верхней границы для спектра скорости блуждания решений линейных уравнений второго порядка.

Ключевые слова: системы линейных дифференциальных уравнений, скорость блуждания, спектр скорости блуждания.

Введение

Для заданной константы $M>0$ во множестве $\mathcal{M}^n$ систем вида

$$\dot{x}=A(t)x, \qquad x\in\mathbb{R}^n, \quad t\in\mathbb{R}^+\equiv[0;\infty),$$

с кусочно-непрерывными по t коэффициентами (каждую систему будем отождествлять с задающей ее матричной функцией A) выделим подмножество $\mathcal{M}_0^n\subset\mathcal{M}^n$ систем с ограниченными коэффициентами

$$|a_{ij}|\leqslant M, \quad i,j=1,\ldots,n.$$

Также выделим подмножество $\mathcal{M}_1^n\subset\mathcal{M}_0^n$, состоящее из *диагональных* систем

$$A\equiv\begin{pmatrix} a_1(t) & \ldots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \ldots & a_n(t)\end{pmatrix}, \quad |a_i|\leqslant M, \quad i=1,\ldots,n,$$

и подмножество $\mathcal{E}^n\subset\mathcal{M}^n$, состоящее из систем, отвечающих линейным *уравнениям* n-ого порядка:

$$A\equiv\begin{pmatrix} 0 & 1 & \ldots & 0\\ \vdots & & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \ldots & 1\\ -a_n(t) & -a_{n-1}(t) & \ldots & -a_1(t)\end{pmatrix}, \quad |a_i|\leqslant M, \quad i=1,\ldots,n.$$

Обозначим через $\mathcal{S}_*(A)$ множество всех ненулевых решений системы A.

Определение 0.1. Определим [1] *верхнюю* и *нижнюю скорости блуждания* решения $x\in\mathcal{S}_*(A)$:

$$\hat{\mu}(x)\equiv\varlimsup_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t v(x(\tau))\,d\tau, \quad \check{\mu}(x)\equiv\varliminf_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t v(x(\tau))\,d\tau, \tag{0.1}$$

где

$$v(x(\tau))=\left|\frac{d}{d\tau}\frac{x(\tau)}{|x(\tau)|}\right|, \tag{0.2}$$

$$|x(\tau)|\equiv\sqrt{x_1(\tau)^2+\ldots+x_n(\tau)^2}. \tag{0.3}$$

О п р е д е л е н и е 0.2. *Спектром* [1] скорости блуждания (верхней или нижней) для системы $A \in \mathcal{M}^n$ назовем область ее значений

$$Sp_\mu(A) = \{\mu(x) \mid x \in \mathcal{S}_*(A)\},$$

а также определим *спектр* скорости блуждания на некотором подмножестве: $H \subset \mathcal{M}^n$

$$Sp_\mu(H) = \bigcup_{A \in H} Sp_\mu(A).$$

Сформулированные ниже теоремы отвечают на вопрос о том, каким может быть *спектр скорости блуждания* на множестве M_0^n систем с ограниченными коэффициентами общего вида, а также на подмножестве M_1^n диагональных систем n-ого порядка.

Т е о р е м а 0.1. *Справедливы равенства* $Sp_{\check{\mu}}(\mathcal{M}_1^n) = Sp_{\hat{\mu}}(\mathcal{M}_1^n) = [0; M]$, *и существует такая система* $A \in \mathcal{M}_1^n$, *что* $Sp_{\check{\mu}}(A) = Sp_{\hat{\mu}}(A) = [0; M]$.

Т е о р е м а 0.2. *Если* n *четно, то* $Sp_{\check{\mu}}(\mathcal{M}_0^n) = Sp_{\hat{\mu}}(\mathcal{M}_0^n) = [0; nM]$ *и существует такая система* $A \in \mathcal{M}_0^n$, *что* $Sp_{\check{\mu}}(A) = Sp_{\hat{\mu}}(A) = [0; nM]$.

Т е о р е м а 0.3. *Если* $n = 2k+1$ *нечетно, то* $\sup Sp_{\hat{\mu}}(\mathcal{M}_0^n) \leqslant (2k+1)M$ *и существует система* $A \in \mathcal{M}_0^n$, *для которой выполнено:* $Sp_{\check{\mu}}(A) = Sp_{\hat{\mu}}(A) = [0; 2M\sqrt{k(k+1)}]$.

В следующей теореме приводится оценка сверху при $M \to 0$ для спектра верхней скорости блуждания для линейных уравнений второго порядка.

Т е о р е м а 0.4. *Для любого решения* $x \in \bigcup_{A \in \mathcal{E}^2} S_*(A)$ *верхняя скорость блуждания удовлетворяет оценке* $\hat{\mu}(x) \leqslant 2\sqrt{M}$ *при* $M \leqslant 2$ *и стремится к нулю при* $M \to 0$.

§ 1. Доказательство теоремы 0.1

Обозначим $\xi_1 = \frac{x_1}{|x|}, \ldots, \xi_n = \frac{x_n}{|x|}$, тогда выражение (0.2) преобразуется к виду

$$v(x(\tau)) = \sqrt{a_1(\tau)^2\xi_1^2 + \ldots + a_n(\tau)^2\xi_n^2 - (a_1(\tau)\xi_1^2 + \ldots + a_n(\tau)\xi_n^2)^2}. \tag{1.1}$$

В каждый момент времени τ полученное выражение (1.1) является квадратичной функцией относительно каждой из $a_1(\tau), \ldots, a_n(\tau)$ с положительным коэффициентом при старшем члене. Поэтому для любого фиксированного τ и любого фиксированного набора $(\xi_1, \ldots \xi_n)$ $(\xi_1^2 + \ldots + \xi_n^2 = 1)$ максимум выражения (1.1) на множестве

$$\{(a_1(\tau), \ldots, a_n(\tau)) : |a_i(\tau)| \leqslant M, i = 1, \ldots, n\}$$

может достигаться только для значений $a_1(\tau), \ldots, a_m(\tau)$, соответствующих концам отрезка $[-M; M]$, то есть при $a_i = \pm M$, $i = 1, \ldots, n$. Учитывая этот факт, заметим, что для первых n слагаемых в подкоренном выражении справедливо

$$a_1(\tau)^2\xi_1^2 + \ldots + a_n(\tau)^2\xi_n^2 = M^2(\xi_1^2 + \ldots + \xi_n^2) \equiv M^2,$$

откуда вытекает

$$\max_{|a_i(\tau)| \leqslant M, \xi_1 \ldots \xi_n} v(x(\tau)) = \sqrt{M^2 - \min_{a_1 = \pm M \ldots a_n = \pm M, \xi_1 \ldots \xi_n} |a_1\xi_1^2 + \ldots + a_n\xi_n^2|^2} =$$

$$= \sqrt{M^2 - \min_{a_1 = \pm M \ldots a_n = \pm M, \xi_1 \ldots \xi_n} |a_1 + (a_2 - a_1)\xi_2^2 + \ldots + (a_n - a_1)\xi_n^2|^2} \leqslant M.$$

Таким образом, справедлива оценка

$$\hat{\mu}(x) \leqslant \limsup_{t \to \infty} \frac{1}{t} \int_0^t M \, d\tau \leqslant M. \tag{1.2}$$

Рассмотрим систему $A_d \in \mathcal{M}_1^n$ с кусочно-постоянными коэффициентами, задаваемыми последовательно при $j = 1, 2, \ldots$ равенствами

$$a_3(t) = \ldots = a_n(t) = a_1(t) = \begin{cases} -M, & T_{j-1} \le t \leqslant T_{j-1} + \Delta t_j^1, \\ M, & T_{j-1} + \Delta t_j^1 \leqslant t \leqslant T_{j-1} + \Delta t_j^1 + \Delta t_j^2 \equiv T_j, \end{cases}$$

$$a_2(t) = -a_1(t),$$

где

$$T_j = \sum_{m=1}^{j} \left(\Delta t_m^1 + \Delta t_m^2\right) \quad (T_0 = 0), \quad \Delta t_j^1 = \frac{1}{j}, \quad x(T_j) = x_0. \tag{1.3}$$

Для заданного вектора начальных значений $x_0 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \ldots, 0)$ рассмотрим функцию x, являющуюся решением системы A_d и удовлетворяющую начальному условию $x(0) = x_0$.

Л е м м а 1.1. *На решении системы A_d, удовлетворяющем начальному условию*

$$x(0) = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \ldots, 0),$$

справедливо $\hat{\mu}(x) = \check{\mu}(x) = M$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для произвольного $\varepsilon > 0$ можно подобрать такое $t(\varepsilon)$, чтобы для любого $t > t(\varepsilon)$ выполнялось неравенство

$$v(x(\tau)) > 1 - \varepsilon', \quad \varepsilon' \equiv \frac{\varepsilon}{2M},$$

обеспечиваемое условиями (1.3), причем длины Δt_j^1 уменьшаются с ростом номера j. Тогда для любого $t > \frac{t(\varepsilon)}{\varepsilon'}$ будет выполнена оценка

$$\frac{1}{t}\int_0^t v(x(\tau))\,d\tau \geqslant \frac{1}{t}\int_{t(\varepsilon)}^t v(x(\tau))\,d\tau > M(1-\varepsilon')\cdot\frac{t - t(\varepsilon)}{t} >$$
$$> M(1-\varepsilon')(1-\varepsilon') > M\left(1 - 2\tfrac{\varepsilon}{2M}\right) > M - \varepsilon,$$

откуда, с учетом оценки (1.2), получаем

$$\hat{\mu}(x) = \check{\mu}(x) = M.$$

Лемма 1.1 доказана.

Л е м м а 1.2. $Sp_{\check{\mu}}(A_d) = Sp_{\hat{\mu}}(A_d) = [0; M]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Действительно, для каждого фиксированного $r \in [0; M]$ существует $w \in [0; \frac{1}{\sqrt{2}}]$, удовлетворяющее равенству

$$M\sqrt{1 - (1 - 2w^2)^2} = r.$$

Проделывая рассуждения, аналогичные лемме 1.1, получаем, что для решения $x(t)$ системы A_d, удовлетворяющего начальным условиям $x_0 = (\sqrt{1 - w^2}, w, 0, \ldots, 0)$, справедливо

$$\hat{\mu}(x) = \check{\mu}(x) = r.$$

Лемма 1.2 доказана.

Утверждение теоремы 0.1 следует из утверждений лемм 1.1 и 1.2.

§ 2. Доказательства теоремы 0.2

Обозначим
$$\xi_i = \frac{x_i}{|x|}, \quad \rho_i = \frac{\dot{x_1}}{|x|}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Заметим, что
$$\rho_i = a_{i1}\xi_1 + \ldots + a_{in}\xi_n. \tag{2.1}$$

Тогда выражение (0.2) преобразуется к виду
$$v(x(\tau)) = \sqrt{\rho_1^2 + \ldots + \rho_n^2 - (\rho_1\xi_1 + \ldots + \rho_n\xi_n)^2}. \tag{2.2}$$

В каждый момент времени τ полученное выражение (2.2) является квадратичной функцией относительно каждой из $a_{11}(\tau), \dots, a_{nn}(\tau)$ с положительным коэффициентом при старшем члене. Поэтому для любого фиксированного τ и любого фиксированного набора $(\xi_1, \dots \xi_n)$ $(\xi_1^2 + \ldots + \xi_n^2 = 1)$ максимум выражения (2.2) на множестве
$$\{(a_{11}(\tau), \dots, a_{nn}(\tau)) : |a_{ij}(\tau)| \leqslant M, i, j = 1, \dots, n\}$$
может достигаться только для значений $a_1(\tau), \dots, a_m(\tau)$, соответствующих концам отрезка $[-M; M]$, то есть при $a_i = \pm M$, $i = 1, \dots, n$. С учетом этого факта получаем
$$\max_{\xi_i : \xi_1^2 + \ldots + \xi_n^2 = 1} |\rho_i| = M\sqrt{n}, \quad i = 1, \dots, n,$$
и, следовательно,
$$v(x(\tau)) \leqslant \sqrt{M^2 n^2 - (\rho_1\xi_1 + \ldots + \rho_n\xi_n)^2} \leqslant nM. \tag{2.3}$$

Далее аналогично доказательству теоремы 0.1 рассмотрим систему $A_0 \in \mathcal{M}^n$ с кусочно-постоянными коэффициентами, задаваемыми последовательно при $j = 1, 2, \dots$ и $l = 1, \dots, \frac{n}{2}$ равенствами
$$a_{i1}(t) = \ldots = a_{in}(t) = \begin{cases} -M, & T_{j-1} \le t \leqslant T_{j-1} + \Delta t_j^1, \\ M, & T_{j-1} + \Delta t_j^1 \leqslant t \leqslant T_{j-1} + \Delta t_j^1 + \Delta t_j^2 \equiv T_j, \end{cases} \quad i = 2l, \tag{2.4}$$
$$a_{i1}(t) = \ldots = a_{in}(t) = -a_{(i+1)1}(t), \quad i = 2l - 1,$$
где, аналогично (1.3),
$$T_j = \sum_{m=1}^{j} \left(\Delta t_m^1 + \Delta t_m^2\right) \quad (T_0 = 0), \quad \Delta t_j^1 = \frac{1}{j}, \quad x(T_j) = x_0.$$

Для заданного вектора начальных значений $x_0 = (\frac{1}{\sqrt{n}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{n}})$ рассмотрим функцию x, являющуюся решением системы A_0 и удовлетворяющую начальному условию $x(0) = x_0$.

Л е м м а 2.1. *На решении системы A_0, удовлетворяющем начальному условию*
$$x(0) = (\frac{1}{\sqrt{n}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{n}}),$$
справедливо $\hat{\mu}(x) = \check{\mu}(x) = Mn$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для произвольного $\varepsilon > 0$ можно подобрать такое $t(\varepsilon)$, чтобы для любого $t > t(\varepsilon)$ выполнялось неравенство
$$v(x(\tau)) > 1 - \varepsilon', \quad \varepsilon' \equiv \frac{\varepsilon}{2Mn},$$

обеспечиваемое условиями (1.3), причем длины Δt_j^1 уменьшаются с ростом номера j. Тогда для любого $t > \frac{t(\varepsilon)}{\varepsilon'}$ будет выполнена оценка

$$\frac{1}{t}\int_0^t v(x(\tau))\,d\tau \geqslant \frac{1}{t}\int_{t(\varepsilon)}^t v(x(\tau))\,d\tau > M(1-\varepsilon')\cdot\frac{t-t(\varepsilon)}{t} >$$
$$> Mn(1-\varepsilon')(1-\varepsilon') > Mn\left(1-2\tfrac{\varepsilon}{2Mn}\right) > Mn-\varepsilon,$$

откуда, с учетом оценки (2.3), получаем

$$\hat{\mu}(x) = \check{\mu}(x) = Mn.$$

Лемма 2.1 доказана.

Л е м м а 2.2. $Sp_{\check{\mu}}(A_0) = Sp_{\hat{\mu}}(A_0) = [0; Mn]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для решения системы A_0, удовлетворяющего начальному условию $x_0 = (\frac{1}{\sqrt{n}}, -\frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{\sqrt{n}}, \ldots, -\frac{1}{\sqrt{n}})$, аналогично доказательству леммы 2.1 получаем, что $\check{\mu}(x) = \hat{\mu}(x) = 0$. В силу непрерывности функции $v(x)$ отсюда и из утверждения леммы 2.1 следует, что для каждого фиксированного $r \in [0; Mn]$ существует $w = (w_1, \ldots, w_n)$ $(w_1^2 + \ldots + w_n^2 = 1)$, удовлетворяющее равенству

$$\sqrt{\rho_1^2 + \ldots + \rho_n^2 - (\rho_1 w_1 + \ldots + \rho_n w_n)^2} = r.$$

Проделывая рассуждения, аналогичные лемме 2.1, получаем, что для решения $x(t)$ системы A_0, удовлетворяющего начальным условиям $x_0 = (w_1, \ldots, w_n)$, справедливо

$$\hat{\mu}(x) = \check{\mu}(x) = r.$$

Лемма 2.2 доказана.

Утверждение теоремы 0.2 следует из утверждений лемм 2.1, 2.2.

§ 3. Доказательство теоремы 0.3

Доказательство теоремы 0.3 проводится аналогично доказательству теоремы 0.2. Ограниченность спектра следует из оценки (2.3). Рассмотрим систему A_0, как в (2.4), тогда для функции x, являющейся решением системы A_0, удовлетворяющим начальному условию

$$x_0 = (\frac{1}{\sqrt{n}}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{n}}), \quad n = 2k+1,$$

аналогично доказательству леммы 2.1 получаем

$$\hat{\mu}(x) = \check{\mu}(x) = 2M\sqrt{k(k+1)}.$$

Далее, для решения той же системы (2.4), удовлетворяющего начальному условию

$$x_0 = (\frac{1}{\sqrt{n}}, -\frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{\sqrt{n}}, \ldots, -\frac{1}{\sqrt{n}}), \quad n = 2k+1,$$

справедливо

$$\hat{\mu}(x) = \check{\mu}(x) = 0.$$

Далее аналогично доказательству леммы 2.2 получаем, что в зависимости от выбора начальных условий x_0 *скорость блуждания* на решении системы A_0 принимает все значения из отрезка $[0, 2M\sqrt{k(k+1)}]$.

§ 4. Доказательство теоремы 0.4

Утверждение теоремы 0.4 непосредственно следует из результатов работы [2]. Действительно, при $0 < M < 4$ справедлива оценка, полученная в работе [2]:

$$\hat{\mu} < \varkappa^{**}(M) = \pi \left(\frac{4}{\sqrt{4M - M^2}} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan \frac{M}{\sqrt{4M - M^2}} \right) \right)^{-1} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\pi}{4} \sqrt{4M - M^2} \frac{\pi}{4} \leqslant 2\sqrt{M}$$

при

$$\arctan \left(\frac{M}{\sqrt{4M - M^2}} \right) \leqslant \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow M \leqslant 2.$$

Список литературы

1. Сергеев И.Н. Характеристики колеблемости и блуждаемости решений линейной дифференциальной системы // Изв. РАН. Сер. Мат. 2012. Т. 76. № 1. С. 149–172.
2. Лысак М.Д. Точные оценки скорости блуждания решений линейных уравнений второго порядка // Труды семинара им. Петровского. Вып. 30. М.: Изд-во Моск. ун-та, 2014. С. 184–212.

Поступила в редакцию 30.09.2015

Лысак Михаил Дмитриевич, аспирант, кафедра дифференциальных уравнений, Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, 119991, Россия, г. Москва, Ленинские горы, 1.
E-mail: p.mishgan@gmail.com

M. D. Lysak

Wandering rate estimations of solutions for some types of linear differential equation systems

Keywords: systems of linear differential equations, wandering rate, wandering rate spectrum.

MSC: 34D08

In this paper, the wandering rate spectrum is investigated on the set of common type linear differential equations systems with bounded coefficients, as well as on the subset of diagonal systems of arbitrary order and on the subset of differential systems, corresponding to the second order linear differential equations. It is shown that the wandering rate spectrum is a segment on the set of even dimension common type systems with bounded coefficients, as well as on the subset of diagonal systems. The estimation of the upper boundary of the wandering rate of second order linear differential equation solution is given.

REFERENCES

1. Sergeev I.N. Oscillation and wandering characteristics of solutions of a linear differential system, *Izvestiya: Mathematics*, 2012, vol. 76, no. 1, pp. 141–164.
2. Lysak M.D. Precise estimates of the walk speed of solutions of second-order linear systems, *Journal of Mathematical Sciences*, 2015, vol. 210, no. 3, pp. 1–18. DOI: 10.1007/s10958-015-2561-8

Received 30.09.2015

Lysak Mikhail Dmitrievich, post-graduate student, Department of Differential Equations, Lomonosov Moscow State University, Leninskie Gory, 1, Moscow, 119991, Russia.
E-mail: p.mishgan@gmail.com