УДК 517.917

© *Е. Г. Пыткеев, А. Г. Ченцов*

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ОТКРЫТЫХ УЛЬТРАФИЛЬТРОВ[1]

Исследуется пространство ультрафильтров произвольного топологического пространства в естественном оснащении, подобном используемому при построении компакта Стоуна. Показано, что упомянутое пространство ультрафильтров является экстремально несвязным компактом. Рассматриваются семейства множеств в пространстве ультрафильтров, мажорирующих (всякий раз) фильтр открытых окрестностей фиксированной точки исходного пространства. Исследуются условия, обеспечивающие попарную дизъюнктность и различимость множеств данного семейства; в частности, введена специальная аксиома отделимости, связанная с обеспечением упомянутой различимости.

Ключевые слова: окрестность, топология, ультрафильтр, центрированная система.

Введение

Настоящая работа продолжает исследования [1,2] и содержит обобщение некоторых положений [3], касающихся топологических свойств пространства «открытых» ультрафильтров (у/ф). Материал статьи согласуется с докладом авторов [4] на конференции, посвященной памяти замечательных ученых-математиков Н.В. Азбелева и Е.Л. Тонкова. Их усилиями были созданы научные школы, получившие заслуженное признание в России и за ее пределами. Особо следует отметить достижения в области дифференциальных и функционально-дифференциальных уравнений, теории оптимального управления. Большой вклад был внесен Н.В. Азбелевым и Е.Л. Тонковым в развитие математического образования. Их ученики успешно работают во многих университетах России и других стран.

При этом и Н.В. Азбелев, и Е.Л. Тонков понимали значение и других математических дисциплин, не связанных уже непосредственно с их работами. Так, например, Е.Л. Тонков говорил одному из авторов о том, что важно возрождение общей топологии; сейчас в Ижевске активно работает группа исследователей, руководимая А.А. Грызловым. Данное классическое направление успешно развивается, что оказывает положительное влияние и на работы в области прикладной математики, в том числе на исследования, проводимые в Екатеринбурге.

§ 1. Обозначения и определения общего характера

Используем стандартную теоретико-множественную символику. Семейством называем множество, все элементы которого — множества. Принимаем аксиому выбора. Каждому объекту x сопоставляем синглетон $\{x\}$, содержащий x в качестве элемента. Через $\mathcal{P}(X)$ обозначаем семейство всех подмножеств (п/м) множества X, $\mathcal{P}'(X) \stackrel{\triangle}{=} \mathcal{P}(X)\setminus\{\emptyset\}$. Если $\mathcal{X}$ — семейство, а Y — множество, то $\mathcal{X}|_Y \stackrel{\triangle}{=} \{X \bigcap Y :\ X \in \mathcal{X}\} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(Y))$. Если же S — множество и $\mathcal{S} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(S))$, то $\mathbf{C}_S[\mathcal{S}] \stackrel{\triangle}{=} \{S \setminus \mathbf{S} :\ \mathbf{S} \in \mathcal{S}\} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(S))$ есть семейство, двойственное по отношению к $\mathcal{S}$. Для всякого непустого семейства $\mathcal{T}$ понимаем $\{\bigcup\}(\mathcal{T})$ и $\{\bigcap\}(\mathcal{T})$ в смысле [5, (1.2)] и [5, (1.3)] соответственно.

Рассмотрим некоторые специальные семейства: π-системы, решетки, топологии. Фиксируем до конца статьи непустое множество E. Тогда

$$\pi[E] \stackrel{\triangle}{=} \{\ \mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))|\ (\emptyset \in \mathcal{E})\&(E \in \mathcal{E})\&(\ A \bigcap B \in \mathcal{E}\ \forall A \in \mathcal{E}\ \forall B \in \mathcal{E})\}$$

есть семейство всех π-систем п/м E с «нулем» и «единицей»;

$$(\mathrm{top})[E] \stackrel{\triangle}{=} \big\{\tau \in \pi[E]\big|\ \bigcup_{G\in\mathcal{G}} G \in \tau\ \forall \mathcal{G} \in \mathcal{P}'(\tau)\big\}$$

[1]Работа поддержана РФФИ (гранты №№ 13–01–00304, 13–04–00847).

есть множество всех топологий на E;

$$(\mathrm{LAT})_0[E] \triangleq \{\, \mathcal{L} \in \pi[E]|\ A \bigcup B \in \mathcal{L}\ \forall A \in \mathcal{L}\ \forall B \in \mathcal{L}\}$$

есть семейство всех решеток п/м E с «нулем» и «единицей»; $(\mathrm{top})[E] \subset (\mathrm{LAT})_0[E] \subset \pi[E]$. При $\tau \in (\mathrm{top})[E]$ и $A \in \mathcal{P}(E)$ через $\mathrm{cl}(A, \tau)$ обозначаем замыкание A в ТП (E, τ).

Фильтры π-систем. Введем в рассмотрение множества фильтров и у/ф произвольной π-системы п/м E. Итак, фиксируем до конца раздела π-систему $\mathcal{E} \in \pi[E]$ и полагаем, что

$$\mathbb{F}^*(\mathcal{E}) \triangleq \{\mathcal{F} \in \mathcal{P}'(\mathcal{E}\setminus\{\emptyset\})|(A \bigcap B \in \mathcal{F}\ \forall A \in \mathcal{F}\ \forall B \in \mathcal{F})\ \&\ \big(\forall F \in \mathcal{F}\ \forall \Sigma \in \mathcal{E}\ (F \subset \Sigma) \Longrightarrow (\Sigma \in \mathcal{F})\big)\big\}, \tag{1.1}$$

$$\mathbb{F}_0^*(\mathcal{E}) \triangleq \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{E})|\ \forall \mathcal{F} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{E})\ \ (\mathcal{U} \subset \mathcal{F}) \Longrightarrow (\mathcal{U} = \mathcal{F})\} \tag{1.2}$$

((1.1) и (1.2) — непустые семейства; заметим также, что в (1.1), (1.2) допустимо полагать $\mathcal{E} \in (\mathrm{top})[E]$). Полагаем $\Phi_{\mathcal{E}}(\Sigma) \triangleq \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{E})|\Sigma \in \mathcal{U}\}\ \forall \Sigma \in \mathcal{E}$. В виде $(\mathbb{UF})[E;\mathcal{E}] \triangleq \{\Phi_{\mathcal{E}}(\Sigma) \colon \Sigma \in \mathcal{E}\}$ получаем непустое семейство п/м $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{E})$. Следуя обозначениям [5, § 1], в виде

$$(\mathrm{clos})[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{E})] = \big\{\mathfrak{F} \in \mathcal{P}'\Big(\mathcal{P}(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{E}))\Big)|\ (\emptyset \in \mathfrak{F})\ \&\ \big(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{E}) \in \mathfrak{F}\big)\ \&\ (\mathcal{A} \bigcup \mathcal{B} \in \mathfrak{F}\ \forall \mathcal{A} \in \mathfrak{F}\ \forall \mathcal{B} \in \mathfrak{F})\ \&\ \big(\bigcap_{\mathcal{H} \in \mathfrak{H}} \mathcal{H} \in \mathfrak{F}\ \ \forall \mathfrak{H} \in \mathcal{P}'(\mathfrak{F})\big)\big\}$$

получаем семейство всех замкнутых топологий [6] на множестве $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{E})$; далее $(\mathrm{op}-\mathrm{BAS})[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{E})]$ и $(\mathrm{cl}-\mathrm{BAS})[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{E})]$ понимаются соответственно в смысле [5, (1.16)] и [5, (1.17)] (семейства открытых и замкнутых баз на $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{E})$). Ясно, что

$$\big(\{\bigcup\}(\mathfrak{B}) \in (\mathrm{top})[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{E})]\ \forall \mathfrak{B} \in (\mathrm{op}-\mathrm{BAS})[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{E})]\big)\&\big(\{\bigcap\}(\tilde{\mathfrak{B}}) \in (\mathrm{clos})[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{E})]\ \forall \tilde{\mathfrak{B}} \in (\mathrm{cl}-\mathrm{BAS})[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{E})]\big)$$

(введены топологии (открытые и замкнутые [6]), порожденные соответствующими базами); $(\mathbb{UF})[E;\mathcal{E}] \in (\mathrm{op}-\mathrm{BAS})[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{E})]$, а топология

$$\mathbf{T}_{\mathcal{E}}^*[E] \triangleq \big\{\bigcup\big\}\big((\mathbb{UF})[E;\mathcal{E}]\big) = \{\mathbb{G} \in \mathcal{P}\big(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{E})\big)|\ \forall \mathcal{U} \in \mathbb{G}\ \exists U \in \mathcal{U} :\ \Phi_{\mathcal{E}}(U) \subset \mathbb{G}\} \in (\mathrm{top})[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{E})] \tag{1.3}$$

превращает $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{E})$ в T_2-пространство. Пусть до конца настоящего раздела $\mathcal{E} \in (\mathrm{LAT})_0[E]$. Тогда [5, § 6] $(\mathbb{UF})[E;\mathcal{E}] \in (\mathrm{cl}-\mathrm{BAS})[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{E})]$ и $\{\bigcap\}\big((\mathbb{UF})[E;\mathcal{E}]\big) \in (\mathrm{clos})[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{E})]$, а (открытая) топология

$$\mathbf{T}_{\mathcal{E}}^0[E] \triangleq \mathbf{C}_{\mathbb{F}_0^*(\mathcal{E})}[\{\bigcap\}\big((\mathbb{UF})[E;\mathcal{E}]\big)] \in (\mathrm{top})[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{E})]$$

превращает $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{E})$ в компактное T_1-пространство (см. [5, предложение 6.1]); итак, на $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{E})$ определены (при $\mathcal{E} \in (\mathrm{LAT})_0[E]$) две характерные топологии: $\mathbf{T}_{\mathcal{E}}^*[E]$ и $\mathbf{T}_{\mathcal{E}}^0[E]$. Согласно [2, предложение 4.1] $\mathbf{T}_{\mathcal{E}}^0[E] \subset \mathbf{T}_{\mathcal{E}}^*[E]$.

§ 2. Некоторые свойства открытых ультрафильтров

Фиксируем до конца статьи произвольную топологию $\tau \in (\mathrm{top})[E]$, получая топологическое пространство (ТП) (E, τ), где E — непустое множество. Как уже отмечалось, в этом случае $\tau \in (\mathrm{LAT})_0[E]$, а потому имеем топологии $\mathbf{T}_\tau^*[E]$ и $\mathbf{T}_\tau^0[E]$ на непустом множестве $\mathbb{F}_0^*(\tau)$. Тогда [2, (8.12)]

$$\mathbf{T}_\tau^0[E] = \mathbf{T}_\tau^*[E]; \tag{2.1}$$

получающееся при оснащении множества $\mathbb{F}_0^*(\tau)$ топологией (2.1) пространство

$$(\mathbb{F}_0^*(\tau), \mathbf{T}_\tau^*[E]) = (\mathbb{F}_0^*(\tau), \mathbf{T}_\tau^0[E]) \tag{2.2}$$

есть непустой нульмерный компакт (см. [2, (8.14)]). Мы приведем ниже некоторые дополнительные свойства упомянутого ТП. Отметим, что при $\mathcal{G} \in \mathcal{P}'(\tau)$ определено множество

$$\Phi_\tau(\bigcup_{G\in\mathcal{G}} G) \in \mathbf{T}^*_\tau[E] \bigcap \mathbf{C}_{\mathbb{F}^*_0(\tau)}[\mathbf{T}^*_\tau[E]] \tag{2.3}$$

и, более того, справедливо равенство

$$\Phi_\tau(\bigcup_{G\in\mathcal{G}} G) = \mathrm{cl}(\bigcup_{G\in\mathcal{G}} \Phi_\tau(G), \mathbf{T}^*_\tau[E]). \tag{2.4}$$

З а м е ч а н и е 2.1. Проверим (2.4). Из определений легко следует, что $\forall G_1 \in \tau\ \forall G_2 \in \tau$

$$(G_1 \subset G_2) \Longrightarrow \big(\Phi_\tau(G_1) \subset \Phi_\tau(G_2)\big).$$

Поэтому из (2.3) непосредственно следует, что

$$\mathrm{cl}\big(\bigcup_{G\in\mathcal{G}} \Phi_\tau(G), \mathbf{T}^*_\tau[E]\big)\subset \Phi_\tau\big(\bigcup_{G\in\mathcal{G}} G\big).$$

Пусть $\mathfrak{U} \in \Phi_\tau\big(\bigcup\limits_{G\in\mathcal{G}} G\big)$. Тогда из определений вытекает, что $\big(\bigcup\limits_{G\in\mathcal{G}} G\big)\bigcap U \neq \emptyset \quad \forall U \in \mathfrak{U}$. Семейство $\mathbf{U} \triangleq$ $\triangleq \{\Phi_\tau(U) : U \in \mathfrak{U}\}$ есть локальная база ТП (2.2) в точке $\mathfrak{U}$. Пусть $V \in \mathfrak{U}$. Тогда для некоторого $\Gamma \in \mathcal{G}$ имеем $\Gamma \bigcap V \in \tau \setminus \{\emptyset\}$ и (см. (1.1))

$$\Phi_\tau(\Gamma \bigcap V) = \Phi_\tau(\Gamma) \bigcap \Phi_\tau(V) \neq \emptyset.$$

Тем более $\big(\bigcup\limits_{G\in\mathcal{G}} \Phi_\tau(G)\big)\bigcap \Phi_\tau(V) \neq \emptyset$. Поскольку выбор V был произвольным, установлено, что

$$\big(\bigcup_{G\in\mathcal{G}} \Phi_\tau(G)\big)\bigcap \mathbb{H} \neq \emptyset \quad \forall \mathbb{H} \in \mathbf{U}.$$

В этом случае $\mathfrak{U} \in \mathrm{cl}\big(\bigcup\limits_{G\in\mathcal{G}} \Phi_\tau(G), \mathbf{T}^*_\tau[E]\big)$, чем завершается проверка вложения

$$\Phi_\tau\big(\bigcup_{G\in\mathcal{G}} G\big)\subset \mathrm{cl}\big(\bigcup_{G\in\mathcal{G}} \Phi_\tau(G), \mathbf{T}^*_\tau[E]\big),$$

а следовательно и равенства (2.4). □

Поскольку база $(\mathbb{UF})[E;\tau] \in (\mathrm{op}-\mathrm{BAS})[\mathbb{F}_0(\mathcal{E})]$ порождает топологию (2.1), из (2.4) вытекает свойство экстремальной несвязности [7, с. 540] ТП (2.2).

П р е д л о ж е н и е 2.1. *Топология* (2.1) *превращает* $\mathbb{F}^*_0(\tau)$ *в экстремально несвязное ТП.*

Таким образом, (2.2) есть (непустой) экстремально несвязный компакт.

Если $\mathcal{G} \in \mathcal{P}(\tau)$, то полагаем, что $\mathbb{F}^*_0(\tau|\,\mathcal{G}) \triangleq \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}^*_0(\tau)|\mathcal{G} \subset \mathcal{U}\}$. В качестве $\mathcal{G}$ можно использовать тривиальный открытый фильтр

$$N^0_\tau(x) \triangleq \{G \in \tau|\, x \in G\} \in \mathbb{F}^*(\tau),$$

где $x \in E$. Легко видеть, что

$$\mathbb{F}^*_0\big(\tau|\, N^0_\tau(x)\big)\in \mathbf{C}_{\mathbb{F}^*_0(\tau)}\big[\mathbf{T}^*_\tau[E]\big]\setminus\{\emptyset\} \quad \forall x \in E. \tag{2.5}$$

Семейства (2.5) можно рассматривать в привязке к соответствующей точке множества E. Можно принять, что семейство (2.5) — это (всякий раз) некая укрупненная точка. Следуя идейно [3], введем также объединение семейств (2.5), получая, что

$$(\tau - \mathrm{Abs})[E] \triangleq \bigcup_{x\in E} \mathbb{F}^*_0\big(\tau|\, N^0_\tau(x)\big)\in \mathcal{P}'\big(\mathbb{F}^*_0(\tau)\big). \tag{2.6}$$

Множество (2.6) — аналог абсолюта [3]. Справедливо следующее

П р е д л о ж е н и е 2.2. *Множество* (2.6) *всюду плотно в ТП* (2.2).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\mathfrak{U} \in \mathbb{F}_0^*(\tau)$ и $V \in \mathfrak{U}$. Тогда $V \in \tau \setminus \{\emptyset\}$. С учетом этого выберем произвольно $v \in V$ и рассмотрим семейство $\mathbb{F}_0^*\big(\tau|\, N_\tau^0(v)\big)$, для которого (см. (2.6))

$$\mathbb{F}_0^*\big(\tau|\, N_\tau^0(v)\big) \subset (\tau - \mathrm{Abs})[E].$$

При этом $V \in N_\tau^0(v)$. С учетом (2.5) выберем произвольный у/ф $\mathcal{W} \in \mathbb{F}_0^*\big(\tau|\, N_\tau^0(v)\big)$, получая, в частности, что $\mathcal{W} \in (\tau - \mathrm{Abs})[E]$. Вместе с тем $N_\tau^0(v) \subset \mathcal{W}$, а потому $V \in \mathcal{W}$ и, как следствие, $\mathcal{W} \in \Phi_\tau(V)$. Поскольку выбор V был произвольным, установлено, что

$$\Phi_\tau(U) \bigcap (\tau - \mathrm{Abs})[E] \neq \emptyset \quad \forall U \in \mathfrak{U}.$$

Это означает (см. (1.3)), что $\mathfrak{U} \in \mathrm{cl}\big((\tau - \mathrm{Abs})[E], \mathbf{T}_\tau^*[E]\big)$. Итак, $\mathbb{F}_0^*(\tau) \subset \mathrm{cl}\big((\tau - \mathrm{Abs})[E], \mathbf{T}_\tau^*[E]\big)$.
$\square$

С л е д с т в и е 2.1. *Пространство* $\big((\tau - \mathrm{Abs})[E], \mathbf{T}_\tau^*[E]\big|_{(\tau-\mathrm{Abs})[E]}\big)$ *экстремально несвязно.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Полагаем для краткости, что

$$\theta \overset{\triangle}{=} \mathbf{T}_\tau^*[E]\big|_{(\tau-\mathrm{Abs})[E]},$$

получая в виде $\big((\tau - \mathrm{Abs})[E]), \theta\big)$ подпространство ТП (2.2). Воспользуемся теоремой [7, 6.2.26]: в силу предложения 2.2 $\forall \mathbb{G}_1 \in \mathbf{T}_\tau^*[E] \;\; \forall \mathbb{G}_2 \in \mathbf{T}_\tau^*[E]$

$$(\mathbb{G}_1 \bigcap \mathbb{G}_2 = \emptyset) \Longrightarrow \big(\mathrm{cl}(\mathbb{G}_1, \mathbf{T}_\tau^*[E]) \bigcap \mathrm{cl}(\mathbb{G}_2, \mathbf{T}_\tau^*[E]) = \emptyset\big). \tag{2.7}$$

Выберем произвольно $\Gamma_1 \in \theta$ и $\Gamma_2 \in \theta$ со свойством $\Gamma_1 \bigcap \Gamma_2 = \emptyset$. Тогда для некоторых $\mathbb{G}^{(1)} \in \mathbf{T}_\tau^*[E]$ и $\mathbb{G}^{(2)} \in \mathbf{T}_\tau^*[E]$ реализуются равенства

$$\big(\Gamma_1 = (\tau - \mathrm{Abs})[E] \bigcap \mathbb{G}^{(1)}\big) \,\&\, \big(\Gamma_2 = (\tau - \mathrm{Abs})[E] \bigcap \mathbb{G}^{(2)}\big). \tag{2.8}$$

Тогда $\mathbb{G}^{(1)} \bigcap \mathbb{G}^{(2)} = \emptyset$. В самом деле, допустим противное: $\mathbb{G}^{(1)} \bigcap \mathbb{G}^{(2)} \neq \emptyset$. Тогда $\mathbb{W} \overset{\triangle}{=}$ $\overset{\triangle}{=} \mathbb{G}^{(1)} \bigcap \mathbb{G}^{(2)} \in \mathbf{T}_\tau^*[E]$. Пусть $\mathcal{W} \in \mathbb{W}$. Тогда $\mathbb{W} \in N^0_{\mathbf{T}_\tau^*[E]}(\mathcal{W})$, а потому (см. предложение 2.2)

$$\mathbb{W} \bigcap (\tau - \mathrm{Abs})[E] \neq \emptyset. \tag{2.9}$$

При этом $\mathbb{W} \bigcap (\tau - \mathrm{Abs})[E] = \Gamma_1 \bigcap \Gamma_2$ в силу (2.8), а потому (2.9) невозможно по выбору Γ_1, Γ_2. Противоречие показывает, что $\mathbb{G}_1 \bigcap \mathbb{G}_2 = \emptyset$, а тогда из (2.7) следует, что

$$\mathrm{cl}(\mathbb{G}^{(1)}, \mathbf{T}_\tau^*[E]) \bigcap \mathrm{cl}(\mathbb{G}^{(2)}, \mathbf{T}_\tau^*[E]) = \emptyset.$$

Но $\mathrm{cl}(\Gamma_1, \mathbf{T}_\tau^*[E]) \subset \mathrm{cl}(\mathbb{G}^{(1)}, \mathbf{T}_\tau^*[E])$ и $\mathrm{cl}(\Gamma_2, \mathbf{T}_\tau^*[E]) \subset \mathrm{cl}(\mathbb{G}^{(2)}, \mathbf{T}_\tau^*[E])$, а потому

$$\mathrm{cl}(\Gamma_1, \mathbf{T}_\tau^*[E]) \bigcap \mathrm{cl}(\Gamma_2, \mathbf{T}_\tau^*[E]) = \emptyset,$$

откуда легко следует, что $\mathrm{cl}(\Gamma_1, \theta) \bigcap \mathrm{cl}(\Gamma_2, \theta) = \emptyset$. Итак,

$$(\Gamma_1 \bigcap \Gamma_2 = \emptyset) \Longrightarrow \big(\mathrm{cl}(\Gamma_1, \theta) \bigcap \mathrm{cl}(\Gamma_2, \theta) = \emptyset\big).$$

Снова используя [7, 6.2.26], получаем требуемое утверждение. $\square$

З а м е ч а н и е 2.2. Отметим одно полезное свойство открытых ультрафильтров:

$$(\tau - \mathrm{Dens})[E] \overset{\triangle}{=} \{G \in \tau|\, \mathrm{cl}(G, \tau) = E\} \subset \mathcal{U} \quad \forall \mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\tau).$$

§ 3. Проблема различимости множеств (2.5)

Рассмотрим вопросы о том, когда при $x_1 \in E$ и $x_2 \in E \setminus \{x_1\}$ имеют место свойства $\mathbb{F}_0^*\big(\tau|\, N_\tau^0(x_1)\big) \neq \mathbb{F}_0^*\big(\tau|\, N_\tau^0(x_2)\big)$ и $\mathbb{F}_0^*\big(\tau|\, N_\tau^0(x_1)\big) \bigcap \mathbb{F}_0^*\big(\tau|\, N_\tau^0(x_2)\big) = \emptyset$. Начнем со второго, имея в виду аналогии с [3].

Итак, пусть $\bar{x}_1 \in E$, $\bar{x}_2 \in E$ и $\bar{x}_1 \neq \bar{x}_2$. Пусть при этом для некоторых $\mathbb{G}_1 \in N_\tau^0(\bar{x}_1)$ и $\mathbb{G}_2 \in N_\tau^0(\bar{x}_2)$ имеет место $\mathbb{G}_1 \bigcap \mathbb{G}_2 = \emptyset$. Тогда

$$\mathbb{F}_0^*\big(\tau|\, N_\tau^0(\bar{x}_1)\big) \bigcap \mathbb{F}_0^*\big(\tau|\, N_\tau^0(\bar{x}_2)\big) = \emptyset. \tag{3.1}$$

В самом деле, допустим противное, и пусть $\bar{\mathfrak{U}} \in \mathbb{F}_0^*\big(\tau|\, N_\tau^0(\bar{x}_1)\big) \bigcap \mathbb{F}_0^*\big(\tau|\, N_\tau^0(\bar{x}_2)\big)$. Тогда $N_\tau^0(\bar{x}_1) \subset \bar{\mathfrak{U}}$ и $N_\tau^0(\bar{x}_2) \subset \bar{\mathfrak{U}}$. Поэтому $\mathbb{G}_1 \bigcap \mathbb{G}_2 \neq \emptyset$, что невозможно. Итак, (3.1) установлено. Поскольку выбор $\mathbb{G}_1$ и $\mathbb{G}_2$ был произвольным, имеем импликацию

$$\big(\exists\, G_1 \in N_\tau^0(\bar{x}_1)\ \exists\, G_2 \in N_\tau^0(\bar{x}_2) :\ G_1 \bigcap G_2 = \emptyset\big) \Longrightarrow \Big(\mathbb{F}_0^*\big(\tau|\, N_\tau^0(\bar{x}_1)\big) \bigcap \mathbb{F}_0^*\big(\tau|\, N_\tau^0(\bar{x}_2)\big) = \emptyset\Big). \tag{3.2}$$

Пусть, напротив, $\mathbb{F}_0^*\big(\tau|\, N_\tau^0(\bar{x}_1)\big) \bigcap \mathbb{F}_0^*\big(\tau|\, N_\tau^0(\bar{x}_2)\big) = \emptyset$. Допустим, однако, что

$$G_1 \bigcap G_2 \neq \emptyset \quad \forall G_1 \in N_\tau^0(\bar{x}_1) \quad \forall G_2 \in N_\tau^0(\bar{x}_2).$$

Рассмотрим семейство $N_\tau^0(\bar{x}_1) \bigcup N_\tau^0(\bar{x}_2) \in \mathcal{P}'(\tau)$, которое (при нашем предположении) центрировано, после чего введем семейство $\mathcal{T}$ всех конечных пересечений множеств из $N_\tau^0(\bar{x}_1) \bigcup N_\tau^0(\bar{x}_2)$. Ясно, что $\mathcal{T} \subset \tau$. Кроме того, $\mathcal{T}$ есть база фильтра, а потому

$$\mathcal{F} \stackrel{\triangle}{=} \{G \in \tau |\, \exists\, T \in \mathcal{T} :\ T \subset G\} \in \mathbb{F}^*(\tau),$$

и для некоторого у/ф $\mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\tau)$ имеет место $\mathcal{F} \subset \mathcal{U}$. В итоге

$$N_\tau^0(\bar{x}_1) \bigcup N_\tau^0(\bar{x}_2) \subset \mathcal{T} \subset \mathcal{F} \subset \mathcal{U},$$

что доставляет, в частности, свойство $\mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*\big(\tau|\, N_\tau^0(\bar{x}_1)\big) \bigcap \mathbb{F}_0^*\big(\tau|\, N_\tau^0(\bar{x}_2)\big)$. Последнее невозможно, а стало быть, $\exists\, G_1 \in N_\tau^0(\bar{x}_1)\ \ \exists\, G_2 \in N_\tau^0(\bar{x}_2) :\ G_1 \bigcap G_2 = \emptyset$. Получили импликацию, противоположную (3.2), и, поскольку выбор $\bar{x}_1$ и $\bar{x}_2$ был произвольным, имеем $\forall x_1 \in E\ \ \forall x_2 \in E \setminus \{x_1\}$

$$\Big(\mathbb{F}_0^*\big(\tau|\, N_\tau^0(x_1)\big) \bigcap \mathbb{F}_0^*\big(\tau|\, N_\tau^0(x_2)\big) = \emptyset\Big) \Longleftrightarrow \big(\exists\, G_1 \in N_\tau^0(x_1)\ \ \exists\, G_2 \in N_\tau^0(x_2) :\ G_1 \bigcap G_2 = \emptyset\big). \tag{3.3}$$

Из (3.3) непосредственно следует

П р е д л о ж е н и е 3.1. *Эквивалентны следующие условия:*
1) (E, τ) *есть* T_2*-пространство;*
2) $\mathbb{F}_0^*\big(\tau|\, N_\tau^0(x_1)\big) \bigcap \mathbb{F}_0^*\big(\tau|\, N_\tau^0(x_2)\big) = \emptyset \quad \forall x_1 \in E \quad \forall x_2 \in E \setminus \{x_1\}$.

Вернемся к первому вопросу (см. начало настоящего раздела).

О п р е д е л е н и е 3.1. Будем говорить, что точки $x_1 \in E$ и $x_2 \in E$ $\ T_{[0]}$-отделимы в (E, τ), если

$$\Big(\exists\, G_1 \in \tau :\ \big(x_1 \in \mathrm{cl}(G_1, \tau)\big)\ \&\ \big(x_2 \notin \mathrm{cl}(G_1, \tau)\big)\Big) \vee \Big(\exists\, G_2 \in \tau :\ \big(x_1 \notin \mathrm{cl}(G_2, \tau)\big)\ \&\ \big(x_2 \in \mathrm{cl}(G_2, \tau)\big)\Big). \tag{3.4}$$

П р е д л о ж е н и е 3.2. *Пусть точки* $\bar{x}_1 \in E$ *и* $\bar{x}_2 \in E \setminus \{\bar{x}_1\}$ $\ T_{[0]}$*-отделимы в* (E, τ)*. Тогда*

$$\mathbb{F}_0^*\big(\tau|\, N_\tau^0(\bar{x}_1)\big) \neq \mathbb{F}_0^*\big(\tau|\, N_\tau^0(\bar{x}_2)\big).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Допустим для определенности, что реализуется первая возможность в (3.4): для некоторого $V \in \tau$ имеем $\bar{x}_1 \in \mathrm{cl}(V,\tau)$ и $\bar{x}_2 \notin \mathrm{cl}(V,\tau)$ Тогда $V \bigcap G \neq \emptyset$ $\forall G \in N^0_\tau(\bar{x}_1)$. В этом случае $\mathcal{A} \overset{\triangle}{=} N^0_\tau(\bar{x}_1) \bigcup \{V\}$ есть центрированное подсемейство τ, а семейство $\mathcal{B}$ всех конечных пересечений множеств из $\mathcal{A}$ является базой фильтра; поэтому $\mathcal{G} \overset{\triangle}{=} \{G \in \tau | \exists B \in \mathcal{B} : B \subset G\} \in \mathbb{F}^*(\tau)$, причем $\mathcal{G} \subset \mathcal{U}$ для некоторого у/ф $\mathcal{U} \in \mathbb{F}^*_0(\tau)$. Тогда $\mathcal{A} \subset \mathcal{B} \subset \mathcal{G} \subset \mathcal{U}$ (напомним, что $\mathcal{B} \subset \tau$). При этом, в частности, $N^0_\tau(\bar{x}_1) \subset \mathcal{U}$, а потому $\mathcal{U} \in \mathbb{F}^*_0\big(\tau | N^0_\tau(\bar{x}_1)\big)$. Вместе с тем $\mathcal{U} \notin \mathbb{F}^*_0\big(\tau | N^0_\tau(\bar{x}_2)\big)$. Действительно, $W \overset{\triangle}{=} E \setminus \mathrm{cl}(V,\tau) \in \tau$, причем $\bar{x}_2 \in W$. Стало быть, $W \in N^0_\tau(\bar{x}_2)$, причем $V \bigcap W = \emptyset$ (в самом деле, $V \subset \mathrm{cl}(V,\tau)$), где $V \in \mathcal{U}$. По аксиомам фильтра $W \notin \mathcal{U}$, а потому $W \in N^0_\tau(\bar{x}_2) \setminus \mathcal{U}$ и, стало быть, $N^0_\tau(\bar{x}_2) \setminus \mathcal{U} \neq \emptyset$; итак, $\mathcal{U} \notin \mathbb{F}^*_0\big(\tau | N^0_\tau(\bar{x}_2)\big)$, то есть

$$\mathcal{U} \in \mathbb{F}^*_0\big(\tau | N^0_\tau(\bar{x}_1)\big) \backslash \mathbb{F}^*_0\big(\tau | N^0_\tau(\bar{x}_2)\big).$$

В итоге $\mathbb{F}^*_0\big(\tau | N^0_\tau(\bar{x}_1)\big) \neq \mathbb{F}^*_0\big(\tau | N^0_\tau(\bar{x}_2)\big)$. Вторая возможность в (3.4) приводит к аналогичному результату, чем и завершается доказательство. $\square$

П р е д л о ж е н и е 3.3. *Пусть* $\bar{x}_1 \in E$, $\bar{x}_2 \in E \backslash \{\bar{x}_1\}$ *и при этом* $\mathbb{F}^*_0\big(\tau | N^0_\tau(\bar{x}_1)\big) \neq \mathbb{F}^*_0\big(\tau | N^0_\tau(\bar{x}_2)\big)$. *Тогда точки* $\bar{x}_1$ *и* $\bar{x}_2$ $T_{[0]}$*-отделимы в* (E,τ).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть (3.4) не выполнено. Это означает, что

$$\Big(\forall G_1 \in \tau : \ \big(\bar{x}_1 \notin \mathrm{cl}(G_1,\tau)\big) \vee \big(\bar{x}_2 \in \mathrm{cl}(G_1,\tau)\big)\Big) \ \& \ \Big(\forall G_2 \in \tau : \ \big(\bar{x}_1 \in \mathrm{cl}(G_2,\tau)\big) \vee \big(\bar{x}_2 \notin \mathrm{cl}(G_2,\tau)\big)\Big).$$

Фиксируем множество $\mathbb{G} \in \tau$, получая, как следствие, что

$$\Big(\big(\bar{x}_1 \notin \mathrm{cl}(\mathbb{G},\tau)\big) \vee \big(\bar{x}_2 \in \mathrm{cl}(\mathbb{G},\tau)\big)\Big) \ \& \ \Big(\big(\bar{x}_1 \in \mathrm{cl}(\mathbb{G},\tau)\big) \vee \big(\bar{x}_2 \notin \mathrm{cl}(\mathbb{G},\tau)\big)\Big). \tag{3.5}$$

Если $\bar{x}_1 \in \mathrm{cl}(\mathbb{G},\tau)$, то $\rceil \big(\bar{x}_1 \notin \mathrm{cl}(\mathbb{G},\tau)\big)$ и (см. (3.5)) $\bar{x}_2 \in \mathrm{cl}(\mathbb{G},\tau)$. Итак,

$$\big(\bar{x}_1 \in \mathrm{cl}(\mathbb{G},\tau)\big) \Longrightarrow \big(\bar{x}_2 \in \mathrm{cl}(\mathbb{G},\tau)\big). \tag{3.6}$$

Аналогично устанавливается, что $\big(\bar{x}_2 \in \mathrm{cl}(\mathbb{G},\tau)\big) \Longrightarrow \big(\bar{x}_1 \in \mathrm{cl}(\mathbb{G},\tau)\big)$; с учетом (3.6) это означает, коль скоро выбор $\mathbb{G}$ был произвольным, что $\forall G \in \tau$

$$\big(\bar{x}_1 \in \mathrm{cl}(G,\tau)\big) \Longleftrightarrow \big(\bar{x}_2 \in \mathrm{cl}(G,\tau)\big). \tag{3.7}$$

Тогда $\mathbb{F}^*_0\big(\tau | N^0_\tau(\bar{x}_1)\big) = \mathbb{F}^*_0\big(\tau | N^0_\tau(\bar{x}_2)\big)$. В самом деле, пусть $\mathcal{V} \in \mathbb{F}^*_0\big(\tau | N^0_\tau(\bar{x}_1)\big)$; пусть, кроме того, $V \in \mathcal{V}$. При этом $N^0_\tau(\bar{x}_1) \subset \mathcal{V}$. Тогда $\bar{x}_1 \in \mathrm{cl}(V,\tau)$ (действительно, при $\bar{x}_1 \notin \mathrm{cl}(V,\tau)$ имеем $E \backslash \mathrm{cl}(V,\tau) \in N^0_\tau(\bar{x}_1)$ и, в частности, $E \backslash \mathrm{cl}(V,\tau) \in \mathcal{V}$, причем $V \bigcap \big(E \backslash \mathrm{cl}(V,\tau)\big) = \emptyset$, что невозможно по аксиомам фильтра, так как $V \in \mathcal{V}$). При этом, однако, в силу (3.7)

$$\big(\bar{x}_1 \in \mathrm{cl}(V,\tau)\big) \Longleftrightarrow \big(\bar{x}_2 \in \mathrm{cl}(V,\tau)\big)$$

и, как следствие, $\bar{x}_2 \in \mathrm{cl}(V,\tau)$. Тогда $G \bigcap V \neq \emptyset \ \ \forall G \in N^0_\tau(\bar{x}_2)$. Поскольку выбор V был произвольным, установлено, что $G \bigcap U \neq \emptyset \ \ \forall U \in \mathcal{V} \ \ \forall G \in N^0_\tau(\bar{x}_2)$. Тогда в силу максимальности $\mathcal{V}$ имеем, что $N^0_\tau(\bar{x}_2) \subset \mathcal{V}$, то есть $\mathcal{V} \in \mathbb{F}^*_0\big(\tau | N^0_\tau(\bar{x}_2)\big)$. Установили вложение

$$\mathbb{F}^*_0\big(\tau | N^0_\tau(\bar{x}_1)\big) \subset \mathbb{F}^*_0\big(\tau | N^0_\tau(\bar{x}_2)\big). \tag{3.8}$$

Аналогичным образом проверяется, что $\mathbb{F}^*_0\big(\tau | N^0_\tau(\bar{x}_2)\big) \subset \mathbb{F}^*_0\big(\tau | N^0_\tau(\bar{x}_1)\big)$. Следовательно (см. (3.8)), нужное равенство

$$\mathbb{F}^*_0\big(\tau | N^0_\tau(\bar{x}_1)\big) = \mathbb{F}^*_0\big(\tau | N^0_\tau(\bar{x}_2)\big) \tag{3.9}$$

установлено. Итак, если (3.4) не выполнено, то справедливо (3.9). Как следствие, получаем, что при $\mathbb{F}^*_0\big(\tau | N^0_\tau(\bar{x}_1)\big) \neq \mathbb{F}^*_0\big(\tau | N^0_\tau(\bar{x}_2)\big)$ непременно имеет место (3.4), то есть $\bar{x}_1$ и $\bar{x}_2$ $T_{[0]}$-отделимы в (E,τ). $\square$

Из предложений 3.2 и 3.3 вытекает следующая

Т е о р е м а 3.1. *Если $x_1 \in E$ и $x_2 \in E \setminus \{x_1\}$, то эквивалентны следующие два условия:*
1) $\mathbb{F}_0^*(\tau | N_\tau^0(x_1)) \neq \mathbb{F}_0^*(\tau | N_\tau^0(x_2))$;
2) *точки x_1 и x_2 $T_{[0]}$-отделимы в (E, τ).*

О п р е д е л е н и е 3.2. Будем называть (E, τ) $T_{[0]}$-пространством, если при всяком выборе $x_1 \in E$ и $x_2 \in E \setminus \{x_1\}$ точки x_1, x_2 $T_{[0]}$-отделимы в (E, τ).

Из определения 3.2 следует теперь

Т е о р е м а 3.2. *Для того чтобы*

$$\mathbb{F}_0^*(\tau | N_\tau^0(x_1)) \neq \mathbb{F}_0^*(\tau | N_\tau^0(x_2)) \quad \forall x_1 \in E \quad \forall x_2 \in E \setminus \{x_1\},$$

необходимо и достаточно, чтобы (E, τ) было $T_{[0]}$-пространством.

П р е д л о ж е н и е 3.4. *Из того, что (E, τ) есть T_2-пространство, следует, что (E, τ) является $T_{[0]}$-пространством.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть (E, τ) есть T_2-пространство. Пусть, далее, $x_1 \in E, x_2 \in E \setminus \{x_1\}$. Тогда для некоторых $G_1 \in N_\tau^0(x_1)$ и $G_2 \in N_\tau^0(x_2)$ имеем $G_1 \bigcap G_2 = \emptyset$. При этом $E \setminus G_2$ есть замкнутое в (E, τ) множество, для которого $G_1 \subset E \setminus G_2$. Тогда $\mathrm{cl}(G_1, \tau) \subset E \setminus G_2$, а потому $x_2 \notin \mathrm{cl}(G_1, \tau)$, где $x_1 \in \mathrm{cl}(G_1, \tau)$. С учетом определения 3.1 получаем (поскольку x_1 и x_2 выбирались произвольно), что (E, τ) есть $T_{[0]}$-пространство.

П р е д л о ж е н и е 3.5. *Из того, что (E, τ) есть $T_{[0]}$-пространство, следует, что (E, τ) является T_0-пространством.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть (E, τ) есть $T_{[0]}$-пространство. Выберем произвольно $\bar{x}_1 \in E$ и $\bar{x}_2 \in E \setminus \{\bar{x}_1\}$. Тогда согласно определению 3.1 имеем свойство (3.4). Пусть $V \in \tau$ таково, что

$$\big(\bar{x}_1 \in \mathrm{cl}(V, \tau)\big) \,\&\, \big(\bar{x}_2 \notin \mathrm{cl}(V, \tau)\big). \tag{3.10}$$

Тогда $W \overset{\triangle}{=} E \setminus \mathrm{cl}(V, \tau) \in \tau$ и при этом $\bar{x}_1 \notin W$. Вместе с тем $\bar{x}_2 \in W$ согласно (3.10), а тогда $W \in N_\tau^0(\bar{x}_2)$. Итак,

$$\Big(\exists\, G_1 \in \tau :\ \big(\bar{x}_1 \in \mathrm{cl}(G_1, \tau)\big) \,\&\, \big(\bar{x}_2 \notin \mathrm{cl}(G_1, \tau)\big)\Big) \Longrightarrow \big(\exists\, G \in N_\tau^0(\bar{x}_2) :\ \bar{x}_1 \notin G\big). \tag{3.11}$$

Аналогичным образом устанавливается истинность импликации

$$\Big(\exists\, G_2 \in \tau :\ \big(\bar{x}_1 \notin \mathrm{cl}(G_2, \tau)\big) \,\&\, \big(\bar{x}_2 \in \mathrm{cl}(G_2, \tau)\big)\Big) \Longrightarrow \big(\exists\, G \in N_\tau^0(\bar{x}_1) :\ \bar{x}_2 \notin G\big).$$

С учетом (3.11) получаем теперь (напомним об истинности (3.4)), что

$$\big(\exists\, G' \in N_\tau^0(\bar{x}_1) :\ \bar{x}_2 \notin G'\big) \vee \big(\exists\, G'' \in N_\tau^0(\bar{x}_2) :\ \bar{x}_1 \notin G''\big).$$

Поскольку $\bar{x}_1$ и $\bar{x}_2$ выбирались произвольно, установлено, что (E, τ) есть T_0-пространство. $\square$

З а м е ч а н и е 3.1. Из того, что (E, τ) есть T_1-пространство, не следует, вообще говоря, что (E, τ) является $T_{[0]}$-пространством. В самом деле, пусть $E = \{1; 2; \ldots\}$ (натуральный ряд), а $\mathcal{K}$ есть def семейство всех конечных п/м E. Рассмотрим случай $\tau \overset{\triangle}{=} \{E \setminus K \ :\ K \in \mathcal{K}\} \bigcup \{\emptyset\}$. Тогда (E, τ) есть T_1-пространство. Покажем, что (E, τ) не является $T_{[0]}$-пространством. Действительно, семейство всех замкнутых в (E, τ) п/м E есть $\mathcal{K} \bigcup \{E\}$. Если предположить выполнение (3.4) для некоторых $x_1 \in E$ и $x_2 \in E \setminus \{x_1\}$, то должно существовать открытое в (E, τ) множество $\mathbb{G}$, замыкание которого, то есть множество $\mathrm{cl}(\mathbb{G}, \tau)$, содержит ровно одну точку из $\{x_1; x_2\}$. Тогда $\mathbb{G} \neq \emptyset$, а потому оно бесконечно, и, стало быть, $\mathrm{cl}(\mathbb{G}, \tau) = E$, так как $\mathbb{G} \subset \mathrm{cl}(\mathbb{G}, \tau)$. Но тогда при $x_1 \in E$ и $x_2 \in E \setminus \{x_1\}$ (3.4) невозможно. Из определения 3.1 имеем, что (E, τ) не является $T_{[0]}$-пространством.

З а м е ч а н и е 3.2. Если (E, τ) является T_0-пространством, но не T_1-пространством, то также возможен случай, когда (E, τ) не есть $T_{[0]}$-пространство. В самом деле, снова полагаем $E = \{1; 2; \ldots\}$, а τ определяем условием $\tau = \{\overrightarrow{n, \infty} \ :\ n \in E\} \bigcup \{\emptyset\}$, где $\overrightarrow{m, \infty} \overset{\triangle}{=} \{k \in E |\ m \leqslant k\} \quad \forall m \in E$. Здесь семейство п/м E, замкнутых в (E, τ), имеет вид $\{\overline{1, n} \ :\ n \in E\} \bigcup \{\emptyset; E\}$, где $\overline{1, m} \overset{\triangle}{=} \{k \in E |\ k \leqslant m\} \quad \forall m \in E$. При этом каждое множество $G \in \tau \setminus \{\emptyset\}$ есть $\overrightarrow{n, \infty}$ при некотором $n \in E$, а потому $\mathrm{cl}(G, \tau) = E$. В данном случае (3.4) невозможно, а стало быть, (E, τ) не есть $T_{[0]}$-пространство (учитываем, что $\mathrm{cl}(\emptyset, \tau) = \emptyset$). При этом, как легко видеть, (E, τ) есть T_0-, но не T_1-пространство. $\square$

Список литературы

1. Пыткеев Е.Г., Ченцов А.Г. К вопросу о структуре ультрафильтров и свойствах, связанных со сходимостью в топологических пространствах // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2014. Т. 20. № 2. С. 250–267.
2. Ченцов А.Г., Пыткеев Е.Г. Некоторые топологические конструкции расширений абстрактных задач о достижимости // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2014. Т. 20. № 4. С. 312—329.
3. Илиадис С.Д., Фомин С.В. Метод центрированных систем в теории топологических пространств // Успехи математических наук. 1966. Т. 21. № 4 (130). С. 47–76.
4. Пыткеев Е.Г., Ченцов А.Г. Некоторые конструкции расширений с применением ультрафильтров топологических пространств // Тезисы докладов Всероссийской конфренции с международным участием «Теория управления и математическое моделирование», посвященной памяти профессора Н.В. Азбелева и профессора Е.Л. Тонкова. УдГУ. Ижевск, 2015. С. 331–333.
5. Ченцов А.Г. Фильтры и ультрафильтры в конструкциях множеств притяжения // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2011. № 1. С. 113–142.
6. Александров П.С. Введение в теорию множеств и общую топологию. М.: Едиториал УРСС, 2004. 368 с. ISBN: 5-354-00822-0
7. Энгелькинг Р. Общая топология. М.: Мир, 1986. 752 с.

Поступила в редакцию 06.10.2015

Пыткеев Евгений Георгиевич, д. ф.-м. н, ведущий научный сотрудник, Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского Уральского отделения Российской академии наук, 620990, Россия, г. Екатеринбург, ул. Софьи Ковалевской, 16; профессор, Уральский федеральный университет, 620002, Россия, г. Екатеринбург, ул. Мира, 19.
E-mail: pyt@imm.uran.ru

Ченцов Александр Георгиевич, член-корреспондент РАН, главный научный сотрудник, Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского Уральского отделения Российской академии наук, 620990, Россия, г. Екатеринбург, ул. Софьи Ковалевской, 16; профессор, Уральский федеральный университет, 620002, Россия, г. Екатеринбург, ул. Мира, 19.
E-mail: chentsov@imm.uran.ru

E. G. Pytkeev, A. G. Chentsov

Some properties of open ultrafilters

Keywords: neighborhood, topology, ultrafilter, centered system.

MSC: 54A20

We study the space of ultrafilters for an arbitrary topological space under natural equipment similar to that used in construction of Stone compactum. It is showed that above ultrafilters space is extremely disconnected compactum. We consider the families of sets in the space of ultrafilters majorizing (any time) the filter of open neighborhoods of a fixed point of initial space. Conditions guaranteeing mutually disjointness and distinguishability of sets for the given family are investigated; in particular, a special axiom of separability connected with support of mentioned distinguishability is introduced.

REFERENCES

1. Pytkeev E.G., Chentsov A.G. On the structure of ultrafilters and properties related to convergence in topological spaces, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2015, vol. 289, Issue 1 Supplement, pp. 164–181. DOI: 10.1134/S0081543815050156
2. Chentsov A.G., Pytkeev E.G. Some topological structures of extensions of abstract reachability problems, *Tr. Inst. Mat. Mekh. Ural. Otd. Ross. Akad. Nauk*, 2014, vol. 20, no. 4, pp. 312–329 (in Russian).
3. Iliadis S.D., Fomin S.V. The method of centred systems in the theory of topological spaces, *Russian Mathematical Surveys*, 1966, vol. 21, no. 4, pp. 37–62. DOI: 10.1070/RM1966v021n04ABEH004165
4. Pytkeev E.G., Chentsov A.G. Some structures of extensions using ultrafilters of topological spaces, *Teoriya upravleniya i matematicheskoe modelirovanie: tez. dokl. Vserossiiskoi konferentsii* (Control Theory and Mathematical Modeling: abstracts of All-Russian conference), Udmurt State University, Izhevsk, 2015, pp. 331–333 (in Russian).
5. Chentsov A.G. Filters and ultrafilters in the constructions of attraction sets, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2011, no. 1, pp. 113–142 (in Russian).
6. Aleksandrov P.S. *Vvedenie v teoriyu mnozhestv i obshchuyu topologiyu* (Introduction to the theory of sets and general topology), Moscow: Editorial URSS, 2004, 368 p.

7. Engelking R. *General Topology*, Warsaw: Polish Scientific Publishers, 1977, 626 p. Translated under the title *Obshchaya topologiya*, Moscow: Mir, 1986, 752 p.

Received 06.10.2015

Pytkeev Evgenii Georgievich, Doctor of Physics and Mathematics, Leading Researcher, Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. S. Kovalevskoi, 16, Yekaterinburg, 620990, Russia; Professor, Ural Federal University, ul. Mira, 19, Yekaterinburg, 620002, Russia.
E-mail: pyt@imm.uran.ru

Chentsov Aleksandr Georgievich, Corresponding Member, Russian Academy of Sciences, Chief Researcher, Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. S. Kovalevskoi, 16, Yekaterinburg, 620990, Russia; Professor, Ural Federal University, ul. Mira, 19, Yekaterinburg, 620002, Russia.
E-mail: chentsov@imm.uran.ru