УДК 517.926

© *Т. В. Салова*

ОБ ЭФФЕКТИВНОСТИ ГАМИЛЬТОНОВЫХ РАВНОМЕРНО МАЛЫХ И БЕСКОНЕЧНО МАЛЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ ГАМИЛЬТОНОВЫХ СИСТЕМ

Доказано, что множество всех предельных значений произвольного показателя решений линейной гамильтоновой системы при равномерно малых возмущениях линейной гамильтоновой системы совпадает с аналогичным множеством, получаемым при равномерно малых гамильтоновых возмущениях. Кроме того, установлено совпадение множества всех значений произвольного показателя решений линейной гамильтоновой системы при бесконечно малых ее возмущениях с аналогичным множеством, получаемым при бесконечно малых гамильтоновых ее возмущениях.

Ключевые слова: линейные системы, гамильтоновы системы, показатели Ляпунова, равномерно малые возмущения, бесконечно малые возмущения.

Введение

Для заданного $m \in \mathbb{N}$ обозначим через $\mathcal{M}^m$ пространство линейных систем вида

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^m, \quad t \in \mathbb{R}^+ \equiv [0, \infty), \tag{0.1}$$

с ограниченной кусочно-непрерывной оператор-функцией A. Линейное пространство $\mathcal{M}^m$ всех таких систем наделим равномерной на полупрямой $t \in \mathbb{R}^+$ топологией, задаваемой нормой

$$\|A\| = \sup_{t \in \mathbb{R}^+} |A(t)|, \quad |A(t)| = \sup_{|x|=1} |A(t)x|.$$

Каждую систему (0.1) отождествим с задающей ее функцией A, через $X(t, \tau)$, где $t, \tau \in \mathbb{R}^+$, будем обозначать ее *оператор Коши*, а множество всех ее ненулевых решений обозначим через $S_*(A)$.

Определение 1 (см. [6, с. 125]). Пусть функция $x(t)$, определенная на полуоси $t \in \mathbb{R}^+$, не принимает нулевых значений. Назовем *характеристическим показателем Ляпунова* этой функции величину

$$\chi(x) \equiv \varlimsup_{t \to \infty} \frac{1}{t} \ln |x(t)|.$$

Определение 2 (см. [9,11]). Назовем *показателями Ляпунова* системы $A \in \mathcal{M}^m$ числа

$$\lambda_i(A) \equiv \inf_{F \in \mathcal{G}^i} \varlimsup_{t \to \infty} \frac{1}{t} \ln \|X|_F(t, 0)\|, \quad i = 1, \ldots, m,$$

где $\mathcal{G}^i$ — множество i-мерных подпространств пространства $\mathbb{R}^m$, а $X|_F$ — сужение оператора Коши системы A на подпространство $F \subset \mathbb{R}^m$.

Из формулы следует, что показатели Ляпунова занумерованы в порядке нестрогого возрастания

$$\lambda_1(A) \leqslant \lambda_2(A) \leqslant \ldots \leqslant \lambda_m(A).$$

Определение 3 (см. [3, с. 116; 10]). *Верхним* $\Omega(A)$ и соответственно *нижним* $\omega(A)$ *центральными показателями* системы $A \in \mathcal{M}^m$ называются числа

$$\Omega(A) \equiv \inf_{T>0} \varlimsup_{k \to \infty} \frac{1}{kT} \sum_{s=1}^{k} \ln \|X(sT, (s-1)T)\|,$$

$$\omega(A) \equiv \sup_{T>0} \varlimsup_{k \to \infty} \frac{1}{kT} \sum_{s=1}^{k} \ln \|X((s-1)T, sT)\|^{-1}.$$

Показатели Ляпунова, а также верхний и нижний центральные показатели систем из пространства $\mathcal{M}^m$ будем рассматривать как определенные на нем функционалы

$$\lambda_1, \ldots, \lambda_m, \Omega, \omega : \mathcal{M}^m \to \mathbb{R}.$$

Пусть m четно ($m = 2n$) и в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^m$ задан ортогональный кососимметрический оператор J ($J^{-1} = J^* = -J$), определяющий в $\mathbb{R}^m$ *симплектическую структуру* [1, § 37]. Тогда в пространстве $\mathcal{M}^m$ можно выделить подпространство $\mathcal{H}^m$ *линейных гамильтоновых систем*, у которых, по определению, при каждом $t \in \mathbb{R}^+$ оператор $JA(t)$ симметричен.

О п р е д е л е н и е 4 ([16]). Для всякой системы $A \in \mathcal{M}^m$ ($A \in \mathcal{H}^m$) обозначим:

(a) через $\mathcal{M}_\varepsilon(A)$ ($\mathcal{H}_\varepsilon(A)$) — множество систем $B \in \mathcal{M}^m$ ($B \in \mathcal{H}^m$), удовлетворяющих условию $\|B - A\| < \varepsilon$, а возмущения такого типа будем называть *равномерно малыми*;

(b) через $\mathcal{M}_0(A)$ ($\mathcal{H}_0(A)$) — множество систем $B \in \mathcal{M}^m$ ($B \in \mathcal{H}^m$), удовлетворяющих условию $\|B(t) - A(t)\| \to 0$, $t \to \infty$, при выполнении которого возмущение $B - A$ назовем *бесконечно малым.*

Результаты настоящей работы частично анонсированы в [13–15].

§ 1. Спектры показателей

Пусть задан какой-либо *показатель*

$$\varkappa : S_* \to \mathbb{R}, \quad S_* \equiv \bigcup_{A \in \mathcal{M}^m} S_*(A), \tag{1.1}$$

определенный на ненулевых решениях всевозможных линейных систем.

О п р е д е л е н и е 5 ([18]). *Спектром* показателя $\varkappa$ (1.1) системы $A \in \mathcal{M}^m$ назовем множество

$$\mathrm{Sp}_\varkappa(A) \equiv \{\varkappa(x) \mid x \in S_*(A)\}.$$

О п р е д е л е н и е 6. *Равномерно предельным спектром* показателя $\varkappa$ (1.1) системы $A \in \mathcal{M}^m$ назовем множество

$$\mathrm{L}_\mathcal{M}\mathrm{Sp}_\varkappa(A) \equiv \operatorname*{Lim}_{\mathcal{M}^m \ni B \to A} \mathrm{Sp}_\varkappa(B) \tag{1.2}$$

таких значений $\mu \in \mathbb{R}$, для каждого из которых при любом $\varepsilon > 0$ найдутся система $B \in \mathcal{M}_\varepsilon(A)$ и ее решение $x \in S_*(B)$, удовлетворяющие неравенству $|\varkappa(x) - \mu| < \varepsilon$. Кроме того, в случае четного m назовем *гамильтоново равномерно предельным спектром* показателя $\varkappa$ системы $A \in \mathcal{H}^m$ аналогичное (с заменой всюду $\mathcal{M}$ на $\mathcal{H}$) множество

$$\mathrm{L}_\mathcal{H}\mathrm{Sp}_\varkappa(A) \equiv \operatorname*{Lim}_{\mathcal{H}^m \ni B \to A} \mathrm{Sp}_\varkappa(B). \tag{1.3}$$

О п р е д е л е н и е 7. *Бесконечно мало возмущенным спектром* показателя $\varkappa$ (1.1) системы $A \in \mathcal{M}^m$ назовем множество

$$\mathcal{M}_0\mathrm{Sp}_\varkappa(A) \equiv \bigcup_{B \in \mathcal{M}_0(A)} \mathrm{Sp}_\varkappa(B) \tag{1.4}$$

таких значений $\mu \in \mathbb{R}$, для каждого из которых найдутся система $B \in \mathcal{M}_0(A)$ и ее решение $x \in S_*(B)$, удовлетворяющие равенству $\varkappa(x) = \mu$. Кроме того, в случае четного m назовем *гамильтоново бесконечно мало возмущенным спектром* показателя $\varkappa$ системы $A \in \mathcal{H}^m$ аналогичное (с заменой всюду $\mathcal{M}$ на $\mathcal{H}$) множество

$$\mathcal{H}_0\mathrm{Sp}_\varkappa(A) \equiv \bigcup_{B \in \mathcal{H}_0(A)} \mathrm{Sp}_\varkappa(B). \tag{1.5}$$

Л е м м а 1. *В случае когда* $\varkappa \equiv \chi$ — *характеристический показатель Ляпунова, множество* (1.2) *или* (1.3) *совпадает с объединением по* $i = 1, \ldots, m$ *множеств* $\mathrm{L}_{\mathcal{M}}\lambda_i(A)$ *или* $\mathrm{L}_{\mathcal{H}}\lambda_i(A)$ *всех предельных значений в точке* $A \in \mathcal{M}^m$ *или* $A \in \mathcal{H}^m$ *в отдельности каждого из показателей Ляпунова* $\lambda_1 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_m$, *рассматриваемых как функционалы в пространстве* $\mathcal{M}^m$ *или* $\mathcal{H}^m$ *соответственно.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем, что

$$X \equiv \mathrm{L}_{\mathcal{M}}\mathrm{Sp}_{\chi}(A) = \bigcup_{i=1}^{m} \mathrm{L}_{\mathcal{M}}\lambda_i(A) \equiv \Lambda$$

(аналогично доказывается равенство $\mathrm{L}_{\mathcal{H}}\mathrm{Sp}_{\chi}(A) = \bigcup\limits_{i=1}^{m} \mathrm{L}_{\mathcal{H}}\lambda_i(A)$). Включение $X \supseteq \Lambda$ выполнено в силу того, что $\lambda_i(A) \in \mathrm{Sp}_{\chi}(A)$ при любом $i = 1, \ldots, m$. Докажем включение $X \subseteq \Lambda$. Возьмем произвольное $\mu \in X$. По определению равномерно предельного спектра для любого $\varepsilon > 0$ найдутся система $B \in \mathcal{M}_{\varepsilon}(A)$ и ее решение $x \in S_*(B)$, удовлетворяющие неравенству $|\chi(x) - \mu| < \varepsilon$. Возьмем бесконечно убывающую последовательность $\varepsilon_k = \frac{\varepsilon}{2^k} > 0$ $(k \in \mathbb{N})$. Тогда для любого $k \in \mathbb{N}$ найдутся система $B_k \in \mathcal{M}_{\varepsilon_k}(A)$ и ее решение $x_k \in S_*(B_k)$, удовлетворяющие неравенству $|\chi(x_k) - \mu| < \varepsilon_k$. Поскольку число показателей Ляпунова системы B_k конечно, то найдутся такие $i \in \{1, \ldots, m\}$ и подпоследовательность индексов k_l $(l \in \mathbb{N})$, что выполнено неравенство $|\lambda_i(B_{k_l}) - \mu| < \varepsilon_{k_l}$, а это означает, что $\mu \in \Lambda$. Следовательно, включение $X \subseteq \Lambda$ также выполнено. Лемма 1 доказана. □

Л е м м а 2. *В случае когда* $\varkappa \equiv \chi$ — *характеристический показатель Ляпунова, множество* (1.4) *или* (1.5) *совпадает с объединением по* $i = 1, \ldots, m$ *множеств* $\mathcal{M}_0\lambda_i(A)$ *или* $\mathcal{H}_0\lambda_i(A)$ *всех бесконечно мало возмущенных значений в точке* $A \in \mathcal{M}^m$ *или* $A \in \mathcal{H}^m$ *в отдельности каждого из показателей Ляпунова* $\lambda_1 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_m$, *рассматриваемых как функционалы в пространстве* $\mathcal{M}^m$ *или* $\mathcal{H}^m$ *соответственно.*

Доказательство леммы 2 аналогично доказательству леммы 1.

§ 2. Эффективность гамильтоновых возмущений

Л е м м а 3 ([19]). *Пусть заданы* $\varepsilon > 0$ *и* $A \in \mathcal{H}^m$. *Тогда если* $B \in \mathcal{M}_{\varepsilon}(A)$ *и* $x \in S_*(B)$, *то существует такая система* $C \in \mathcal{H}_{\varepsilon}(A)$, *что* $x \in S_*(C)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Систему $B \equiv A + Q \in \mathcal{M}_{\varepsilon}(A)$ с решением $x \in \mathcal{S}_*(B)$ заменим гамильтоновой системой $C \equiv A + P \in \mathcal{H}_{\varepsilon}(A)$ специального вида, удовлетворяющей при каждом $t \in \mathbb{R}^+$ равенству $P(t)x(t) = Q(t)x(t)$. А именно, выберем ортонормированный симплектический базис $e_1, \ldots, e_m \in \mathbb{R}^m$ (зависящий от t кусочно-дифференцируемо и непрерывно) так, чтобы вектор $e_1 \equiv e_1(t)$ всегда был сонаправлен с вектором $x(t)$, и определим оператор $P \equiv P(t)$ равенствами

$$Pe_1 = Q(t)e_1 \equiv a_1e_1 + \ldots + a_ne_n + bJe_1 + c_2Je_2 + \ldots + c_nJe_n,$$
$$Pe_i = c_iJe_1 - bJe_i, \quad i = 2, \ldots, n, \qquad PJe_i = be_i - a_iJe_1, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Тогда он в этом базисе запишется матрицей (из которой видна симметричность оператора JP)

$$P = \begin{pmatrix} a^* & 0 & | & bE_n \\ \hline b & c & | & -a \\ c^* & -bE_{n-1} & | & 0 \end{pmatrix},$$

где $a \equiv (a_1, \ldots, a_n)$, $c \equiv (c_2, \ldots, c_n)$, E_i — единичная матрица порядка i, и для произвольного единичного вектора $e = \alpha e_1 + \beta_2e_2 + \ldots + \beta_ne_n - \gamma_1Je_1 - \ldots - \gamma_nJe_n$, обозначив $\beta \equiv (\beta_2, \ldots, \beta_n)$ и $\gamma \equiv (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$, получим оценку на квадрат вектора Pe (ниже все произведения и квадраты векторов скалярные):

$$(Pe)^2 = (\alpha a - \gamma b)^2 + (\alpha b + \beta c + \gamma a)^2 + (\alpha c - \beta b)^2 =$$
$$= \alpha^2a^2 - 2\alpha a\gamma b + \gamma^2b^2 + \alpha^2b^2 + 2\alpha b(\beta c + \gamma a) + (\beta c + \gamma a)^2 + \alpha^2c^2 - 2\alpha c\beta b + \beta^2b^2 \leqslant$$
$$\leqslant (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)b^2 + \alpha^2(a^2 + c^2) + (\beta^2 + \gamma^2)(a^2 + c^2) =$$
$$= (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)(a^2 + b^2 + c^2) \leqslant 1 \cdot \varepsilon^2 = \varepsilon^2.$$

Лемма 3 доказана. $\square$

З а м е ч а н и е 1. Лемма 3 из [19] представляет собой усовершенствованный вариант леммы из [13].

С л е д с т в и е 1. *Пусть задана $A \in \mathcal{H}^m$. Тогда если $B \in \mathcal{M}_0(A)$ и $x \in S_*(B)$, то существует такая система $C \in \mathcal{H}_0(A)$, что $x \in S_*(C)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. В качестве системы C возьмем систему, построенную в лемме 3. Исходя из доказательства леммы 3, можно заключить, что если исходная система $B \in \mathcal{M}_0(A)$, то построенная система $C \in \mathcal{H}_0(A)$. Следствие 1 доказано. $\square$

О п р е д е л е н и е 8 ([16]). Скажем, что разбиение пространства решений системы $A \in \mathcal{M}^m$ в прямую сумму подпространств

$$E(A) = E_1 \oplus E_2 \oplus \ldots \oplus E_r, \quad \dim E_j > 0, \quad j = 1, \ldots, r,$$

для некоторого числа r *интегрально разделено*, если найдутся такие положительные константы a и T, что

$$\frac{|x_i(t)|}{|x_i(\tau)|} \div \frac{|x_j(t)|}{|x_j(\tau)|} \geqslant \varepsilon^{a(t-\tau)}$$

для всех решений $x_i \in E_i$, $x_j \in E_j$ $(1 \leqslant j < i \leqslant r)$ и всех $t - T > \tau > 0$.

Пусть в пространстве решений $E(A)$ выбрано подпространство F. Тогда можно определить *сужение* X_F оператора Коши на подпространство F, а также *верхний* Ω_F и *нижний* ω_F *центральные показатели* этого *подпространства* по следующим формулам [16]:

$$X_F(t,\tau) \equiv X(t,\tau)\,|_{F(\tau)}, \quad t,\tau \in \mathbb{R}^+,$$

$$\Omega_F \equiv \inf_{T>0} \overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{1}{kT} \sum_{s=1}^{k} \ln \|X_F(sT,(s-1)T)\|, \tag{2.1}$$

$$\omega_F \equiv \sup_{T>0} \overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{1}{kT} \sum_{s=1}^{k} \ln \|X_F((s-1)T,sT)\|^{-1}. \tag{2.2}$$

О п р е д е л е н и е 9 ([16]). Для каждого $i = 1, \ldots, m$ назовем i-тый показатель Ляпунова системы $A \in \mathcal{M}^m$ *устойчивым при равномерно малых возмущениях*, если функционал λ_i непрерывен в точке $A \in \mathcal{M}^m$.

О п р е д е л е н и е 10 ([16]). Для каждого $i = 1, \ldots, m$ назовем i-тый показатель Ляпунова системы $A \in \mathcal{H}^m$ *инвариантным относительно бесконечно малых (гамильтоновых) возмущений*, если для любой системы $B \in \mathcal{M}_0(A)$ (соответственно $B \in \mathcal{H}_0(A)$) справедливо равенство $\lambda_i(B) = \lambda_i(A)$.

В следующей теореме, доказанной в работе [16], приводятся необходимые и достаточные условия устойчивости k младших показателей Ляпунова.

Т е о р е м а 1 ([16]). *Для любого $k \in \{1, \ldots, m\}$ и любой системы $A \in \mathcal{M}^m$ следующие три условия эквивалентны.*

(1) *Показатели $\lambda_1(A) \leqslant \ldots \leqslant \lambda_k(A)$ устойчивы при равномерно малых возмущениях.*

(2) *Показатели $\lambda_1(A) \leqslant \ldots \leqslant \lambda_k(A)$ инвариантны относительно бесконечно малых возмущений.*

(3) *Существует интегрально разделенное разбиение*

$$E(A) = E_1 \oplus \ldots \oplus E_r \oplus E_{r+1},$$

обладающее следующими свойствами:

(a) $\omega_{E_j} = \Omega_{E_j}$ *для каждого* $j = 1, 2, \ldots, r$;

(b) $\dim E_1 + \ldots + \dim E_r \geqslant k$.

Л е м м а 4. *Спектр характеристического показателя Ляпунова системы $A \in \mathcal{M}^m$ устойчив при равномерно малых возмущениях (то есть $\mathrm{L}_{\mathcal{M}}\mathrm{Sp}_\chi(A) = \mathrm{Sp}_\chi(A)$) тогда и только тогда, когда все одновременно показатели Ляпунова системы $A \in \mathcal{M}^m$ устойчивы при равномерно малых возмущениях.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть спектр характеристического показателя системы A устойчив, то есть

$$\mathrm{L}_{\mathcal{M}}\mathrm{Sp}_\chi(A) = \mathrm{Sp}_\chi(A) \equiv \{\lambda_1(A), \ldots, \lambda_m(A)\}. \tag{2.3}$$

1. Из равенства (2.3) следует устойчивость показателя λ_1 системы A. Действительно, если значения верхнего и нижнего пределов показателя λ_1 в точке A не совпадают, то все его частичные пределы в этой точке заполняют целый отрезок с концами в этих двух значениях (см. [17]), что противоречит конечности предельного спектра $\mathrm{Sp}_\chi(A)$ (2.3).

2. Отсюда согласно теореме 1 имеем, что существует интегрально разделенное разбиение пространства решений

$$E(A) = E_1(A) \oplus E_2(A),$$

причем $\omega_{E_1} = \Omega_{E_1}$. Тогда если $\dim E_1(A) = k \geqslant 1$, то

$$\omega_{E_1} = \lambda_1(A) = \ldots = \lambda_k(A) = \Omega_{E_1},$$

показатели $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ системы A устойчивы, причем

$$0 \leqslant \dim E_2(A) = m - k < m.$$

3. Если $k < m$, то согласно свойству 2.9° из [16] будем иметь

$$\Omega_{E_1} < \omega_{E_2} \leqslant \lambda_{k+1}(A).$$

Аналогично из равенства (2.3) следует устойчивость показателя λ_{k+1} системы A, так как если значения верхнего и нижнего пределов показателя λ_{k+1} (который теперь играет роль младшего показателя для подпространства $E_2(B)$, и поэтому к нему применима теорема из работы [17]) в точке A не совпадают, то все частичные пределы в этой точке заполняют целый отрезок с концами в этих двух значениях, что опять противоречит конечности предельного спектра (2.3).

4. Рассуждая так и далее, в итоге получим устойчивость всех одновременно показателей Ляпунова системы A.

В обратную сторону утверждение леммы 4 верно, поскольку из равенств

$$\mathrm{L}_{\mathcal{M}}\lambda_i(A) = \{\lambda_i(A)\}, \quad i = 1, \ldots, m,$$

означающих устойчивость показателей Ляпунова системы $A \in \mathcal{M}^m$, вытекает цепочка

$$\mathrm{L}_{\mathcal{M}}\mathrm{Sp}_\chi(A) = \bigcup_{i=1}^{m} \mathrm{L}_{\mathcal{M}}\lambda_i(A) = \bigcup_{i=1}^{m} \{\lambda_i(A)\} = \mathrm{Sp}_\chi(A)$$

(см. лемму 1), а значит, и устойчивость ее спектра характеристического показателя. Лемма 4 доказана. □

Л е м м а 5. *Спектр характеристического показателя Ляпунова любой системы $A \in \mathcal{M}^m$ инвариантен относительно бесконечно малых возмущений (то есть $\mathcal{M}_0\mathrm{Sp}_\chi(A) = \mathrm{Sp}_\chi(A)$) тогда и только тогда, когда все одновременно показатели Ляпунова системы $A \in \mathcal{M}^m$ инвариантны относительно бесконечно малых возмущений.*

Доказательство леммы 5 аналогично доказательству леммы 4.

Т е о р е м а 2. *Для любого четного m, каждой системы $A \in \mathcal{H}^m$ и любого показателя $\varkappa$ (1.1) имеет место равенство*

$$\mathrm{L}_{\mathcal{H}}\mathrm{Sp}_\varkappa(A) = \mathrm{L}_{\mathcal{M}}\mathrm{Sp}_\varkappa(A). \tag{2.4}$$

Доказательство. Включение $\mathrm{L}_{\mathcal{H}}\mathrm{Sp}_{\varkappa}(A) \subseteq \mathrm{L}_{\mathcal{M}}\mathrm{Sp}_{\varkappa}(A)$ является прямым следствием включения $\mathcal{H}^m \subset \mathcal{M}^m$. Докажем включение $\mathrm{L}_{\mathcal{H}}\mathrm{Sp}_{\varkappa}(A) \supseteq \mathrm{L}_{\mathcal{M}}\mathrm{Sp}_{\varkappa}(A)$.

Возьмем произвольные $\mu \in \mathrm{L}_{\mathcal{M}}\mathrm{Sp}_{\varkappa}(A)$ и $\varepsilon > 0$. По определению равномерно предельного спектра для данного ε найдутся система $B \in \mathcal{M}_{\varepsilon}(A)$ и решение $x \in S_*(B)$, удовлетворяющие неравенству $|\varkappa(x) - \mu| < \varepsilon$.

Согласно лемме 3 для любой системы $B \in \mathcal{M}_{\varepsilon}(A)$ и любого решения $x \in S_*(B)$ существует система $C \in \mathcal{H}_{\varepsilon}(A)$, также имеющая решение $x \in S_*(C)$.

Получили, что для произвольного ε нашлись система $C \in \mathcal{H}_{\varepsilon}(A)$ и решение $x \in S_*(C)$, удовлетворяющие неравенству $|\varkappa(x) - \mu| < \varepsilon$. Отсюда вытекает условие $\mu \in \mathrm{L}_{\mathcal{H}}\mathrm{Sp}_{\varkappa}(A)$, а с ним и доказываемое включение. Теорема 2 доказана. □

Теорема 3. *Для любого четного m, каждой системы $A \in \mathcal{H}^m$ и любого показателя $\varkappa$ (1.1) имеет место равенство*

$$\mathcal{H}_0\mathrm{Sp}_{\varkappa}(A) = \mathcal{M}_0\mathrm{Sp}_{\varkappa}(A). \tag{2.5}$$

Доказательство теоремы 3 аналогично доказательству теоремы 2.

Следствие 2. *Равенства* (2.4) *и* (2.5) *справедливы, в частности, если $\varkappa$ является:*

(1) *характеристическим показателем Ляпунова χ* (верхним)*;*

(2) *нижним показателем Перрона π* [8, §2] (о спектре нижних показателей Перрона линейной системы см. работы [2, 7])*;*

(3) *верхней* (*нижней*) *полной σ или векторной ζ частотами* [18]*;*

(4) *верхней* (*нижней*) *скоростью блуждания μ* [18]*;*

(5) *верхним* (*нижним*) *показателем блуждаемости ρ или блуждания η* [18].

Теорема 4. *Для любого четного числа m все одновременно показатели Ляпунова гамильтоновой системы $A \in \mathcal{H}^m$ устойчивы при равномерно малых возмущениях тогда и только тогда, когда они устойчивы при равномерно малых возмущениях в классе гамильтоновых систем.*

Доказательство. Из включения $\mathcal{H}^m \subset \mathcal{M}^m$ следует, что если показатели Ляпунова гамильтоновой системы $A \in \mathcal{H}^m$ устойчивы при равномерно малых возмущениях, то они устойчивы и при равномерно малых возмущениях в классе гамильтоновых систем.

Докажем, что из того, что все одновременно показатели Ляпунова гамильтоновой системы $A \in \mathcal{H}^m$ устойчивы при равномерно малых возмущениях в классе гамильтоновых систем следует, что они устойчивы и при равномерно малых возмущениях. Предположим противное: найдется такое $i \in \{1, \ldots, m\}$, что $\lambda_i(A)$ не устойчив в классе равномерно малых возмущений. Тогда по лемме 4 $\mathrm{L}_{\mathcal{M}}\mathrm{Sp}_{\chi}(A) \neq \mathrm{Sp}_{\chi}(A)$, а по теореме 2 $\mathrm{L}_{\mathcal{H}}\mathrm{Sp}_{\chi}(A) = \mathrm{L}_{\mathcal{M}}\mathrm{Sp}_{\chi}(A)$. Следовательно, $\mathrm{L}_{\mathcal{H}}\mathrm{Sp}_{\chi}(A) \neq \mathrm{Sp}_{\chi}(A)$. Получили противоречие с тем, что показатели Ляпунова системы устойчивы при равномерно малых возмущениях в классе гамильтоновых систем. Значит, все $\lambda_i(A)$ устойчивы при равномерно малых возмущениях. Теорема 4 доказана. □

Замечание 2. Теорему 4 можно получить и из явно сформулированных критериев устойчивости всех показателей Ляпунова в общем [4, 12] и в гамильтоновом [5] случаях (подчеркнем, что в работе последнего автора этот критерий доказан логически независимо от предыдущих).

Теорема 5. *Для любого четного m все одновременно показатели Ляпунова системы $A \in \mathcal{H}^m$ инвариантны относительно бесконечно малых возмущений тогда и только тогда, когда все они инвариантны относительно бесконечно малых гамильтоновых возмущений.*

Доказательство теоремы 5 аналогично доказательству теоремы 4.

Список литературы

1. Арнольд В.И. Математические методы классической механики. М.: Едиториал УРСС, 2000. 408 с.
2. Барабанов Е.А. Структура множества нижних показателей Перрона линейной дифференциальной системы // Дифференц. уравнения. 1986. Т. 22. № 11. С. 1843–1853.

3. Былов Б.Ф. Виноград Р.Э., Гробман Д.М., Немыцкий В.В. Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости. М.: Наука, 1966. 576 с.
4. Былов Б.Ф., Изобов Н.А. Необходимые и достаточные условия устойчивости характеристических показателей линейной системы // Дифференц. уравнения. 1969. Т. 5. № 10. С. 1794–1803.
5. Веременюк В.В. Некоторые вопросы теории устойчивости показателей Ляпунова линейных гамильтоновых систем // Дифференц. уравнения. 1982. Т. 18. № 2. С. 205–219.
6. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967. 472 с.
7. Изобов Н.А. О множестве нижних показателей линейной дифференциальной системы // Дифференц. уравнения. 1965. Т. 1. № 4. С. 469–477.
8. Изобов Н.А. Введение в теорию показателей Ляпунова. Минск: БГУ, 2006. 319 с.
9. Ляпунов А.М. Общая задача об устойчивости движения. Череповец: Меркурий-ПРЕСС, 2000. 386 с.
10. Миллионщиков В.М. Доказательство достижимости центральных показателей линейных систем // Сибирск. матем. журнал. 1969. Т. 10. № 1. С. 99–104.
11. Миллионщиков В.М. Бэровские классы функций и показатели Ляпунова. I // Дифференц. уравнения. 1980. Т. 16. № 8. С. 1408–1416.
12. Миллионщиков В.М. Грубые свойства линейных систем дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. 1969. Т. 5. № 10. С. 1775–1784.
13. Салова Т.В. Об эффективности возмущений в классе линейных гамильтоновых систем // Дифференц. уравнения. 2015. Т. 51. № 1. С. 141–142.
14. Салова Т.В. Об эффективности гамильтоновых равномерно малых и бесконечно малых возмущений линейных систем // Тезисы докладов Всероссийской конференции с международным участием «Теория управления и математическое моделирование», посвященной памяти проф. Н.В. Азбелева и проф. Е.Л. Тонкова (Ижевск, 9–11 июня 2015 г.). Ижевск: Удмуртский университет, 2015. С. 119–121.
15. Салова Т.В. Об эффективности возмущений в классе линейных гамильтоновых систем // Вестник Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Механ. 2015. № 6. С. 48–52.
16. Сергеев И.Н. К теории показателей Ляпунова линейных систем дифференциальных уравнений // Труды семинара им. И.Г. Петровского. Вып. 9. М.: Изд-во Моск. ун-та. 1983. С. 111–166.
17. Сергеев И.Н. Частичные пределы показателей Ляпунова линейной системы и вопросы их достижимости // Дифференциальные уравнения. 1999. Т. 35. № 6. С. 858.
18. Сергеев И.Н. Характеристики колеблемости и блуждаемости решений линейной дифференциальной системы // Изв. РАН. Сер. матем. 2012. Т. 76. № 1. С. 149–172.
19. Сергеев И.Н. Точная оценка эффективности гамильтоновых возмущений линейных систем // Дифференц. уравнения. 2015. Т. 51. № 6. С. 821–822.

Поступила в редакцию 01.10.2015

Салова Татьяна Валентиновна, ассистент, кафедра математического анализа, Московский государственный университет, 119991, Россия, г. Москва, Ленинские горы, 1.
E-mail: m_message@mail.ru

T. V. Salova

On the effectiveness of Hamiltonian uniformly small and infinitesimal perturbations of linear Hamiltonian systems

Keywords: linear systems, Hamiltonian systems, Lyapunov exponents, uniformly small perturbations, infinitesimal perturbations.

MSC: 34A30, 34D08, 34D10

It is proved that the set of all limiting values of solutions' arbitrary indicator of the linear Hamiltonian system under uniformly small perturbations for the linear Hamiltonian system is the same as the similar set obtained by uniformly small Hamiltonian perturbations. Also it is proved that the set of all values of solutions' arbitrary indicator of the linear Hamiltonian system under infinitesimal perturbations for the linear Hamiltonian system is the same as the similar set obtained by infinitesimal Hamiltonian perturbations.

REFERENCES

1. Arnol'd V.I. *Matematicheskie metody klassicheskoi mekhaniki* (Mathematical methods of classical mechanics), Moscow: Editorial URSS, 2000, 408 p.
2. Barabanov E.A. The structure of the set of lower Perron exponents of a linear differential system, *Differ. Uravn.*, 1986, vol. 22, no. 11, pp. 1843–1853 (in Russian).

3. Bylov B.F., Vinograd R.E., Grobman D.M., Nemytskii V.V. *Teoriya pokazatelei Lyapunova i ee prilozheniya k voprosam ustoichivosti* (Theory of Lyapunov exponents and its application to problems of stability), Moscow: Nauka, 1966, 576 p.
4. Bylov B.F., Izobov N.A. Necessary and sufficient conditions for the stability of the characteristic exponents of a linear system, *Differ. Uravn.*, 1969, vol. 5, no. 10, pp. 1794–1803 (in Russian).
5. Veremenyuk V.V. Some questions of the theory of stability of Lyapunov exponents of linear Hamiltonian systems, *Differ. Uravn.*, 1982, vol. 18, no. 2, pp. 205–219 (in Russian).
6. Demidovich B.P. *Lektsii po matematicheskoi teorii ustoichivosti* (Lectures on the mathematical theory of stability), Moscow: Nauka, 1967, 472 p.
7. Izobov N.A. On the set of lower exponents of a linear differential system, *Differ. Uravn.*, 1965, vol. 1, no. 4, pp. 469–477 (in Russian).
8. Izobov N.A. *Vvedenie v teoriyu pokazatelei Lyapunova* (Introduction to the theory of Lyapunov exponents), Minsk, 2006, 319 p.
9. Lyapunov A.M. *Obshchaya zadacha ob ustoichivosti dvizheniya* (General problem of stability of movement), Cherepovets, 2000, 386 p.
10. Millionshchikov V.M. A proof of the accesibility of the central exponents of linear systems, *Sibirsk. Mat. Zh.*, 1969, vol. 10, no. 1, pp. 99–104 (in Russian).
11. Millionshchikov V.M. Baire's classes of functions and Lyapunov exponents. I, *Differ. Uravn.*, 1980, vol. 16, no. 8, pp. 1408–1416 (in Russian).
12. Millionshchikov V.M. Structurally stable properties of linear systems of differential equations, *Differ. Uravn.*, 1969, vol. 5, no. 10, pp. 1775–1784 (in Russian).
13. Salova T.V. On the effectiveness of perturbations in the class of linear Hamiltonian systems, *Differential Equations*, 2015, vol. 51, no. 1, pp. 144–145. DOI: 10.1134/S0012266115010152
14. Salova T.V. On the effectiveness of Hamiltonian uniformly small and infinitesimal perturbations of linear systems, *Control Theory and Mathematical Modeling: Abstracts of All-Russian Conference, dedicated to the memory of professor N.V. Azbelev and professor E.L. Tonkov*, Udmurt State University, Izhevsk, 2015, pp. 119–121 (in Russian).
15. Salova T.V. On the effectiveness of perturbations in the class of linear Hamiltonian systems, *Vestnik Moskov. Gos. Univ. Ser. I Mat. Mekh.*, 2015, no. 6, pp. 48–52 (in Russian).
16. Sergeev I.N. On the theory of Lyapunov exponents of linear systems of differential equations, *Tr. Semin. im. I.G. Petrovskogo*, 1983, vol. 9, pp. 111–166 (in Russian).
17. Sergeev I.N. Partial limits of Lyapunov exponents of linear systems and their reachability, *Differ. Uravn.*, 1999, vol. 35, no. 6, p. 858 (in Russian).
18. Sergeev I.N. Oscillatory and wandering characteristics of solutions of linear differential system, *Izv. Ross. Akad. Nauk. Ser. Mat.*, 2012, vol. 76, no. 1, pp. 149–172 (in Russian).
19. Sergeev I.N. Accurate assessment of the effectiveness of Hamiltonian perturbations of linear systems, *Differ. Uravn.*, 2015, vol. 51, no. 6, pp. 821–822 (in Russian).

Received 01.10.2015

Salova Tat'yana Valentinovna, Assistant Lecturer, Department of Mathematical Analysis, Moscow State University, Leninskie Gory, 1, Moscow, 119991, Russia.
E-mail: m_message@mail.ru