УДК 517.926

© *И. Н. Сергеев*

ПОЛНЫЙ НАБОР СООТНОШЕНИЙ МЕЖДУ ПОКАЗАТЕЛЯМИ КОЛЕБЛЕМОСТИ, ВРАЩАЕМОСТИ И БЛУЖДАЕМОСТИ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ

В статье для ненулевых решений линейных систем на полупрямой определен целый ряд ляпуновских показателей, призванных отвечать за их колеблемость, вращаемость и блуждаемость. Эти показатели получаются из некоторых функционалов от решений на конечных отрезках как результат усреднения по времени и минимизации по всем базисам в фазовом пространстве. Приведен набор соотношений (равенств или неравенств) между введенными показателями. Доказано, что этот набор полон, то есть его нельзя дополнить или усилить ни одним содержательным соотношением.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения, линейные системы, колеблемость, вращаемость, блуждаемость, показатели решений, показатели Ляпунова.

Введение

Для натурального $n > 1$ обозначим через $\widetilde{\mathcal{M}}^n$ множество линейных систем

$$\dot{x} = A(t)x, \qquad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}^+,$$

задаваемых непрерывными функциями $A\colon \mathbb{R}^+ \to \operatorname{End}\mathbb{R}^n$ (отождествляемыми с самими системами), а через $\mathcal{M}^n$ — его подмножество, состоящее из ограниченных систем. Пусть $\mathcal{S}^n(A)$ и $\mathcal{S}^n$ — множества ненулевых решений системы $A \in \widetilde{\mathcal{M}}^n$ и, соответственно, всех таких систем.

Ниже для рассматриваемых решений определены два десятка показателей *ляпуновского типа*, призванных отвечать не за рост нормы решений, но за их колеблемость, блуждаемость и вращаемость. Далее, в первых двух теоремах приведены соотношения между введенными показателями, а в следующих трех перечислены некоторые реализуемые на решениях цепочки равенств и неравенств, показывающие, что приведенный набор соотношений полон. Наконец, доказательства всех сформулированных теорем даны отдельно, в заключительных параграфах статьи.

Результаты работы отчасти анонсированы в докладе [1].

§ 1. Показатели ляпуновского типа

В определениях 1 и 2 введены показатели решений (см. работы [2–7], где использованы несколько иные обозначения и названия).

Определение 1. Пусть заданы индекс $k \in \{1, \ldots, n\}$ и функционал $\mathrm{K} : \mathcal{S}^k \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$. Тогда:

(1) определим *слабый* и *сильный нижние показатели* решения $x \in \mathcal{S}(A)$ соответственно формулами

$$\check{\varkappa}^\circ(x) = \inf_{L \in \operatorname{End}_k \mathbb{R}^n} \varliminf_{t\to\infty} \frac{1}{t}\,\mathrm{K}(Lx, t), \quad \check{\varkappa}^\bullet(x) = \varliminf_{t\to\infty} \inf_{L \in \operatorname{End}_k \mathbb{R}^n} \frac{1}{t}\,\mathrm{K}(Lx, t), \tag{1.1}$$

где $\operatorname{End}_k \mathbb{R}^n$ — множество линейных операторов $L \in \operatorname{End}\mathbb{R}^n$ ранга k;

(2) теми же формулами, но с заменой в них нижних пределов верхними определим одноименные *верхние* показатели $\hat{\varkappa}^\circ(x)$ и $\hat{\varkappa}^\bullet(x)$, причем в случае совпадения верхних показателей с нижними будем называть их *точными*, опуская в их обозначениях галочки и крышечки, а в случае совпадения сильных со слабыми — называть их *абсолютными*, опуская пустые и полные кружочки;

(3) если в каком-либо контексте конкретные знаки галочек и крышечек не имеют значения, то позволим себе заменять их *тильдами* и, аналогично, пустые и полные кружочки — *звездочками*, понимая под ними любой из замененных знаков, но только один и тот же в каждом соотношении.

О п р е д е л е н и е 2. Следуя определению 1, при $k = 1, n$ и $\mathrm{K} = \mathrm{N}, \mathrm{P}$ соответственно можно построить показатели $\varkappa = \nu, \rho$ *колеблемости* и *блуждаемости*, а при $k = 2$ и $\mathrm{K} = \Gamma, \Theta, \Omega$ — показатели $\varkappa = \gamma, \theta, \omega$ *частотной*, *ориентированной* и *неориентированной вращаемости*, использовав следующие функционалы от непрерывно дифференцируемой функции $u : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^k$ и числа $t > 0$:

(a) $\mathrm{N}(u, t)$ — умноженное на π *число нулей* функции u на промежутке $(0; t]$, причем если хотя бы один нуль функции u на отрезке $[0; t]$ *кратен*, то считаем $\mathrm{N}(u, t) = \infty$;

(b) $\mathrm{P}(u, t) \equiv \int_0^t |\partial e(u, \tau)/\partial\tau|\, d\tau$ — *вариация следа* $e(u, \tau) \equiv u(\tau)/|u(\tau)$ функции u за время от 0 до t, причем если функция u имеет на отрезке $[0; t]$ хотя бы один нуль, то считаем $\mathrm{P}(x, t) = \infty$;

(c) $\Gamma(u, t) \equiv \int_0^t |\partial e(u, \tau)/d\tau|\, d\tau + \mathrm{N}(u, t)$ — *частотная вариация следа* функции u за время от 0 до t;

(d) $\Theta(u, t) \equiv |\varphi(u, t)|$ — модуль непрерывного *ориентированного угла* $\varphi(u, t)$ между подвижным вектором $u(t)$ и начальным вектором $u(0)$ при условии $\varphi(u, 0) = 0$, причем если функция u имеет на отрезке $[0; t]$ хотя бы один нуль, то считаем $\Theta(u, t) = \infty = \varphi(u, t)$;

(e) $\Omega(u, t) \equiv \int_0^t |\partial\varphi(u, \tau)/\partial\tau|\, d\tau$ — *вариация угла* функции u за время от 0 до t, причем если функция u имеет на отрезке $[0; t]$ хотя бы один нуль, то считаем $\Omega(u, t) = \infty$.

§ 2. Исчерпывающий набор соотношений

В следующих двух теоремах перечислены некоторые свойства введенных показателей и приведен целый набор соотношений между ними.

Т е о р е м а 1. *Каждый из показателей $\varkappa = \nu, \rho, \gamma, \theta, \omega$ любого решения $x \in \mathcal{S}(A)$ любой системы $A \in \widetilde{\mathcal{M}}^n$ неотрицателен, не зависит от выбора базиса в $\mathbb{R}^n$ и удовлетворяет неравенствам*

$$\check{\varkappa}^*(x) \leqslant \hat{\varkappa}^*(x), \quad \tilde{\varkappa}^\circ(x) \leqslant \tilde{\varkappa}^\bullet(x), \tag{2.1}$$

а показатель блуждаемости — еще и оценке

$$\hat{\rho}^\bullet(x) \leqslant \|A\|_I \equiv \varlimsup_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^t \|A(\tau)\|\, d\tau, \quad \|A(\tau)\| \equiv \sup_{|u|=1} |A(\tau)u|. \tag{2.2}$$

Величина $\|A\|_I$ в теореме 1 может принимать и бесконечные значения, но в случае $A \in \mathcal{M}^n$ она может быть только конечной.

Т е о р е м а 2. *Для любой функции $x \in \mathcal{S}^n$ справедливы соотношения*

$$\tilde{\theta}^\circ(x) \leqslant \tilde{\nu}^\circ(x) = \tilde{\gamma}^\circ(x) = \tilde{\omega}^\circ(x) = \tilde{\rho}^\circ(x), \tag{2.3}$$

$$\check{\theta}^\bullet(x) \leqslant \check{\nu}^\bullet(x) \leqslant \check{\gamma}^\bullet(x) \leqslant \check{\omega}^\bullet(x) \leqslant \check{\rho}^\bullet(x), \tag{2.4}$$

$$\hat{\theta}^\bullet(x) \leqslant \hat{\nu}^\bullet(x), \quad \hat{\theta}^\bullet(x) \leqslant \hat{\omega}^\bullet(x), \quad \hat{\gamma}^\bullet(x) \leqslant \hat{\omega}^\bullet(x), \tag{2.5}$$

а при $n = 2$ — еще и соотношения

$$\tilde{\theta}(x) \leqslant \tilde{\gamma}^\bullet(x) = \tilde{\omega}^\bullet(x) = \tilde{\rho}^\bullet(x). \tag{2.6}$$

§ 3. Случаи строгих неравенств

Ни одно из нестрогих неравенств (2.1)–(2.6), содержащихся в формулировках теорем 1 и 2, *не является*, вообще говоря, равенством, поскольку иногда является строгим. Обоснованию этого тезиса посвящена

Т е о р е м а 3. *Для каждой из следующих цепочек соотношений между показателями найдется такая система $A \in \mathcal{M}^n$, что хотя бы одно ее решение $x \in \mathcal{S}(A)$ имеет соответствующие показатели:*

(1) *при $n = 2$ — для цепочек*

$$0 = \check{\theta}(x) = \check{\nu}(x) = \check{\gamma}(x) = \check{\omega}(x) = \check{\rho}(x) < \hat{\theta}(x) = \hat{\nu}(x) = \hat{\gamma}(x) = \hat{\omega}(x) = \hat{\rho}(x) = 1, \tag{3.1}$$

$$0 = \theta(x) < \nu(x) = \gamma(x) = \omega(x) = \rho(x) = 1, \tag{3.2}$$

$$0 = \theta(x) = \nu(x) < \gamma^\bullet(x) = \omega^\bullet(x) = \rho^\bullet(x) = 1; \tag{3.3}$$

(2) *при* $n = 3$ *— для цепочек*

$$0 = \theta(x) = \nu(x) = \gamma(x) < \omega^\bullet(x) = \rho^\bullet(x) = 1, \tag{3.4}$$

$$0 = \theta(x) = \nu(x) = \gamma(x) = \omega(x) < \rho^\bullet(x) = 1; \tag{3.5}$$

(3) *при любом* $n > 1$ *— для цепочки*

$$0 = \rho(x) < \|A\|_I = 1. \tag{3.6}$$

Строка (3.1) показывает, что все показатели γ, ω, ρ, ν, θ некоторого одного решения могут оказаться *не точными*, то есть обратить первое из неравенств (2.1) в строгое. Строгим для них всех бывает также и второе из неравенств (2.1), поскольку в силу строки (3.3) показатели γ, ω, ρ могут одновременно оказаться *не абсолютными* (что обусловлено равенствами цепочки (2.3)), а после добавления теоремы 5 (ниже) то же самое можно сказать и о показателях ν (строка (4.1), $n = 2$) и θ (строка (4.2), $n = 3$, с учетом строки (2.6)).

В силу оценки (2.2) единицу, стоящую в правой части каждой из цепочек (3.2)–(3.6), в случае ограниченной системы нельзя заменить бесконечностью. Однако утверждение теоремы 3 можно естественным образом распространить на случай неограниченных систем, что и делает

Т е о р е м а 4. *Если в цепочках* (3.1)–(3.6) *число 1 в правой части заменить символом* ∞, *то для каждой из полученных цепочек при соответствующем значении* n *найдется такая система* $A \in \widetilde{\mathcal{M}}^n$, *что хотя бы одно ее решение* $x \in \mathcal{S}(A)$ *имеет соответствующие показатели.*

Утверждения теорем 3, 4 и даже 5 (ниже) — в случае (1), а утверждение теоремы 3 — еще и в случае (3) можно усилить, подчинив требованиям (3.1)–(3.3), (3.6) и (4.1) не только одно, а сразу *все решения* указанных в этих теоремах систем.

§ 4. Неупорядоченность некоторых показателей

Строка (2.5) в теореме 2, даже вместе с добавкой (2.6) в двумерном случае, выглядит заметно беднее строки (2.4), а тем более — строки (2.3). И не случайно: этот список соотношений *невозможно пополнить* ни одним новым (логически не вытекающим из уже имеющихся) неравенством между сильными верхними показателями из определений 1 и 2.

Любое мыслимое строгое неравенство между сильными верхними показателями, не противоречащее теореме 2, *реализуется* на некотором решении некоторой ограниченной системы, причем уже для наименьшего допустимого этими теоремами значения n и так, что меньшее значение показателя в неравенстве является точным абсолютным и равно 0, а большее значение верхнего сильного показателя равно ∞, как показывает

Т е о р е м а 5. *Для каждой из следующих цепочек соотношений найдется такая система* $A \in \mathcal{M}^n$, *удовлетворяющая условию* $\|A\|_I = 0$, *что хотя бы одно ее решение* $x \in \mathcal{S}(A)$ *имеет соответствующие показатели:*

(1) *при* $n = 2$ *— для цепочки*

$$0 = \theta(x) = \gamma(x) = \omega(x) = \rho(x) < \hat{\nu}^\bullet(x) = \infty; \tag{4.1}$$

(2) *при* $n = 3$ *— для цепочек*

$$0 = \rho(x) < \hat{\theta}^\bullet(x) = \hat{\nu}^\bullet(x) = \hat{\gamma}^\bullet(x) = \hat{\omega}^\bullet(x) = \infty, \tag{4.2}$$

$$0 = \theta(x) = \rho(x) < \hat{\nu}^\bullet(x) = \hat{\gamma}^\bullet(x) = \hat{\omega}^\bullet(x) = \infty, \tag{4.3}$$

$$0 = \gamma(x) = \rho(x) < \hat{\theta}^\bullet(x) = \hat{\nu}^\bullet(x) = \hat{\omega}^\bullet(x) = \infty, \tag{4.4}$$

$$0 = \theta(x) = \nu(x) = \rho(x) < \hat{\gamma}^\bullet(x) = \hat{\omega}^\bullet(x) = \infty, \tag{4.5}$$

$$0 = \theta(x) = \gamma(x) = \rho(x) < \hat{\nu}^\bullet(x) = \hat{\omega}^\bullet(x) = \infty, \tag{4.6}$$

$$0 = \theta(x) = \nu(x) = \gamma(x) = \rho(x) < \hat{\omega}^\bullet(x) = \infty. \tag{4.7}$$

Утверждение этой теоремы останется верным, даже если в нем требование $\|A\|_I = 0$ заменить следующим *более сильным*: $\|A(t)\| \to 0$ при $t \to \infty$.

§ 5. Установление соотношений

Всюду ниже через P_G обозначен *ортогональный проектор* на подпространство $G \subset \mathbb{R}^n$, а через $G^\perp$ — *ортогональное дополнение* к G.

Доказательство теоремы 1. Неотрицательность всех значений показателей $\tilde{\varkappa}^*$ из определения 1 для любого решения $x \in \mathcal{S}(A)$ любой системы $A \in \widetilde{\mathcal{M}}^n$ является следствием неотрицательности всех значений функционалов К из определения 2.

Далее, инвариантность всех показателей относительно выбора базиса следует из того, что для любого невырожденного оператора C показатели от измененной функции Cx и от исходной функции x совпадают, так как совпадают множества функций LCx и Lx, когда оператор L пробегает все множество $\mathrm{End}_k\,\mathbb{R}^n$.

Первое из неравенств (2.1) опирается на то, что нижний предел не превосходит верхнего, а второе вытекает из следующей цепочки для нижних (и аналогичной для верхних) показателей

$$\check{\varkappa}^\circ(x) = \inf_{L\in\mathrm{End}_k\,\mathbb{R}^n} \varliminf_{t\to\infty} \inf_{L\in\mathrm{End}_k\,\mathbb{R}^n} \frac{1}{t}\mathrm{K}(Lx,t) \leqslant \check{\varkappa}^\bullet(x).$$

Наконец, оценка (2.2) следует из цепочки

$$\hat{\rho}^\bullet(x) \leqslant \varlimsup_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t \left|\frac{\partial e(x,\tau)}{\partial\tau}\right| d\tau \leqslant \varlimsup_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t |A(\tau)e(x,\tau)|\,d\tau \leqslant \varlimsup_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t \|A(\tau)\|\,d\tau \leqslant \|A\|_I.$$

Теорема 1 доказана. □

Доказательство теоремы 2. Возьмем любую функцию $x \in \mathcal{S}^n$.

А. Неравенства вида $\tilde{\theta}^*(x) \leqslant \tilde{\nu}^*(x)$ доказываются с помощью следующих соображений:

(a) для любой прямой g найдется двумерная плоскость $G \supset g$, удовлетворяющая оценке

$$\Theta(P_G x,t) \equiv |\varphi(P_G x,t)| \leqslant \mathrm{N}(P_g x,t) + \pi, \quad t \in \mathbb{R}^+. \tag{5.1}$$

Действительно, обозначив $T \equiv \inf\{t \in \mathbb{R}^+ \mid \mathrm{N}(P_g x,t) = \infty\} \leqslant \infty$, имеем:

(a.1) если $t < T$, то $\mathrm{N}(P_g x,t) \neq \infty$ и найдется плоскость $G \supset g$, не перпендикулярная ни к одному из векторов $x(t)$, для которых $P_g x(t) = 0$ (множество таких векторов не более чем счетно, так как на любом отрезке $[0,t]$ скалярная функция $P_g x$ имеет лишь конечное множество нулей, иначе в одном из них обнулилась бы ее производная и выполнилось бы равенство $\mathrm{N}(P_g x,t) = \infty$), для этой плоскости имеем $\varphi(P_G x,t) < \infty$, причем с возрастанием t каждое изменение угла $\varphi(P_G x,t)$ на π в какую-либо сторону сопровождается по меньшей мере однократным обнулением координаты $P_g x(t)$;

(a.2) при $t \geqslant T$ оценка (5.1) выполняется для любой плоскости G;

(b) если в оценке (5.1) взять точную нижнюю грань сначала по $G \in \mathcal{G}_n^2$ в левой части, а затем по $g \in \mathcal{G}_n^1$ в правой части, после чего перейти к нижнему среднему по t, то получится неравенство

$$\check{\theta}^\circ(x) = \varliminf_{t\to\infty} \frac{1}{t} \inf_{G\in\mathcal{G}_n^2} \Theta(P_G x,t) \leqslant \varliminf_{t\to\infty} \frac{1}{t}\left(\inf_{g\in\mathcal{G}_n^1} \mathrm{N}(P_g x,t) + \pi\right) = \check{\nu}^\circ(x),$$

а если в перейти не к нижнему, а к верхнему среднему, то получится аналогичное неравенство $\hat{\theta}^\circ(x) \leqslant \hat{\nu}^\circ(x)$ для верхних слабых показателей;

(c) если в оценке (5.1) сначала перейти к нижнему или верхнему среднему по t, затем взять точную нижнюю грань по $G \in \mathcal{G}_n^2$ в левой части и по $g \in \mathcal{G}_n^1$ в правой части, то получатся два неравенства вида $\tilde{\theta}^\bullet(x) \leqslant \tilde{\nu}^\bullet(x)$ для сильных показателей.

B. Все неравенства вида $\tilde{\theta}^*(x) \leqslant \tilde{\omega}^*(x)$ и $\tilde{\gamma}^*(x) \leqslant \tilde{\omega}^*(x)$ получаются по определению 1 из неравенств $\Theta(u,t) \leqslant \Omega(u,t)$ и $\Gamma(u,t) \leqslant \Omega(u,t)$ (для непрерывно-дифференцируемой функции $u : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^2$ и числа $t > 0$), вытекающих непосредственно из определения 2: первое неравенство становится строгим с момента смены знака угловой скорости $\dot\varphi(u,t)$, а второе — в момент обнуления функции $u(t)$ без обнуления ее производной $\dot u(t)$.

C. Неравенства $\tilde\nu^\circ(x) \leqslant \tilde\gamma^\circ(x)$ и $\check\nu^\bullet(x) \leqslant \check\gamma^\bullet(x)$ доказаны в работе [7].

D. Неравенства $\tilde\omega^\circ(x) \leqslant \tilde\rho^\circ(x)$ и $\check\omega^\bullet(x) \leqslant \check\rho^\bullet(x)$ можно почерпнуть из работы [7]: в ней формально доказаны лишь более слабые неравенства $\tilde\gamma^\circ(x) \leqslant \tilde\rho^\circ(x)$ и $\check\gamma^\bullet(x) \leqslant \check\rho^\bullet(x)$ (теоремы 6 и 7), но абсолютно тот же метод (через интегральное представление для величины $\Omega(x,t)$, аналогичное объявленному в теореме 3) проходит и для доказательства требуемых неравенств.

E. Замечательные равенства $\tilde\nu^\circ(x) = \tilde\rho^\circ(x)$ доказаны в работе [5].

F. Применяя к равным величинам $\Gamma(Lx,t) = \Omega(Lx,t) = \mathrm{P}(Lx,t)$ (где $L \in \mathrm{End}_2\,\mathbb{R}^2$, $x \in \widetilde{\mathcal{S}}^2$ и $t > 0$) одинаковые операции в соответствии с определением 1, получим все равенства (2.6).

G. Что касается показателей $\check\theta$ и $\hat\theta$, то:

(a) абсолютность их значений для любой функции $x \in \widetilde{\mathcal{S}}^2$ вытекает из того факта, что взятие точных нижних граней по $L \in \mathrm{End}_2\,\mathbb{R}^2$ при вычислении этих показателей по формулам (1.1) не меняет никаких средних значений вообще в силу оценки $|\Theta(Lx,t) - \Theta(x,t)| \leqslant \pi$ (так как преобразование $L \in \mathrm{Aut}\,\mathbb{R}^2$ сохраняет все полуобороты вектора $x(\tau) \in G$ в ту или иную сторону за время от 0 до t, а при взятии усреднения по $t \to \infty$ от величин $\Theta(Lx,t)$ и $\Theta(x,t)$ разница между ними в пределе обращается в 0);

(b) оценки сверху в строке (2.6) вытекают из среднего неравенства цепочки (2.5).

Теорема 2 доказана. □

§ 6. Построение примеров строгих неравенств

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 3. Для каждой из строк (3.1)–(3.6) построим свою систему.

I. Пусть сначала $n = 2$ и в $\mathbb{R}^2$ фиксирован ортонормированный базис e_1, e_2.

A. Строка (3.1) реализуема для решения x системы $A \in \mathcal{M}^2$, отвечающей уравнению второго порядка:

(a) верны равенства $\tilde\theta(x) = \tilde\nu(x)$, поскольку каждое следующее (после первого) обнуление координаты $x_1(\tau)$ за время от 0 до t равносильно уменьшению угла $\Theta(x,t)$ (стандартно ориентированного) ровно на π;

(b) равенство друг другу всех остальных нижних показателей в строке (3.1) доказано в [3, теорема 1], а равенство верхних доказывается аналогично;

(c) пример выполнения неравенства строки (3.1) приведен в [4, теорема 5]: там для некоторого решения установлены оценки $\check\nu(x) \leqslant 1/3 < 1/2 \leqslant \hat\nu(x)$, однако при его построении можно заменить на очередных шагах числа 1/3 и 1/2 (для решения $\sin(t+\varphi)$) соответственно положительными числами $\varepsilon_m \to 0$ и $1 - \varepsilon_m \to 1$ при $m \to \infty$, получив требуемое.

B. Для построения системы $A \in \mathcal{M}^2$, подтверждающей строку (3.2), введем следующее

О п р е д е л е н и е 3. Скажем, что система $A \in \mathcal{M}^2$ *осуществляет поворот* на угол φ со средней скоростью $|v|$ на отрезке $[t_0, t_1] \subset \mathbb{R}^+$, если она на нем задается матрицей

$$A^2_{t_0,v,\varphi}(t) = a(t)\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad a(t) = \begin{cases} 0, & t = t_0, t_1, \\ 2v, & t = t^* \equiv (t_0+t_1)/2, \end{cases}$$

где $t_1 \equiv t_0 + \varphi/v$ и функция $a \in \mathrm{C}([t_0,t_1])$ линейна на каждом из отрезков $[t_0,t^*]$ и $[t^*,t_1]$.

Теперь возьмем систему, осуществляющую на последовательно примыкающих друг к другу отрезках длины π, начиная с момента 0, повороты на знакочередующиеся углы $\pi, -\pi, \pi, -\pi, \ldots$ со средней скоростью $|v| = 1$. Любое решение x этой системы совершает 2π-периодические колебания от своего начального направления до противоположного и обратно последовательно в моменты $t_1 = 0$, $t_2 = \pi$, $t_3 = 2\pi, \ldots$. Последнее свойство решений не меняется под действием любого преобразования $L \in \mathrm{End}_2\,\mathbb{R}^2$, следовательно, имеем:

(a) $0 \leqslant \Theta(Lx,t) \leqslant \pi$ при всех $t > 0$, а значит, $\theta(x) = 0$;

(b) средняя угловая скорость вектор-функции Lx за время m-го ($m \in \mathbb{N}$) полуоборота равна $\bigl(\mathrm{P}(Lx,t_{m+1}) - \mathrm{P}(Lx,t_m)\bigr)/(t_{m+1} - t_m) = 1$.

Кроме того, для любого проектора $L \equiv P_G \in \mathrm{End}_1\,\mathbb{R}^2$ имеем:

(c) если прямая G не ортогональна к вектору $x(0)$, то проекция $P_G x(t)$ за время m-го полуоборота обнуляется ровно 1 раз, поэтому $\big(\mathrm{N}(P_G x, t_{m+1}) - \mathrm{N}(P_G x, t_m)\big)/(t_{m+1} - t_m) = 1$;

(d) если же $G \perp x(0)$, то из равенств $P_G x(0) = 0 = \dot{x}(0)$ при всех $t > 0$ имеем $\mathrm{N}(P_G x, t) = \infty$.

Поэтому с учетом строки (2.6) (и утверждения, аналогичного лемме 6 из [2]) получаем равенства

$$\nu(x) \equiv \inf_{L \in \mathrm{End}_2 \mathbb{R}^2} \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \mathrm{N}(Lx, t) = 1 = \inf_{L \in \mathrm{End}_2 \mathbb{R}^2} \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \mathrm{P}(Lx, t) \equiv \rho(x) = \gamma(x) = \omega(x).$$

C. Для построения системы $A \in \mathcal{M}^2$, реализующей строку (3.3), выберем какую-нибудь сходящуюся к нулю последовательность чисел $\varepsilon_m \in (0,1)$ $(m \in \mathbb{N})$ и возьмем систему, осуществляющую на последовательно примыкающих друг к другу отрезках, начиная с момента 0, повороты на знакочередующиеся (и сходящиеся по модулю к π) углы $\pi - \varepsilon_1 - \varepsilon_2$, $-(\pi - \varepsilon_2 - \varepsilon_3)$, $\pi - \varepsilon_3 - \varepsilon_4$, $-(\pi - \varepsilon_4 - \varepsilon_5), \ldots$ со средней скоростью $|v| = 1$.

Фиксируем произвольный ненулевой вектор $e \in \mathbb{R}^2$. Тогда решение x построенной системы, образующее в начальный момент с вектором e угол ε_1, совершает следующие повороты то в одну, то в другую сторону (определение 3): сначала вперед до тех пор, пока не образует с вектором $-e$ угол ε_2, затем назад до тех пор, пока не образует с вектором e угол ε_3, затем снова вперед, пока не образует с вектором $-e$ угол ε_4, и т. д.

Итак, решение x, находясь строго в одной полуплоскости относительно прямой, натянутой на вектор e, составляет последовательно в моменты $0 \equiv t_1 < t_2 < t_3 < t_4 < \ldots$ (начала очередных поворотов) сходящиеся к нулю углы $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \ldots$ с векторами $e, -e, e, -e, \ldots$.

При этом под действием любого линейного преобразования $L \in \mathrm{End}_2 \mathbb{R}^2$ указанные углы превратятся в углы между векторами $\pm Le$ и $Lx(t_1)$, $Lx(t_2)$, $Lx(t_3)$, $Lx(t_4), \ldots$, но сходимость их к нулю не нарушится, и средняя угловая скорость функции Lx за время m-го поворота будет равна

$$\frac{\mathrm{P}(Lx, t_{m+1}) - \mathrm{P}(Lx, t_m)}{t_{m+1} - t_m} = \frac{|\angle\,(Lx(t_m), Lx(t_{m+1}))\,|}{t_{m+1} - t_m} \to \frac{\pi}{\pi} = 1, \quad m \to \infty,$$

откуда, с учетом строки (2.6), имеем

$$1 = \inf_{L \in \mathrm{End}_2 \mathbb{R}^2} \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \mathrm{P}(Lx, t) \equiv \rho(x) = \gamma(x) = \omega(x).$$

Кроме того, выполнены равенства $\nu(x) = 0 = \theta(x)$:

(a) если в качестве преобразования $L \in \mathrm{End}_1 \mathbb{R}^2$ взять ортогональный проектор на прямую, ортогональную к e, то вектор-функция Lx нигде не обнулится, что обеспечит равенство $\mathrm{N}(Lx, t) = 0$ при любом $t > 0$;

(b) второе равенство вытекает из первого в силу теоремы 2.

II. Пусть теперь $n = 3$ и в $\mathbb{R}^3$ фиксирован ортонормированный базис e_1, e_2, e_3.

D. Для реализации строки (3.5), выбрав сходящуюся к нулю последовательность чисел $\varepsilon_m \in (0,1)$ $(m \in \mathbb{N})$, возьмем систему $A \in \mathcal{M}^3$, осуществляющую на последовательно примыкающих друг к другу отрезках, начиная с момента 0, повороты в плоскости G, натянутой на векторы e_1, e_2 (при фиксированном ортогональном дополнении к G), на знакочередующиеся углы, указанные в п. C доказательства настоящей теоремы, со средней скоростью $|v| = 1$ (определение 3).

Тогда решение $x \in \mathcal{S}(A)$ построенной системы, образующее в начальный момент в плоскости G с вектором e_1, например, угол ε_1, совершает повороты то в одну, то в другую сторону строго в той же плоскости G, причем в одной полуплоскости относительно прямой, натянутой на вектор e_1, составляя в моменты $0 \equiv t_1 < t_2 < t_3 < t_4 < \ldots$ (в которые начинаются очередные повороты) сходящиеся к нулю углы $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \ldots$ с векторами $e_1, -e_1, e_1, -e_1, \ldots$ При этом:

(a) под действием любого преобразования $L \in \mathrm{End}_3 \mathbb{R}^3$ или $L \in \mathrm{End}_2 \mathbb{R}^3$ при $\mathrm{Ker}\, L \notin G$ указанные углы могут измениться, но сходимость их к нулю не нарушится, и средняя угловая скорость функции Lx за время m-го поворота будет равна

$$\frac{\mathrm{K}(Lx,t_{m+1})-\mathrm{K}(Lx,t_m)}{t_{m+1}-t_m}=\frac{|\angle\,(Lx(t_m),Lx(t_{m+1}))\,|}{t_{m+1}-t_m}\to\frac{\pi}{\pi}=1,\quad m\to\infty,$$

где $\mathrm{K}=\mathrm{P},\Omega$, откуда имеем

$$\rho^\bullet(x)\equiv\inf_{L\in\mathrm{End}_2\,\mathbb{R}^2}\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\mathrm{P}(Lx,t)=1;$$

(b) для доказательства равенств $\nu(x)=0=\theta(x)$ в качестве преобразования $L\in\mathrm{End}_1\,\mathbb{R}^3$ возьмем ортогональный проектор на прямую, натянутую на вектор e_2, и тогда функция Lx нигде не обнулится, что обеспечит равенство $\mathrm{N}(Lx,t)=0$ при любом $t>0$, а с ним и первое из доказываемых равенств, из которого, в силу теоремы 2, вытечет и второе равенство;

(c) для доказательства равенств $\gamma(x)=0=\omega(x)$ в качестве преобразования $L\in\mathrm{End}_2\,\mathbb{R}^3$ возьмем ортогональный проектор на плоскость, натянутую на векторы e_2,e_3, и тогда вектор Lx будет постоянно сонаправлен с вектором e_2, что обеспечит равенства $\Gamma(Lx,t)=0=\Omega(Lx,t)$ при любом $t>0$.

E. Для реализации строки (3.4) достаточно в предыдущем построении из п. D настоящего доказательства произвести ровно одно изменение, а именно, положить $\varepsilon_1\equiv-1$ (вместо прежнего $\varepsilon_1\in(0,1)$).

Тогда соответствующее решение x уже за время первого поворота (то есть при $t\in[t_1,t_2]$) пройдет по всем прямым плоскости G и тем самым сделает любую плоскость, проходящую через вектор e_3, *критической* для решения x и функционала Ω, то есть такой, что проекция на нее этого решения даст бесконечное значение этого функционала. Поэтому проведенное в п. (c) выше рассуждение для показателя $\omega(x)$ станет неправомерным, и согласно п. (a) будем иметь $\omega^\bullet(x)=1$.

Кроме того, небольшое изменение претерпят и рассуждения из пп. (b), (c): теперь величины $\mathrm{N}(Lx,t)$ и $\Gamma(Lx,t)$ при всех $t>t_2$ будут равны 1 (а не 0, как прежде), что, однако, не изменит их нулевых средних значений.

III. При каждом $n>1$ все соотношения строки (3.6) будут выполнены для решений системы $A\in\mathcal{M}^n$, отвечающей автономному уравнению $y^{(n)}=0$: матрица такой системы имеет единичную операторную норму, а собственные числа действительны, поэтому все решения системы имеют нулевые точные абсолютные показатели блуждаемости [4, теорема 10].

Теорема 3 доказана. □

Доказательство теоремы 4 получается внесением следующих изменений в построение систем при доказательстве теоремы 3: для каждого значения $m\in\mathbb{N}$ в п. A число $1-\varepsilon_m$ нужно заменить числом $m-\varepsilon_m$ (для решения $\sin(mt+\varphi)$ вместо решения $\sin(t+\varphi)$), а в пп. B, C, D, E очередной поворот на m-м шагу нужно делать со средней скоростью m (вместо прежней скорости 1 — тогда все пределы, прежде равные 1, будут равны ∞). □

§ 7. Построение контрпримеров к упорядоченности

Доказательство теоремы 5. Выберем сходящуюся к нулю последовательность чисел $\varepsilon_k\in(0,1)$ и для каждой из строк (4.1)–(4.7) построим свою систему.

I. Для реализации строки (4.1) при $n=2$, выбрав в $\mathbb{R}^2$ ортонормированный базис e_1,e_2 и *замкнутую* единичную полуокружность S^+ с *метрикой*, равной углу между радиус-векторами, построим систему $A\in\mathcal{M}^2$ индукцией по параметру $k\in\mathbb{N}$: последовательно на участках вида $[0,T_k]$, где $T_k\to\infty$ при $k\to\infty$, постоянно следя за каким-то одним решением $x\in\mathcal{S}(A)$.

При $k=1$, обозначив $T_1=0$, положим $A(t)\equiv0$ при $0\leqslant t\leqslant T_1$ и фиксируем какой-нибудь единичный вектор $x(T_1)\in S^+$. Если для некоторого значения $k>1$ функция $A(t)$ и решение $x(t)$ уже построены при $0\leqslant t\leqslant T_{k-1}$, то достроим их при $T_{k-1}<t\leqslant T_k$ с помощью серии последовательных поворотов, проводимых по определению 3 *со средней скоростью* ε_k каждый, следующим образом:

(a) выберем на полуокружности S^+ (являющейся компактом) *конечную* ε_k^2*-сеть* $\mathcal{N}$, то есть такое множество единичных векторов $s_i\in S^+$ $(i=1,\ldots,I)$, что для каждой прямой $l\in\mathbb{R}^2$ найдется вектор $s_i\in\mathcal{N}$, удовлетворяющий оценке $\angle(s_i,l)<\varepsilon_k^2$;

(b) положив $\tau_0 \equiv T_{k-1}$, последовательно при каждом $i = 1, \ldots, I$ осуществим на участке $[\tau_{i-1}, \tau_i]$ следующие повороты:

(b.1) поворот вектора $x(\tau_{i-1})$ на такой угол, не превышающий π, за время, не превышающее π/ε_k, чтобы результирующий вектор $x(\tau'_{i-1})$ составил с вектором s_i угол величиной в ε_k^2;

(b.2) несколько поворотов на угол $2\varepsilon_k^2$ за время $2\varepsilon_k$ каждый — начиная с момента τ'_{i-1}, поочередно то в одном, то в другом направлении так, чтобы при каждом повороте решение x однажды (в точности в середине поворота) совпало с вектором s_i и чтобы момент τ_i завершения последнего поворота удовлетворял неравенству $\tau_i \geqslant 2\tau'_{i-1}$;

(c) полностью завершив все действия из п. (b) настоящего построения, положим $T_k \equiv \tau_I$, чем и закончим индуктивный переход.

Обозначим через t_m $(m \in \mathbb{N})$ упорядоченные по возрастанию конечные моменты всех поворотов, которые делались в процессе построения системы $A \in \mathcal{M}^2$. Тогда при каждых $m, k \in \mathbb{N}$ имеем: если $t_m \in (T_{k-1}, T_k]$, то норма оператор-функции $A(t)$ на отрезке $t \in [t_{m-1}, t_m]$ $(t_0 \equiv 0)$, по построению, не превосходит величины $2\varepsilon_k \to 0$ при $k \to \infty$ $(m \to \infty)$, поэтому $A(t) \to 0$ при $t \to \infty$ и справедливо равенство $\|A\|_I = 0$, а с ним, согласно теореме 2, и равенство $\rho(x) = 0$, а также все остальные равенства строки (4.1), кроме последнего.

Докажем оставшееся равенство $\hat{\nu}^\bullet(x) = \infty$ строки (4.1). Для любой некритической прямой $G \subset \mathbb{R}^2$ ортогональная к ней прямая $l = G^\perp$ при каждом значении $k \in \mathbb{N}$ на k-м шагу индукции при построении системы A попадает в ε_k^2-окрестность некоторого вектора $s_i \in \mathcal{N}$. Благодаря колебаниям решения x около вектора s_i, проекция $P_G x$ за время от τ'_{i-1} до τ_i обнуляется ровно $(\tau_i - \tau'_{i-1})/(2\varepsilon_k)$ раз, поэтому

$$\frac{\mathrm{N}(P_G x, \tau_i)}{\tau_i} \geqslant \frac{\mathrm{N}(P_G x, \tau_i) - \mathrm{N}(P_G x, \tau'_{i-1})}{\tau_i} = \frac{(\tau_i - \tau'_{i-1})/(2\varepsilon_k)}{\tau_i} \geqslant \frac{\tau_i/2}{\tau_i \cdot 2\varepsilon_k} = \frac{1}{4\varepsilon_k}.$$

Таким образом, получаем требуемое:

$$\hat{\nu}^\bullet(x) = \inf_{P_G \in \mathrm{End}_1 \mathbb{R}^2} \varlimsup_{t\to\infty} \frac{1}{t}\mathrm{N}(P_G x, t) \geqslant \varlimsup_{k\to\infty} \frac{1}{4\varepsilon_k} = \infty.$$

II. В пространстве $\mathbb{R}^3$ фиксируем ортонормированный базис e_1, e_2, e_3 и введем следующие обозначения:

(a) $S^+ \subset \mathbb{R}^3$ — фиксированная *замкнутая* единичная полусфера с *метрикой*, равной углу между радиус-векторами;

(b) $Q \equiv \partial S^+$ — граничная (большая) окружность полусферы S^+;

(c) $q \in Q$ — фиксированная точка окружности Q;

(d) $p \equiv Q^\perp$ — перпендикуляр к плоскости окружности Q (или, в зависимости от контекста, его след на полусфере S^+);

(e) S^ε — множество точек полусферы S^+, удаленных от Q больше чем на ε;

(f) Q^ε — множество точек окружности Q, удаленных от точки q больше чем на ε.

Стандартное построение каждого из вариантов A–F ниже будем вести в пп. 1–5 индукцией по параметру $k \in \mathbb{N}$ последовательно на участках вида $[0, T_k]$, где $T_k \to \infty$ при $k \to \infty$, с помощью серии последовательных поворотов, проводимых по определению 3 каждый: со средней скоростью ε_k^2, в плоскости, натянутой на векторы e_1, e_2, e_3, при фиксированном ортогональном дополнении к ней.

После этого в пп. $\theta, \nu, \gamma, \omega, \rho$ (в некотором порядке) будем доказывать требуемые равенства нулю и бесконечности соответствующих показателей построенного решения x, а также равенство нулю величины $\|A\|_I$, которое будет вытекать из условия $A(t) \to 0$ при $t \to \infty$.

A. Укажем систему $A \in \mathcal{M}^3$ с решением $x \in \mathcal{S}(A)$, удовлетворяющим строке (4.2).

1. При $k = 1$, обозначив $T_1 = 0$, положим $A(t) \equiv 0$ при $0 \leqslant t \leqslant T_1$ и фиксируем начальный вектор $x(T_1) \equiv p \in S^+$.

2. Если для некоторого значения $k > 1$ функция $A(t)$ и решение $x(t)$ уже построены при $0 \leqslant t \leqslant T_{k-1}$, то достроим их при $T_{k-1} < t \leqslant T_k$.

3. Выберем на полусфере S^+ (компактной) *конечную* ε_k^3-*сеть* $\mathcal{N} \equiv \{s_i \in S^+ \mid i = 1, \ldots, I\}$, тогда для каждой прямой $l \in \mathbb{R}^3$ найдется вектор $s_i \in \mathcal{N}$, удовлетворяющий оценке $\angle(s_i, l) < \varepsilon_k^3$.

4. Положив $\tau_0 \equiv T_{k-1}$, последовательно при каждом $i = 1, \ldots, I$ осуществим на участке $[\tau_{i-1}, \tau_i]$ следующие действия:

(4.1) выберем вектор $e_i \in S^+$, составляющий угол ε_k^3 с вектором s_i;

(4.2) повернем начальный вектор $x(\tau_{i-1})$ по большой полуокружности на полусфере S^+ на угол, не превышающий π, до совпадения результирующего вектора $x(\tau'_{i-1})$ с вектором e_i;

(4.3) совершим на сфере подряд несколько полных оборотов по одной окружности с центром s_i и радиусом ε_k^3, каждый за время $2\pi \sin \varepsilon_k^3/\varepsilon_k^2$, начиная с момента τ'_{i-1}, в одном и том же направлении так, чтобы момент τ_i завершения последнего поворота удовлетворял неравенству $\tau_i > 2\tau'_{i-1}$.

5. Полностью завершив все действия из п. 4 настоящего построения, положим $T_k \equiv \tau_I$, чем и закончим индуктивный переход.

ρ. Обозначим через t_m ($m \in \mathbb{N}$) упорядоченные по возрастанию конечные моменты всех поворотов, которые делались в процессе построения системы A. При каждых $m, k \in \mathbb{N}$ имеем: если $t_m \in (T_{k-1}, T_k]$, то норма оператор-функции $A(t)$ на отрезке $t \in [t_{m-1}, t_m]$ ($t_0 \equiv 0$), по построению, не превосходит величины $2\varepsilon_k^2 \to 0$ при $k \to \infty$ ($m \to \infty$), поэтому $A(t) \to 0$ при $t \to \infty$ и, согласно теореме 2, получаем для решения $x \in \mathcal{S}(A)$ равенство $\rho(x) = 0$.

γ. Для доказательства равенства $\hat{\gamma}^\bullet(x) = \infty$ положим $\mathrm{K} = \Gamma$, $\varkappa = \gamma$, $k(l) = 1$ и проведем следующие рассуждения:

(i) прямая $l = G^\perp$, ортогональная к произвольной некритической по отношению к функционалам K плоскости $G \subset \mathbb{R}^3$, при каждом значении $k \in \mathbb{N}$ на k-м шагу индукции при построении системы A попадает в ε_k^3-окрестность некоторого вектора $s_i \in \mathcal{N}$;

(ii) следующие итоговые оценки не нарушатся после замены функции $P_G x$ функцией Lx при любом преобразовании $L \in \operatorname{End}_2 \mathbb{R}^3$, где $l \in \operatorname{Ker} L$:

(ii.a) при каждом $k \geqslant k(l)$ благодаря поворотам решения x вокруг вектора s_i проекция $P_G x$ за время от τ'_{i-1} до τ_i сделает целое число оборотов, равное $(\tau_i - \tau'_{i-1})/(2\pi \sin \varepsilon_k^3/\varepsilon_k^2)$, откуда получаем оценки

$$\frac{\mathrm{K}(P_G x, \tau_i)}{\tau_i} \geqslant \frac{2\pi(\tau_i - \tau'_{i-1})}{\tau_i 2\pi \sin \varepsilon_k^3/\varepsilon_k^2} \geqslant \frac{\varepsilon_k \tau_i/2}{\tau_i \cdot \sin \varepsilon_k^3} = \frac{\varepsilon_k^2}{2 \sin \varepsilon_k^3} \to \infty, \quad k \to \infty; \tag{7.1}$$

(iii) таким образом, получаем требуемое равенство:

$$\hat{\varkappa}^\bullet(x) = \inf_{L \in \operatorname{End}_2 \mathbb{R}^3} \overline{\lim_{t \to \infty}} \frac{\mathrm{K}(Lx, t)}{t} \geqslant \overline{\lim_{k \to \infty}} \frac{\varepsilon_k^2}{2 \sin \varepsilon_k^3} = \infty. \tag{7.2}$$

θ. Для доказательства равенства $\hat{\theta}^\bullet(x) = \infty$ положим $\mathrm{K} = \Theta$, $\varkappa = \theta$, $k(l) = 1$ и повторим рассуждения (i), (ii), (ii.a), (iii) из п. γ выше.

ν. Равенство $\hat{\nu}^\bullet(x) = \infty$ вытекает из равенства, доказанного в п. θ выше, в силу теоремы 2.

ω. Равенство $\hat{\omega}^\bullet(x) = \infty$ вытекает из равенства, доказанного в п. θ выше, в силу теоремы 2.

B. Укажем систему $A \in \mathcal{M}^3$ с решением $x \in \mathcal{S}(A)$, удовлетворяющим строке (4.3).

1, 2. См. вариант A.

3. Выберем на полусфере S^+ конечное подмножество $\mathcal{N}$, состоящее из единичных векторов $s_i \in S^+$ ($i = 1, \ldots, I$) следующих типов:

(3.a) $s_i \in S^{\varepsilon_k}$, причем подмножество всех таких векторов s_i образует *конечную* ε_k^3-*сеть* на множестве S^{ε_k};

(3.b) $s_i \in Q$, причем подмножество всех таких векторов s_i образует *конечную* ε_k^4-*сеть* на множестве Q.

4. См. вариант A:

(4.1) выберем вектор $e_i \in S^+$, составляющий угол ε_k^3 с вектором s_i, причем в случае $s_i \in Q$ добавим дополнительное условие $e_i \in Q$;

(4.2) см. вариант A;

(4.3) начиная с момента τ'_{i-1}, совершим на полусфере S^+ подряд несколько поворотов по одной окружности с центром s_i и радиусом ε_k^3 так, чтобы момент τ_i завершения последнего поворота удовлетворял неравенству $\tau_i > 2\tau'_{i-1}$:

(4.3.a) если $s_i \in S^{\varepsilon_k}$, то сделаем несколько полных оборотов в одном направлении за время $2\pi \sin \varepsilon_k^3/\varepsilon_k^2$ каждый (окружности, по которым происходит движение, целиком лежат внутри полусферы S^+ и не имеют общих точек с большой окружностью Q);

(4.3.b) если $s_i \in Q$, то сделаем несколько полуоборотов поочередно то в одном, то в другом направлении за время $\pi \sin \varepsilon_k^3/\varepsilon_k^2$ каждый (все точки полуокружности, по которым происходит движение, лежат внутри полусферы S^+, за исключением начальной и конечной крайних точек, принадлежащих большой окружности Q);

5, ρ. См. вариант A.

θ. Если P_G — ортогональный проектор на произвольную некритическую по отношению к функционалу Θ плоскость G, проходящую через перпендикуляр $p \equiv Q^\perp$, то кривая $P_G x$ лежит целиком в одной (нестрого) полуплоскости относительно прямой $P_G Q$ и верна оценка $\Theta(P_G x, t) \leqslant \pi$, из которой вытекает равенство $\theta(x) = 0$ (определения 1 и 2).

γ. Для доказательства равенства $\hat{\gamma}^\bullet(x) = \infty$ положим $\mathrm{K} = \Gamma$, $\varkappa = \gamma$ и проведем следующие рассуждения:

(i) прямая $l = G^\perp$, ортогональная к произвольной некритической по отношению к функционалу K плоскости $G \subset \mathbb{R}^3$, при каждом значении $k \in \mathbb{N}$, начиная с некоторого номера $k(l) \in \mathbb{N}$, на k-м шагу индукции при построении системы A попадает в малую окрестность некоторого вектора $s_i \in \mathcal{N}$:

(i.a) если $\alpha \equiv \angle(l, Q) > 0$, то номер $k(l)$ определяется из оценки $\varepsilon_{k(l)} < \alpha$, причем $s_i \in S^{\varepsilon_k}$ и $\angle(l, s_i) < \varepsilon_k^3$ при каждом $k \geqslant k(l)$;

(i.b) если $\alpha = 0$, то $l \in Q$, $k(l) = 1$, причем $s_i \in Q$ и $\angle(l, s_i) < \varepsilon_k^4$ при каждом $k \geqslant k(l)$;

(ii): (ii.a) при $\alpha > 0$ см. вариант A;

(ii.b) при $\alpha = 0$ и $k \geqslant k(l)$ благодаря полуоборотам решения x вокруг вектора s_i проекция $P_G x$ за время от τ'_{i-1} до τ_i сделает целое число полуоборотов, равное $(\tau_i - \tau'_{i-1})/(\pi \sin \varepsilon_k^3/\varepsilon_k^2)$, откуда получаем в итоге те же оценки

$$\frac{\mathrm{K}(P_G x, \tau_i)}{\tau_i} \geqslant \frac{\pi(\tau_i - \tau'_{i-1})}{\tau_i \pi \sin \varepsilon_k^3/\varepsilon_k^2} \geqslant \frac{\varepsilon_k^2 \tau_i/2}{\tau_i \cdot \sin \varepsilon_k^3} = \frac{\varepsilon_k^2}{2 \sin \varepsilon_k^3} \to \infty, \quad k \to \infty;$$

(iii) см. вариант A.

ν. Прямая p — критическая для функционала N (поскольку кривая x в некоторые моменты достигает ортогональной к p окружности Q, имея в эти моменты нулевую производную), а через любую некритическую по отношению к функционалу N прямую можно провести некритическую по отношению к функционалу Γ плоскость — для нее, в силу оценок (7.1) при $\mathrm{K} = \Gamma$, выполнена оценка

$$\frac{\mathrm{N}(P_G x, \tau_i)}{\tau_i} \geqslant \frac{\Gamma(P_G x, \tau_i)}{\tau_i} \geqslant \frac{\varepsilon_k^2}{2 \sin \varepsilon_k^3} \to \infty, \quad \tau_i \in [T_{k-1}, T_k], \quad k \to \infty,$$

из которой вытекает равенство $\hat{\nu}^\bullet(x) = \infty$ (см. цепочку (7.2) при $\varkappa = \nu$, $\mathrm{K} = \mathrm{N}$).

ω. Равенство $\hat{\omega}^\bullet(x) = \infty$ вытекает из равенства, доказанного в п. γ выше, в силу теоремы 2.

C. Укажем систему $A \in \mathcal{M}^3$ с решением $x \in \mathcal{S}(A)$, удовлетворяющим строке (4.4).

1. При $k = 1$ фиксируем начальный вектор $x(0) \equiv q \in Q$ и совершим один его полный оборот по окружности Q со средней скоростью ε_1^2 за время от 0 до $T_1 = 2\pi/\varepsilon_1^2$, получив систему A на отрезке $[0, T_1]$ и конечный вектор $x(T_1) = q \in Q$.

2. См. вариант A.

3: (3.a) см. вариант B.

4: (4.1), (4.2), (4.3); 5, ρ. См. вариант A.

γ. Если P_G — ортогональный проектор на некритическую по отношению к функционалу Γ плоскость G, проходящую через перпендикуляр $p \equiv Q^\perp$, то проекция $P_G x$ обнуляется за все время всего 2 раза (см. п. 1 выше), а ее угловая скорость по модулю оценивается сверху:

$$\left|\frac{\partial}{\partial t}e(P_Gx,t)\right| \leqslant \frac{2\varepsilon_k^2}{\varepsilon_k-\varepsilon_k^2} \to 0, \quad t\in[T_{k-1},T_k], \quad k\to\infty \tag{7.3}$$

(поскольку $\angle(x(t),G^{\perp}) > \varepsilon_k-\varepsilon_k^2$), откуда вытекает равенство $\gamma(x)=0$ (определения 1 и 2).

θ. Для доказательства равенства $\hat{\theta}^{\bullet}(x)=\infty$ положим $\mathrm{K}=\Theta$, $\varkappa=\theta$ и проведем следующие рассуждения:

(i): (i.a) см. вариант B;

(i.b) если $\alpha=0$, то плоскость Q критическая (см. п. 1 выше);

(ii): (ii.a); (iii) см. вариант A.

ν, ω. См. вариант A.

D. Укажем систему $A\in\mathcal{M}^3$ с решением $x\in\mathcal{S}(A)$, удовлетворяющим строке (4.5).

1, 2. См. вариант A.

3: (3.a), (3.b) См. вариант B.

4. См. вариант A:

(4.1) выберем вектор $e_i\in S^+$, составляющий угол ε_k^3 с вектором s_i, причем в случае $s_i\in Q$ добавим дополнительное условие $\angle(e_i,Q)=\varepsilon_k^4$;

(4.2) см. вариант A;

(4.3): (4.3.a) см. вариант B;

(4.3.b) если $s_i\in Q$, то сделаем несколько поворотов от точки e_i до симметричной ей точки e_i' (удовлетворяющей условию $\angle(e_i',Q)=\varepsilon_k^4$) относительно плоскости, проходящей через s_i и перпендикуляр $p\equiv Q^{\perp}$, поочередно туда и обратно, каждый поворот за время $(\pi-\varphi_k)\sin\varepsilon_k^3/\varepsilon_k^2$, где $\varphi_k\equiv 2\arcsin(\sin\varepsilon_k^3/\sin\varepsilon_k^2)\to 0$, $k\to\infty$.

5, ρ. См. вариант A.

ν. Если P_p — ортогональный проектор на перпендикуляр $p\equiv Q^{\perp}$, то, по построению, кривая P_px лежит целиком строго на одной полупрямой относительно точки P_pQ, поэтому при $t>0$ верно равенство $\mathrm{N}(P_px,t)=0$, из которого вытекает равенство $\nu(x)=0$ (определения 1 и 2).

θ. Равенство $\theta(x)=0$ вытекает из равенства, доказанного в п. ν выше, в силу теоремы 2.

γ. Для доказательства равенства $\hat{\gamma}^{\bullet}(x)=\infty$ положим $\mathrm{K}=\Gamma$, $\varkappa=\gamma$ и проведем следующие рассуждения:

(i): (i.a), (i.b) см. вариант B;

(ii): (ii.a) при $\alpha>0$ см. вариант A;

(ii.b) при $\alpha=0$ и $k\geqslant k(l)$ благодаря поворотам решения x вокруг вектора s_i по дуге от e_i к e_i' и обратно проекция P_Gx за время от τ_{i-1}' до τ_i сделает целое число полуоборотов, равное $(\tau_i-\tau_{i-1}')/((\pi-\varphi_k)\sin\varepsilon_k^3/\varepsilon_k^2)$, откуда при $k\to\infty$ получаем оценки

$$\frac{\mathrm{K}(P_Gx,\tau_i)}{\tau_i} \geqslant \frac{(\pi-\varphi_k-\psi_k)(\tau_i-\tau_{i-1}')}{\tau_i(\pi-\varphi_k)\sin\varepsilon_k^3/\varepsilon_k^2} \geqslant \frac{(\pi-\varphi_k-\psi_k)\varepsilon_k^2}{2(\pi-\varphi_k)\sin\varepsilon_k^3} \to \infty,$$

где $\varphi_k,\psi_k\to 0$ (поправка ψ_k связана со смещением центра поворота из точки s_i в точку l, где $\angle(l,s_i)\leqslant\varepsilon_k^4=o(\varepsilon_k^3)$);

(iii) см. вариант A.

ω. См. вариант B.

E. Укажем систему $A\in\mathcal{M}^3$ с решением $x\in\mathcal{S}(A)$, удовлетворяющим строке (4.6).

1. При $k=1$ фиксируем начальный вектор $x(0)\equiv p\in S^+$ и сделаем два последовательных поворота по одной большой окружности, проходящей через точку $q\in Q$: от точки p до симметричной ей точки $-p$ относительно $q\in Q$ и обратно, со средней скоростью ε_1^2 за время от 0 до $T_1\equiv 2\pi/\varepsilon_1^2$, получив систему A на отрезке $[0,T_1]$ и конечный вектор $x(T_1)=p\in S^+$.

2. См. вариант A.

3: (3.a) см. вариант B;

(3.b) $s_i\in Q^{\varepsilon_k}$, причем подмножество всех таких векторов s_i образует *конечную* ε_k^4*-сеть* на множестве Q^{ε_k}.

4. См. вариант A:

(4.1) см. вариант B;

(4.2) см. вариант A;

(4.3): (4.3.a), (4.3.b) см. вариант B.

5, ρ. См. вариант A.

θ. См. вариант B.

γ. Если P_G — ортогональный проектор на некритическую по отношению к функционалу Γ плоскость $G \equiv q^\perp$, то проекция $P_G x$ обнуляется за все время всего 2 раза (см. п. 1 выше), а ее угловая скорость удовлетворяет оценке (7.3) (поскольку $\angle(x(t), q) > \varepsilon_k - \varepsilon_k^2$), откуда вытекает равенство $\gamma(x) = 0$ (определения 1 и 2).

ω. Для доказательства равенства $\hat{\omega}^\bullet(x) = \infty$ положим $\mathrm{K} = \Omega$, $\varkappa = \omega$ и проведем следующие рассуждения:

(i): (i.a) см. вариант B;

(i.b) если $\alpha = 0$, то $\beta \equiv \angle(l, q) > 0$ (иначе плоскость G критическая, см. п. 1 выше), $l \in Q$ и номер $k(l)$ определяется из оценки $\varepsilon_{k(l)} < \beta$, причем $s_i \in Q$ и $\angle(l, s_i) < \varepsilon_k^4$ при каждом $k \geqslant k(l)$;

(ii): (ii.a) при $\alpha > 0$ см. вариант A;

(ii.b) см. вариант B;

(iii) см. вариант A.

ν. Прямая p — критическая для функционала N (поскольку кривая x в некоторые моменты достигает ортогональной к p окружности Q, имея в эти моменты нулевую производную), а через любую некритическую по отношению к функционалу N прямую можно провести некритическую по отношению к функционалу Ω плоскость — для нее, в силу оценок (7.1) при $\mathrm{K} = \Omega$, выполнена оценка

$$\frac{\mathrm{N}(P_G x, \tau_i)}{\tau_i} \geqslant \frac{\Omega(P_G x, \tau_i)}{\tau_i} \geqslant \frac{\varepsilon_k^2}{2 \sin \varepsilon_k^3} \to \infty, \quad \tau_i \in [T_{k-1}, T_k], \quad k \to \infty,$$

из которой вытекает равенство $\hat{\nu}^\bullet(x) = \infty$ (см. цепочку (7.2) при $\varkappa = \nu$, $\mathrm{K} = \mathrm{N}$).

F. Укажем систему $A \in \mathcal{M}^3$ с решением $x \in \mathcal{S}(A)$, удовлетворяющим строке (4.7).

1. См. вариант E.

2. См. вариант A.

3: (3.a) см. вариант B;

(3.b) см. вариант E.

4. См. вариант A:

(4.1) см. вариант D;

(4.2) см. вариант A;

(4.3): (4.3.a) см. вариант B;

(4.3.b) см. вариант D.

5, ρ. См. вариант A.

ν. Если P_p — ортогональный проектор на перпендикуляр $p \equiv Q^\perp$, то, по построению, кривая $P_p x$, до момента T_1 обнуляется 2 раза (см. п. 1 выше), а после лежит целиком строго на одной полупрямой относительно точки $P_p Q$, поэтому при $t > T_1$ верно равенство $\mathrm{N}(P_p x, t) = 2$, из которого вытекает равенство $\nu(x) = 0$ (определения 1 и 2).

θ. См. вариант D.

γ. См. вариант E.

ω. Для доказательства равенства $\hat{\omega}^\bullet(x) = \infty$ положим $\mathrm{K} = \Omega$, $\varkappa = \omega$ и проведем следующие рассуждения:

(i): (i.a) см. вариант B;

(i.b) см. вариант E;

(ii): (ii.a) при $\alpha > 0$ см. вариант A;

(ii.b) см. вариант D;

(iii) см. вариант A.

Теорема 5 доказана. □

Список литературы

1. Сергеев И.Н. Связь между колеблемостью, вращаемостью и блуждаемостью решений дифференциальных систем // Теория управления и математическое моделирование: Тез. докл. Всероссийской конференции с междунар. участием, посвященной памяти профессора Н.В. Азбелева и профессора Е.Л. Тонкова. УдГУ. Ижевск, 2015. С. 127–128.
2. Сергеев И.Н. Определение и свойства характеристических частот линейного уравнения // Тр. сем. им. И.Г. Петровского. 2006. Вып. 25. С. 249–294.
3. Сергеев И.Н. Колеблемость и блуждаемость решений дифференциального уравнения второго порядка // Вестник Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Механ. 2011. № 6. С. 21–26.
4. Сергеев И.Н. Характеристики колеблемости и блуждаемости решений линейной дифференциальной системы // Известия РАН. Сер. матем. 2012. Т. 76. № 1. С. 149–172.
5. Сергеев И.Н. Замечательное совпадение характеристик колеблемости и блуждаемости решений дифференциальных систем // Матем. сб. 2013. Т. 204. № 1. С. 119–138.
6. Сергеев И.Н. Свойства характеристических частот линейного уравнения произвольного порядка // Тр. сем. им. И.Г. Петровского. 2013. Вып. 29. С. 414–442.
7. Сергеев И.Н. Характеристики поворачиваемости решений дифференциальных систем // Дифференц. уравнения. 2014. Т. 50. № 10. С. 1353–1361.

Поступила в редакцию 08.10.2015

Сергеев Игорь Николаевич, д. ф.-м. н., профессор, кафедра дифференциальных уравнений, механико-математический факультет, Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, 119991, Россия, г. Москва, Ленинские горы, 1.
E-mail: igniserg@gmail.com

I. N. Sergeev

The complete set of relations between the oscillation, rotation and wandering indicators of solutions of differential systems

Keywords: differential equations, linear system, oscillation, rotation, wandering, indicators of solutions, Lyapunov exponents.

MSC: 34D08

In this paper a number of Lyapunov indicators is defined for non-trivial solutions of linear systems on semiaxis to be responsible for their oscillation, rotation and wandering. The indicators are obtained from some functionals of solutions on finite intervals as a result of averaging over time and minimizing for all bases in the phase space. We give a set of relations (equalities or inequalities) between introduced indicators. The set is proved to be full, that is, it cannot be supplemented or strengthened by any meaningful relation.

REFERENCES

1. Sergeev I.N. Connection between the oscillation, rotation and wandering of solutions of differential systems, *Control theory and mathematical modelling: Abstracts of All-Russian Conf. Dedicated to prof. N.V. Azbelev and prof. E.L. Tonkov*, Udmurt State University, Izhevsk, 2015, pp. 127–128 (in Russian).
2. Sergeev I.N. Definition and properties of characteristic frequencies of a linear equation, *Journal of Mathematical Sciences*, 2006, vol. 135, no. 1, pp. 2764–2793.
3. Sergeev I.N. Oscillation and wandering of solutions to a second order differential equation, *Moscow University Mathematics Bulletin*, 2011, vol. 66, no. 6, pp. 250–254.
4. Sergeev I.N. Oscillation and wandering characteristics of solutions of a linear differential system, *Izvestiya: Mathematics*, 2012, vol. 76, no. 1, pp. 141–164.
5. Sergeev I.N. Properties of characteristic frequencies of linear equations of arbitrary order, *Journal of Mathematical Sciences*, 2014, vol. 197, no. 3, pp. 410–426.
6. Sergeev I.N. The remarkable agreement between the oscillation and wandering characteristics of solutions of differential systems, *Sbornik: Mathematics*, 2013, vol. 204, no. 1, pp. 114–132.
7. Sergeev I.N. Turnability characteristics of solutions of differential systems, *Differential Equations*, 2014, vol. 50, no. 10, pp. 1342–1351.

Received 08.10.2015

Sergeev Igor Nikolaevich, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Department of Differential Equations, Faculty of Mathematics and Mechanics, Lomonosov Moscow State University, Leninskie Gory, 1, Moscow, 119991, Russia.
E-mail: igniserg@gmail.com