УДК 517.977

© *П. М. Симонов*

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ЛИНЕЙНЫХ ГИБРИДНЫХ ФУНЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ[1]

Рассматривается линейная гибридная система фунционально-дифференциальных уравнений с последействием. Применен $\mathcal{W}$-метод. Получены условия ее разрешимости в парах пространств. Рассмотрены простые примеры двух уравнений. Задача сводится к одной переменной или другой переменной.

Ключевые слова: линейная гибридная система функционально-дифференциальных уравнений с последействием, разрешимость в парах пространств, метод модельных уравнений.

Введение

Исследованию по устойчивости решений к настоящему времени посвящено крайне мало работ. В работе В.М. Марченко и Ж.Ж. Луазо [1] исследована задача об устойчивости решений стационарных линейных гибридных систем функционально-дифференциальных уравнений с последействием (ЛГСФДУП).

Построенная в настоящее время общая теория функционально-дифференциальных уравнений [2–6] позволила дать ясное и лаконичное описание основных свойств решений, в том числе свойства устойчивости решений. В то же время широкие и актуальные для приложений классы систем ЛГСФДУП формально не охватываются построенной теорией и во многом остаются вне поля зрения специалистов.

Постановка задачи: одно уравнение линейное разностное, определенное в дискретном множестве точек, а другое — линейное функционально-дифференциальное уравнение с последействием (ЛФДУП) на полуоси.

Исследование продолжает работы [7–11].

Обозначим через

$$y = \{y(-1), y(0), y(1), \ldots, y(N), \ldots\}$$

бесконечную матрицу со столбцами $y(-1)$, $y(0)$, $y(1)$, $\ldots$, $y(N)$, $\ldots$ размерами n, а через $g = \{g(0), g(1), \ldots, g(N), \ldots\}$ — бесконечную матрицу со столбцами $g(0), g(1), \ldots, g(N), \ldots$ размерами n.

Каждой бесконечной матрице

$$y = \{y(-1), y(0), y(1), \ldots, y(N), \ldots\}$$

можно сопоставить вектор-функцию

$$y(t) = y(-1)\chi_{[-1,0)}(t) + y(0)\chi_{[0,1)}(t) + y(1)\chi_{[1,2)}(t) + \ldots + y(N)\chi_{[N,N+1)}(t) + \ldots.$$

Аналогично каждой бесконечной матрице $g = \{g(0), g(1), \ldots, g(N), \ldots\}$ можно сопоставить вектор-функцию

$$g(t) = g(0)\chi_{[0,1)}(t) + g(1)\chi_{[1,2)}(t) + \ldots + g(N)\chi_{[N,N+1)}(t) + \ldots.$$

Символом $y(t) = y[t]$ обозначим вектор-функцию $y(t) = y([t])$, $t \in [-1, \infty)$. Символом $g[t]$ обозначим вектор-функцию $g(t) = g([t])$, $t \in [0, \infty)$.

[1]Статья подготовлена в рамках реализации комплексного проекта по созданию высокотехнологичного производства, договор № 02.G25.31.0039 (Постановление Правительства РФ № 218 от 09.04.2010 г. «О мерах государственной поддержки развития кооперации российских высших учебных заведений и организаций, реализующих комплексные проекты по созданию высокотехнологичного производства» при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации).

Множество таких вектор-функций $y[\cdot]$ обозначим символом ℓ_0. Множество таких вектор-функций $g[\cdot]$ обозначим символом ℓ. Обозначим $(\Delta y)(t) = y(t) - y(t-1) = y[t] - y[t-1]$ при $t \geqslant 1$, $(\Delta y)(t) = y(t) = y[t] = y(0)$ при $t \in [0, 1)$.

Запишем ЛГСФДУП в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{11}x + \mathcal{L}_{12}y &= \dot{x} - F_{11}x - F_{12}y = f, \\ \mathcal{L}_{21}x + \mathcal{L}_{22}y &= \Delta y - F_{21}x - F_{22}y = g. \end{aligned} \tag{0.1}$$

Здесь и ниже $\mathbb{R}^n$ — пространство векторов $\alpha = \mathrm{col}\{\alpha^1, \ldots, \alpha^n\}$ с действительными компонентами и с нормой $||\alpha||_{\mathbb{R}^n}$. Пусть L — пространство локально суммируемых $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}^n$ с полунормами $||f||_{L[0,T]} = \int_0^T ||f(t)||_{\mathbb{R}^n}\, dt$ для всех $T > 0$; D — пространство локально абсолютно непрерывных функций $x : [0, \infty) \to \mathbb{R}^n$ с полунормами $||x||_{D[0,T]} = ||\dot{x}||_{L[0,T]} + ||x(0)||_{\mathbb{R}^n}$ для всех $T > 0$; C — банахово пространство непрерывных и ограниченных функций $x : [0, \infty) \to \mathbb{R}^n$ с нормой $||x||_C = \sup\limits_{t \geqslant 0} ||x(t)||_{\mathbb{R}^n}$.

Пусть ℓ — пространство вектор-функций

$$g(t) = g(0)\chi_{[0,1)}(t) + g(1)\chi_{[1,2)}(t) + \ldots + g(N)\chi_{[N,N+1)}(t) + \ldots$$

с полунормами $||g||_{\ell_T} = \sum\limits_{i=0}^{T} ||g_i||_{\mathbb{R}^n}$ для всех $T \geqslant 0$; ℓ_0 — пространство вектор-функций

$$y(t) = y(-1)\chi_{[-1,0)}(t) + y(0)\chi_{[0,1)}(t) + y(1)\chi_{[1,2)}(t) + \ldots + y(N)\chi_{[N,N+1)}(t) + \ldots$$

с полунормами $||y||_{\ell_{0T}} = \sum\limits_{i=-1}^{T} ||y_i||_{\mathbb{R}^n}$ для всех $T \geqslant -1$.

Операторы $\mathcal{L}_{11}, F_{11} : D \to L$, $\mathcal{L}_{12}, F_{12} : \ell_0 \to L$, $\mathcal{L}_{21}, F_{21} : D \to \ell$, $\mathcal{L}_{22}, F_{22} : \ell_0 \to \ell$ предполагаются линейными непрерывными и вольтерровыми.

Пусть модельное уравнений [2–6] $\mathcal{L}_{11}x = z$ и банахово пространство B с элементами из пространства L ($B \subset L$ и это вложение непрерывно) выбраны так, что решения этого уравнения обладают интересующими нас асимптотическими свойствами. Пространство $D(\mathcal{L}_{11}, B)$, порождаемое модельным уравнением, будет состоять из решений вида

$$x(t) = (\mathcal{C}_{11}z)(t) + (\mathcal{X}_{11}\alpha)(t) = \int_0^t C_{11}(t,s)z(s)\, ds + X_{11}(t)\alpha \quad (\alpha \in \mathbb{R}^n, \quad z \in B).$$

Норму в пространстве $D(\mathcal{L}_{11}, B)$ можно ввести равенством

$$||x||_{D(\mathcal{L}_{11},B)} = ||\mathcal{L}_{11}x||_B + ||x(0)||_{\mathbb{R}^n}.$$

Предположим, что оператор $\mathcal{W}_{11}$ непрерывно действует из пространства B в пространство B и оператор $\mathcal{X}_{11}$ действует из пространства $\mathbb{R}^n$ в пространство B. Это условие эквивалентно тому [2,5], что пространство $D(\mathcal{L}_{11}, B)$ линейно изоморфно пространству С.Л. Соболева $W_B^{(1)}[0, \infty)$ с нормой

$$||x||_{W_B^{(1)}[0,\infty)} = ||\dot{x}||_B + ||x||_B.$$

Дальше будем это пространство обозначать как W_B. При этом $W_B \subset D$, и это вложение непрерывно.

Уравнение $\mathcal{L}_{11}x = z$ с оператором $\mathcal{L}_{11} : W_B \to B$ W_B-устойчиво [2,5] тогда и только тогда, если оно сильно B-устойчиво. Уравнение $\mathcal{L}_{11}x = z$ сильно B-устойчиво, если для любого $z \in B$ каждое решение x этого уравнения обладает следующим свойством: $x \in B$ и $\dot{x} \in B$ [2, гл. IV, § 4.6; 5].

§ 1. Сведение к ЛФДУП

Предположим, что общее решение уравнения $\mathcal{L}_{22}y = g$ для $g \in \ell$ принадлежит пространству ℓ_0 и представляется формулой Коши:

$$y[t] = Y_{22}[t]y(-1) + \sum_{s=0}^{t} C_{22}[t,s]\, g[s].$$

Поставим задачу: пусть $g \in M \subset \ell$, где M — банахово пространство, и тогда будет $y \in M_0 \subset \ell_0$, где M_0 — банахово пространство, причем M_0 изоморфно M.

Обозначим $(\mathcal{C}_{22}g)[t] = \sum\limits_{s=0}^{t} C_{22}[t,s]\, g[s]$, $(\mathcal{Y}_{22}y(-1))[t] = Y_{22}[t]y(-1)$.

Тогда каждое решение y второго уравнения в (0.1) имеет вид

$$y = -\mathcal{C}_{22}\mathcal{L}_{21}x + Y_{22}y(-1) + \mathcal{C}_{22}g.$$

Подставим в первое уравнение в (0.1):

$$\mathcal{L}_{11}x + \mathcal{L}_{12}y = \mathcal{L}_{11}x - \mathcal{L}_{12}\mathcal{C}_{22}\mathcal{L}_{21}x + \mathcal{L}_{12}Y_{22}y(-1) + \mathcal{L}_{12}\mathcal{C}_{22}g = f,$$

$$\mathcal{L}_{11}x - \mathcal{L}_{12}\mathcal{C}_{22}\mathcal{L}_{21}x = f_1 = f - \mathcal{L}_{12}Y_{22}y(-1) - \mathcal{L}_{12}\mathcal{C}_{22}g.$$

Введем обозначение $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{11} - \mathcal{L}_{12}\mathcal{C}_{22}\mathcal{L}_{21}$, тогда первое уравнение в (0.1) примет вид $\mathcal{L}x = f_1$.

Предположим, что вольтерров оператор $\mathcal{L} : W_B^0 \to B$ вольтеррово обратим, где

$$W_B^0 = \{x \in W_B : x(0) = 0\},$$

то есть когда задача для уравнения $\mathcal{L}x = f_1$ обладает следующим свойством: при любом $f_1 \in B$ ее решения $x \in W_B$. Таким образом, мы решили задачу, когда для уравнения (1) при любом $\{f, g\} \in B \times M$ ее решения $\{x, y\} \in W_B \times M_0$.

Пример 1.1. Рассмотрим два уравнения:

$$\begin{array}{ll} \dot{x}(t) + ax(t) + by[t] = f(t), & t \in [0,\infty), \\ y[t] - dy[t-1] + cx(t) = g[t], & t \in [0,\infty). \end{array} \tag{1.1}$$

Причем

$$y(0) - dy(-1) + cx(0) = y[t] - dy[t-1] + cx(t) = g[t] = g(0),\ t \in [0,1).$$

Введем пространства

$$\ell_{\infty 0} = \{y \in \ell_0 :\ ||y||_{\ell_{\infty 0}} = \sup_{k=-1,0,1,\cdots} ||y(k)||_{\mathbb{R}^n} < +\infty\},$$

$$\ell_{\infty} = \{g \in \ell :\ ||g||_{\ell_{\infty}} = \sup_{k=0,1,\cdots} ||g(k)||_{\mathbb{R}^n} < +\infty\}.$$

Через S обозначим оператор $(Sy)[t] = dy[t-1]$, $t \geqslant 1$, $(Sy)[t] = 0$, $t \in [0,1)$, тогда второе уравнение запишется в виде

$$y[t] - (Sy)[t] + cx(t) = g_1[t] = g[t] + dy[t-1], \quad t \in [0,1),$$

$$y[t] - (Sy)[t] + cx(t) = g[t], \quad t \in [1,\infty).$$

Рассмотрим оператор $S : \ell_\infty \to \ell_\infty$. Известно, что оператор $(I - S) : \ell_\infty \to \ell_\infty$ вольтеррово обратим тогда и только тогда, когда спектральный радиус оператора $\rho_{\ell_\infty}(S)$ в пространстве ℓ_∞ меньше единицы: $\rho_{\ell_\infty}(S) < 1$ [12, гл. 4, § 4.1, задачи и упр. 1.11, к), с. 87, с. 140]. Для оператора S условие $\rho_{\ell_\infty}(S) < 1$ эквивалентно неравенству $|d| < 1$ [12, гл. 4, § 4.1, задачи и упр. 1.11, к), с. 87, с. 140].

Введем следующие обозначения:

$$(\mathcal{L}_{11}x)(t)=\dot{x}(t)+ax(t),\quad (\mathcal{L}_{12}y)[t]=by[t],\quad (\mathcal{L}_{21}x)(t)=cx(t),\quad (\mathcal{L}_{22}y)[t]=y[t]-(Sy)[t],\quad t\geqslant 0.$$

Построим функцию Коши C_{22} и фундаментальное решение Y_{22} для уравнения $y[t]-dy[t]=g[t]$:

$$y[t]=d^{t+1}y(-1)+\sum_{s=0}^{[t]}g[s]d^{[t]-s}=Y_{22}[t]y(-1)+(\mathcal{C}_{22}g)[t].$$

Отсюда выразим $y[t]$ из второго уравнения системы (1.1):

$$y[t]=d^{t+1}y(-1)+\sum_{s=0}^{[t]}(g[s]-cx[s])d^{[t]-s}=Y_{22}[t]y(-1)+(\mathcal{C}_{22}(g-cx))[t].$$

Подставим найденное y в первую формулу в (0.1) (или (1.1)), получим

$$(\mathcal{L}_{11}x)(t)+(\mathcal{L}_{12}y)[t]=\dot{x}(t)+ax(t)+bd^{t+1}y(-1)+b\sum_{s=0}^{[t]}(g[s]-cx[s])d^{[t]-s}=f(t).$$

Преобразуем к виду

$$(\mathcal{L}x)(t)=\left((\mathcal{L}_{11}-\mathcal{L}_{12}\mathcal{C}_{22}\mathcal{L}_{21})x\right)(t)=\dot{x}(t)+ax(t)-bc\sum_{s=0}^{[t]}x[s]d^{[t]-s}=f_1(t)=$$

$$=f(t)-bd^{t+1}y(-1)-b\sum_{s=0}^{[t]}g[s]d^{[t]-s}.$$

Видно, что $f_1\in L_\infty$, если $|d|<1$.

Возьмем модельное уравнение $\mathcal{L}_{11}x=z$, $z\in L_\infty$. Запишем формулу Коши для уравнения $(\mathcal{L}_{11}x)(t)=z(t)=bc\sum\limits_{s=0}^{[t]}x[s]d^{[t]-s}+f_1(t)$:

$$x(t)=X_{11}(t)x(0)+\int_0^t C_{11}(t,s)(bc\sum_{i=0}^{[s]}x[i]d^{[s]-i}+f_1(s))\,ds.$$

Здесь $X_{11}(t)=e^{-at}$, $C_{11}(t,s)=e^{-a(t-s)}$. Возьмем $a>0$.

Получаем, что норма оператора $\mathcal{C}_{11}bc\mathcal{C}_{22}$ меньше 1, когда $|bc|<a(1-|d|)$.

Получили, что для любого $f_1\in L_\infty$ решение x задачи $\mathcal{L}x=f_1$ принадлежит пространству L_∞, кроме того, получили, что производная решения $\dot{x}$ принадлежит пространству L_∞. Таким образом, показали, что для любого $f_1\in L_\infty$ решение x задачи $\mathcal{L}x=f_1$ принадлежит пространству W_{L_∞}.

Таким образом, мы решили задачу, когда для уравнения (1.1) при любом $\{f,g\}\in L_\infty\times\ell_\infty$ ее решения $\{x,y\}\in W_{L_\infty}\times\ell_{\infty 0}$.

П р и м е р 1.2. Рассмотрим два уравнения:

$$(\mathcal{L}_{11}x)(t)+(\mathcal{L}_{12}y)[t]=\dot{x}(t)+ax(t-\tau)+by[t]=f(t),\ t\geqslant 0,\ \tau>0,\ x(\xi)=0,\ \xi<0,$$

$$(x_\tau(t)=x(t-\tau),\ t\geqslant\tau,\ x_\tau(t)=0,\ 0\leqslant t<\tau),$$

$$(\mathcal{L}_{11}x)(t)+(\mathcal{L}_{12}y)[t]=\dot{x}(t)+ax_\tau(t)+by[t]=f(t),\ t\geqslant 0,$$

$$(f\in L_\infty,\ \ x,\dot{x}\in L_\infty,\ \ D(\mathcal{L}_{11},L_\infty)\cong W_{L_\infty}\Longleftrightarrow 0<a\tau<\pi/2),$$

$$(\mathcal{L}_{21}x)(t)+(\mathcal{L}_{22}y)[t]=cx(t)+y[t]-(Sy)[t]=g[t],\ t\geqslant 0.$$

Выполним преобразование $\mathcal{L}x = (\mathcal{L}_{11} - \mathcal{L}_{12}\mathcal{C}_{22}\mathcal{L}_{21})x = f_1$. Запишем в исходных терминах:

$$(\mathcal{L}x)(t) = \dot{x}(t) + ax(t-\tau) - bc(\mathcal{C}_{22}x)[t] = f_1(t),\ x(\xi) = 0,\ \xi < 0.$$

Перепишем его так:

$$(\mathcal{L}_{11}x)(t) = \dot{x}(t) + ax_\tau(t) = bc(\mathcal{C}_{22}x)[t] + f_1(t).$$

Здесь $(\mathcal{L}_{11}x)(t) = \dot{x}(t) + ax_\tau(t) = z(t)$ — модельное уравнение, а $x(t) = X_{11}(t)x(0) + \int_0^t C_{11}(t,s)z(s)\,ds$ — формула Коши для него. Обозначим $C_{11}(t,s) = C_{a,\tau,11}(t,s)$. Положив $x(0) = 0 \Longrightarrow x(t) = bc\int_0^t C_{a,\tau,11}(t,s)(\mathcal{C}_{22}x)[s]\,ds + f_2(t)$, мы уравнение $\mathcal{L}x = f_1$ свели левой $\mathcal{W}$-подстановкой к операторному уравнению.

Дадим оценку нормы оператора Коши уравнения $\mathcal{L}_{11}x = f_3$:

$$||C_{a,\tau,11}||_{L_\infty\to C} = \sup_{t\geqslant 0}\int_0^t |C_{a,\tau,11}(t,s)|ds.$$

Из результата С.А. Гусаренко [13] следует $||C_{a,\tau,11}||_{L_\infty\to C} = \sigma(\tau)/a \iff 0 < a\tau < \pi/2$, $\sigma(\tau) = ||C_{1,\tau,11}||_{L_\infty\to C}$, $\sigma(\tau) = 1 \iff 0 < \tau < 1/e$.

Далее оценка нормы в операторном уравнении дает такой результат: $|bc|\sigma(\tau)/(a(1-|d|)) < 1$. А это значит, $|bc| < a(1-|d|)/\sigma(\tau)$, то есть это достаточное условие, что при любом $f_1 \in L_\infty$ ее решения $x \in W_{L_\infty}$. Таким образом, мы решили задачу, когда для системы уравнений при любом $\{f,g\} \in L_\infty \times \ell_\infty$ ее решения $\{x,y\} \in W_{L_\infty} \times \ell_{\infty 0}$.

П р и м е р 1.3. Рассмотрим два уравнения:

$$(\mathcal{L}_{11}x)(t) + (\mathcal{L}_{12}y)[t] = \dot{x}(t) + a_1x(t) + a_2x(t-\tau) + by[t] = f(t),\ \ t\geqslant 0,\ \ \tau > 0,\ \ x(\xi) = 0,\ \ \xi < 0,$$

$$(\mathcal{L}_{11}x)(t) + (\mathcal{L}_{12}y)[t] = \dot{x}(t) + a_1x(t) + a_2x_\tau(t) + by[t] = f(t),\ \ t\geqslant 0,$$

$$f \in L_\infty,\ x,\dot{x} \in L_\infty,\ D(\mathcal{L}_{11}, L_\infty) \cong W_{L_\infty} \Leftrightarrow \{a_1,a_2\} \in \Delta$$

(Δ — это угол Андронова–Майера на плоскости двух параметров [14]),

$$(\mathcal{L}_{21}x)(t) + (\mathcal{L}_{22}y)[t] = cx(t) + y[t] - (Sy)[t] = g[t],\ t\geqslant 0.$$

Введем следующие обозначения:

$$(\mathcal{L}_{11}x)(t) = \dot{x}(t) + a_1x(t) + a_2x_\tau(t), (\mathcal{L}_{12}y)[t] = by[t], (\mathcal{L}_{21}x)(t) = cx(t), (\mathcal{L}_{22}y)[t] = y[t] - (Sy)[t].$$

Выполним преобразование $\mathcal{L}x = (\mathcal{L}_{11} - \mathcal{L}_{12}\mathcal{C}_{22}\mathcal{L}_{21})x = f_1$.

Запишем в исходных терминах:

$$(\mathcal{L}x)(t) = \dot{x}(t) + a_1x(t) + a_2x_\tau(t) - bc(\mathcal{C}_{22}x)[t] = f_1(t),\quad t \in [0,\infty).$$

Примем за модельное уравнение $(\mathcal{L}_{11}x)(t) = \dot{x}(t) + a_1x(t) + a_2x_\tau(t) = z(t),\ t\geqslant 0$. Обозначим через $C_{11}(t,s) = C_{a_1,a_2,\tau,11}(t,s)$ функцию Коши модельного уравнения. Сделаем в модельном уравнении подстановку $x(t) = y(t)e^{-a_1t}$, $z(t) = u(t)e^{-a_1t}$, $a_1 > 0$. Тогда модельное уравнение примет вид $\dot{y}(t) + a_2e^{a_1\tau}y_\tau(t) = u(t),\ t\geqslant 0$.

Возьмем $p = a_2e^{a_1\tau}$, обозначим через $W_{p,\tau}(t,s)$ функцию Коши этого уравнения. Из результатов С.А. Гусаренко [13] следует, что $||W_{p,\tau}||_{L_\infty\to C} = \sigma(\tau)/p \Leftrightarrow 0 < p\tau < \pi/2$. Отсюда следует $||C_{a_1,a_2,\tau,11}||_{L_\infty\to C} = ||W_{p,\tau}||_{L_\infty\to C}/a_1 = \sigma(\tau)/(a_1p)$.

Положим $x(0) = 0$, тогда $x(t) = bc\int_0^t C_{a_1,a_2,\tau,11}(t,s)(\mathcal{C}_{22}x)[s]\,ds + f_2(t)$.

Оценим норму оператора, стоящего справа, она будет меньше 1, если $0 < p = a_2e^{a_1\tau} < \pi/2$ и $a_1 > 0$, и выполняется неравенство $|bc| < a_1p(1-|d|)/\sigma(\tau) \Leftrightarrow |bc| < a_1a_2e^{a_1\tau}(1-|d|)/\sigma(\tau)$. Таким образом, мы решили задачу, когда для системы уравнений при любом $\{f,g\} \in L_\infty \times \ell_\infty$ ее решения $\{x,y\} \in W_{L_\infty} \times \ell_{\infty 0}$.

§ 2. Сведение к линейному разностному уравнению с последействием

Для уравнения (0.1) будем пользоваться такими обозначениями, которые приняты в пункте 1.

Предположим, что общее решение уравнения $\mathcal{L}_{11}x = f$ для $f \in B$ (B непрерывно вложено в L) принадлежит пространству $D(\mathcal{L}_{11}, B)$ и представляется формулой Коши:

$$x(t) = X_{11}(t)x(0) + \int_0^t C_{11}(t,s)f(s)ds.$$

Из первого уравнения в (0.1) найдем x:

$$x = -\mathcal{C}_{11}\mathcal{L}_{12}y + X_{11}x(0) + \mathcal{C}_{11}f.$$

Подставим во второе уравнение в (0.1):

$$\mathcal{L}_{21}x + \mathcal{L}_{22}y = -\mathcal{L}_{21}\mathcal{C}_{11}\mathcal{L}_{12}y + \mathcal{L}_{21}X_{11}x(0) + \mathcal{L}_{21}\mathcal{C}_{11}f + \mathcal{L}_{22}y = g,$$

$$-\mathcal{L}_{21}\mathcal{C}_{11}\mathcal{L}_{12}y + \mathcal{L}_{22}y = g_1 = g - \mathcal{L}_{21}X_{11}x(0) - \mathcal{L}_{21}\mathcal{C}_{11}f.$$

Введем обозначение $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{22} - \mathcal{L}_{21}\mathcal{C}_{11}\mathcal{L}_{12}$, тогда второе уравнение в (0.1) примет вид $\mathcal{L}y = g_1$.

Предположим, что вольтерров оператор $\mathcal{L} : M_0 \to M$ вольтеррово обратим, то есть когда задача для уравнения $\mathcal{L}y = g_1$ при любом $g_1 \in M$ ее решения $y \in M_0$. Таким образом, мы решили задачу, когда для уравнения (0.1) при любом $\{f, g\} \in B \times M$ ее решения $\{x, y\} \in \in D(\mathcal{L}_{11}, B) \times M_0$.

П р и м е р 2.1. Рассмотрим два уравнения:

$$\begin{array}{ll} \dot{x}(t) + ax(t) + by[t] = f(t), & t \in [0, \infty), \\ y[t] - dy[t-1] + cx[t] = g[t], & t \in [0, \infty). \end{array} \tag{2.1}$$

Воспользовавшись формулой Коши для x, получаем, что первое уравнение в системе (2.1) записывается в виде

$$x(t) = X_{11}(t)x(0) + \int_0^t C_{11}(t,s)(f(s) - by[s])\,ds$$

или так:

$$x(t) = e^{-at}x(0) + \int_0^t e^{-a(t-s)}(f(s) - by[s])ds\,.$$

Подставим x во второе уравнение в системе (2.1):

$$y[t] - dy[t-1] + c(e^{-a[t]}x(0) + \int_0^{[t]} e^{-a([t]-s)}(f(s) - by[s])\,ds) = g[t],$$

$$y[t] - dy[t-1] - bc\int_0^{[t]} e^{-a([t]-s)}y[s]\,ds = g_1[t] = g[t] - ce^{-a[t]}x(0) - c\int_0^{[t]} e^{-a([t]-s)}f(s)\,ds.$$

Вычислим интеграл:

$$bc\int_0^{[t]} e^{-a([t]-s)}y[s]\,ds = bce^{-a[t]}\int_0^{[t]} e^{as}y[s]\,ds = bce^{-a[t]}\sum_{i=0}^{[t]-1} y[i]\int_i^{i+1} e^{as}\,ds =$$

$$= bce^{-a[t]}\sum_{i=0}^{[t]-1} y[i](e^{a(i+1)} - e^{ai})/a = \frac{bc}{a}\sum_{i=0}^{[t]-1} y[i](e^{-a([t]-i-1)} - e^{-a([t]-i)}).$$

Получаем уравнение

$$y[t] - dy[t-1] - \frac{bc}{a}\sum_{i=0}^{[t]-1} y[i](e^{-a([t]-i-1)} - e^{-a([t]-i)}) = g_1[t], \quad t \in [0,\infty).$$

Обозначим

$$(Ky)[t] = \frac{bc}{a}\sum_{i=0}^{[t]-1} y[i](e^{-a([t]-i-1)} - e^{-a([t]-i)}).$$

Предположим, что $a > 0$. Найдем оценку нормы $||K||_{\ell_{\infty 0}\to\ell_\infty}$:

$$||Ky||_{\ell_\infty} = \sup_{k=0,1,2,\dots}\left|\frac{bc}{a}\sum_{i=0}^{[t]-1} y[i](e^{-a([t]-i-1)} - e^{-a([t]-i)})\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{k=0,1,2,\dots}|y[k]| \cdot \sup_{k=0,1,2,\dots}\left|\frac{bc}{a}\sum_{i=0}^{k-1}(e^{-a(k-i-1)} - e^{-a(k-i)})\right| \leqslant$$

$$\leqslant ||y||_{\ell_{\infty 0}} \cdot \frac{|bc|}{a}\sup_{k=0,1,2,\dots}\sum_{i=0}^{k-1}\left|e^{-a(k-i-1)} - e^{-a(k-i)}\right| \leqslant$$

$$\leqslant ||y||_{\ell_{\infty 0}} \cdot \frac{|bc|}{a}\sup_{k=0,1,2,\dots}\sum_{i=0}^{k-1}(e^{-a(k-i-1)} - e^{-a(k-i)}) =$$

$$= ||y||_{\ell_{\infty 0}} \cdot \frac{|bc|}{a}\sup_{k=0,1,2,\dots}(1 - e^{-ak}) = ||y||_{\ell_{\infty 0}} \cdot \frac{|bc|}{a}.$$

Дальше оценим норму $||(I-S)^{-1}K||_{\ell_\infty\to\ell_\infty}$:

$$||(I-S)^{-1}K||_{\ell_\infty\to\ell_\infty} \leqslant ||(I-S)^{-1}||_{\ell_\infty\to\ell_{\infty 0}} \cdot ||K||_{\ell_{\infty 0}\to\ell_\infty} \leqslant \frac{1}{1-|d|}\cdot\frac{|bc|}{a}.$$

Получаем, что норма оператора $||(I-S)^{-1}K||_{\ell_\infty\to\ell_\infty}$ меньше 1, когда

$$|bc| \ < a(1-|d|).$$

Получили, что для любого $g_1 \in \ell_\infty$ решение y уравнения $\mathcal{L}y = g_1$ принадлежит пространству ℓ_∞.

Таким образом, мы решили задачу, когда для уравнения (2.1) при любом $\{f,g\} \in L_\infty \times \ell_\infty$ ее решения $\{x,y\} \in W_{L_\infty} \times \ell_{\infty 0}$.

Список литературы

1. Марченко В.М., Луазо Ж.Ж. Об устойчивости гибридных дифференциально-разностных систем // Дифференц. уравнения. 2009. Т. 45. № 5. С. 728–740.
2. Азбелев Н.В., Симонов П.М. Устойчивость решений уравнений с обыкновенными производными. Пермь: Перм. ун-т, 2001. 230 с.
3. Азбелев Н.В., Березанский Л.М., Симонов П.М., Чистяков А.В. Устойчивость линейных систем с последействием. II // Дифференц. уравнения. 1991. Т. 27, № 4. С. 555–562.
4. Азбелев Н.В., Березанский Л.М., Симонов П.М., Чистяков А.В. Устойчивость линейных систем с последействием. III // Дифференц. уравнения. 1991. Т. 27, № 10. С. 1659–1668.
5. Азбелев Н.В., Березанский Л.М., Симонов П.М., Чистяков А.В. Устойчивость линейных систем с последействием. IV // Дифференц. уравнения. 1993. Т. 29, № 2. С. 196–204.
6. Азбелев Н.В., Симонов П.М. Устойчивость уравнений с запаздывающим аргументом // Изв. вузов. Математика. 1997. № 6 (421). С. 3–16.

7. Ларионов А.С., Симонов П.М. Устойчивость гибридных функционально-дифференциальных систем с последействием (ГФДСП) // Вестник РАЕН. Тематический номер «Дифференциальные уравнения». 2013. Т. 13. № 4. С. 34–37.
8. Симонов П.М. Устойчивость линейных гибридных функционально-дифференциальных систем с последействием (ЛГФДСП) // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. 2013. Т. 18. Вып. 5–2. С. 2670–2672.
9. Ларионов А.С., Симонов П.М. Устойчивость гибридных функционально-дифференциальных систем с последействием (ГФДСП). II // Вестник РАЕН. Тематический номер «Дифференциальные уравнения». 2014. Т. 14. № 5. С. 38–45.
10. Ларионов А.С., Симонов П.М. Устойчивость линейных гибридных функционально-дифференциальных систем с последействием // Динамика систем и процессы управления: Труды международной конференции, посв. 90-летию со дня рождения акад. Н.Н. Красовского. Екатеринбург, Россия, 15–20 сентября 2014 г. ИММ УрО РАН, 2015. С. 243–250.
11. Симонов П.М. К вопросу об устойчивости гибридных функционально-дифференциальных систем с последействием // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. 2015. Т. 20. Вып. 5. С. 1428–1435.
12. Цалюк З.Б., Пуляев В.Ф. Задачи по функциональному анализу. М.–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2010. 152 с.
13. Гусаренко С.А. Признаки разрешимости задач о накоплении возмущений для функционально-дифференциальных уравнений // Функционально-дифференциальные уравнения: Межвуз. сб. науч. тр. / Перм. политехн. ин-т. Пермь, 1987. С. 30–40.
14. Андронов А.А., Майер А.Г. Простейшие линейные системы с запаздыванием // Автоматика и телемеханика. 1946. Т. 7. № 2, 3. С. 95–106.

Поступила в редакцию 30.09.2015

Симонов Пётр Михайлович, д. ф.-м. н., профессор, кафедра информационных систем и математических методов в экономике, Пермский государственный национальный исследовательский университет, 614990, Россия, г. Пермь, ул. Букирева, 15.
E-mail: simpm@mail.ru

P. M. Simonov

On the stability of linear hybrid functional differential systems

Keywords: linear hybrid system of functional differential equations with aftereffect, solvability in couples of spaces, method of model equations.

MSC: 34D20, 93D20

We consider a linear hybrid system of the functional differential equations with aftereffect. By using $\mathcal{W}$-method we obtain conditions for its solvability in couples of spaces. We consider simple examples of two equations. The problem is reduced to one variable or other variable.

REFERENCES

1. Marchenko V.M., Loiseau J.-J. On the stability of hybrid difference-differential systems, *Differential Equations*, 2009, vol. 45, no. 5, pp. 743–756. DOI: 10.1134/S0012266109050139
2. Azbelev N.V., Simonov P.M. *Ustoichivost' reshenii uravnenii s obyknovennymi proizvodnymi* (Stability of solutions to equations with ordinary derivatives), Perm: Perm University, 2001, 230 p.
3. Azbelev N.V., Berezanskii L.M., Simonov P.M., Chistyakov A.V. Stability of linear systems with aftereffect: II, *Differentsial'nye uravneniya*, 1991, vol. 27, no. 4, pp. 555–562 (in Russian).
4. Azbelev N.V., Berezanskii L.M., Simonov P.M., Chistyakov A.V. Stability of linear systems with aftereffect: III, *Differentsial'nye uravneniya*, 1991, vol. 27, no. 10, pp. 1659–1668 (in Russian).
5. Azbelev N.V., Berezanskii L.M., Simonov P.M., Chistyakov A.V. Stability of linear systems with aftereffect: IV, *Differentsial'nye uravneniya*, 1993, vol. 29, no. 2, pp. 196–204 (in Russian).
6. Azbelev N.V., Simonov P.M. Stability of equations with delay, *Russian Mathematics*, 1997, vol. 41, no. 6, pp. 1–14.
7. Larionov A.S., Simonov P.M. Stability of hybrid functional differential systems with aftereffect (HFDSA), *Vestnik Ross. Akad. Estestv. Nauk*, 2013, vol. 13, no. 4, pp. 34–37 (in Russian).
8. Simonov P.M. Stability of linear hybrid functional differential systems with aftereffect (LHFDSA), *Vestn. Tambov. Univ. Ser. Estestv. Tekh. Nauki*, 2013, vol. 18, no. 5–2, pp. 2670–2672 (in Russian).
9. Larionov A.S., Simonov P.M. Stability of hybrid functional differential systems with aftereffect (HFDSA) II, *Vestnik Ross. Akad. Estestv. Nauk*, 2014, vol. 14, no. 5, pp. 38–45 (in Russian).

10. Larionov A.S., Simonov P.M. Stability of linear hybrid functional differential systems with aftereffect, *Systems Dynamics and Control Processes: Proceedings of International Conference dedicated to the 90th Anniversary of Academician N.N. Krasovskii*, Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of RAS, Yekaterinburg, 2015, pp. 243–250 (in Russian).
11. Simonov P.M. About stability of hybrid functional differential systems with aftereffect, *Vestn. Tambov. Univ. Ser. Estestv. Tekh. Nauki*, vol. 20, no. 5, pp. 1428–1435 (in Russian).
12. Tsalyuk Z.B., Pulyaev V.F. *Zadachi po funktsional'nomu analizu* (Problems on functional analysis), Moscow–Izhevsk: RCD, 2010, 152 p.
13. Gusarenko S.A. Indications of the solvability of the accumulation of disturbances for functional differential equations, *Funktsional'no-differentsial'nye uravneniya: Trans.*, Perm, Perm State Technical University, 1987, pp. 30–40.
14. Andronov A.A., Maier A.G. Simplest linear systems with retardation, *Avtomatika i Telemekhanika*, 1946, vol. 7, no. 2–3, pp. 95–106 (in Russian).

Received 30.09.2015

Simonov Petr Mikhailovich, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Department of Information Systems and Mathematical Methods in Economics, Perm State National Research University, ul. Bukireva, 15, Perm, 614990, Russia.
E-mail: simpm@mail.ru