УДК 517.952, 517.97

© *Н. Н. Субботина, Л. Г. Шагалова*

КОНСТРУКЦИЯ НЕПРЕРЫВНОГО ОБОБЩЕННОГО РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ГАМИЛЬТОНА–ЯКОБИ С ФАЗОВЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ[1]

Рассматривается начальная краевая задача с фазовыми ограничениями для нелинейного уравнения Гамильтона–Якоби. Ввводится новое определение непрерывного обобщенного решения, которое применяется к нелинейному некоэрцитивному уравнению Гамильтона–Якоби, возникающему в молекулярной биологии. Для этого уравнения предлагается конструкция построения обобщенного решения, удовлетворяющего дополнительным требованиям к структуре. Изучается связь построенного решения с вязкостным обобщенным решением. Приведены результаты компьютерного моделирования.

Ключевые слова: уравнение Гамильтона–Якоби, обобщенное решение, вязкостное решение, минимаксное решение, фазовые ограничения, метод характеристик.

Введение

Многие практические задачи приводят к необходимости рассмотрения уравнений типа Гамильтона–Якоби в ограниченных замкнутых областях фазового пространства. При этом, как правило, решение понимается в обобщенном смысле. Оно известно на начальном многообразии, представляющем собой часть границы рассматриваемой области, и требуется определить его внутри области и на оставшейся части границы.

В теории уравнений Гамильтона–Якоби известны различные концепции обобщенного решения (см., например, [1–3]). Однако понятие минимаксного [3] решения не вводилось для задач с фазовыми ограничениями. Вязкостные [2] решения были определены и для задач в ограниченной области. Но при этом вязкостное решение, определенное в открытой области и непрерывно продолженное на замыкание этой области, не обязательно будет являться вязкостным решением на замыкании. Более того, сужение вязкостного решения, существующего в большей открытой области, на компактную подобласть фазовых ограничений также может не быть вязкостным решением в этой компактной подобласти. Известные [4, 5] теоремы существования вязкостного решения для уравнения

$$\partial u/\partial t + H(x, \partial u/\partial x) = 0, \tag{0.1}$$

рассматриваемого в области $[0,T] \times \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \ni (t,x)$, где Ω — компакт, доказаны при следующем условии коэрцитивности гамильтониана:

$$H(x,p) \to +\infty \quad \text{при} \quad |p| \to \infty. \tag{0.2}$$

Таким образом, для уравнений вида (0.1) с некоэрцитивными гамильтонианами вязкостные решения в задачах с фазовыми ограничениями могут не существовать, и для таких задач требуется корректно вводить новые определения решения.

В данной работе мы вводим новое определение непрерывного обобщенного решения для уравнения (0.1) в начальной задаче с фазовыми ограничениями и применяем его для исследования обобщенного решения нелинейного уравнения Гамильтона–Якоби, полученного в [6] для модели Кроу–Кимуры молекулярной эволюции.

§ 1. Определение непрерывного обобщенного решения

Рассмотрим уравнение Гамильтона–Якоби

$$\partial u/\partial t + H(x, \partial u/\partial x) = 0, \tag{1.1}$$

где $t \in [0,T]$, $T > 0$, $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$, Ω — компактное множество.

[1]Работа частично поддержана РФФИ (грант № 14-01-00168) и УрО РАН (грант № 14-1-НП-348).

Уравнение (1.1) рассматривается совместно с начальным условием

$$u(0,x) = u_0(x), \quad x \in \Omega. \tag{1.2}$$

Предполагаем, что выполнены следующие условия.
A1. $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная замкнутая область с непустой внутренностью $\operatorname{int}\Omega$ и гладкой границей $\partial\Omega$.
A2. Гамильтониан $H(x,p)$ является непрерывно дифференцируемым при $(x,p) \in \Omega \times \mathbb{R}^n$ и выпуклым по p, то есть

$$H(x, \lambda p_1 + (1-\lambda)p_2) \leqslant \lambda H(x,p_1) + (1-\lambda)H(x,p_1) \quad \forall \lambda \in [0,1], \quad \forall (p_1,p_2) \in \mathbb{R}^2, \quad \forall x \in \Omega.$$

A3. Функция $u_0 : \Omega \to \mathbb{R}$ является непрерывно дифференцируемой.

Пусть $W = [0,T] \times \Omega$. Обозначим символом $C(W)$ класс функций, непрерывных на множестве W. Напомним также следующие понятия негладкого анализа [4, 7].

Пусть $u(\cdot) \in C(W)$ и $(t,x) \in W$. *Субдифференциалом* функции $u(\cdot)$ в точке $(t,x) \in W$ называется множество

$$D^-u(t,x) = \left\{ (a,s) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \;\middle|\; \liminf_{\substack{(\tau,y)\to(t,x)\\(\tau,y)\in W}} \frac{u(\tau,y) - u(t,x) - a(\tau - t) - s(y-x)}{|\tau - t| + |y - x|} \geqslant 0 \right\}.$$

Супердифференциалом функции $u(\cdot)$ в точке $(t,x) \in W$ называется множество

$$D^+u(t,x) = \left\{ (a,s) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \;\middle|\; \limsup_{\substack{(\tau,y)\to(t,x)\\(\tau,y)\in W}} \frac{u(\tau,y) - u(t,x) - a(\tau - t) - s(y-x)}{|\tau - t| + |y - x|} \leqslant 0 \right\}.$$

Символом $\operatorname{Dif}(u)$ обозначим множество точек из W, в которых функция $u(\cdot) \in C(W)$ дифференцируема. Для заданного множества $M \subset \mathbb{R}^n$ символом $\operatorname{co}M$ будем обозначать его выпуклую оболочку [8]. Определим множество

$$\partial u(t,x) = \operatorname{co}\Big\{ (a,s) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \;\Big|\; a = \lim_{i\to\infty} \tfrac{\partial u(t_i,x_i)}{\partial t},\ s = \lim_{i\to\infty} \tfrac{\partial u(t_i,x_i)}{\partial x};$$
$$(t_i, x_i) \to (t,x) \text{ при } i \to \infty, \quad (t_i,x_i) \in \operatorname{Dif}(u) \Big\}, \quad (t,x) \in W.$$

О п р е д е л е н и е 1.1. Непрерывная функция $u(\cdot) : W \to \mathbb{R}$ называется обобщенным решением задачи (1.1)–(1.2), если она удовлетворяет начальному условию (1.2) и выполнены следующие соотношения:

$$a + H(x,s) \leqslant 0 \quad \forall (a,s) \in D^+u(t,x), \quad \forall (t,x) \in (0,T) \times \operatorname{int}\Omega, \tag{1.3}$$

$$a + H(x,s) \geqslant 0 \quad \forall (a,s) \in D^-u(t,x), \quad \forall (t,x) \in (0,T) \times \operatorname{int}\Omega, \tag{1.4}$$

$$a + H(x,s) \geqslant 0 \quad \forall\, (a,s) \in D^-u(t,x) \cap \partial u(t,x), \quad \forall\, (t,x) \in (0,T) \times \partial\Omega. \tag{1.5}$$

Далее рассмотрим применение определения 1.1 непрерывного обобщенного решения на примере уравнения Гамильтона–Якоби, возникающего [6] в модели молекулярной эволюции.

§ 2. Уравнение Гамильтона–Якоби в модели Кроу–Кимуры молекулярной эволюции

В работе [6] был предложен новый подход к исследованию задач молекулярной генетики, в соответствии с которым динамику модели Кроу–Кимуры молекулярной эволюции можно проанализировать с помощью уравнения Гамильтона–Якоби (1.1), рассматриваемого в полосе $t \geqslant 0$, $-1 \leqslant x \leqslant 1$, в которой гамильтониан имеет вид

$$H(x,p) = -f(x) + 1 - \frac{1+x}{2}e^{2p} - \frac{1-x}{2}e^{-2p}, \quad -1 \leqslant x \leqslant 1,\, p \in \mathbb{R}. \tag{2.1}$$

Функция $f(\cdot)$ в (2.1), называемая фитнесом, предполагается заданной и непрерывно дифференцируемой. Кроме того, задана непрерывно дифференцируемая начальная функция $u_0(\cdot)$ такая, что

$$u(0,x) = u_0(x), \quad x \in [-1;1] = \Omega. \tag{2.2}$$

В [6] задача (1.1), (2.1), (2.2) исследовалась для входных данных вида $u_0(x) = -a(x-x_0)^2$, $a > 0$, $f(x) = x^2$ на основе физических интерпретаций и метода характеристик. Ниже эта модель изучается для достаточно широкого класса входных данных $f(\cdot)$, $u_0(\cdot)$.

Метод характеристик (см., например, [9]) — классический метод решения задачи Коши для уравнений в частных производных первого порядка (УЧП1). Этот метод сводит интегрирование УЧП1 к решению характеристической системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

Характеристическая система для задачи (1.1), (2.1), (2.2) имеет вид

$$\begin{gathered}\dot{x} = H_p(x,p) = -(1+x)e^{2p} + (1-x)e^{-2p},\\ \dot{p} = -H_x(x,p) = f'(x) + (e^{2p} - e^{-2p})/2,\\ \dot{z} = pH_p(x,p) - H(x,p) = p\dot{x} + q\end{gathered} \tag{2.3}$$

и рассматривается с начальными условиями

$$x(0,y) = y, \quad p(0,y) = u_0'(y), \quad z(0,y) = u_0(y), \qquad y \in [-1;1]. \tag{2.4}$$

Здесь $H_x(x,p) = \partial H(x,p)/\partial x$, $\quad H_p(x,p) = \partial H(x,p)/\partial p$, $\quad f'(x) = \partial f(x)/\partial x$.
Решения системы (2.3)–(2.4) называются характеристиками. Компоненты $x(\cdot,y)$, $p(\cdot,y)$ и $z(\cdot,y)$ решения называются соответственно фазовыми, импульсными и ценовыми характеристиками.

Согласно методу характеристик $u(t,x) = z(t,y)$, где y таково, что $x(t,y) = x$. Метод характеристик может быть применен для решения задачи (1.1), (2.1), (2.2) в такой окрестности начального многообразия (2.4), в которой фазовые характеристики не пересекаются. Как правило, характеристики (2.3), (2.4) ведут себя нерегулярно: они непродолжимы на всю ось времени и пересекают друг друга. Более того, в полосе $t \geqslant 0$, $-1 \leqslant x \leqslant 1$, в которой требуется определить решение задачи (1.1), (2.1), (2.2), существуют точки, через которые не проходит ни одна характеристика. Пример такого поведения характеристик представлен на рисунке 1.

Из вышесказанного следует, что решение задачи (1.1), (2.1), (2.2) нужно понимать в обобщенном смысле.

§ 2.1. Существование обобщенного решения

Пусть $T > 0$ — такой момент времени, что решения (2.3), (2.4) продолжимы до этого момента, и характеристики $x(\cdot,y)$, $p(\cdot,y)$, $z(\cdot,y)$ непрерывны на $[0,T]$ для всех $y \in [-1;1]$. Точные оценки для интервалов продолжимости решений (2.3), (2.4) получены в [10, 11].

Рассмотрим задачу (1.1), (2.1), (2.2) в ограниченной замкнутой области

$$\overline{\Pi}_T = [0;T] \times [-1;1].$$

Введем также следующие обозначения:

$$\Pi_T = (0;T) \times (-1;1), \quad \Gamma_T = \{(t,x)|\ t \in (0,T),\ x = \pm 1\}.$$

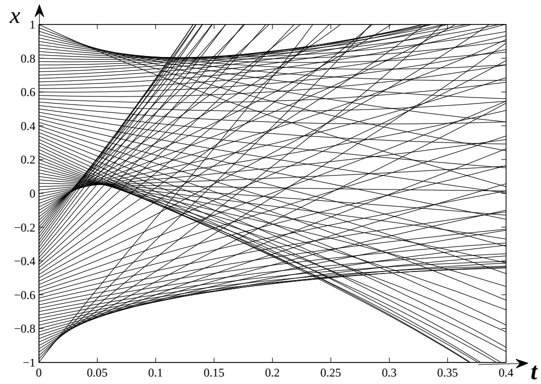

Рис. 1. Фазовые характеристики для случая $f(x) = -0.25x^2$, $u_0(x) = 0.25(x-0.5)^2 - 0.1\cos 2\pi x$

Положив $\Omega = [-1,1]$, $W = \overline{\Pi}_T$, в задаче (1.1),(2.1),(2.2) можно использовать определение 1.1 обобщенного решения. Действительно, нетрудно проверить, что для этой задачи выполнены условия **A1**–**A3**, при которых сформулировано определение 1.1.

В [12] с помощью методов теории оптимального управления [13] и метода обобщенных характеристик [14,15] было доказано следующее утверждение.

Т е о р е м а 2.1. *Пусть входные данные* $u_0(\cdot) : [-1,1] \to \mathbb{R}$ *и* $f(\cdot) : [-1,1] \to \mathbb{R}$ *— непрерывно дифференцируемые функции. Пусть функция* $\varphi(t,x) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *также является непрерывно дифференцируемой и удовлетворяет соотношениям*

$$\varphi(0,x) = u_0(x) \quad \forall\, x \in [-1,1];$$

$$\frac{\partial \varphi(t,\pm 1)}{\partial t} + H\Big(\pm 1, \frac{\partial \varphi(t,\pm 1)}{\partial x}\Big) = 0 \quad \forall\, t \geqslant 0. \tag{2.5}$$

Тогда существует решение $u(t,x)$ *задачи* (1.1), (2.1), (2.2) *в смысле определения* 1.1. *Для всех* $(t,x) \in \overline{\Pi}_T$ *решение имеет вид*

$$u(t,x) = \max_{x(t,y^\sharp)=x} \left[\varphi(t^\sharp, y^\sharp) + \int_{t^\sharp}^{t} p(\tau,y^\sharp) H_p(x(\tau,y^\sharp), p(\tau,y^\sharp)) - H(x(\tau,y^\sharp), p(\tau,y^\sharp)) d\tau \right], \tag{2.6}$$

где $t^\sharp \in [0,T]$. *Если* $t^\sharp = 0$, *то* $y^\sharp = y \in [-1,1]$; *если* $t^\sharp > 0$, *то* $y^\sharp = \pm 1$. *Функции* $(x(\cdot,y^\sharp), p(\cdot,y^\sharp))\colon [t^\sharp,t] \to \mathbb{R}^2$ *— решения системы, состоящей из первых двух уравнений характеристической системы* (2.3), *с начальными условиями*

$$x(t^\sharp,y^\sharp) = y^\sharp, \quad p(t^\sharp,y^\sharp) = \frac{\partial \varphi(t^\sharp,y^\sharp)}{\partial y} = p_0(t^\sharp,y^\sharp).$$

Отметим, что в силу возможности широкого выбора функции $\varphi(\cdot)$ в теореме 2.1 обобщенное решение задачи (1.1), (2.1), (2.2) неединственно.

§ 3. Обобщенное решение заданной структуры

Пусть $x^-(t) = x(t,-1)$, $x^+(t) = x(t,+1)$, $t \in [0,T]$ – фазовые характеристики (2.3), стартующие в момент $t=0$ из точек $x=-1$ и $x=1$ соответственно. Далее будем предполагать, что выполнено следующее условие.

B. Для фазовых характеристик $x(\cdot,y)$ (2.3) с начальными условиями (2.4) при $t=0$ справедливы неравенства $-1 \leqslant x^-(t) \leqslant x(t,y) \leqslant x^+(t) \leqslant 1 \quad \forall\, y \in [-1,1], \quad \forall\, t \in [0,T]$.

Определим подобласти

$$\begin{gathered} G_0 = \big\{(t,x) | t \in [0,T],\ x^-(t) \leqslant x \leqslant x^+(t)\big\}. \\ G_+ = \{(t,x)|\ t \in [0,T],\ x^+(t) \leqslant x \leqslant 1\}, \\ G_- = \{(t,x)|\ t \in [0,T],\ -1 \leqslant x \leqslant x^-(t)\}. \end{gathered} \tag{3.1}$$

Если выполнено условие **B**, справедливо разбиение

$$\overline{\Pi}_T = G_+ \cup G_0 \cup G_-.$$

Нашей целью является построение обобщенного решения задачи (1.1), (2.1), (2.2), которое в области G_0 имеет вид

$$u(t,x) = \max_{x(t,y)=x} [u_0(y) + \int_0^t p(\tau)H_p(x(\tau),p(\tau)) - H(x(\tau),p(\tau))d\tau], \tag{3.2}$$

где $x(t) = x(t,y)$, $p(t) = p(t,y)$, $t \geqslant 0$, — соответственно фазовые и импульсные характеристики, удовлетворяющие начальным условиям

$$x(0,y) = y, \quad p(0,y) = u_0'(y), \quad y \in [-1,1].$$

§ 3.1. Достаточные условия

Для построения обобщенного решения задачи (1.1), (2.1), (2.2), удовлетворяющего требованию (3.2), введем дополнительные условия на входные данные.

C1. Производная $u_0'(\cdot) : [-1,1] \to \mathbb{R}$ непрерывна и удовлетворяет неравенствам

$$u_0'(1) < 0, \quad u_0'(-1) > 0.$$

C2. Производная $f'(\cdot)\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ непрерывна, монотоннно не убывает и удовлетворяет неравенствам

$$2f'(1) + e^{2u_0'(1)} < e^{-2u_0'(1)}, \quad -2f'(-1) + e^{-2u_0'(-1)} < e^{2u_0'(-1)}.$$

§ 3.2. Вспомогательные задачи вариационного исчисления

Рассмотрим две задачи вариационного исчисления на множестве всех непрерывно дифференцируемых функций $x(\cdot) : \overline{\Pi}_T \to \mathbb{R}$. Решения этих задач будут использованы в предлагаемой ниже конструкции обобщенного решения задачи (1.1), (2.1), (2.2):

$$I(x(\cdot)) = \int_0^t H^*(x(\tau),\dot{x}(\tau))d\tau \mapsto \max, \tag{3.3}$$

$$x_1(0) = 1, \quad x_1(t) = x, \quad (t,x) \in G_+, \tag{3.4}$$

$$x_2(0) = -1, \quad x_2(t) = x, \quad (t,x) \in G_-, \tag{3.5}$$

где

$$H^*(x(\tau),\dot{x}(\tau)) = \inf_{p\in\mathbb{R}} [p\dot{x}(\tau) - H(x(\tau),p)], \quad \tau \in [0,t]. \tag{3.6}$$

§ 4. Конструкция обобщенного решения

§ 4.1. Структура решения

Определим функцию $u(t,x)$, $(t,x) \in \overline{\Pi}_T$ следующим образом. В области G_0 полагаем

$$u(t,x) = \max_{x(t,y)=x} [\int_0^t p(\tau)H_p(x(\tau),p(\tau)) - H(x(\tau),p(\tau))d\tau + u_0(y)], \tag{4.1}$$

где $x(t) = x(t,y)$, $p(t) = p(t,y)$, $t \geqslant 0$, — соответственно фазовая и импульсная характеристики, удовлетворяющие начальным условиям

$$x(0,y) = y, \quad p(0,y) = \partial u_0(y)/\partial x, \quad y \in [-1,1].$$

Пусть $(t,x) \in G_+$ и $x < 1$. Полагаем

$$u(t,x) = u_0(1) + \int_0^t \big[p(\tau)H_p(x(\tau),p(\tau)) - H(x(\tau),p(\tau))\big]d\tau, \tag{4.2}$$

где $x(\cdot) = x^+(\cdot, p_0(t,x))$, $p(\cdot) = p^+(\cdot, p_0(t,x))$ — единственное решение вариационной задачи (3.3), (3.4), (3.6).

Для $x = 1$, $0 \leqslant t \leqslant T$, определим

$$u(t,1) = u_0(1) + (f(1) - 1)t. \tag{4.3}$$

Пусть $(t,x) \in G_-$ и $x > -1$. Полагаем

$$u(t,x) = u_0(-1) + \int_0^t \big[p(\tau)H_p(x(\tau),p(\tau)) - H(x(\tau),p(\tau))\big]\,d\tau, \tag{4.4}$$

где $x(\cdot) = x^-(\cdot, p_0(t,x))$, $p(\cdot) = p^-(\cdot, p_0(t,x))$ — единственное решение вариационной задачи (3.3), (3.5), (3.6).

Для $x = -1$, $0 \leqslant t \leqslant T$, определим

$$u(t,-1) = u_0(-1) + (f(-1) - 1)t. \tag{4.5}$$

Итак, соотношения (4.1)–(4.5) определяют функцию $u(\cdot)$ для всех точек области $\overline{\Pi}_T$.

Справедливо следующее утверждение, доказанное в [16].

Теорема 4.1. *Функция* $u(\cdot)$, *определяемая соотношениями* (4.1)–(4.5), *удовлетворяет условию* (3.2) *и является непрерывным обобщенным решением задачи* (1.1), (2.1), (2.2) *в смысле определения* (1.1).

§ 4.2. Структура субдифференциалов на границе

Рассмотрим структуру множеств $D^-u(t,x)$ и $\partial u(t,x)$ для функции $u(\cdot)$, определяемой соотношениями (4.1)–(4.4), когда точки $(t,x) \in \Gamma_T$.

В случае $0 < t < T$, $x = 1$ имеем

$$D^-u(t,x) = D^-u(t,1) = \{(f(1) - 1, s) \,|\, s \in R, s \geqslant 0\},$$

$$\partial u(t,x) = \partial u(t,1) = \{(-H(1,-\infty), -\infty)\} = \{(f(1) - 1, -\infty)\}.$$

В случае $0 < t < T$, $x = -1$ имеем

$$D^-u(t,x) = D^-u(t,-1) = \{(f(-1) - 1, s) \,|\, s \in R, s \leqslant 0\},$$

$$\partial u(t,x) = \partial u(t,-1) = \{(-H(-1,\infty), \infty)\} = \{(f(-1) - 1, \infty)\}.$$

Итак, для обобщенного решения (4.1)–(4.4)

$$D^-u(t,x) \cap \partial u(t,x) = \emptyset, \quad (t,x) \in \Gamma_T.$$

На рисунке 2 представлены результаты моделирования обобщенного решения для входных данных $u_0(x) = -0.02x^2 + 0.001\cos 2\pi x$, $f(\cdot) = -0.5x^2$. Нетрудно проверить, что для таких входных данных выполнены условия **B1**, **B2**.

§ 5. Сравнение с вязкостным решением

Можно заметить, что во внутренних точках области $\overline{\Pi}_T$ определение 1.1 совпадает с определением вязкостного решения. Различие между этими определениями проявляется в граничных точках, а именно на множестве Γ_T. В условии (1.5) неравенство должно выполняться для тех точек (a,s) субдифференциала $D^-u(t,x)$, которые также принадлежат множеству $\partial u(t,x)$. В отличие от определения 1.1 понятие вязкостного решения [4] для уравнения (1.1) на множестве $\overline{\Pi}_T$ предполагает выполнение неравенства (1.5) в граничных точках $(t,x) \in \Gamma_T$ для всех $(a,s) \in D^-u(t,x)$.

Несложно убедиться, что гамильтониан (2.1) не удовлетворяет условию коэрцитивности (0.2), например, при $x = 1$ и $x = -1$. Следовательно, известные [4] теоремы существования вязкостного решения не могут быть применены к задаче (1.1), (2.1), (2.2).

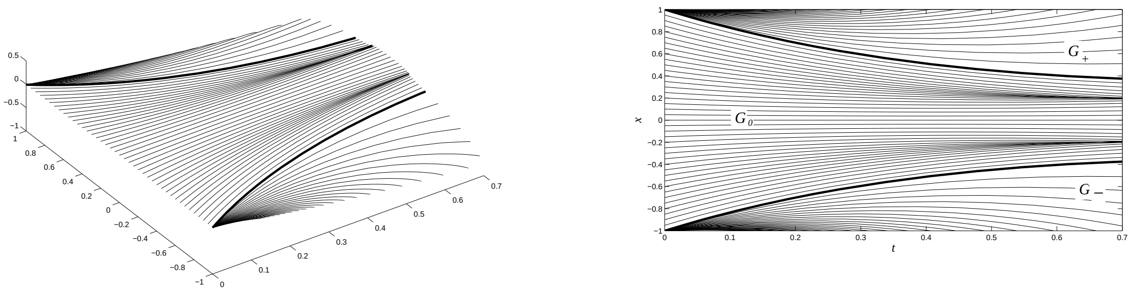

Рис. 2. График обобщенного решения и его проекция на (t, x)-плоскость для входных данных $u_0(x) = -0.02x^2 + 0.001\cos 2\pi x$, $f(x) = -0.5x^2$

Более того, понятие обобщенного вязкостного решения неприменимо к начальной краевой задаче (1.1), (2.1), (2.2) на компакте $\overline{\Pi}_T$, если в какой-то точке $(t_*, x_*) \in \Gamma_T$ решение удовлетворяет условию $D^- u(t_*, x_*) \neq \varnothing$. В этом случае неравенство (1.5) не выполняется. Действительно, пусть $0 \leqslant t_* \leqslant T$ и, для определенности, $x_* = 1$. Пусть $(a, s) \in D^- u(t_*, x_*)$. Тогда из приведенного выше определения субдифференциала следует

$$(a, s + k) \in D^- u(t_*, x_*) \quad \forall k \geqslant 0.$$

Если бы (1.5) выполнялось для всех $(a, s) \in D^- u(t_*, x_*)$, это означало бы, что справедливо неравенство

$$a + H(1, s + k) = a - f(x) + 1 - e^{2(s+k)} \geqslant 0 \quad \forall k \geqslant 0,$$

которое, очевидно, нарушается. Поэтому мы добавили пересечение субдифференциала с множеством $\partial u(t, x)$ (см. условие (1.5)) в определение 1.1 непрерывного обобщенного решения задачи (1.1), (1.2) на компактном множестве W.

Список литературы

1. Кружков С.Н. Обобщенные решения нелинейных уравнений первого порядка со многими независимыми переменными. I // Матем. сб. 1966. Т. 70 (112). № 3. С. 394–415.
2. Crandall M.G., Lions P.L. Viscosity solutions of Hamilton–Jacobi equations // Transactions of the American Mathematical Society. 1983. Vol. 277. № 1. P. 1–42.
3. Subbotin A.I. Generalized solutions of first order PDEs: the dynamical optimization perspective. Boston: Birkhauser, 1995. 312 p.
4. Capuzzo-Dolcetta I., Lions P.-L. Hamilton–Jacobi equations with state constraints // Transactions of the American Mathematical Society. 1990. Vol. 318. № 2. P. 643–683.
5. Crandall M.G., Newcomb R. Viscosity solutions of Hamilton–Jacobi equations at the boundary // Proceedings of the American Mathematical Society. 1985. Vol. 94. № 2. P. 283–290.
6. Saakian D.B., Rozanova O., Akmetzhanov A. Dynamics of the eigen and the Crow–Kimura models for molecular evolution // Phys. Rev. E. 2005. Vol. 78. № 4. 041908. 6 p.
7. Кларк Ф. Оптимизация и негладкий анализ. М.: Наука, 1988. 280 с.
8. Рокафеллар Р. Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973. 472 с.
9. Курант Р. Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1964. 832 с.
10. Субботина Н.Н., Шагалова Л.Г. Конструкция непрерывного минимаксного/вязкостного решения уравнения Гамильтона–Якоби–Беллмана с непродолжимыми характеристиками // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2014. Т. 20. № 4. С. 247–257.
11. Shagalova L. Applications of dynamic programming to generalized solutions for Hamilton–Jacobi equations with state constraints // SOP Transactions on Applied Mathematics. 2014. Vol. 1. № 2. P. 70–83.
12. Субботина Н.Н., Шагалова Л.Г. О решении задачи Коши для уравнения Гамильтона–Якоби с фазовыми ограничениями // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17. № 2. С. 191–208.

13. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1961. 392 с.
14. Subbotina N.N. The method of characteristics for Hamilton–Jacobi equation and its applications in dynamical optimization // Modern Mathematics and its Applications. 2004. № 20. P. 2955–3091.
15. Субботина Н.Н., Колпакова Е.А., Токманцев Т.Б., Шагалова Л.Г. Метод характеристик для уравнения Гамильтона–Якоби–Беллмана. Екатеринбург: РИО УрО РАН, 2013. 244 с.
16. Субботина Н.Н., Шагалова Л.Г. О непрерывном продолжении обобщенного решения уравнения Гамильтона–Якоби характеристиками, образующими центральное поле экстремалей // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2015. Т. 21. № 2. С. 220–235.

Поступила в редакцию 05.10.2015

Субботина Нина Николаевна, д. ф.-м. н., член-корр. РАН, зав. сектором, Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, 620219, Россия, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16; профессор кафедры прикладной математики, ИМКН, Уральский федеральный университет им. первого Президента России Б.Н. Ельцина, 620083, Россия, г. Екатеринбург, пр. Ленина, 51.
E-mail: subb@uran.ru

Шагалова Любовь Геннадьевна, к. ф.-м. н., старший научный сотрудник, отдел динамических систем, Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, 620219, Россия, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16.
E-mail: shag@imm.uran.ru

N. N. Subbotina, L. G. Shagalova

The construction of a continuous generalized solution for the Hamilton–Jacobi equations with state constraints

Keywords: Hamilton–Jacobi equation, generalized solution, viscosity solution, minimax solution, state constraints, method of characteristics.

MSC: 35D40, 35F21, 9L25

We consider a boundary value problem with state constraints for a nonlinear non-coercive Hamilton–Jacobi equation. We introduce a new definition of continuous generalized solution of the problem and apply this definition to nonlinear non-coercive equation arising in molecular biology. The construction for generalized solution with additional requirements to structure is provided for this equation. Connections with viscosity generalized solutions are discussed. Results of computer simulations are exposed.

REFERENCES

1. Kruzhkov S.N. Generalized solutions of nonlinear equations of the first order with several variables. I, *Matematicheskii Sbornik*, 1966, vol. 70 (112), no. 3, pp. 394–415 (in Russian).
2. Crandall M.G., Lions P.-L. Viscosity solutions of Hamilton–Jacobi equations, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1983, vol. 277, no. 1, pp. 1–42.
3. Subbotin A.I. *Generalized solutions of first order PDEs: the dynamical optimization perspective*, Boston: Birkhauser, 1995, 312 p.
4. Capuzzo-Dolcetta I., Lions P.-L. Hamilton–Jacobi equations with state constraints, *Trans. AMS*, 1990, vol. 318, no. 2, pp. 643–683.
5. Crandall M.G., Newcomb R. Viscosity solutions of Hamilton–Jacobi equations at the boundary, *Proc. of the AMS*, 1985, vol. 94, no. 2, pp. 283–290.
6. Saakian D.B., Rozanova O., Akmetzhanov A. Dynamics of the eigen and the Crow–Kimura models for molecular evolution, *Phys. Rev. E*, 2005, vol. 78, no. 4, 041908, 6 p.
7. Clarke F. *Optimization and nonsmooth analysis*, New York: John Wiley & Sons, Inc., 1983, 308 p. Translated under the title *Optimizatsiya i negladkii analiz*, Moscow: Nauka, 1988, 280 p.
8. Rockafellar R.T. *Convex analysis*, Princeton, NJ: Princeton Univ. Press, 1970, 451 p. Translated under the title *Vypuklyi analiz*, Moscow: Mir, 1973, 472 p.
9. Courant R., Hilbert D. *Methods of mathematical physics, vol. II*, New York: Interscience, 1962, 830 p. Translated under the title *Uravneniya s chastnymi proizvodnymi*, Moscow: Mir, 1964, 832 p.
10. Subbotina N.N., Shagalova L.G. Construction of a continuous minimax/viscosity solution of the Hamilton–Jacobi–Bellman equation with nonextendable characteristics, *Tr. Inst. Mat. Mekh. Ural. Otd. Ross. Akad. Nauk*, 2014, vol. 20, no. 4, pp. 247–257 (in Russian).
11. Shagalova L. Applications of dynamic programming to generalized solutions for Hamilton–Jacobi equations with state constraints, *SOP Trans. on Appl. Math.*, 2014, vol. 1, no. 2, pp. 70–83.

12. Subbotina N.N., Shagalova L.G. On a solution to the Cauchy problem for the Hamilton–Jacobi equation with state constraints, *Tr. Inst. Mat. Mekh. Ural. Otd. Ross. Akad. Nauk*, 2011, vol. 17, no. 2, pp. 191–208 (in Russian).
13. Pontryagin L.S., Boltyanskii V.G., Gamkrelidze R.V., Mishchenko E.F. *Matematicheskaya teoriya optimalnykh protsessov* (The mathematical theory of optimal processes), Moscow: Nauka, 1966, 576 p.
14. Subbotina N.N. The method of characteristics for Hamilton–Jacobi equation and its applications in dynamical optimization, *Modern Mathematics and its Applications*, 2004, no. 20, pp. 2955–3091.
15. Subbotina N.N., Kolpakova E.A., Tokmantsev T.B., Shagalova L.G. *Metod kharakteristik dlya uravneniya Gamiltona–Yakobi–Bellmana* (The method of characteristics for Hamilton–Jacobi–Bellman equation), Ekaterinburg: Ural Branch of RAS, 2013, 244 p.
16. Subbotina, N.N., Shagalova, L.G. On the continuous extension of a generalized solution of the Hamilton–Jacobi equation by characteristics that form a central field of extremals, *Tr. Inst. Mat. Mekh. Ural. Otd. Ross. Akad. Nauk*, 2015, vol. 21, no. 2, pp. 220–235 (in Russian).

Received 05.10.2015

Subbotina Nina Nikolaevna, Doctor of Physics and Mathematics, Corresponding Member, Russian Academy of Sciences, Head of Sector, Department of Dynamical Systems, Institute of Mathematics and Mechanics named after N.N. Krasovskii, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. S. Kovalevskoi, 16, Yekaterinburg, 620219, Russia;
Professor, Department of Applied Mathematics, Institute of Mathematics and Computer Science, Ural Federal University named after the first President of Russia B.N. Yeltsin, pr. Lenina, 51, Yekaterinburg, 620083, Russia.
E-mail: subb@uran.ru

Shagalova Lyubov Gennad'evna, Candidate of Physics and Mathematics, Senior Researcher, Department of Dynamical Systems, Institute of Mathematics and Mechanics named after N.N. Krasovskii, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. S. Kovalevskoi, 16, Yekaterinburg, 620219, Russia.
E-mail: shag@imm.uran.ru