УДК 517.958, 530.145.6

© **А. Х. Хаммади**

О СВОЙСТВАХ ХАРАКТЕРИСТИК МНОЖЕСТВА ДОСТИЖИМОСТИ УПРАВЛЯЕМОЙ СИСТЕМЫ

Продолжено исследование характеристик управляемой системы, которые отражают свойство равномерности пребывания множества достижимости системы в заданном множестве $\mathfrak{M} \doteq \{(t,x) \in [0,+\infty) \times \mathbb{R}^n : x \in M(t)\}$ на конечном промежутке времени. В терминах функций Ляпунова и производной Кларка получены условия, при которых относительные частоты поглощения множества достижимости управляемой системы можно оценить подобными характеристиками, определенными для дифференциальных уравнений. Доказана теорема об оценке и вычислении относительных частот для некоторого класса многозначных функций, получены оценки различных характеристик для функций, почти периодических в смысле Бора. Приведены примеры вычисления и оценок относительных частот нахождения графиков функций в заданном множестве.

Ключевые слова: управляемые системы, дифференциальные включения, множество достижимости, почти периодические функции.

Введение

Данная статья продолжает исследования работ [1–3], в которых введены и изучены такие характеристики, как относительная частота, верхняя и нижняя относительные частоты поглощения множества достижимости управляемой системы

$$\dot{x} = f(t,x,u), \quad (t,x,u) \in [0,+\infty) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, \tag{0.1}$$

заданным подмножеством $\mathfrak{M} \doteq \{(t,x) \in [0,+\infty)\times\mathbb{R}^n : x \in M(t)\}$ евклидова пространства $\mathbb{R}^{n+1}$. Здесь изучаются свойства характеристик, связанных с инвариантностью или слабой инвариантностью множества $\mathfrak{M}$ на конечном промежутке времени.

Обозначим через $D(t,X)$ множество достижимости системы (0.1) в момент времени t из начального множества X. В терминах функций Ляпунова и производной Кларка получены оценки для относительной частоты поглощения множества $D(t,X)$ множеством $\mathfrak{M}$ на отрезке $[\tau,\tau+\vartheta]$, которая определяется как отношение меры Лебега тех t из отрезка $[\tau,\tau+\vartheta]$, при которых $D(t,X) \subseteq M(t)$, к длине данного отрезка:

$$\operatorname{freq}_{[\tau,\tau+\vartheta]}(D,M) \doteq \frac{\operatorname{mes}\{t \in [\tau,\tau+\vartheta] : D(t,X) \subseteq M(t)\}}{\vartheta}.$$

Исследуется также характеристика

$$\operatorname{freq}_{\vartheta}(D,M) \doteq \inf_{\tau\geqslant 0} \operatorname{freq}_{[\tau,\tau+\vartheta]}(D,M) = \inf_{\tau\geqslant 0} \frac{\operatorname{mes}\{t \in [\tau,\tau+\vartheta] : D(t,X) \subseteq M(t)\}}{\vartheta},$$

которая отображает свойство равномерности пребывания множества достижимости $D(t,X)$ в множестве $\mathfrak{M}$ на отрезке заданной длины ϑ. Доказана теорема об оценке и вычислении относительных частот для некоторого класса многозначных функций, получены оценки различных характеристик для функций, почти периодических в смысле Бора. Приведены примеры вычисления и оценок относительных частот нахождения графиков функций в заданном множестве.

§ 1. Основные определения

Основным объектом исследования является управляемая система

$$\dot{x} = f(t,x,u), \quad (t,x,u) \in [0,+\infty) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, \tag{1.1}$$

где функция $f(t,x,u)$ непрерывна по совокупности переменных, управление u содержится в компактном множестве $U(t,x) \subset \mathbb{R}^m$ и функция $U(t,x)$ полунепрерывна сверху в метрике Хаусдорфа при всех $(t,x) \in [0,+\infty) \times \mathbb{R}^n$.

Рассмотрим отвечающее системе (1.1) дифференциальное включение

$$\dot{x} \in F(t,x), \quad (t,x) \in [0,+\infty) \times \mathbb{R}^n, \tag{1.2}$$

где для каждой фиксированной точки $(t,x) \in [0,+\infty) \times \mathbb{R}^n$ множество $F(t,x)$ состоит из всех предельных значений функции $f(t_i, x_i, U(t_i, x_i))$ при $(t_i, x_i) \to (t,x)$. Предполагаем, что множество $F(t,x)$ непусто, ограничено, замкнуто и выпукло. Тогда функция $F(t,x)$ также полунепрерывна сверху, поэтому для каждой начальной точки $x_0 \in \mathbb{R}^n$ локальное решение включения (1.2) существует (см. [4, с. 60]).

Пусть $D(t,X)$ — множество достижимости системы (1.1) в момент времени t из начального множества X, то есть множество, состоящее из всех значений в момент t решений $\varphi(t,x)$ включения (1.2), когда начальное условие $\varphi(0,x) = x$ пробегает все множество X. Предполагаем, что для каждого X множество достижимости $D(t,X)$ существует для всех $t \geqslant 0$. Это означает, что для каждой точки $x \in X$ существует решение $\varphi(t,x)$ включения (1.2), удовлетворяющее начальному условию $\varphi(0,x) = x$ и продолжаемое на полуось $\mathbb{R}_+ = [0,+\infty)$.

Пусть множество $\mathfrak{M} \doteq \big\{(t,x) \in [0,+\infty) \times \mathbb{R}^n : x \in M(t)\big\}$ задано функцией $t \mapsto M(t)$, непрерывной в метрике Хаусдорфа, и для каждого $t \in [0,+\infty)$ множество $M(t)$ непусто и компактно. Для определения характеристик множества достижимости введем в рассмотрение множество

$$\alpha(\tau,\vartheta,X) \doteq \big\{t \in [\tau,\tau+\vartheta] : D(t,X) \subseteq M(t)\big\}.$$

Определение 1.1 (см. [1,2]). *Относительной частотой поглощения множества достижимости* $D(t,X)$ *системы* (1.1) *множеством* $\mathfrak{M}$ называется следующий предел:

$$\operatorname{freq}(D,M) \doteq \lim_{\vartheta\to\infty} \frac{\operatorname{mes}\alpha(0,\vartheta,X)}{\vartheta} = \lim_{\vartheta\to\infty} \frac{\operatorname{mes}\{t \in [0,\vartheta] : D(t,X) \subseteq M(t)\}}{\vartheta}, \tag{1.3}$$

где mes — мера Лебега на числовой прямой. Если предел (1.3) не существует, то характеристики

$$\operatorname{freq}^*(D,M) \doteq \varlimsup_{\vartheta\to\infty} \frac{\operatorname{mes}\alpha(0,\vartheta,X)}{\vartheta}, \quad \operatorname{freq}_*(D,M) \doteq \varliminf_{\vartheta\to\infty} \frac{\operatorname{mes}\alpha(0,\vartheta,X)}{\vartheta} \tag{1.4}$$

называются соответственно верхней и нижней относительной частотой поглощения множества достижимости $D(t,X)$ системы (1.1) множеством $\mathfrak{M}$.

Определение 1.2 (см. [3]). *Относительной частотой поглощения множества достижимости* $D(t,X)$ *системы* (1.1) *множеством* $\mathfrak{M}$ *на отрезке* $[\tau,\tau+\vartheta]$ называется характеристика

$$\operatorname{freq}_{[\tau,\tau+\vartheta]}(D,M) \doteq \frac{\operatorname{mes}\alpha(\tau,\vartheta,\omega)}{\vartheta} = \frac{\operatorname{mes}\big\{t \in [\tau,\tau+\vartheta] : D(t,X) \subseteq M(t)\big\}}{\vartheta}.$$

Важно рассматривать относительную частоту $\operatorname{freq}_{[\tau,\tau+\vartheta]}(D,M)$ для любого момента времени $\tau \geqslant 0$, поэтому естественно для заданного $\vartheta > 0$ определить характеристику

$$\operatorname{freq}_{\vartheta}(D,M) \doteq \inf_{\tau\geqslant 0} \operatorname{freq}_{[\tau,\tau+\vartheta]}(D,M) = \inf_{\tau\geqslant 0} \frac{\operatorname{mes}\big\{t \in [\tau,\tau+\vartheta] : D(t,X) \subseteq M(t)\big\}}{\vartheta}.$$

Эта характеристика отличается от пределов (1.3), (1.4) тем, что она отражает свойство равномерности пребывания множества достижимости $D(t,X)$ в множестве $\mathfrak{M}$ на отрезке заданной длины.

Приведенное ниже утверждение является следствием леммы 1 работы [3] и леммы 7.2 работы [5].

Л е м м а 1.1. *Имеют место следующие свойства:*

1) *множество* $\alpha(\tau,\vartheta,X)$ *измеримо по Лебегу;*

2) *если предел* $\operatorname{freq}(D,M)$ *существует, то для любого* $\vartheta>0$ *выполнено неравенство*

$$\operatorname{freq}_\vartheta(D,M)\leqslant\operatorname{freq}(D,M);$$

3) *если функции* $t\mapsto D(t,X)$ *и* $t\mapsto M(t)$ *периодичны с общим периодом* $T>0$ *и* $\vartheta=T$, *то предел* $\operatorname{freq}(D,M)$ *существует и*

$$\operatorname{freq}_T(D,M)=\operatorname{freq}(D,M)=\frac{\operatorname{mes}\alpha(0,T,X)}{T}.$$

Обозначим через $M^r(t)$ замкнутую r-окрестность множества $M(t)$, то есть множество таких точек $x\in\mathbb{R}^n$, что $\varrho(x,M(t))\leqslant r$, через $N^r(t)=M^r(t)\backslash M(t)$ обозначим внешнюю r-окрестность границы множества $M(t)$ (здесь $\varrho(x,M)=\inf\limits_{y\in M}\|x-y\|$ — расстояние от точки $x\in\mathbb{R}^n$ до множества $M\subset\mathbb{R}^n$). Построим множества

$$\mathfrak{M}^r\doteq\big\{(t,x)\in[0,+\infty)\times\mathbb{R}^n : x\in M^r(t)\big\},\quad \mathfrak{N}^r\doteq\big\{(t,x)\in[0,+\infty)\times\mathbb{R}^n : x\in N^r(t)\big\}.$$

О п р е д е л е н и е 1.3 (см. [6]). Скалярная функция $V(t,x)$ переменных $(t,x)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ называется *функцией Ляпунова* относительно множества $\mathfrak{M}$, если она удовлетворяет локальному условию Липшица по переменным (t,x) и следующим условиям:

1) $V(t,x)\leqslant 0$ для всех $(t,x)\in\mathfrak{M}$;

2) $V(t,x)>0$ для некоторого $r>0$ для всех $(t,x)\in\mathfrak{N}^r$.

О п р е д е л е н и е 1.4 (см. [7, с. 17]). Для локально липшицевой функции $V(t,x)$ *обобщенной производной* в точке $(t,x)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ по направлению вектора $q=(1,p)$, $p\in\mathbb{R}^n$ (производной Ф. Кларка), называется следующий верхний предел:

$$V^o(t,x;p)\doteq\limsup_{(\varepsilon,y)\to(0+0,x)}\frac{V(t+\varepsilon,y+\varepsilon p)-V(t,y)}{\varepsilon},$$

а выражения $V^o_{\min}(t,x)\doteq\inf\limits_{p\in F(t,x)}V^o(t,x;p)$, $V^o_{\max}(t,x)\doteq\sup\limits_{p\in F(t,x)}V^o(t,x;p)$ называются соответственно *нижней* и *верхней производной* функции V в силу дифференциального включения (1.2).

§ 2. Теоремы сравнения для характеристик множества достижимости

Рассмотрим скалярную задачу Коши

$$\dot z=w(t,z),\quad z(0)=z_0. \tag{2.1}$$

Предполагаем, что $z_0\geqslant 0$ и выполнено следующее условие.

У с л о в и е 2.1. Функция $w(t,z)$ непрерывна по совокупности переменных, и для каждого $t\in[0,+\infty)$ имеет место неравенство

$$\varlimsup_{|z|\to\infty}\frac{|z(t,x)|}{|z|}<\infty. \tag{2.2}$$

Напомним, что *верхним решением* $z^*(t)$ *задачи Коши* (2.1) называется такое решение, что для любого другого решения $z(t)$ этой задачи на общем интервале существования выполнено неравенство $z^*(t)\geqslant z(t)$. В работе [8, с. 38] показано, что если функция $w(t,z)$ непрерывна, и имеет место (2.2), то верхнее решение $z^*(t)$ задачи Коши (2.1) существует для всех $t\geqslant 0$.

О п р е д е л е н и е 2.1. *Относительной частотой нахождения графика непрерывной функции* $\varphi : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^n$ *в множестве* $\mathfrak{M} = \{(t,x) \in [0,+\infty) \times \mathbb{R}^n : x \in M(t)\}$ *на отрезке* $[\tau, \tau+\vartheta]$ будем называть характеристику

$$\operatorname{freq}_{[\tau,\tau+\vartheta]}(\varphi, M) \doteq \frac{\operatorname{mes}\{t \in [\tau,\tau+\vartheta] : \varphi(t) \in M(t)\}}{\vartheta}.$$

Также для любого заданного $\vartheta > 0$ определим характеристику

$$\operatorname{freq}_{\vartheta}(\varphi, M) \doteq \inf_{\tau \geqslant 0} \operatorname{freq}_{[\tau,\tau+\vartheta]}(\varphi, M) = \inf_{\tau \geqslant 0} \frac{\operatorname{mes}\{t \in [\tau,\tau+\vartheta] : \varphi(t) \in M(t)\}}{\vartheta},$$

которая отображает свойство равномерности нахождения графика функции $\varphi(t)$ в множестве $\mathfrak{M}$.

В этих обозначениях для верхнего решения $z^*(t)$ задачи Коши

$$\operatorname{freq}_{[\tau,\tau+\vartheta]}(z^*, (-\infty,0]) \doteq \frac{\operatorname{mes}\{t \in [\tau,\tau+\vartheta] : z^*(t) \leqslant 0\}}{\vartheta},$$

$$\operatorname{freq}_{\vartheta}(z^*, (-\infty,0]) \doteq \inf_{\tau \geqslant 0} \operatorname{freq}_{[\tau,\tau+\vartheta]}(z^*, (-\infty,0]) = \inf_{\tau \geqslant 0} \frac{\operatorname{mes}\{t \in [\tau,\tau+\vartheta] : z^*(t) \leqslant 0\}}{\vartheta}.$$

Доказательство следующего утверждения аналогично доказательству теоремы 1 работы [3].

Т е о р е м а 2.1. *Пусть выполнено условие* 1 *и для каждой точки* $x \in M(0)$ *все решения включения* (1.2), *удовлетворяющие начальному условию* $\varphi(0,x) = x$, *продолжаемы на полуось* $\mathbb{R}_+$. *Предположим, что существуют функции* $V(t,x)$ *и* $w(t,z)$ *такие, что функция* $V(t,x)$ *является функцией Ляпунова относительно множества* $\mathfrak{M}$ *и при всех* $(t,x) \in [0,+\infty) \times \mathbb{R}^n$ *выполнено неравенство*

$$V^o_{\max}(t,x) \leqslant w\big(t, V(t,x)\big).$$

Тогда для любого множества $X \subseteq M(0)$ *имеют место неравенства*

$$\operatorname{freq}_{[\tau,\tau+\vartheta]}(D, M) \geqslant \operatorname{freq}_{[\tau,\tau+\vartheta]}(z^*, (-\infty,0]), \quad \operatorname{freq}_{\vartheta}(D, M) \geqslant \operatorname{freq}_{\vartheta}(z^*, (-\infty,0]).$$

Т е о р е м а 2.2. *Пусть выполнено условие* 1 *и для каждой точки* $x \in M(0)$ *все решения включения* (1.2), *удовлетворяющие начальному условию* $\varphi(0,x) = x$, *продолжаемы на полуось* $\mathbb{R}_+$. *Предположим, что существуют функции* $V(t,x)$ *и* $w(t,z)$ *такие, что функция* $V(t,x)$ *является функцией Ляпунова относительно множества* $\mathfrak{M}$ *и при всех* $(t,x) \in [0,+\infty) \times \mathbb{R}^n$ *выполнено неравенство*

$$V^o_{\min}(t,x) \leqslant w\big(t, V(t,x)\big). \tag{2.3}$$

Тогда для любого $x \in M(0)$ *существует решение* $\varphi(t,x)$ *включения* (1.2), *удовлетворяющее начальному условию* $\varphi(0,x) = x$, *такое, что*

$$\operatorname{freq}_{[\tau,\tau+\vartheta]}(\varphi, M) \geqslant \operatorname{freq}_{[\tau,\tau+\vartheta]}(z^*, (-\infty,0]), \quad \operatorname{freq}_{\vartheta}(\varphi, M) \geqslant \operatorname{freq}_{\vartheta}(z^*, (-\infty,0]). \tag{2.4}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Отметим, что доказательство данного утверждения подобно доказательству теоремы о статистически слабой инвариантности множества $\mathfrak{M}$ (см. [1]). Определим множество

$$U_0(t,x) \doteq \big\{u \in U(t,x) : V^o(t,x; f(t,x,u)) \leqslant w(t, V(t,x))\big\},$$

которое непусто в силу неравенства (2.3). Поскольку $U_0(t,x) \subseteq U(t,x)$ для каждого $(t,x) \in$ $\in [0,+\infty)$, то множество $U_0(t,x)$ ограничено. Замкнутость данного множества доказывается так же, как в [5, с. 60].

Рассмотрим дифференциальное включение, отвечающее множеству $U_0(t,x)$:

$$\dot{x} \in F_0(t,x), \quad F_0(t,x) = \overline{\operatorname{co}}\, G_0(t,x), \tag{2.5}$$

где для каждой фиксированной точки $(t,x) \in [0,+\infty) \times \mathbb{R}^n$ множество $G_0(t,x)$ состоит из всех предельных значений функции $f(t_i, x_i, U(t_i, x_i))$ при $(t_i, x_i) \to (t,x)$, $\overline{\mathrm{co}}\, G_0(t,x)$ — замыкание выпуклой оболочки множества $G_0(t,x)$ (наименьшее выпуклое множество, содержащее множество $G_0(t,x)$). Функция $(t,x) \mapsto F_0(t,x)$ полунепрерывна сверху в силу леммы 10.1 работы [5]. Следовательно, через каждую точку $x \in M(0)$ проходит решение $\varphi(t,x)$ дифференциального включения (2.5), удовлетворяющее начальному условию $\varphi(0,x) = x$ (см. [4, с. 60]). Так как $U_0(t,x) \subseteq U(t,x)$, то $F_0(t,x) \subseteq F(t,x)$ для каждого $(t,x) \in [0,+\infty)$, поэтому $\varphi(t,x)$ также является решением исходного дифференциального включения (1.2), которое продолжаемо на полуось $\mathbb{R}_+$.

Рассмотрим функцию $v(t) = V\big(t, \varphi(t,x)\big)$, которая дифференцируема при почти всех t в силу теоремы Радемахера. Отметим, что $\varphi(0,x) = x \in M(0)$, поэтому $v(0) \leqslant 0$. Из (2.3) получаем, что неравенство

$$\dot{v}(t) \leqslant w(t, v(t)) \tag{2.6}$$

выполнено при почти всех $t \geqslant 0$ (см. лемму 9 работы [1]). Далее, из неравенств (2.6) и

$$v(0) \leqslant 0 \leqslant z_0 = z(0)$$

в силу теоремы Чаплыгина о дифференциальных неравенствах [9, с. 15] следует, что для всех $t \geqslant 0$ функция $v(t)$ и верхнее решение $z^*(t)$ задачи (2.1) удовлетворяют неравенству $v(t) \leqslant z^*(t)$. Следовательно, для любых $\tau \geqslant 0$ и $\vartheta > 0$ имеет место

$$\operatorname{mes}\{t \in [\tau, \tau+\vartheta] : \, v(t) \leqslant 0\} \geqslant \operatorname{mes}\{t \in [\tau, \tau+\vartheta] : \, z^*(t) \leqslant 0\}. \tag{2.7}$$

Заметим, что

$$\operatorname{freq}_{[\tau,\tau+\vartheta]}(\varphi, M) \doteq \frac{\operatorname{mes}\{t \in [\tau,\tau+\vartheta] : \, \varphi(t) \in M(t)\}}{\vartheta} = \frac{\operatorname{mes}\{t \in [\tau,\tau+\vartheta] : \, v(t) \leqslant 0\}}{\vartheta},$$

поэтому неравенства (2.4) следуют из (2.7). $\square$

Вместе с системой (1.1) будем рассматривать управляемую систему

$$\dot{x} = \widetilde{f}(t,x,u), \quad (t,x,u) \in [0,+\infty) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$$

и ее множество достижимости $\widetilde{D}(t, \widetilde{X})$ в момент времени t из начального множества $\widetilde{X}$. Обозначим через $d(A,B) \doteq \sup\limits_{a \in A} \varrho(a,B)$ полуотклонение множества A от множества B через

$$\operatorname{dist}(A,B) = \max\{d(A,B), d(B,A)\}$$

— расстояние по Хаусдорфу между замкнутыми множествами A и B в пространстве $\mathbb{R}^n$.

Т е о р е м а 2.3. *Имеют место следующие утверждения:*
1) *если существует такое $\varepsilon > 0$, что $\operatorname{dist}\big(D(t,X), \widetilde{D}(t,\widetilde{X})\big) \leqslant \varepsilon$ для всех $t \in [\tau, \tau+\vartheta]$, то*

$$\begin{aligned} &\operatorname{freq}_{[\tau,\tau+\vartheta]}(D, M) \leqslant \operatorname{freq}_{[\tau,\tau+\vartheta]}(\widetilde{D}, M^{\varepsilon}), \\ &\operatorname{freq}_{[\tau,\tau+\vartheta]}(\widetilde{D}, M) \leqslant \operatorname{freq}_{[\tau,\tau+\vartheta]}(D, M^{\varepsilon}); \end{aligned} \tag{2.8}$$

2) *если существует такое $\varepsilon > 0$, что $\operatorname{dist}\big(D(t,X), \widetilde{D}(t,\widetilde{X})\big) \leqslant \varepsilon$ для всех $t \in [0,+\infty)$, то*

$$\operatorname{freq}_{\vartheta}(D, M) \leqslant \operatorname{freq}_{\vartheta}(\widetilde{D}, M^{\varepsilon}), \quad \operatorname{freq}_{\vartheta}(\widetilde{D}, M) \leqslant \operatorname{freq}_{\vartheta}(D, M^{\varepsilon}). \tag{2.9}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем первое утверждение. Из неравенства

$$\operatorname{dist}\big(D(t,X), \widetilde{D}(t,\widetilde{X})\big) \leqslant \varepsilon, \quad t \in [\tau, \tau+\vartheta],$$

следует, что $\widetilde{D}(t,\widetilde{X}) \subseteq D^{\varepsilon}(t,X)$ для всех $t \in [\tau, \tau+\vartheta]$. Поэтому если включение $D(t,X) \subseteq M(t)$ выполнено при некотором $t^* \in [\tau, \tau+\vartheta]$, то

$$D^{\varepsilon}(t^*,X) \subseteq M^{\varepsilon}(t^*) \quad \text{и} \quad \widetilde{D}(t^*,\widetilde{X}) \subseteq D^{\varepsilon}(t^*,X) \subseteq M^{\varepsilon}(t^*).$$

Таким образом, имеет место включение

$$\{t \in [\tau,\tau+\vartheta] : D(t,X) \subseteq M(t)\} \subseteq \{t \in [\tau,\tau+\vartheta] : \widetilde{D}(t,\widetilde{X}) \subseteq M^{\varepsilon}(t)\},$$

из которого получаем неравенство

$$\operatorname{mes}\{t \in [\tau,\tau+\vartheta] : D(t,X) \subseteq M(t)\} \leqslant \operatorname{mes}\{t \in [\tau,\tau+\vartheta] : \widetilde{D}(t,\widetilde{X}) \subseteq M^{\varepsilon}(t)\}. \tag{2.10}$$

Следовательно,

$$\operatorname{freq}_{[\tau,\tau+\vartheta]}(D,M) \doteq \frac{\operatorname{mes}\{t \in [\tau,\tau+\vartheta] : D(t,X) \subseteq M(t)\}}{\vartheta} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{\operatorname{mes}\{t \in [\tau,\tau+\vartheta] : \widetilde{D}(t,\widetilde{X}) \subseteq M^{\varepsilon}(t)\}}{\vartheta} \doteq \operatorname{freq}_{[\tau,\tau+\vartheta]}(\widetilde{D},M^{\varepsilon}),$$

то есть получили первое из неравенств (2.8). Учитывая, что $D(t,X) \subseteq \widetilde{D}^{\varepsilon}(t,\widetilde{X})$ для всех $t \in [\tau,\tau+\vartheta]$, аналогично получаем доказательство второго неравенства.

Докажем второе утверждение теоремы. Отметим, что в данном случае неравенство (2.10) верно для всех $\tau \geqslant 0$, тогда

$$\inf_{\tau \geqslant 0} \frac{\operatorname{mes}\{t \in [\tau,\tau+\vartheta] : D(t,X) \subseteq M(t)\}}{\vartheta} \leqslant \inf_{\tau \geqslant 0} \frac{\operatorname{mes}\{t \in [\tau,\tau+\vartheta] : \widetilde{D}(t,\widetilde{X}) \subseteq M^{\varepsilon}(t)\}}{\vartheta}.$$

Следовательно,

$$\operatorname{freq}_{\vartheta}(D,M) \doteq \inf_{\tau \geqslant 0} \operatorname{freq}_{[\tau,\tau+\vartheta]}(D,M) \leqslant \inf_{\tau \geqslant 0} \operatorname{freq}_{[\tau,\tau+\vartheta]}(\widetilde{D},M^{\varepsilon}) \doteq \operatorname{freq}_{\vartheta}(\widetilde{D},M^{\varepsilon}).$$

Аналогично доказывается второе неравенство (2.9). □

Следствие 2.1. *Пусть функции* $\varphi : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^n$ *и* $\widetilde{\varphi} : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^n$ *непрерывны для любого* $t \in [0,+\infty)$. *Имеют место следующие утверждения:*

1) *если существует такое* $\varepsilon > 0$, *что* $|\varphi(t) - \widetilde{\varphi}(t)| \leqslant \varepsilon$ *для всех* $t \in [\tau,\tau+\vartheta]$, *то*

$$\operatorname{freq}_{[\tau,\tau+\vartheta]}(\varphi,M) \leqslant \operatorname{freq}_{[\tau,\tau+\vartheta]}(\widetilde{\varphi},M^{\varepsilon}),$$
$$\operatorname{freq}_{[\tau,\tau+\vartheta]}(\widetilde{\varphi},M) \leqslant \operatorname{freq}_{[\tau,\tau+\vartheta]}(\varphi,M^{\varepsilon});$$

2) *если существует такое* $\varepsilon > 0$, *что* $|\varphi(t) - \widetilde{\varphi}(t)| \leqslant \varepsilon$ *для всех* $t \in [0,+\infty)$, *то*

$$\operatorname{freq}_{\vartheta}(\varphi,M) \leqslant \operatorname{freq}_{\vartheta}(\widetilde{\varphi},M^{\varepsilon}), \quad \operatorname{freq}_{\vartheta}(\widetilde{\varphi},M) \leqslant \operatorname{freq}_{\vartheta}(\varphi,M^{\varepsilon}).$$

Пример 2.1. Рассмотрим множество $\mathfrak{M} = \{(t,x) \in [0,+\infty) \times [0,1]\}$ и определим функции φ и $\widetilde{\varphi}$ следующим образом:

$$\varphi(t) = \sin t + 1 + \frac{1}{8(t+1)}, \quad \widetilde{\varphi}(t) = \sin t + 1.$$

Функция $\widetilde{\varphi}$ — периодическая с периодом 2π, поэтому $\operatorname{freq}_{[\tau,\tau+2\pi]}(\widetilde{\varphi},[0,1]) = \dfrac{1}{2}$ для любого $\tau \geqslant 0$ и $\operatorname{freq}_{2\pi}(\widetilde{\varphi},[0,1]) = \dfrac{1}{2}$. Найдем оценки характеристики $\operatorname{freq}_{2\pi}(\varphi,[0,1])$. В силу леммы 1.1 имеет место неравенство

$$\operatorname{freq}_{2\pi}(\varphi,[0,1]) \leqslant \operatorname{freq}(\varphi,[0,1]).$$

Поскольку функция $\widetilde{\varphi}(t)$ периодическая и $\lim\limits_{t\to+\infty}|\varphi(t)-\psi(t)|=0$, то

$$\operatorname{freq}(\varphi,[0,1])=\operatorname{freq}(\widetilde{\varphi},[0,1])=\frac{1}{2}$$

(см. лемму 1 работы [10]), следовательно, $\operatorname{freq}_{2\pi}(\varphi,[0,1])\leqslant\frac{1}{2}$.

Отметим, что для всех $t\geqslant 0$ выполнено неравенство $|\varphi(t)-\widetilde{\varphi}(t)|\leqslant\dfrac{1}{8}$, и рассмотрим множество

$$\mathfrak{M}_0\doteq\big\{(t,x)\in[0,+\infty)\times[0,7/8]\big\}.$$

Так как множество $\mathfrak{M}_0^{\frac{1}{8}}=\big\{(t,x)\in[0,+\infty)\times[-1/8,1]\big\}$, то из (2.1) получаем

$$\operatorname{freq}_{2\pi}(\widetilde{\varphi},[0,7/8])\leqslant\operatorname{freq}_{2\pi}(\varphi,[-1/8,1])=\operatorname{freq}_{2\pi}(\varphi,[0,1]).$$

В силу периодичности функции $\widetilde{\varphi}(t)$ имеем

$$\operatorname{freq}_{2\pi}(\widetilde{\varphi},[0,7/8])=\frac{\operatorname{mes}\{t\in[0,2\pi]:\widetilde{\varphi}\in[0,7/8]\}}{2\pi}=\frac{1}{2}-\frac{1}{\pi}\cdot\arcsin\frac{1}{8}\,,$$

следовательно,

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{\pi}\cdot\arcsin\frac{1}{8}\leqslant\operatorname{freq}_{2\pi}(\varphi,[0,1])\leqslant\frac{1}{2}.$$

§ 3. Об оценке и вычислении относительных частот для некоторого класса многозначных функций

В этом параграфе рассматривается множество

$$\mathfrak{M}\doteq\big\{(t,x)\in(-\infty,+\infty)\times\mathbb{R}^n: x\in M(t)\big\},$$

заданное непрерывной функцией $t\mapsto M(t)$, и функции $t\mapsto D(t)$, $t\mapsto\widetilde{D}(t)$, которые также непрерывны в метрике Хаусдорфа. Полагаем, что для каждого $t\in(-\infty,+\infty)$ множества $M(t)$, $D(t)$ и $\widetilde{D}(t)$ непустые, компактные и расстояние по Хаусдорфу $\operatorname{dist}\big(M(t),\widetilde{D}(t)\big)$ между множествами $M(t)$ и $\widetilde{D}(t)$ является периодической функцией с периодом $T>0$. Отметим, что функции $t\mapsto M(t)$ и $t\mapsto\widetilde{D}(t)$ не обязательно предполагаются периодическими.

Следующее утверждение является обобщением леммы 2 работы [3]. Здесь получена оценка характеристики $\operatorname{freq}_T(D,M)$ и приведены равенства для нахождения ее значения.

Т е о р е м а 3.1. *Предположим, что функция* $\operatorname{dist}\big(M(t),\widetilde{D}(t)\big)$ *периодическая с периодом* $T>0$ *и* $\lim\limits_{t\to\infty}\operatorname{dist}\big(D(t),\widetilde{D}(t)\big)=0$. *Тогда имеют место следующие свойства:*

1) $\operatorname{freq}_T(D,M)\leqslant\operatorname{freq}_T(\widetilde{D},M)$;

2) *если* $D(t)\subseteq\widetilde{D}(t)$ *для всех* $t\geqslant 0$, *то*

$$\operatorname{freq}_T(D,M)=\operatorname{freq}_T(\widetilde{D},M)=\frac{\operatorname{mes}\{t\in[0,T]:\widetilde{D}(t)\subseteq M(t)\}}{T};$$

3) *если* $\widetilde{D}(t)\subseteq D(t)$ *для всех* $t\geqslant 0$ *и функция* $h(t)\doteq\operatorname{dist}\big(D(t),\widetilde{D}(t)\big)$ *невозрастающая на* $(0,\infty)$, *то имеет место равенство*

$$\operatorname{freq}_T(D,M)=\frac{\operatorname{mes}\{t\in[0,T]:D(t)\subseteq M(t)\}}{T}\,. \tag{3.1}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для каждого $\tau\in[0,\infty)$ определим функцию

$$R(\tau)\doteq\operatorname{mes}\big\{t\in[\tau,\tau+T]:D(t)\subseteq M(t)\big\}-\operatorname{mes}\big\{t\in[0,T]:\widetilde{D}(t)\subseteq M(t)\big\}.$$

Для доказательства первого утверждения теоремы нужно показать, что $\inf\limits_{\tau\geqslant 0} R(\tau)\leqslant 0$. По свойствам меры Лебега для любого $\varepsilon>0$ найдется такое значение $\varepsilon_0=\varepsilon_0(\varepsilon)$, что имеет место неравенство

$$\operatorname{mes}\bigl\{t\in[0,T]:\widetilde{D}(t)\subseteq M^{\varepsilon_0}(t)\setminus M(t)\bigr\}\leqslant\varepsilon.$$

Далее, поскольку $h(t)=\operatorname{dist}\bigl(D(t),\widetilde{D}(t)\bigr)\to 0$ при $t\to\infty$, то для ε_0 существует момент времени t_0 такой, что $h(t)\leqslant\varepsilon_0$ для всех $t\geqslant t_0$. Следовательно, для всех $\tau\geqslant t_0$ выполнено неравенство

$$\operatorname{mes}\bigl\{t\in[\tau,\tau+T]:D(t)\subseteq M(t)\bigr\}\leqslant\operatorname{mes}\bigl\{t\in[\tau,\tau+T]:\widetilde{D}(t)\subseteq M^{h(t)}(t)\bigr\}\leqslant \\ \leqslant\operatorname{mes}\bigl\{t\in[\tau,\tau+T]:\widetilde{D}(t)\subseteq M^{\varepsilon_0}(t)\bigr\}. \quad (3.2)$$

Из (3.2) в силу периодичности функции $\operatorname{dist}\bigl(M(t),\widetilde{D}(t)\bigr)$ получаем, что для всех $\tau\geqslant t_0$

$$R(\tau)\leqslant\operatorname{mes}\{t\in[\tau,\tau+T]:\widetilde{D}(t)\subseteq M^{\varepsilon_0}(t)\}-\operatorname{mes}\{t\in[0,T]:\widetilde{D}(t)\subseteq M(t)\}= \\ =\operatorname{mes}\{t\in[0,T]:\widetilde{D}(t)\subseteq M^{\varepsilon_0}(t)\}-\operatorname{mes}\{t\in[0,T]:\widetilde{D}(t)\subseteq M(t)\}= \\ =\operatorname{mes}\{t\in[0,T]:\widetilde{D}(t)\subseteq M^{\varepsilon_0}(t)\setminus M(t)\}\leqslant\varepsilon.$$

Таким образом, имеет место неравенство $\inf\limits_{\tau\geqslant 0} R(\tau)\leqslant 0$, из которого в силу определения функции $R(\tau)$ и относительных частот следует неравенство $\operatorname{freq}_T(D,M)\leqslant\operatorname{freq}_T(\widetilde{D},M)$.

Докажем второе утверждение теоремы. Если $D(t)\subseteq\widetilde{D}(t)$ для всех $t\geqslant 0$, то при всех $\tau\geqslant 0$ справедливо неравенство

$$\operatorname{mes}\bigl\{t\in[\tau,\tau+T]:D(t)\subseteq M(t)\bigr\}\geqslant\operatorname{mes}\bigl\{t\in[\tau,\tau+T]:\widetilde{D}(t)\subseteq M(t)\bigr\}= \\ =\operatorname{mes}\bigl\{t\in[0,T]:\widetilde{D}(t)\subseteq M(t)\bigr\},$$

поэтому $R(\tau)\geqslant 0$ для всех $\tau\geqslant 0$ и $\inf\limits_{\tau\geqslant 0} R(\tau)\geqslant 0$. Учитывая доказанное выше неравенство $\inf\limits_{\tau\geqslant 0} R(\tau)\leqslant 0$, получаем, что $\inf\limits_{\tau\geqslant 0} R(\tau)=0$, следовательно, $\operatorname{freq}_T(D,M)=\operatorname{freq}_T(\widetilde{D},M)$.

Докажем третье утверждение. Пусть $\widetilde{D}(t)\subseteq D(t)$ для всех $t\geqslant 0$ и функция $h(t)$ невозрастающая на $(0,\infty)$. Докажем, что функция $R(\tau)$ является неубывающей на $(0,\infty)$. Для этого нужно доказать, что если $\tau_1<\tau_2$, то имеет место неравенство

$$\operatorname{mes}\bigl\{t\in[\tau_1,\tau_1+T]:D(t)\subseteq M(t)\bigr\}\leqslant\operatorname{mes}\bigl\{t\in[\tau_2,\tau_2+T]:D(t)\subseteq M(t)\bigr\}. \quad (3.3)$$

Отметим, что данное неравенство достаточно доказать для произвольного $\tau_1\in[0,\infty)$ и для $\tau_2\in(\tau_1,\tau_1+T)$. В этом случае отрезки $[\tau_1,\tau_1+T]$ и $[\tau_2,\tau_2+T]$ имеют непустое пересечение — отрезок $[\tau_2,\tau_1+T]$. Поэтому неравенство (3.3) следует из неравенств

$$\operatorname{mes}\{t\in[\tau_1,\tau_1+T]:D(t)\subseteq M(t)\}= \\ =\operatorname{mes}\{t\in[\tau_1,\tau_2]:D(t)\subseteq M(t)\}+\operatorname{mes}\{t\in[\tau_2,\tau_1+T]:D(t)\subseteq M(t)\}\leqslant \\ \leqslant\operatorname{mes}\{t\in[\tau_1+T,\tau_2+T]:D(t)\subseteq M(t)\}+\operatorname{mes}\{t\in[\tau_2,\tau_1+T]:D(t)\subseteq M(t)\}= \\ =\operatorname{mes}\{t\in[\tau_2,\tau_2+T]:D(t)\subseteq M(t)\},$$

которые верны, поскольку функция $h(t)$ невозрастающая на $(0,\infty)$. Таким образом, функция $R(\tau)$ неубывающая на $(0,\infty)$, поэтому имеет место равенство $\inf\limits_{\tau\geqslant 0} R(\tau)=R(0)$, которое равносильно равенству (3.1). □

Рассмотрим множество $\mathfrak{M}\in\mathbb{R}^2$ вида $\mathfrak{M}\doteq\bigl\{(t,x)\in[0,+\infty)\times M\bigr\}$, где M — некоторый отрезок числовой прямой.

С л е д с т в и е 3.1. *Пусть функции* $\varphi : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ *и* $\widetilde{\varphi} : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ *непрерывны на* $[0, +\infty)$ *и* $\widetilde{\varphi}(t)$ — *периодическая с периодом* $T > 0$, $\varrho(t) \doteq \varphi(t) - \widetilde{\varphi}(t)$. *Если* $\lim\limits_{t\to\infty} \varrho(t) = 0$, *то имеют место следующие свойства:*

1) $\operatorname{freq}_T(\varphi, M) \leqslant \operatorname{freq}_T(\widetilde{\varphi}, M)$;

2) *если* $\varrho(t) \leqslant 0$ *для всех* $t \geqslant 0$, *то*

$$\operatorname{freq}_T(\varphi, M) = \operatorname{freq}_T(\widetilde{\varphi}, M) = \frac{\operatorname{mes}\{t \in [0, T] : \widetilde{\varphi}(t) \in M\}}{T};$$

3) *если* $\varrho(t) > 0$ *для всех* $t \geqslant 0$ *и функция* $\varrho(t)$ *невозрастающая на* $(0, \infty)$, *то выполнено равенство*

$$\operatorname{freq}_T(\varphi, M) = \frac{\operatorname{mes}\{t \in [0, T] : \varphi(t) \in M\}}{T}.$$

П р и м е р 3.1. Найдем значения характеристик $\operatorname{freq}_{2\pi}(\varphi_1, M)$, $\operatorname{freq}_{2\pi}(\varphi_2, M)$ для множества $\mathfrak{M} = \big\{(t, x) \in [0, +\infty) \times [-1, 1]\big\}$ и функций φ_1, φ_2, заданных следующим образом:

$$\varphi_1(t) = \sin t + 1 - \frac{1}{8(t+1)}, \quad \varphi_1(t) = \sin t + 1 + \frac{1}{8(t+1)}.$$

Рассмотрим вспомогательную периодическую функцию $\widetilde{\varphi}(t) = \sin t + 1$. Пусть

$$\varrho_1(t) \doteq \varphi_1(t) - \widetilde{\varphi}(t) = -\frac{1}{8(t+1)}, \quad \varrho_2(t) \doteq \varphi_2(t) - \widetilde{\varphi}(t) = \frac{1}{8(t+1)}.$$

Отметим, что $\lim\limits_{t\to\infty} \varrho_1(t) = 0$, $\lim\limits_{t\to\infty} \varrho_2(t) = 0$, поэтому для вычисления данных характеристик воспользуемся следствием 3.1. Так как $\varrho_1(t) < 0$ для всех $t \geqslant 0$, то

$$\operatorname{freq}_{2\pi}(\varphi_1, M) = \operatorname{freq}_{2\pi}(\widetilde{\varphi}, M) = \frac{1}{2}.$$

Далее, $\varrho_2(t) > 0$ для всех $t \geqslant 0$ и является убывающей функцией на $(0, \infty)$, поэтому

$$\operatorname{freq}_{2\pi}(\varphi_2, M) = \frac{\operatorname{mes}\{t \in [0, 2\pi] : \varphi_2(t) \leqslant 1\}}{2\pi}.$$

§ 4. Оценки относительных частот для почти периодических функций

Напомним, что функция $\varphi(t)$ называется почти периодической в смысле Бора, если она непрерывна и для всякого $\varepsilon > 0$ множество ε-почти периодов

$$\theta(\varepsilon) \doteq \big\{\vartheta \in \mathbb{R} : \sup_{t\in\mathbb{R}} \big|\varphi(t+\vartheta) - \varphi(t)\big| \leqslant \varepsilon\big\}$$

относительно плотно на действительной оси $\mathbb{R}$, то есть существует число $L > 0$ такое, что каждый отрезок $[a, a+L]$ длины L содержит хотя бы один элемент данного множества (см., например, [11, с. 367–368; 12, с. 7]).

Л е м м а 4.1. *Пусть функция* $\varphi(t)$ *почти периодическая в смысле Бора и* L — *такое число, что каждый отрезок* $[a, a+L]$ *содержит хотя бы один* ε*-почти период, и* $\vartheta \in \theta(\varepsilon) \geqslant L$. *Тогда для любого* $\tau > 0$ *выполнено неравенство*

$$\operatorname{freq}_{[0,\vartheta]}(\varphi, (-\infty, -2\varepsilon]) \leqslant \operatorname{freq}_{[\tau,\tau+\vartheta]}(\varphi, (-\infty, 0]) \leqslant \operatorname{freq}_{[0,\vartheta]}(\varphi, (-\infty, 2\varepsilon]). \tag{4.1}$$

Следовательно, $\operatorname{freq}_{[0,\vartheta]}(\varphi, (-\infty, -2\varepsilon]) \leqslant \operatorname{freq}_\vartheta(\varphi, (-\infty, 0]) \leqslant \operatorname{freq}_{[0,\vartheta]}(\varphi, (-\infty, 2\varepsilon])$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $\vartheta \geqslant L$, то отрезок $[\tau,\tau+\vartheta]$ содержит хотя бы один ε-почти период функции $\varphi(t)$. Зафиксируем один из них и обозначим его θ. Рассмотрим случай, когда $\theta\in(\tau,\tau+\vartheta)$, и представим отрезок $[\tau,\tau+\vartheta]$ в виде объединения

$$[\tau,\tau+\vartheta]=[\tau,\theta)\cup[\theta,\tau+\vartheta].$$

Пусть $t\in[\tau,\theta)$. Поскольку разность $\theta-\vartheta$ является 2ε-почти периодом функции $\varphi(t)$, то выполнено неравенство $\bigl|\varphi(t)-\varphi(t-(\theta-\vartheta))\bigr|\leqslant 2\varepsilon$, то есть

$$\varphi(t-\theta+\vartheta)-2\varepsilon\leqslant\varphi(t)\leqslant\varphi(t-\theta+\vartheta)+2\varepsilon.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}\operatorname{mes}\{t\in[\tau,\theta):\,\varphi(t-\theta+\vartheta)\leqslant-2\varepsilon\}\leqslant\operatorname{mes}\{t\in[\tau,\theta):\,\varphi(t)\leqslant 0\}\leqslant\\ \leqslant\operatorname{mes}\{t\in[\tau,\theta):\,\varphi(t-\theta+\vartheta)\leqslant 2\varepsilon\},\end{aligned}$$

откуда получаем неравенство

$$\begin{aligned}\operatorname{mes}\{t\in[\tau-\theta+\vartheta,\vartheta]:\,\varphi(t)\leqslant-2\varepsilon\}\leqslant\operatorname{mes}\{t\in[\tau,\theta]:\,\varphi(t)\leqslant 0\}\leqslant\\ \leqslant\operatorname{mes}\{t\in[\tau-\theta+\vartheta,\vartheta]:\,\varphi(t)\leqslant 2\varepsilon\}.\end{aligned}\quad(4.2)$$

Пусть $t\in[\theta,\tau+\vartheta]$, тогда $\varphi(t-\theta)-\varepsilon\leqslant\varphi(t)\leqslant\varphi(t-\theta)+\varepsilon$. Следовательно,

$$\begin{aligned}\operatorname{mes}\{t\in[0,\tau-\theta+\vartheta):\,\varphi(t)\leqslant-\varepsilon\}=\operatorname{mes}\{t\in[\theta,\tau+\vartheta]:\,\varphi(t-\theta)\leqslant-\varepsilon\}\leqslant\\ \leqslant\operatorname{mes}\{t\in[\theta,\tau+\vartheta]:\,\varphi(t)\leqslant 0\}\leqslant\operatorname{mes}\{t\in[\theta,\tau+\vartheta]:\,\varphi(t-\theta)\leqslant\varepsilon\}=\\ =\operatorname{mes}\{t\in[0,\tau-\theta+\vartheta):\,\varphi(t)\leqslant\varepsilon\}.\end{aligned}$$

Из предыдущего неравенства следует, что

$$\begin{aligned}\operatorname{mes}\{t\in[0,\tau-\theta+\vartheta):\,\varphi(t)\leqslant-2\varepsilon\}\leqslant\operatorname{mes}\{t\in[\theta,\tau+\vartheta]:\,\varphi(t)\leqslant 0\}\leqslant\\ \leqslant\operatorname{mes}\{t\in[0,\tau-\theta+\vartheta):\,\varphi(t)\leqslant 2\varepsilon\}.\end{aligned}\quad(4.3)$$

Складывая почленно неравенства (4.2) и (4.3), получаем

$$\frac{\operatorname{mes}\{t\in[0,\vartheta]:\,\varphi(t)\leqslant-2\varepsilon\}}{\vartheta}\leqslant\frac{\operatorname{mes}\{t\in[\tau,\tau+\vartheta]:\,\varphi(t)\leqslant 0\}}{\vartheta}\leqslant\frac{\operatorname{mes}\{t\in[0,\vartheta]:\,\varphi(t)\leqslant 2\varepsilon\}}{\vartheta},$$

то есть неравенство (4.1) доказано.

Последнее неравенство в условии леммы следует из (4.1) и определения характеристики $\operatorname{freq}_\vartheta(\varphi,(-\infty,0])$:

$$\operatorname{freq}_\vartheta(\varphi,(-\infty,0])\doteq\inf_{\tau\geqslant 0}\operatorname{freq}_{[\tau,\tau+\vartheta]}(\varphi,(-\infty,0]).$$

□

Вернемся к рассмотрению задачи Коши (2.1):

$$\dot z=w(t,z),\quad z(0)=z_0.$$

Обозначим через $\widetilde z(t)$ почти периодическое решение уравнения $\dot z=w(t,z)$, если такое решение существует. Напомним, что для любой функции $\widetilde z(t)$, почти периодической в смысле Бора, существует предел

$$\operatorname{freq}(\widetilde z,(-\infty,0])\doteq\lim_{\vartheta\to\infty}\frac{\operatorname{mes}\{t\in[0,\vartheta]:\widetilde z(t)\leqslant 0\}}{\vartheta}$$

(см. [13, с. 150]). Равенство для вычисления данного предела для некоторого класса почти периодических функций приведено в работе [2].

Л е м м а 4.2. *Пусть выполнены следующие условия:*

1) *для каждого* $z \in \mathbb{R}$ *функция* $t \to w(t,z)$ *почти периодическая в смысле Бора, и выполнено равенство*

$$\mathrm{freq}(w,\{0\}) \doteq \lim_{\vartheta\to\infty} \frac{\mathrm{mes}\{t\in[0,\vartheta]:\ w(t,z)=0\}}{\vartheta} = 0;$$

2) *существуют решение* $z(t)=z(t,z_0)$ *задачи Коши* (2.1) *и почти периодическое решение* $\widetilde{z}(t)$ *уравнения* $\dot z = w(t,z)$ *такие, что* $\lim\limits_{t\to\infty}(z(t)-\widetilde{z}(t))=0$.

Тогда имеет место неравенство $\mathrm{freq}_\vartheta(z,(-\infty,0]) \leqslant \mathrm{freq}(\widetilde{z},(-\infty,0])$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В работе [2] показано, что из равенств

$$\mathrm{freq}(w,\{0\})=0 \quad \text{и} \quad \lim_{t\to\infty}(z(t)-\widetilde{z}(t))=0$$

следует равенство пределов

$$\lim_{\vartheta\to\infty}\frac{\mathrm{mes}\,\{t\in[0,\vartheta]:z(t)\leqslant 0\}}{\vartheta} = \lim_{\vartheta\to\infty}\frac{\mathrm{mes}\,\{t\in[0,\vartheta]:\widetilde{z}(t)\leqslant 0\}}{\vartheta},$$

которое означает, что

$$\mathrm{freq}(z,(-\infty,0]) = \mathrm{freq}(\widetilde{z},(-\infty,0]).$$

В силу леммы 1.1 выполнено неравенство $\mathrm{freq}_\vartheta(z,(-\infty,0]) \leqslant \mathrm{freq}(z,(-\infty,0])$, поэтому

$$\mathrm{freq}_\vartheta(z,(-\infty,0]) \leqslant \mathrm{freq}(\widetilde{z},(-\infty,0]).$$

□

Список литературы

1. Родина Л.И., Тонков Е.Л. Статистические характеристики множества достижимости управляемой системы, неблуждаемость и минимальный центр притяжения // Нелинейная динамика. 2009. Т. 5. № 2. С. 265–288.
2. Родина Л.И. Оценка статистических характеристик множества достижимости управляемых систем // Известия высших учебных заведений. Математика. 2013. № 11. С. 20–32.
3. Родина Л.И., Хаммади А.Х. Характеристики множества достижимости, связанные с инвариантностью управляемой системы на конечном промежутке времени // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2013. Вып. 1. С. 35–48.
4. Филиппов А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985. 223 с.
5. Родина Л.И. Инвариантные и статистически слабо инвариантные множества управляемых систем // Известия Института математики и информатики УдГУ. Ижевск. 2012. Вып. 2 (40). С. 3–164.
6. Панасенко Е.А., Тонков Е.Л. Функции Ляпунова и положительно инвариантные множества дифференциальных включений // Дифференциальные уравнения. 2007. Т. 43. № 6. С. 859–860.
7. Кларк Ф. Оптимизация и негладкий анализ. М.: Наука, 1988. 280 с.
8. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970. 720 с.
9. Чаплыгин С.А. Новый метод приближенного интегрирования дифференциальных уравнений. М.–Л.: Гостехиздат, 1950. 102 с.
10. Родина Л.И. Статистические характеристики множества достижимости и периодические процессы управляемых систем // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2012. Вып. 2. С. 34–43.
11. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967. 472 с.
12. Левитан Б.М., Жиков В.В. Почти-периодические функции и дифференциальные уравнения. М.: Издательство Московского университета, 1978. 205 с.
13. Левитан Б.М. Некоторые вопросы теории почти периодических функций. I // Успехи математических наук. 1947. Т. 2. Вып. 5 (21). С. 133–192.

Поступила в редакцию 30.09.2015

Хаммади Алаа Хуссейн, аспирант, кафедра математического анализа, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.
E-mail: alaairaqmath@yahoo.com

A. H. Hammady
On properties of characteristics of attainability set for a control system

Keywords: controllable systems, differential inclusions, attainability set, almost periodic functions.

MSC: 34H05, 34H99, 93C10

We continue to study the characteristics of a control system, which reflect uniform staying the attainability set of the system in a given set $\mathfrak{M} \doteq \{(t,x) \in [0,+\infty) \times \mathbb{R}^n : x \in M(t)\}$ during a finite time interval. In terms of Lyapunov functions and Clarke's derivative, we obtain conditions under which relative frequencies of absorption of attainability set for the control system can be estimated by similar characteristics defined for differential equations. We prove a theorem about evaluating and calculating of the relative frequencies for some multivalued functions. We get estimation for different characteristics of Bohr almost periodic functions. We show examples of calculations and estimations for the relative frequencies of staying graphs of functions in a given set.

REFERENCES

1. Rodina L.I., Tonkov E.L. Statistical characteristics of attainable set of controllable system, non-wandering, and minimal attraction center, *Nelin. Dinam.*, 2009, vol. 5, no. 2, pp. 265–288 (in Russian).
2. Rodina L.I. Estimation of statistical characteristics of attainability sets of controllable systems, *Russian Mathematics*, 2013, vol. 57, issue 11, pp. 17–27.
3. Rodina L.I., Hammady A.H. The characteristics of attainability set connected with invariancy of control systems on the finite time interval, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2013, no. 1, pp. 35–48 (in Russian).
4. Filippov A.F. *Differential equations with discontinuous righthand sides*, Mathematics and its Applications (Soviet Series), vol. 18, Springer, Netherlands, 1988, 304 p. Original Russian text published in Filippov A.F. *Differentsial'nye uravneniya s razryvnoi pravoi chast'yu*, Moscow: Nauka, 1985, 223 p. DOI: 10.1007/978-94-015-7793-9
5. Rodina L.I. Invariant and statistically weakly invariant sets of control systems, *Izv. Inst. Mat. Inform. Udmurt. Gos. Univ.*, 2012, no. 2 (40), pp. 3–164 (in Russian).
6. Panasenko E.A., Tonkov E.L. Lyapunov functions and the positive invariant sets of differential inclusions, *Differentsial'nye uravneniya*, 2007, vol. 43, no. 6, pp. 859–860 (in Russian).
7. Clarke F.H. *Optimization and nonsmooth analysis*, New York: Wiley, 1983, 308 p. Translated under the title *Optimizatsiya i negladkii analiz*, Moscow: Nauka, 1988, 280 p.
8. Hartman Ph. *Ordinary differential equations*, New York–London–Sydney: John Wiley and Sons, 1964. Translated under the title *Obyknovennye differentsial'nye uravneniya*, Moscow: Mir, 1970, 720 p.
9. Chaplygin S.A. *Novyi metod priblizhennogo integrirovaniya differentsial'nykh uravnenii* (A new method of approximate integration of differential equations), Moscow–Leningrad: Gostekhizdat, 1950, 102 p.
10. Rodina L.I. Statistical characteristics of attainable set and periodic processes of control systems, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2012, no. 2, pp. 34–43 (in Russian).
11. Demidovich B.P. *Lektsii po matematicheskoi teorii ustoichivosti* (Lectures on the mathematical theory of stability), Moscow: Nauka, 1967, 472 p.
12. Levitan B.M., Zhikov V.V. *Pochti-periodicheskie funktsii i differentsial'nye uravneniya* (Almost periodic functions and differential equations), Moscow: Moscow State University, 1978, 205 p.
13. Levitan B.M. Some questions of the theory of almost periodic functions. I, *Uspekhi Matematicheskikh Nauk*, 1947, vol. 2, no. 5 (21), pp. 133–192 (in Russian).

Received 30.09.2015

Hammady Alaa Hussein, Post-graduate student, Department of Mathematical Analysis, Udmurt State University, ul. Universitetskaya, 1, Izhevsk, 426034, Russia.
E-mail: alaairaqmath@yahoo.com