



КЛАССИЧЕСКИЕ РАБОТЫ. ОБЗОРЫ

Движение простой модели

О. Боттема

В настоящей работе рассматривается движение плоской механической системы с четырьмя степенями свободы. Система движется в горизонтальной плоскости в отсутствие внешних сил. Она состоит из двух шарнирно связанных твердых тел L_1 и L_2 , на каждое из которых наложены неголономные связи. Кинематическое исследование показывает, что нужно различать два основных случая: траектория средней точки Q «задней оси» имеет или бесконечно много точек возврата и точек перегиба, или одну точку возврата и ни одной точки перегиба. Уравнения движения можно всегда элементарно проинтегрировать так, чтобы получить зависимость углов вращения тел от времени. Для специального случая удалось определить траекторию точки Q , которая является круговой трактрисой.

1. Рассмотрим движение плоской системы, схематично изображенной на рисунке 1. Система состоит из двух твердых тел L_1 и L_2 , которые связаны друг с другом в точке P с помощью шарнира. Прямая PQ служит осью симметрии для тела L_1 ; расстояние PQ равно l . Точка S обозначает центр тяжести тела L_1 , причем $QS = a$. Масса тела L_1 равна m_1 , а момент инерции в точке S равен $m_1\rho_1^2$. Тело L_2 симметрично относительно точки P , его масса равна m_2 , а момент инерции в точке P равен $m_2\rho_2^2$. На систему накладывается условие, состоящее в том, что ни задняя ось Q_1Q_2 , жестко связанная с телом L_1 , ни передняя ось P_1P_2 не могут смещаться вдоль себя самих; кроме того, мы предполагаем, что на систему не действуют никакие внешние силы за исключением неизбежно возникающих сил трения. Таковую систему можно рассматривать как модель автомобиля. При отсутствии тела L_2 мы получим сани Каратеодори [1].

2. Данная система имеет четыре степени свободы. Выберем в качестве координат прямоугольные координаты x и y для точки Q , угол ϑ между лучом QP и осью X , а также угол φ между прямыми QP и PP_1 . Тогда «естественным» положением автомобиля считается его положение при $\varphi = \pi/2$ (или $\varphi = -\pi/2$). Точка P имеет координаты

$$x_p = x + l \cos \vartheta, \quad y_p = y + l \sin \vartheta.$$

Bottema O. Die Bewegung eines einfachen Wagenmodells // Z. Angew. Math. Mech., 1964, vol. 44, no. 12, pp. 585–593.

Перевод с немецкого В. В. Шуликовской, под ред. А. А. Килина



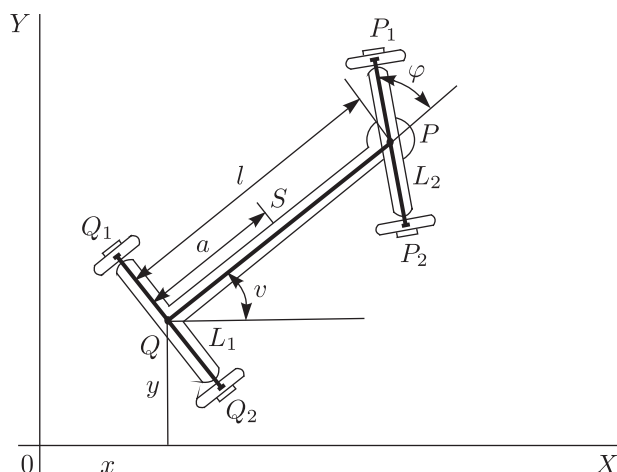


Рис. 1

Приравнявая к нулю скорости точек Q и P вдоль Q_1Q_2 и P_1P_2 соответственно, получаем неголономные кинематические условия

$$\dot{x} \sin \vartheta - \dot{y} \cos \vartheta = 0, \quad (1)$$

$$\dot{x} \cos(\vartheta + \varphi) + \dot{y} \sin(\vartheta + \varphi) + l\dot{\vartheta} \sin \varphi = 0, \quad (2)$$

из которых следует, что \dot{x} , \dot{y} и $\dot{\vartheta}$ связаны соотношением

$$\dot{x} : \dot{y} : l\dot{\vartheta} = \cos \vartheta : \sin \vartheta : (-\operatorname{ctg} \varphi).$$

Если обозначить скорость точки Q через u , то

$$u = \dot{x} \cos \vartheta + \dot{y} \sin \vartheta, \quad \dot{x} = u \cos \vartheta, \quad \dot{y} = u \sin \vartheta, \quad l\dot{\vartheta} = -u \operatorname{ctg} \varphi. \quad (3)$$

3. Поскольку $x_s = x + a \cos \vartheta$, $y_s = y + a \sin \vartheta$, мы можем найти кинетическую энергию T_1 тела L_1 ,

$$T_1 = \frac{1}{2} m_1 \left\{ \dot{x}^2 + \dot{y}^2 - 2a \sin \vartheta \cdot \dot{x} \dot{\vartheta} + 2a \cos \vartheta \cdot \dot{y} \dot{\vartheta} + (\rho_1^2 + a^2) \dot{\vartheta}^2 \right\}, \quad (4)$$

тогда как кинетическая энергия тела L_2 равна

$$T_2 = \frac{1}{2} m_2 \left\{ \dot{x}^2 + \dot{y}^2 - 2l \sin \vartheta \cdot \dot{x} \dot{\vartheta} + 2l \cos \vartheta \cdot \dot{y} \dot{\vartheta} + l^2 \dot{\vartheta}^2 + \rho_2^2 (\dot{\vartheta} + \dot{\varphi})^2 \right\}. \quad (5)$$

Общая кинетическая энергия системы составляет $T = T_1 + T_2$, и, вспоминая о том, что потенциальная энергия равна нулю, мы можем воспользоваться кинематическими условиями (1) и (2), чтобы записать четыре уравнения Лагранжа второго рода. Для x и, соответственно, y находим

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left\{ (m_1 + m_2) \dot{x} - (m_1 a + m_2 l) \sin \vartheta \cdot \dot{\vartheta} \right\} = \lambda_1 \sin \vartheta + \lambda_2 \cos(\vartheta + \varphi), \\ \frac{d}{dt} \left\{ (m_1 + m_2) \dot{y} + (m_1 a + m_2 l) \cos \vartheta \cdot \dot{\vartheta} \right\} = -\lambda_1 \cos \vartheta + \lambda_2 \sin(\vartheta + \varphi) \end{cases} \quad (6)$$

с множителями λ_1 и λ_2 , которые задают силы трения.

Уравнение Лагранжа для переменной φ принимает простой вид

$$\dot{\vartheta} + \dot{\varphi} = c_1, \quad (7)$$

где c_1 — некоторая константа. Впрочем, данное уравнение вытекает из того факта, что силы, действующие на тело L_2 , проходят через центр тяжести P .

Если теперь вместо уравнения Лагранжа на ϑ взять интеграл энергии

$$T_1 + T_2 = \frac{1}{2} h_1^2 \quad (8)$$

(силы трения, очевидно, никакой работы не совершают), то формулы (1), (2), (7) и (8) дадут нам систему уравнений движения, не содержащую λ_1 и λ_2 . Из (5) и (7) получаем

$$T_2 = \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 - 2l \sin \vartheta \cdot \dot{x} \dot{\vartheta} + 2l \cos \vartheta \cdot \dot{y} \dot{\vartheta} + l^2 \dot{\vartheta}^2) + \frac{1}{2} m_2 \rho_2^2 c_1^2. \quad (9)$$

Далее, воспользовавшись соотношениями (3), приходим к формулам

$$T_1 = \frac{1}{2} m_1 u^2 \left\{ 1 + \frac{\rho_1^2 + a^2}{l^2} \operatorname{ctg}^2 \varphi \right\},$$

$$T_2 = \frac{1}{2} m_2 u^2 \{1 + \operatorname{ctg}^2 \varphi\} + \frac{1}{2} m_2 \rho_2^2 c_1^2.$$

Кроме того, введем положительную константу h_2 из равенства

$$h_2^2 = h_1^2 - m_2 \rho_2^2 c_1^2, \quad (10)$$

так что в итоге $h_2^2/2$ обозначает постоянную кинетическую энергию системы за вычетом постоянной энергии вращения тела L_2 . В результате получим

$$u^2 (A + B \operatorname{ctg}^2 \varphi) = h_2^2, \quad (11)$$

причем

$$A = m_1 + m_2, \quad B = m_1 \frac{\rho_1^2 + a^2}{l^2} + m_2 \quad (12)$$

— это положительные величины, характеризующие нашу систему. Теперь введем безразмерную положительную константу k^2 :

$$k^2 = \frac{B}{A}; \quad (13)$$

кроме того, положим $h_2^2 = Al^2 k^2 c_2^2$, получая в итоге

$$\frac{u}{l} = \frac{k c_2 \sin \varphi}{\sqrt{\sin^2 \varphi + k^2 \cos^2 \varphi}}, \quad \dot{\vartheta} = \frac{-k c_2 \cos \varphi}{\sqrt{\sin^2 \varphi + k^2 \cos^2 \varphi}}. \quad (14)$$

Поскольку u и $\dot{\vartheta}$ должны представлять собой непрерывные функции от φ , которые не обращаются в нуль одновременно, знак, стоящий перед квадратным корнем, должен быть одним и тем же в течение всего движения. Вспоминая о том, что у нас еще есть возможность выбрать знак константы c_2 по своему усмотрению, будем считать, что в формулах (14) знаменатель всегда больше нуля. Кроме того, мы можем считать, что и k больше нуля.

Тогда из (7) вытекает следующее дифференциальное уравнение первого порядка для φ :

$$\dot{\varphi} = c_1 + \frac{kc_2 \cos \varphi}{\sqrt{\sin^2 \varphi + k^2 \cos^2 \varphi}}, \quad (15)$$

где c_1 и c_2 представляют собой константы интегрирования, имеющие размерность угловой скорости. Их можно определить из начальных условий. Если при $t = 0$ у нас $\varphi = \varphi_0$, $\dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0$ и $u = u_0$ (причем очевидно, что мы можем взять $x = y = \vartheta = 0$), то получаем

$$c_1 = \dot{\varphi}_0 + \frac{u_0}{l} \operatorname{tg} \varphi_0, \quad c_2 = \frac{u_0}{kl \sin \varphi_0} \sqrt{\sin^2 \varphi_0 + k^2 \cos^2 \varphi_0}. \quad (16)$$

4. Для того чтобы проинтегрировать (15), положим $\operatorname{tg} \varphi = k \operatorname{tg} \psi$. Тогда из (14) находим

$$u = lk c_2 \sin \psi, \quad \dot{\vartheta} = -c_2 \cos \psi, \quad (17)$$

из (15) —

$$k\dot{\psi} = (k^2 \sin^2 \psi + \cos^2 \psi)(c_1 + c_2 \cos \psi), \quad (18)$$

а отсюда при $v = \operatorname{tg}(\psi/2)$ следует

$$2k\dot{v} = \frac{\{v^4 + 2(2k^2 - 1)v^2 + 1\} \{(c_1 - c_2)v^2 + (c_1 + c_2)\}}{(1 + v^2)^2}. \quad (19)$$

В результате мы сможем выразить соотношение, связывающее v и t , а следовательно, φ и t , с помощью простой квадратуры (рационального интеграла). Вид этой квадратуры, кроме всего прочего, будет зависеть еще и от того, положительна или отрицательна разность $(c_1^2 - c_2^2)$. Прежде чем мы перейдем к интегрированию уравнения (18), поясним, в чем состоит механический смысл этих трех разных случаев. Мы будем исходить из простых кинематических соображений.

5. У двух точек твердого тела L_1 направление скорости определено: скорость точки Q направлена вдоль прямой QP , а скорость точки P перпендикулярна прямой P_1P_2 . Отсюда следует, что точка G , в которой прямая P_1P_2 пересекает Q_1Q_2 , служит мгновенным полюсом движения (рис. 2). Полярный луч QG равен $l \operatorname{tg} \varphi$ и, поскольку $\dot{\vartheta}$ представляет собой мгновенную угловую скорость, справедливо уже известное нам равенство $u = -l\dot{\vartheta} \operatorname{tg} \varphi$. Очевидно, что прямая $p = Q_1Q_2$ — это полярная кривая подвижной плоскости, причем она касается неподвижной полярной кривой в точке G ; таким образом, прямая p — это полярная касательная к траектории, и по известному закону кинематики точка G совпадает с центром кривизны траектории $C(Q)$, описываемой точкой Q . Следовательно, радиус кривизны траектории $C(Q)$ равен $l|\operatorname{tg} \varphi|$. При движении точка G перемещается в подвижной плоскости вдоль прямой p с переменной полярной скоростью $\omega = l\dot{\varphi}/\cos^2 \varphi$, если положительное направление прямой p задается лучом Q_1Q_2 . Траектория поворота касается прямой p в точке G ; диаметр окружности поворота $2R = \omega/\dot{\vartheta}$.

При $\varphi = \pm\pi/2$ точка G уходит в бесконечность, а движение представляет собой мгновенное поступательное движение; из (14) следует, что $\dot{\vartheta} = 0$, а скорость поступательного движения равна $u = \pm klc_2$. Траектория $C(Q)$ проходит через точку перегиба.

Еще два особых положения получаем при $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi$; тогда точка G совпадает с Q , скорость u равна нулю, а $\dot{\vartheta} = \mp c_2$. В этом положении траектория $C(Q)$ проходит через точку возврата.



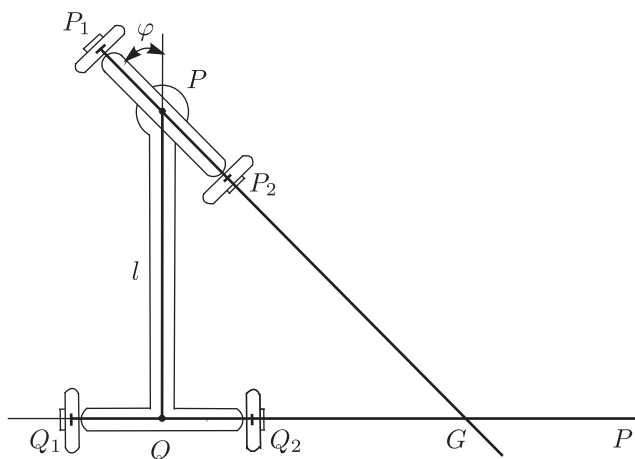


Рис. 2

Из всех этих рассуждений следует, что для движения очень существенно, совершает ли тело L_2 полный оборот вокруг точки P . Полный оборот совершается всегда, когда величина $\dot{\varphi}$ сохраняет один и тот же знак; в таком случае у траектории $C(Q)$ будет бесконечно много точек возврата и бесконечно много точек перегиба, чередующихся друг с другом на кривой.

Однако если бы в каком-то конкретном положении $\dot{\varphi} = 0$, то в нуль обращалась бы и величина $\ddot{\varphi} = (d\dot{\varphi}/d\varphi)\dot{\varphi}$; иначе говоря, φ была бы константой и движение было бы стационарным. Это означает, что мы должны различать два типа движения: либо производная $\dot{\varphi}$ все время сохраняет один и тот же знак, либо φ принимает одно значение, при котором $\dot{\varphi} = 0$.

Как следует из (15), равенство $\dot{\varphi} = 0$ имеет место, когда $k^2(c_1^2 - c_2^2) \cos^2 \varphi + c_1^2 \sin^2 \varphi = 0$, а у этого уравнения решения есть только в случае $c_1^2 - c_2^2 \leq 0$. Если $c_1^2 - c_2^2 > 0$, то при каждом значении φ производная $\dot{\varphi}$ сохраняет один и тот же знак, а именно, знак константы c_1 . Если же $c_1^2 - c_2^2 < 0$ и $c_1 \neq 0$, то существует один угол φ_1 ($0 < \varphi_1 < \pi$), для которого $\text{tg } \varphi_1 = k \text{tg } \psi_1$ и $\cos \psi_1 = -c_1/c_2$, и тогда $\dot{\varphi} = 0$ при $\varphi = \pm\varphi_1$. В этом случае производная $\dot{\varphi}$ тоже всегда сохраняет один и тот же знак, причем он снова совпадает со знаком константы c_1 , но угол φ уже не может принимать любое значение. Он либо всегда принадлежит интервалу $-\varphi_1 < \varphi < \varphi_1$, либо всегда лежит в интервале, его дополняющем ($\varphi_1 < \varphi < 2\pi - \varphi_1$). Впрочем, последний случай можно не рассматривать, так как, поменяв местами точки P_1 и P_2 (либо поменяв знак константы c_1), мы сведем его к предыдущему. Если теперь предположить, что $c_1 > 0$, что, очевидно, не накладывает на задачу никаких существенных ограничений, то мы получим следующее решение: при изменении t от $-\infty$ до $+\infty$ угол φ будет возрастать от $-\varphi_1$ до φ_1 и пройдет через положение $\varphi = 0$. Если при этом $c_2 < 0$, то угол φ_1 будет острым, то есть положения $\varphi = \pm\pi/2$ не достигаются; но при $c_2 > 0$ угол φ проходит оба этих положения; значение $c_2 = 0$ несовместимо с нашим предположением.

В итоге у нас есть следующие основные случаи:

- I: $c_1^2 - c_2^2 > 0$, $c_2 \neq 0$; у траектории $C(Q)$ бесконечно много точек возврата и точек перегиба;
- Па: $c_1^2 - c_2^2 < 0$, $c_1 c_2 > 0$; у траектории $C(Q)$ одна точка возврата и две точки перегиба;
- Пб: $c_1^2 - c_2^2 < 0$, $c_1 c_2 < 0$; у траектории $C(Q)$ одна точка возврата и нет точек перегиба.

6. Теперь обсудим исключенные нами ранее особые случаи. Случай $c_1 = 0$ будет граничным для варианта II. При этом $\varphi_1 = \pi/2$. Если $c_2 \neq 0$, то мы, очевидно, можем считать, что $c_2 > 0$. Тогда угол φ изменяется от $-\pi/2$ до $\pi/2$. У кривой $C(Q)$ есть одна точка возврата, а при $t \rightarrow -\infty$ и $t \rightarrow +\infty$ она асимптотически стремится к точке перегиба.

Если наряду с $c_1 = 0$ еще и $c_2 = 0$, то углы φ и ϑ постоянны, а $u = 0$. Система находится в состоянии покоя. При $c_2 = 0$, $c_1 \neq 0$ тело L_1 покоится, а тело L_2 вращается с постоянной угловой скоростью. Когда $c_1^2 - c_2^2 = 0$, то либо $\varphi_1 = 0$ при $c_2 < 0$, либо $\varphi_1 = \pi$ при $c_2 > 0$; в первом случае угол φ пробегает интервал $0 < \varphi < 2\pi$, когда t изменяется от $-\infty$ до $+\infty$; во втором случае — интервал $-\pi < \varphi < \pi$. Кривая $C(Q)$ имеет две точки перегиба и стремится к точке возврата с обеих сторон.

Заметим, что во всех случаях, где возникает параметр φ_1 , мы можем подобрать начальные условия так, чтобы равенство $\varphi = \varphi_1$ выполнялось для любого значения t . Мы будем называть такое движение стационарным. Поскольку радиус кривизны траектории $C(Q)$ зависит только от угла φ , кривая $C(Q)$ в этом случае представляет собой окружность с радиусом $l|\operatorname{tg} \varphi_1|$ и, поскольку из (17) следует, что $\dot{\vartheta} = -c_2 \cos \psi_1 = c_1$, точка Q равномерно вращается вокруг неподвижной точки G , причем прямая P_1P_2 всегда проходит через точку G (рис. 3). Движение происходит в прямом ($u = kc_2 \sin \psi_1 > 0$) или обратном ($u < 0$) направлении. При $\varphi_1 = \pi/2$ траектория $C(Q)$ — это прямая; при $\varphi_1 = 0$ точка Q неподвижна.

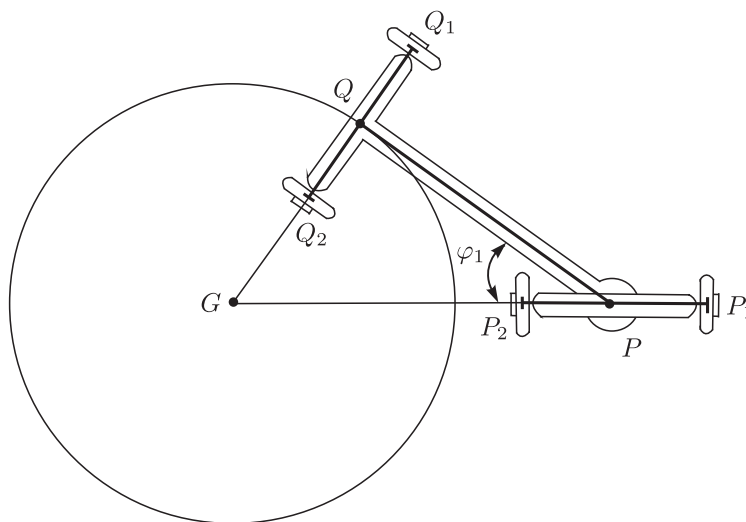


Рис. 3

7. Теперь вернемся к дифференциальному уравнению (19). Первое выражение, стоящее в числителе, положительно определено, так что его можно разложить в произведение двух сомножителей второй степени. При $k^2 \leq 1$, $1 - k^2 = k_1^2$ получаем

$$v^4 + 2(2k^2 - 1)v^2 + 1 = (v^2 - 2k_1v + 1)(v^2 + 2k_1v + 1),$$

а при $k^2 \geq 1$, $k^2 - 1 = k_2^2$ получаем

$$v^4 + 2(2k^2 - 1)v^2 + 1 = \{v^2 + (k - k_2)^2\}\{v^2 + (k + k_2)^2\}.$$

Если $k^2 \leq 1$, то возникает следующее разложение на простейшие дроби:

$$\begin{aligned} \frac{(1+v^2)^2}{\{v^4 + 2(2k^2 - 1)v^2 + 1\}\{(c_1 - c_2)v^2 + (c_1 + c_2)\}} &= \\ &= \frac{A + Bv}{v^2 - 2k_1v + 1} + \frac{A - Bv}{v^2 + 2k_1v + 1} + \frac{C_1}{(c_1 - c_2)v^2 + (c_1 + c_2)}, \end{aligned} \quad (20)$$

где

$$A = \frac{k_1^2(c_1 - c_2)}{2(k_1^2c_1^2 + k^2c_2^2)}, \quad B = \frac{k_1c_2}{2(k_1^2c_1^2 + k^2c_2^2)}, \quad C_1 = \frac{c_2^2}{k_1^2c_1^2 + k^2c_2^2}.$$

При $k^2 \geq 1$ и $k_2^2c_1^2 - k^2c_2^2 \neq 0$ находим

$$\begin{aligned} \frac{(1+v^2)^2}{\{v^4 + 2(2k^2 - 1)v^2 + 1\}\{(c_1 - c_2)v^2 + (c_1 + c_2)\}} &= \\ &= \frac{A_1}{v^2 + (k - k_2)^2} + \frac{A_2}{v^2 + (k + k_2)^2} + \frac{C_2}{(c_1 - c_2)v^2 + (c_1 + c_2)}, \end{aligned} \quad (21)$$

где

$$A_1 = \frac{k_2(k - k_2)}{2k(k_2c_1 + kc_2)}, \quad A_2 = \frac{k_2(k + k_2)}{2k(k_2c_1 - kc_2)}, \quad C_2 = \frac{c_2^2}{k^2c_2^2 - k_2^2c_1^2}.$$

В особом случае $k^2 \geq 1$, $k_2c_1 + kc_2 = 0$ разложение имеет вид

$$\frac{A_1^1}{\{v^2 + (k - k_2)^2\}^2} + \frac{A_2^1}{v^2 + (k + k_2)^2} + \frac{C_2^1}{(c_1 - c_2)v^2 + (c_1 + c_2)}, \quad (22)$$

где

$$A_1^1 = \frac{k_2(k - k_2)^2}{k(c_1 - c_2)}, \quad A_2^1 = \frac{(k + k_2)^2}{4k^2(c_1 - c_2)}, \quad C_2^1 = \frac{(k - k_2)(3k + k_2)}{4k^2},$$

и аналогичные формулы возникают в случае $k^2 > 1$, $k_2c_1 - kc_2 = 0$.

8. Теперь, проинтегрировав (19) с помощью разложений (20), (21) и (22), мы получим следующий результат:

$$t = F(\varphi) + G(\varphi), \quad (23)$$

где

$$F(\varphi) = kk_1(k_1^2c_1^2 + k^2c_2^2)^{-1} \left\{ k_1c_1\varphi + \frac{1}{2}c_2 \ln \frac{1 - k_1 \sin \psi}{1 + k_1 \sin \psi} \right\}, \quad k^2 \leq 1, \quad (24)$$

$$F(\varphi) = kk_2(k_2^2c_1^2 - k^2c_2^2)^{-1} \{ k_2c_1\varphi - c_2 \arctg(k_2 \sin \psi) \}, \quad k^2 \geq 1, \quad k_2^2c_1^2 - k^2c_2^2 \neq 0, \quad (25)$$

$$\begin{aligned} F(\varphi) &= \{4k(k - k_2)(c_1 - c_2)\}^{-1} \times \\ &\times \left\{ (2kk_2 + 1)\varphi + (2kk_2 - 1) \arctg(k_2 \sin \psi) + 2kk_2 \frac{\sin \psi}{k - k_2 \cos \psi} \right\}, \\ &k^2 > 1, \quad k_2c_1 + kc_2 = 0, \end{aligned} \quad (26)$$

и аналогичная формула при $k^2 > 1$, $k_2c_1 - kc_2 = 0$.

Кроме того, у нас

$$G(\varphi) = \frac{2k}{c} C \operatorname{arctg} \left(\frac{c}{c_1 + c_2} \operatorname{tg} \frac{1}{2} \psi \right), \quad 0 < c_1^2 - c_2^2 = c^2, \quad (27)$$

$$G(\varphi) = \frac{k}{c_1} C \operatorname{tg} \frac{1}{2} \psi, \quad c_1 = c_2, \quad (28)$$

$$G(\varphi) = \frac{-k}{c_1} C \operatorname{ctg} \frac{1}{2} \psi, \quad c_1 = -c_2, \quad (29)$$

$$G(\varphi) = \frac{k}{c_1 + c_2} C \ln \frac{\sin \frac{1}{2}(\psi_1 + \psi)}{\sin \frac{1}{2}(\psi_1 - \psi)}, \quad c_1^2 - c_2^2 < 0, \quad \cos \psi_1 = \frac{-c_1}{c_2}. \quad (30)$$

В формулах (27)–(30) необходимо заменять C на C_1 , C_2 или C'_2 в зависимости от того, $k^2 \leq 1$, $k^2 \geq 1$ и т. д.

Кроме того, мы предполагали, что $\varphi = 0$ при $t = 0$, за исключением случая (29), когда равенство $\varphi = 0$ не выполняется ни для одного конечного значения t , и мы будем предполагать, что $\varphi = \pi$ при $t = 0$.

Формулы (23)–(30) позволяют определить взаимосвязь между φ и t во всех случаях.

Функция $F(\varphi)$ конечна при любом значении φ , а из (27) следует, что то же самое верно и для $G(\varphi)$. В (28) при $t \rightarrow \infty$ выполняется $\varphi \rightarrow \pi$; в (29) $\varphi \rightarrow 0$, а в (30) $\varphi \rightarrow \varphi_1$.

Когда $0 < c_1^2 - c_2^2$, тело L_2 совершает полные обороты. Время, необходимое для поворота от $\varphi = 0$ до $\varphi = \pi/2$, составляет $t_1 = F(\pi/2) + G(\pi/2)$, а время поворота от $\varphi = 0$ до $\varphi = \pi$ равно $t_2 = F(\pi) + G(\pi)$; здесь t_2 — это время движения по кривой $C(Q)$ от одной точки возврата до другой, а t_1 либо, соответственно, $(t_2 - t_1)$ — время движения между точкой возврата и точкой перегиба.

9. Поскольку $\vartheta + \varphi = c_1 t$, формула (23) также позволяет нам установить соотношение между ϑ и φ . Очевидно, что разность $(c_1 t_1 - \pi/2)$ задает угол между касательными, проходящими через точку возврата и точку перегиба, а $(c_1 t_2 - \pi)$ — угол между касательными, проходящими через две соседние точки возврата.

У нас $\dot{x} = u \cos \vartheta$, откуда

$$\frac{dx}{d\varphi} = \frac{lkc_2 \sin \varphi \cos \vartheta}{c_1 \sqrt{\sin^2 \varphi + k^2 \cos^2 \varphi} + kc_2 \cos \varphi}, \quad (31)$$

что позволяет выразить $dx/d\varphi$ через φ . Таким образом, мы сможем определить x и y через φ с помощью квадратур и найти тем самым траекторию $C(Q)$. Впрочем, данные квадратуры, судя по всему, не допускают запись в явной форме.

10. Координаты полюса x_G и y_G имеют вид

$$x_G = x + l \operatorname{tg} \varphi \sin \vartheta, \quad y_G = y - l \operatorname{tg} \varphi \cos \vartheta,$$

откуда следует

$$\dot{x}_G = l \frac{\dot{\varphi} \sin \vartheta}{\cos^2 \varphi}, \quad \dot{y}_G = -l \frac{\dot{\varphi} \cos \vartheta}{\cos^2 \varphi},$$

так что

$$\frac{dx_G}{d\varphi} = l \frac{\sin \vartheta}{\cos^2 \varphi}, \quad \frac{dy_G}{d\varphi} = -l \frac{\cos \vartheta}{\cos^2 \varphi},$$



и положение точки G , а значит, и неподвижная полярная кривая, описывающая движение тела L_1 , допускают определение в квадратурах; впрочем, и эти квадратуры в общем случае не так-то просто исследовать.

11. Рассмотрим на отрезке QP точку A , для которой $QA = kl$. Координаты точки A имеют вид

$$x_A = x + kl \cos \vartheta, \quad y_A = y + kl \sin \vartheta,$$

тогда

$$\begin{cases} \dot{x}_A = \dot{x} - kl \sin \vartheta \cdot \dot{\vartheta} = u \cos \vartheta + klc_2 \sin \vartheta \cos \psi = lkc_2 \sin(\vartheta + \psi), \\ \dot{y}_A = -lkc_2 \cos(\vartheta + \psi). \end{cases} \quad (32)$$

Иначе говоря, скорость точки A во время движения постоянна по величине и равна lkc_2 . Радиус кривизны траектории точки A принимает переменное значение $lkc_2/(\dot{\vartheta} + \dot{\psi})$.

12. В завершение укажем, что при $k = 1$ движение будет очень простым; тогда $l^2 = \rho_1^2 + a^2$, что, очевидно, вполне возможно. В этом случае траекторию можно полностью определить в элементарных функциях.

Дифференциальное уравнение для φ выглядит так:

$$\dot{\varphi} = c_1 + c_2 \cos \varphi. \quad (33)$$

Вспомогательный угол ψ совпадает с φ , функция $F(\varphi)$ тождественно равна нулю и $C = 1$.

При

$$u = lc_2 \sin \varphi, \quad \dot{\vartheta} = -c_2 \cos \varphi, \quad \vartheta + \varphi = c_1 t$$

получим

$$\dot{x} = u \cos \vartheta = lc_2 \sin \varphi \cos \vartheta = lc_2 (\sin c_1 t - \sin \vartheta \cos \varphi) = lc_2 \sin c_1 t + l \sin \vartheta \cdot \dot{\vartheta},$$

поэтому

$$x = -l \frac{c_2}{c_1} \cos c_1 t - l \cos \vartheta + b, \quad b = l \frac{c_1 + c_2}{c_1} \quad (34)$$

и

$$y = -l \frac{c_2}{c_1} \sin c_1 t - l \sin \vartheta.$$

Откуда следует

$$(x - b)^2 + y^2 = \frac{l^2}{c_1^2} (c_1^2 + c_2^2 + 2c_1 c_2 \cos \varphi), \quad (35)$$

что позволяет нам сделать следующий вывод: точка Q при движении остается внутри кольца, ограниченного концентрическими окружностями K_1 и K_2 с центром $M(b, 0)$ и радиусами

$$R_1 = l \left| \frac{c_1 + c_2}{c_1} \right| \quad \text{и} \quad R_2 = l \left| \frac{c_1 - c_2}{c_1} \right|,$$

причем одна из окружностей проходит через начало координат O . Справедливо равенство $R_1 + R_2 = 2l$. Возможные точки возврата кривой $C(Q)$ лежат на окружностях K_1 и K_2 поочередно. Точки перегиба ($\cos \varphi = 0$) лежат на третьей концентрической окружности K_3 , радиус которой равен

$$R_3 = l \left(\frac{c_1^2 + c_2^2}{c_1^2} \right)^{1/2}.$$

В этом случае точка A совпадает с точкой P ; учитывая, что $\vartheta + \psi = \vartheta + \varphi = c_1 t$, находим для этой точки

$$\dot{x}_p = l c_2 \sin c_1 t, \quad \dot{y}_p = -l c_2 \cos c_1 t$$

и, следовательно,

$$x_p = -l \frac{c_2}{c_1} \cos c_1 t + b, \quad y_p = -l \frac{c_2}{c_1} \sin c_1 t. \quad (38)$$

Таким образом, траектория точки P — это концентрическая окружность K_4 с радиусом $R_4 = l|c_2/c_1|$, причем точка P пробегает ее с постоянной угловой скоростью c_1 .

Поэтому движение отрезка PQ происходит так (рис. 4), что точка P описывает окружность, тогда как скорость точки Q направлена вдоль прямой PQ . Это означает, что точка Q пробегает кривую, известную как круговая трактриса [2]. Главная окружность K_0 данной кривой имеет общий центр с окружностью K_4 и радиус R_0 , где $R_0^2 = R_4^2 - l^2$. Возникают два основных случая. Когда $R_0^2 < 0$, окружность K_0 — мнимая; кривая $C(Q)$ состоит из конгруэнтных дуг, содержащих по одной точке перегиба и пересекающихся друг друга в точках возврата, которые располагаются поочередно на окружностях K_1 и K_2 (рис. 5). В общем случае эта кривая трансцендентна, но может оказаться и алгебраической (рис. 6). Если же $R_0^2 > 0$, то окружность K_0 действительна; у кривой есть одна точка возврата; кривая асимптотически стремится к K_0 , совершая бесконечное число оборотов; при этом траектория $C(Q)$ может располагаться как внутри (рис. 7), так и снаружи (рис. 8) главной окружности. Переходный случай возникает при $R_0^2 = 0$. Тогда окружность K_0 — нулевая, а точка M — асимптотическая точка исследуемой кривой. Для нашего движения $R_4^2 = l^2 c_2^2 / c_1^2$, так что $R_0^2 = l^2 (c_2^2 - c_1^2) / c_1^2$. Если $c_1^2 - c_2^2 = c^2 > 0$, то главная окружность будет мнимой. Теперь из (23) следует, что

$$t = \frac{2}{c} \operatorname{arctg} \left(\frac{c}{c_1 + c_2} \operatorname{tg} \frac{1}{2} \varphi \right) \quad (39)$$

или

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} \varphi = \frac{c_1 + c_2}{c} \operatorname{tg} \frac{1}{2} ct. \quad (40)$$

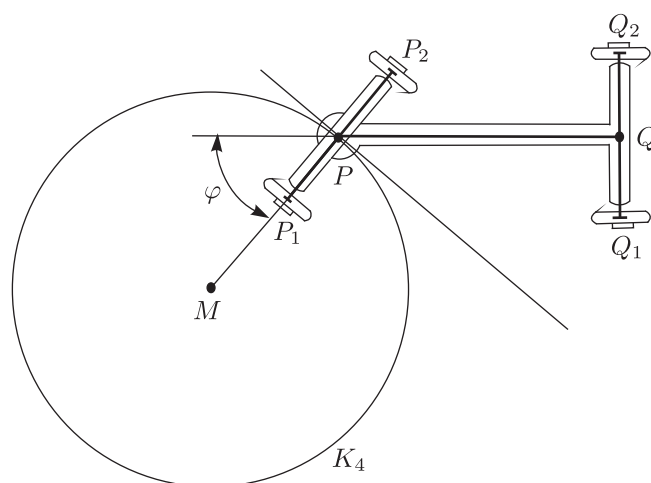


Рис. 4

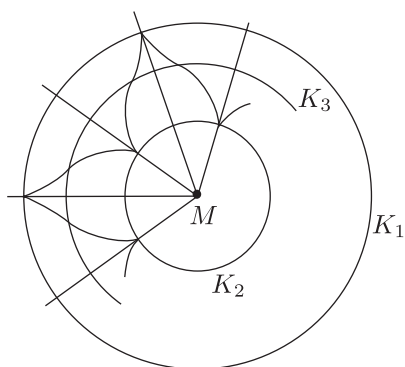


Рис. 5

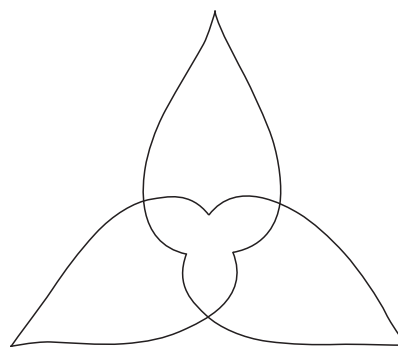


Рис. 6

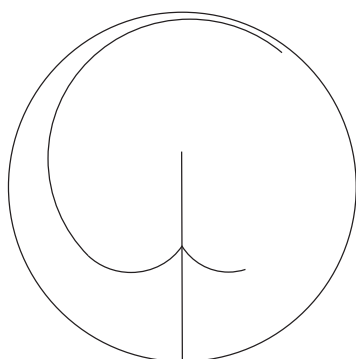


Рис. 7

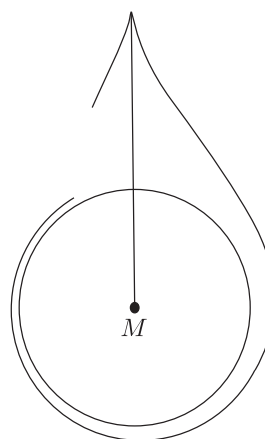


Рис. 8

Точки возврата кривой $C(Q)$ лежат на окружности K_1 при $ct = 0, 2\pi, 4\pi, \dots$ и на окружности K_2 при $ct = \pi, 3\pi, \dots$, а точки перегиба лежат на окружности K_3 при $ct = \pi/2, 3\pi/2, \dots$. Время движения от K_1 до K_3 составляет $t_1 = (2/c) \operatorname{arctg}\{c/(c_1 + c_2)\}$, при этом угол ϑ возрастает на $\pi/c - c_1 t_1$; движение от K_1 до K_2 занимает время $t_2 = \pi/c$, а угол ϑ становится больше на $\pi(c - c_1)/c$.

В случае $c_1^2 - c_2^2 < 0$ главная окружность действительна; при $t \rightarrow \infty$ модель стремится к стационарному движению вперед, при $t \rightarrow -\infty$ — к стационарному движению назад, которое выглядит неустойчивым. Из (23) следует, что

$$t = \frac{1}{c_1 + c_2} \ln \frac{\sin \frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi)}{\sin \frac{1}{2}(\varphi_1 - \varphi)}, \quad \cos \varphi_1 = \frac{-c_1}{c_2}, \quad (41)$$

то есть

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} \varphi = \operatorname{tg} \frac{1}{2} \varphi_1 \cdot \operatorname{th} \frac{c_1 + c_2}{2} t. \quad (42)$$

Имеем

$$R_1^2 = \frac{l^2}{c_1^2} (c_1 + c_2)^2, \quad R_2^2 = \frac{l^2}{c_1^2} (c_1 - c_2)^2, \quad R_3^2 = \frac{l^2}{c_1^2} (c_1^2 + c_2^2),$$

$$R_0^2 = \frac{l^2}{c_1^2} (c_2^2 - c_1^2) = l^2 \operatorname{tg}^2 \varphi_1,$$

при этом из (35) следует

$$MQ^2 = \frac{l^2}{c_1^2} (c_1^2 + c_2^2 + 2c_1c_2 \cos \varphi).$$

Если предположить, что $c_1 + c_2 > 0$, то φ пробегает интервал $-\varphi_1 < \varphi < \varphi_1$. При $c_1c_2 > 0$ угол φ_1 — тупой, и у нас $R_1^2 > R_3^2 > R_0^2 > R_2^2$, причем $R_0^2 < MQ^2 \leq R_1^2$. Таким образом, кривая $C(Q)$ лежит снаружи главной окружности K_0 , у нее есть одна точка возврата на окружности K_1 и две точки перегиба на окружности K_3 . Если, наоборот, $c_1c_2 < 0$, то $R_2^2 > R_3^2 > R_0^2 > R_1^2$ и $R_1^2 \leq MQ^2 < R_0^2$, то есть трактриса лежит внутри окружности K_0 , у нее есть одна точка возврата на окружности K_1 и нет точек перегиба. Аналогичный результат получаем при $c_1 + c_2 < 0$.

В особом случае $c_1 = c_2 \neq 0$ имеем $\operatorname{tg}(\varphi/2) = c_1t$, $R_0 = R_2 = 0$. У кривой есть одна точка возврата на окружности K_1 , две точки перегиба на окружности K_3 ; кривая асимптотически стремится к центру M .

При $c_1 = 0$, $c_2 \neq 0$ радиусы окружностей K_i будут бесконечны; тогда у нас $\operatorname{tg}(\varphi/2) = \operatorname{th}(c_2t/2)$, $\sin \varphi = \operatorname{th} c_2t$, $\vartheta = -\varphi$, $u = lc_2 \sin \varphi$ и в силу

$$\dot{x} = \frac{lc_2 \operatorname{sh} c_2t}{\operatorname{ch}^2 c_2t}, \quad \dot{y} = -lc_2 \operatorname{th}^2 c_2t \quad (43)$$

получаем

$$x = -\frac{l}{\operatorname{ch} c_2t} + l, \quad y = l(\operatorname{th} c_2t - c_2t), \quad (44)$$

так что кривая $C(Q)$ оказывается обыкновенной трактрисой.

Список литературы

- [1] Carathéodory C. Der Schlitten // Z. Angew. Math. Mech., 1933, vol. 13, no. 2, pp. 71–76.
 [2] Loria G. Spezielle algebraische und transzendente ebene Kurven: Theorie und Geschichte: Vol. 2. Die transzendenten und die abgeleiteten Kurven. Leipzig: Teubner, 1911, pp. 195–200. Как указывал Вундерлих, круговые трактрисы можно также получить как стереографические проекции линий откоса на поверхности вращения второго порядка (см. Wunderlich W. Über die Schleppekurven des Kreises // Akad. Wiss. Wien IIa, 1948, vol. 156, pp. 155–173).

Die Bewegung eines einfachen Wagenmodells

O. Bottema

Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2015, vol. 11, no. 3, pp. 621–632 (Russian)

